

oriented, search, variable, activity-observation, heuristic, research, project, graphic, practical and modelling activities are considered in the article.

It was found out that polyactive basis is coordinated with polymode basis of organization of students' educational and cognitive activities at the lessons of mathematics in secondary schools by the way of isolation of means base (task, assignment and communication), which serve alignment interaction in educational and cognitive activities.

Classification of-means basis is clone with taking into account the modes' possibilities to ensure the process of different kinds of activities' run, namely to agree with polyactive basis of organization of students' educational and cognitive activities at the lessons of mathematics in secondary school.

Communication is defined as the key means base, but tasks and assignments are defined as subsidiary means base.

Key words: educational and cognitive activities, polyactive basis, polymode basis, means base, perceptive activities, search activities, heuristic activities, graphic activities; practical activities, modelling activities.

УДК 37.016:519.61/.64

М. Дејић

Учитељски факултет Универзитет у Београду

МЕСТО И УЛОГА НУМЕРИЧКЕ МАТЕМАТИКЕ У НАСТАВИ

Једна веома важна, али мало у наставним програмима заступљена област математике, која повезује математику са свакодневним практичним проблемима и изналази приближна решења апстрактних математичких задатака, јесте нумеричка математика. Да би деца правилно схватила квантитативну страну реалног света, неопходно је да изучавају садржаје нумеричке математике. У раду ће се размотрити место нумеричке математике у настави, одредити њен значај и наставни циљеви и дати предлог за инкорпорирање ових садржаја у наставне програме математике. На неколико конкретних примера показаће се неопходност изучавања садржаја нумеричке математике.

Кључне речи: нумеричка математика, настава математике, значај нумеричке математике, приближан број, нумерички аспекти.

Постављање проблема. Увод. Историја математике потврђује да су њени корени у практичним потребама, да је она била нумеричка и да она заправо никада није ни прекидала свој однос са праксом, без обзира што је израсла у дедуктивну грађевину високо апстрактне науке. Област математике чији је задатак да проналази опште методе рачунања и алгоритама који ће уз помоћ савремених средстава за рачунање да доведу до нумеричких резултата решења основних задатака математичке анализе, алгебре и геометрије назива се нумеричка математика или нумеричка анализа. Током векова нумеричка математика је била неопходан апарат свим математичким областима где тачне методе нису показивале резултате. Крајем XIX века нумеричка анализа се издваја у посебну целину са својим предметом истраживања и својим методама. Данашњи ток њеног развоја у многоструком одређују савремени електронски рачунари.

Нажалост, ова веома важна област математике није нашла адекватно место у актуелним плановима и програмима основне и средње школе (<http://www.zuov.gov.rs/poslovi/nastavni-planovi/nastavni-planovi-os-i-ss/?lng=lat>).

Експлицитно, у V разреду основне школе, у теми РАЗЛОМЦИ стоји: *Заокружљивање бројева*. У VII разреду експлицитно, у теми РЕАЛНИ БРОЈЕВИ налазе се садржаји: *Квадратни корен, Децимални запис реалног броја; приближна вредност реалног*

броја. У гимназијама (сви модели), у 1. разреду, у теми РЕАЛНИ БРОЈЕВИ изучавају се садржаји: *Приближне вредности реалних бројева (грешке, граница грешке, заокруживање бројева; основне операције са приближним вредностима)*. Најдеталније, садржаји нумеричке математике изучавају се у Математичкој гимназији. Ту се у четвртом разреду изучава предмет *нумеричка математика*, са 2 часа недељно.

Без обзира на малу заступљеност садржаја нумеричке математике у наставним плановима и програмима математике, нумеричка математика може и мора да се примењује у свим областима математике током читавог школовања ученика.

Циљ нашег рада био је да садржајима нумеричке математике одредимо место и улогу у настави математике и самим тим укажемо на велики значај обраде тих садржаја.

Резиме основног материјала. Место нумеричке математике у систему других наука. Математичке методе су се одувек примењивале у науци, техници и друштвеним наукама. Та *математизација* је, са своје стране, захтевајући све савременије математичке методе за решавање својих проблема, утицала да се математика мења и развија. Историјски гледано математизација науке зависила је од два фактора: нивоа развитка математичког апарата и могућности конструкције *математичког модела* испитиваног објекта.

Када се апстракцијом идеализује реална практична ситуација и трансформише у теоријску ситуацију, добија се њен математички модел који постављен задатак изучавања реалне практичне ситуације своди на математички задатак. За решавање овог задатка употребљавају се математичке методе које више ни у ком случају не зависе од конкретне природе изучаваног објекта.

Све до појаве брзих електронских рачунара сложени математички модели за које није било могуће добити одговор у виду формуле најчешће нису разматрани, или су упрошћавани помоћу допунских претпоставки. Слично је било и са проблемима у којима фигурише мноштво фактора и чија је нумеричка обрада захтевала много времена. Појава електронских рачунара доноси квалитативне новине у изучавању модела. Рачунари постају снажно средство математизације свих видова људске делатности. Логичке могућности и огромна брзина рада рачунара омогућавају спровођење свестране анализе и код најсложенијих математичких модела. Та анализа се спроводи применом *метода нумеричке математике*. На овај начин нумеричка математика се, применом рачунара као средства рачунања, укључује у решавање проблема науке, технике, привреде и праксе уопште.

Данас се конструишу најразличитији математички модели у областима хемије, биологије, географије, медицине, лингвистике, социологије, психологије итд. Сви они изискују стварање читавог низа нових нумеричких метода које се примењују у њиховом изучавању. На тај начин говори се о појави новог метода за испитивање сложених процеса који допуштају конструкцију одговарајућих математичких модела – *нумеричком експерименту* (в. А.А. Самарскиј (1982), А.Н. Тихонов, Д.П. Коштомаров (1984), К.А. Рубников (1989), Н.С. Бакхвалов (1977)).

Анализа актуелних истраживања Предмет и методе нумеричке математике. Наведимо најпре неколико дефиниција: „Нумеричка математика у ширем смислу представља део математике који се бави кругом питања везаних за коришћење рачунара, а у ужем смислу представља теорију нумеричких метода и алгоритама за решавање постављеног математичког задатка“ (А.А. Самарскиј, 1982: 10).

„Под нумеричком анализом подразумевамо област математике, чији је задатак да разрађује нумеричке методе које ће довести до бројчаног решења разних задатака формулисаних математички и који ће показати и начин коришћења савремених средстава за рачунање“ (П. Пејовић, Н. Ђурановић-Миличић, 1977: 8).

„Нумеричка математика бави се решавањем и поступцима за решавање нумеричких проблема. При томе се математички проблем сматра нумеричким ако се одређивање његовог решења састоји из обраде бројчаних података” (Д. Херцег, 1987: 5).

„Разрадом и реализацијом алгоритама и анализом грешке у излазној информацији бави се посебна област математике тзв. нумеричка математика“ (Г. Милановић, 1985: 3).

„Нумеричка анализа је наука која се служи у својој основи алгебром и теоријском анализом... Главна карактеристика нумеричке анализе је да је сваки крајњи резултат број, па ипак она није само обично рачунање. Њен циљ је да укаже на процес рачунања. Према томе главни њен циљ је да проналази опште методе рачунања“ (К. Орлов, 1970: 1).

„Област математике чији је задатак да разрађује методе које ће довести до бројчаног резултата решења основних задатака математичке анализе, алгебре и геометрије и које ће показати путеве коришћења у ту сврху савремених средстава за рачунање назива се нумеричком математиком” (И.С. Березин, Н.П. Житков, 1963: 6).

Оно што карактерише нумеричку математику, а што наглашавају наведене дефиниције, то је проналажење општих метода рачунања и алгоритама који уз помоћ савремених средстава за рачунање доводе до нумеричких резултата.

Видимо да се у неким дефиницијама употребљава термин нумеричка математика, а у неким нумеричка анализа. Ови термини се углавном узимају као синоними, што истиче и Д. Херцег (Херцег, 1987: 5).

Будући да се нумеричка анализа ослања на резултате математичке анализе и да постоји јака повезаност међу њима, термин *анализа* може се оправдати и са овог становишта.

Нумеричка математика и настава. У овом делу покушаћемо да дамо одредницу термина *нумеричка математика у настави*, а такође да одредимо њено место у наставном предмету који се зове Математика.

Појам *нумеричка математика* у школској пракси најјасније је одређен тамо где се садржаји нумеричке математике предају у оквиру посебног предмета. У нашим средњим школама данас се нумеричка математика као посебан предмет предаје једино у Математичкој гимназији, и то као ужестручан предмет. Њени садржаји су одређени одговарајућим наставним плановима и програмима. Шире проучавање нумеричке математике врши се на катедрама за нумеричку математику, најчешће при математичким факултетима широм света.

Будући да се данас у нашим школама (изузев Математичке гимназије) не предаје нумеричка математика као посебан предмет, покушаћемо да одредимо шта под термином *нумеричка математика* подразумевамо када се ради о предмету Математика.

Математика као наставни предмет у себе укључује садржаје низа математичких дисциплина као што су: алгебра, геометрија, тригонометрија, аналитичка геометрија итд. Скромно место међу њима заузимају и садржаји нумеричке математике. Пре свих увршћени су приближни бројеви и операције са њима, нумеричке таблице и машине за рачунање. Без обзира на „скромно” учешће приближних бројева, када је реч о њима самима, њихова примена је уткана у све поре средњошколске математике, нарочито тамо где се траже нумерички резултати. Мишљења смо да слободно може да се говори о нумеричкој математици у настави математике и са аспекта садржаја и са дидактичког аспекта. Дефиниција предмета нумеричке математике Д. Херцега: „нумеричка математика бави се решавањем и поступцима за решавање нумеричких проблема. При томе се математички проблем сматра нумеричким ако се одређивање његовог решења састоји из обраде бројчаних података“ (Херцег, 1987: 5), даје нам слободу за употребу термина *нумеричка математика* у оквирима школске математике. Решавање многих проблема алгебре, анализе и геометрије у настави математике састоји се у обради „бројчаних података”.

Разумевање места нумеричке математике у школској математици неодвојиво је од њеног односа према целокупној математици. Још почетком овог века Ф. Клајн (1849-

1925) се залаже за јединство „чисте” и „примењене” математике. Израз тог јединства за њега представља усклађен однос између рачуна са тачним и рачуна са приближним вредностима. У свесци III његове елементарне математике у вези са тим питањем наводи се: „Разликујемо

1) Прецизну математику (рачунање са тачним бројевима).

2) Апроксимативну математику (рачунање са приближним бројевима). У речима 'апроксимативна математика' не треба да лежи деградација ове гране математике. Она је прецизна математика апроксимативних односа”. Целу науку имамо тек када обухватимо оба дела” (према J. Blankenagel, 1985: 23).

Д. Херцег истиче да је математика као целина једна дисциплина и „да се чиста и примењена математика разликују само по поводу за решавање одређених проблема” (Херцег, 1987: 5).

Историјски гледано повезаност 'чисте' и 'примењене' математике произилази из развитка математике у целини. Сваки напредак у развоју 'теоријске' математике утицао је на развој 'примењене' математике и обрнуто. Е. Стипанић, М. Стојановић наглашавају да је повезаност између 'теоријске' и 'примењене' математике, произашла из развитка математике у целини, толика да је данас илузорно раздвајати 'теоријску' од 'примењене' математике и да је такво раздвајање превазиђено и само традицијом задржано; условно се могу употребљавати термини 'теоријска математика' и 'примењена математика' као нека врста техничких термина за ближу одредбу математичке садржине на коју се у одговарајућем тренутку мисли (Стипанић, Стојановић, 1983).

Albrecht, J., Collatz, L. наглашавају да се целокупна математика показује као велико јединство 'чисте' и 'примењене' математике међусобно допуњавајуће и међусобно измешане области без видљиве области раздвајања (Albrecht, Collatz, 1959).

У чистој математици математичке структуре се изучавају саме по себи, без повезаности са праксом. Не испитују се конкретни објекти, користе се заједничке методе и алгоритми за решавање широког круга задатака. У примењеној математици изучавају се математички модели везани за праксу.

Испитивање конкретних математичких модела базира се на нумеричким карактеристикама. Из тих разлога од великог значаја за примену математике су нумеричке методе. Важно је да се нумеричке методе не употребљавају само за конкретне задатке, већ и за веома широк круг задатака. Такво је, на пример, нумеричко решавање једначина Лапласа, где се не разматрају конкретни објекти чији су модели представљени тим једначинама.

Веза између примењене и чисте математике може да се успостави и у коришћењу савремених машина за рачунање. Коришћење калкулатора у математичкој анализи може да помогне у наслућивању резултата који касније могу да се докажу аналитичким путем. Такав је, на пример, случај са нивовима. Лако се уз коришћење калкулатора наслућује њихова гранична вредност која се касније теоријским путем доказује. Моћни рачунари у великој мери помажу у изучавању многих теоријских проблема.

Из наведеног јединства чисте и примењене математике у целини следи и њихово јединство у школској математици. Њихов складан однос све више се огледа у методичким захтевима да ученици математику не схвате искључиво као 'чисту' изоловану од било какве примене, саму за себе, већ да је схвате са аспеката њене примене. У том смеру наводимо и подсетник за наставу математике у гимназијама из 1976. године: „Оперативна способност математичких метода мора да се покаже и ван математичких проблема. Погрешан је резон када се у школи математика редукује на формалне закључке и егзактне доказе и када се мисли да у поступку нумеричког рада и алгоритама морају да се створе нове области попут 'примењене математике' и 'информатике'. Такви поступци морају да се приближе саморазумевању решавања конкретних математичких ситуација“ (J. Blankenagel, 1985).

Єдинственост математике у настави ће се огледати на сваком кораку ако се паралелно са теоријским изучавањима појединих тема (функција, интеграл, систем једначина итд.), изучавају и нумеричке методе за приближно израчунавање функција, интеграла, система једначина итд.

Наставни предмети у стручним школама, а такође физика и хемија, захтевају све компликованија израчунавања. Од ученика се тражи да та израчунавања спроведу приближно и добију резултате са што већом тачношћу. Са таквим проблемима ученици се сусрећу током читавог школовања. У наставним садржајима природних наука предвиђени су и разни експерименти. Добијени нумерички резултати су приближни због приближности мерних инструмената. Веома је значајно да ученици буду оспособљени да оцене тачност добијених података. Могућност оцене тачности добијених резултата има поред практичног и своје методолошко значење. Ученици бирају оне методе експерименталног рада које доносе резултате којима може да се оцени тачност. Све ово указује на несумњив значај нумеричке математике у природним наукама.

У настави математике није довољно да се ученицима задају само проблеми општег карактера и да се од њих тражи да дођу до неке формуле. Тачно је да ће у таквим задацима ученици остваривати један од важних циљева наставе – неговање способности схватања структуре и развијање вештине стварања плана за решавање проблема. У овој фази долажења до формуле, рачунање је од другоразредног значаја. Али, ако се у добијеној формули улазни подаци замене правим, најчешће приближним, рачунање више није споредно, већ постаје битан фактор долажења до резултата који сада могу да се примене у конкретним практичним ситуацијама. Јапански нумеричар В. Сибагаки истиче да „није ништа мање важно размишљати о односу математике према стварном животу и неговати став смишљене примене математике ... чак и ако се у неком математичком приручнику излажу само главни математички ставови о којима је реч, сваки од њих ваља да буде пропраћен својим применама, и то, бар у завршном степену, с бројним подацима“ (Сибагаки, 1961: 112).

Нумеричка математика у настави математике приближава математику практичним потребама. Употреба различитих области математике, пре свега алгебре, геометрије, тригонометрије и аритметике била би немогућа у пракси без коришћења приближних бројева, нумеричких таблица, разних машина за рачунање, рачунара. Све је ово у функцији нумеричког резултата којим се пракса најчешће задовољава. Методе којима се остварују нумерички садржаји у школама ближе су методама које се примењују у свакодневној пракси. Све ово доприноси и значајном политехничком образовању ученика.

Нумеричка математика у настави математике омогућава да се она правилно схвати у својој целини. Целокупна школска математика састављена је из математичких модела високе апстракције. Тачка, права, равна, број, вектор, функција, једначине, вероватноћа итд. приближно представљају моделе реалног света.

Галилео Галилеи (1564-1642) истиче да је „природа огромна књига у којој је написана наука. Она је стално отворена пред нашим очима, али је човек не може разумети уколико претходно не научи језик и слова којима је написана“. Написана је језиком математике, а њена су слова троугли и друге математичке фигуре. Говорећи на овакав начин, Галилео је заправо истицао да је пут изучавања природе и њених закона преко математике и њених симбола. Ово не треба сметнути с ума када је реч о настави математике. За апстрактне математичко-логичке конструкције увек треба изналазити неку практичну ситуацију из којих је настао проучавани математички модел. Да би се остварила веза између математичке апстракције и својстава реалне ситуације коју описује посматрана математичка апстракција, треба решавати задатке практичног карактера. Овакви задаци се решавају нумеричким методама уз помоћ средстава за рачунање. На тај начин ученици неће схватити математику као апстрактну конструкцију отргнуту од

стварности, већ као нешто што проистиче из ње и њој се враћа. Уочиће смисао њеног изучавања.

Савремена настава математике захтева аксиоматско-дедуктивни прилаз њеним темама. Међутим, сигурно је грешка када се модернизација математике погрешно разуме и њена настава своди на формално закључивање и егзактне доказе. Конструктивни аспект у математици не игра малу улогу (Hans, A., 1979). Овај аспект би у настави математике требао да буде заступљен у том смислу да ученик упозна како се конкретни проблем на адекватан начин (уз помоћ средстава за рачунање) може решити до одговарајућег бројчаног резултата. Употреба савремених средстава за рачунање омогућава широко коришћење нумеричке математике, не само у математици, већ и у другим наставним предметима. За добијање резултата улазни подаци се не „штивају“ да би се добили тачни резултати, већ је све већа употреба података из праксе, што се огледа нарочито у техничким усмерењима. Без калкулатора часови математике, физике, хемије и већине стручних наставних предмета данас су незамисливи. Његова употреба даје на значају нумеричкој математици. За рационално коришћење калкулатора у настави неопходне су претпоставке о знању теорије приближних бројева.

Неки од циљева који би требало да се постигну кроз наставу нумеричке математике су:

1) Ученик би требало да изгуби сваки страх од приближних поступака. Потребно је да кроз сопствено експериментисање, уз помоћ џепног рачунара добија прве утиске о примени алгоритама.

2) Ученик би требало, како са практичне, тако и са теоријске стране, да добије једну представу о рачунским грешкама (на пример грешке заокругљивања) које настају приликом извођења рачуна.

3) Ученик би требало да стекне навику да код израчунавања које спроводи, оцењује направљене грешке.

4) Ученик би требало да помоћу конкретних примера упозна различите области примене нумеричких поступака за решавање математичких проблема. На тај начин би добио утисак о вишеструким могућностима примене нумеричке математике (Hans, A., 1979). Имајући ово у виду јасан је и одговор на питање: Да ли, и у ком облику је потребно да се обрађује приближан број у школама? Врло много ученика када је у контакту са приближним вредностима и границама њихових грешака често имају нелагодан осећај.

Многима не пада лако да при решавању задатака раде брзо, сигурно и са одговарајућом тачношћу. То је између осталог и због тога што основни појмови о приближном броју и грешкама нису у довољној мери обрађивани на часовима и код њих се није развила нумеричка култура која би задовољавала потребе праксе (Fehring, K., Wieker, R., Pruzina, M., 1974).

Ако се не обрати пажња на нумеричку строгост може се догодити да се добију резултати који се узимају као тачни, а они то нису. Често се у школама задају задаци типа: „Дужина пода износи 12.34 m, а ширина 13.526 m. Колика је површина?“. Употребом калкулатора ученици добијају вредност 166.91084. Најчешће, ученици се не усмеравају да размишљају да и полазни подаци нису тачни, јер је тешко да се тачно измере дужине. Самим тим и крајњи резултат је погрешан. Ученицима треба бар развијати свест о томе да већина резултата у израчунавањима није тачна, пре свега због нетачности улазних података. Код њих се јавља жеља да знају тачност резултата, што без сумње изазива љубав према нумеричкој математици. Користећи ученичку радозналост имамо добру основу за развијање наставе нумеричке математике путем решавања проблема.

Са нетачним подацима сусрећемо се у свакодневном животу. Без стечене нумеричке културе у школи, ти подаци се узимају као тачни. Такви су: брзина ветра, брзина

аутомобила, број становника, измерене дужине, ширине итд. Ученици треба да се васпитавају да препознају приближне податке.

Такође, када је реч о тачности, ученици треба да се васпитавају да захтев за тачношћу прилагоде контексту проблема. Ако је реч на пример о мерењу школског дворишта, довољно је узети две децимале, али у разним лабораторијским радовима, где мерни инструменти мере и до много више децимала, целисходно је резултате узимати са више децимала.

На наставницима математике је велика одговорност да ученике припреме за критичко прихватање података, јер свако слепо веровање у тачност презентираних података касније ће довести до манипулације њима као личностима.

Нумеричке аспекте као саставне делове једне опште рачунске културе наглашава и Collatz, L. износећи: „Непрестано опадам да млади студенти при бројчаним израчунавањима својих задатака допуштају да им недостаје тачност. Често се каже 'па то је само рачунска грешка'. Овде за наставника настаје задатак да код ученика одгајају већу свест о одговорности према бројевима. Лекар не сме приликом одмеравања дозе лека да погрешну зарезу, а инжењер не сме да се 'превари у рачуну' при одмеравању и обрачунавању јачине неког стуба. Ко од почетка не зна како се јако шири нетачност при рачунању са бројевима, како се мора бити сумњичав према самом рачунању, како су потребне контроле и дупла рачунања, он се касније тешко привикава на поуздано нумеричко рачунање“ (Collatz, 1959: 88).

Један шири проблем који се често среће у настави математике јесте занемаривање нумеричког аспекта проблема који се решава. Често се стиче утисак да у проблему који се решава и нема нумеричких аспеката. Ово се дешава нарочито у настави алгебре. Илустративни су следећи примери (Blankenagel, J., 1985):

1. Закон асоцијације који се слепо примењује не важи увек за приближни рачун, што се види из следећег примера:

$$2.51 \cdot (1.05 \cdot 1.11) = 2.51 \cdot 1.17 = 2.94.$$

$$(2.51 \cdot 1.05) \cdot 1.11 = 2.64 \cdot 1.11 = 2.93.$$

Овде је утицај на резултат мали, али код дужих израчунавања грешка би била знатно већа.

2. У другом разреду средње школе ради се рационалисање имениоца. Обично се ученицима говори, а као по правилу то се наглашава и у уџбеницима, да је основни циљ рационалисања упрошћавање рачунања, јер је лакше да се дели реалним него ирационалним бројем. То је тачно, али неопходно је при томе водити и рачуна о тачности добијеног резултата израчунате вредности рационалисаног израза. На пример:

$$\frac{1}{(\sqrt{5} + 2)^2} = 9 - 4\sqrt{5}$$

Формално, лева страна је једнака десној. Десна страна је очигледно једноставнија за рачунање. Пракса се не задовољава само наведеном трансформацијом левог израза једнакости у простију, десну, већ тражи конкретан нумерички резултат. Ако уместо $\sqrt{5}$ узмемо приближну вредност 2.2, лева страна има вредност 0.057, а десна 0.2. Видимо да су разлике у резултатима велике. Апсолутна грешка броја 0.057 (вредност израза пре рационалисања) износи 0.0014, а апсолутна грешка броја 0.2 (вредност израза после рационалисања) износи 0.14. Из овога се види да је са аспекта нумеричке математике много тачније рачунање нерационалисаног него рационалисаног израза (Blankenagel, 1985).

Наведени примери указују да су нумерички аспекти наставе могући и неопходни и да је велика одговорност на наставницима да ученике васпитавају да добијене резултате сагледавају не само са формалне, већ пре свега са практичне стране. Ово ће захтевати додатни напор који ће имати, поред своје практичне стране, и васпитну улогу.

Повећана улога математичких метода уз употребу рачунара несумњиво поставља и нов однос према питању шта и како учити из математике. Методе класичне математи-

ке морају у савременим наставним плановима и програмима, као и у њиховим реализацијама да добију нову улогу. Поред њихове незаменљиве улоге у конструкцији нових математичких модела, испитивање решивости задатака итд., методе класичне математике треба да послуже за добијање нових нумеричких метода неопходних за решавање конкретних задатака уз помоћ рачунара. За разне професије потребан је различит ниво математичких знања. Ученици, свршени гимназијалци, углавном се опредељују за студије у којима ће примењивати математичка знања. Стручне школе спремају разне профиле занатлија и техничара. Погледају ли се наставни програми, наставне теме су углавном исте за све средње школе, а разлика је само у броју часова датих за њихову реализацију. Задатак математике у гимназијама би требао да буде више општеобразовног карактера, док њена улога у стручним школама треба да носи нешто другачији карактер. Поред општеобразовне улоге она мора да има и конкретне практичне циљеве. Математички садржаји у другим наставним предметима средњих стручних школа, као што су: механика, техничка физика, хемија, техничко цртање, отпорност материјала, електротехника итд. налазе своју сасвим конкретну примену. Зато они морају бити усклађени са захтевима тих предмета. Задаци који се израђују у стручним наставним предметима махом су нумеричког карактера. Улазни подаци најчешће су резултат каквог приближног мерења, а самим тим и добијени резултати за које је потребно оценити тачност. Несумњиву улогу у таквим задацима играју нумеричке методе. Рачунска техника ученика стручних школа мора далеко превазилазити технику коју стичу ученици гимназија код којих тежња може бити на развијању способности логичког мишљења и закључивања. Коришћење нумеричких таблица, калкулатора и других средстава за рачунање неопходно је у свим стручним предметима. Теоријске основе за рад са њима, као и примену математике у стручним предметима мора да да нумеричка математика.

Солидно знање математике понето из средњих школа омогућује да се прати настава на високим школама и факултетима. За већину струка математика ће бити апарат помоћу кога ће се испитивати математички модели везани за проблеме струке. Прави значај нумеричке математике сагледаће се у настави високих школа и факултета.

Нумеричка математика ће наћи своје право место у настави, а ученици и студенти ће добити потребна знања за њену адекватну примену само ако се она употребљава у правој мери и на правом месту. При том треба имати стално на уму да је она део јединствене целине која се зове математика. Ученике током школовања треба навикавати на употребу нумеричких метода и на тај начин им уградити свест о јединству математике, о чему смо говорили. При том ученике треба навикавати на правилно коришћење средстава за рачунање.

На крају овог дела наведимо једну важну чињеницу. Наставни планови и програми, изузев приближних бројева и операција са њима, експлицитно не наводе коришћење нумеричких метода у настави математике. Независно од тога, захваљујући јединству математике, постоји велика могућност коришћења нумеричких метода у настави. Наставник-практичар, знајући васпитну и образовну улогу нумеричке математике, може увек наћи могућност да поред теоријског да и нумеричко тумачење траженог решења, а да при томе та тумачења не противурече једно другом, већ да се потврђују. Теоријске и нумеричке методе могу заједно да се нађу приликом објашњавања низова, извода, реалних бројева записаних са бесконачним бројем децимала, логаритама, тригонометрије итд.

Код добијања нумеричких резултата, ако се не ради о егзактним подацима, наставник мора нагласити тачност резултата. Такође, треба потенцирати коришћење „практичних правила“ рачунања са приближним бројевима током целог школовања после упознавања са њима. Нажалост, данас ни један уџбеник математике не обраћа пажњу на изнете аспекте нумеричности у настави математике и на тај начин не припремају ученике за практичне делатности за које се школују. У уџбеницима не смеју да се

нају примери у којима је намерно избегнут проблем тачности. На овај начин ученици се васпитавају као да таквих проблема нема.

Закључна разматрања. Као што се види, најнеопходније теме нумеричке математике, предвиђене наставним плановима и програмима основне и средње школе, односе се на приближни број. Овакво стање је и у најразвијенијим земљама света као што су САД, Русија, Француска и Немачка (видети истраживање у књизи: Дејић, М., 1996). Приближан број се широко примењује, не само у математици, већ и у физици, хемији, биологији, а такође и у многим другим предметима, нарочито код техничког усмерања. У резултатима мерења дужина, углова, површина и обима тела, физичких величина, при израчунавању тригонометријских функција, као и код израчунавања логаритама у већини случајева најчешће се добија приближан број. Децимални запис обичних разломака у многим случајевима је приближан број. Процент, корен, резултати рачунања такође су приближни бројеви. Решавање једначина и система једначина такође често дају приближан број. Непознавање технике рачунања са приближним бројевима доводи до нетачности, као и некритичности према добијеним резултатима.

Без обзира на изнете значаје, приближан број у настави математике не заузима место које му припада. У наставним програмима математике за основне и средње школе, експлицитно, његова обрада је, као што смо видели, правилно распоређена према узрасту ученика (V, VII и I разред средње школе) и према следу тема које му претходе. Из изнетих садржаја и објашњења веома мало се може сазнати који су то најважнији појмови, чињенице, идеје и методе сагласни оперативним задацима које треба имати у виду приликом реализације програмских садржаја. Такође, мало се размишља да ли приближан број може да се на неки начин обради и у нижим разредима основне школе. Извориште добијања приближних вредности представља *мерење*. Ученици се са мерењем упознају у прва четири разреда основне школе. На том узрастном нивоу још није потребно уводити озбиљније појмове као што су: апсолутна и релативна грешка мерења, њихово израчунавање итд. Мерећи дужи јединичним мерама, ученици III разреда основне школе су у прилици да се упознају са појмом *приближно*. Са следеће слике може се видети да већа дуж АВ садржи *приближно* 4 мање дужи MN.

Такође, ученици могу да се упознају и са појмовима *већа* или *мања грешка* (Већа грешка се прави ако се узме да је дуж АВ једнака приближно 4 дужине дужи MN, него ако се узме да је дуж АВ приближно 5 дужи MN).

Мерећи време, углове, површине, запремине итд., ученици се такође срећу са приближним бројевима.

У прилог обраде приближног броја у основној школи иде и следећи цитат о мерењу:

„Ученик основне школе се мора не само упознати са апсолутним и релативним (процентним) грешкама мерења него и оспособити да те грешке израчунава, да одређује приближне бројеве са датом (траженом) тачношћу и да рачуна приближним бројевима. Ако се учи мерењу без разумевања, све што набројасмо може се само научити (од данас до сутра), а не и разумети. Најзад, баш у вези с тим, ученик који није појмовно увођен у мерење, није у стању да разуме ни једно посредно мерење, посебно израчунавање дужина, површина и запремина, на чему се у традиционалној школи троши и много времена и много енергије“ (С. Првановић, 1970: 441).

Термине *тачан број* и *приближан број* учитељи могу увести у 3. и 4. разреду, онда када говоре о броју елемената у неком скупу (број ученика у дворишту за време одмора, број људи на неком скупу итд.). Ученици треба да схвате да се у таквим тренуцима ради само о приближном броју. У сазнање да нешто мора да се прикаже приближно, учитељ може да уведе ученике показујући им цртеж на коме има много исцртаних малих кругова разбацаних и различито обојених. Ако ученици броје ове кругове свако од њих ће исказати различит број. Ту је прилика да се каже да је понекад тешко да се дође до тачног броја (који учитељ може да саопшти), али да може да се искаже прибли-

жан број („Кругова има приближно ...“). Ово сада може да се повеже са примерима из живота (број ђака у дворишту, број људи на неком скупу итд.).

Из изнетог видимо јасно наглашавање да се приближни број укључи што раније у школе, затим поступно обрађује током читавог школовања. Из нашег теоријског и експерименталног рада, али и из искуства неких страних земаља (Дејић, М., 1996) дошли смо до следећег плана и програма везаног за приближан број:

Разр.	Тема	Мин. број час.	Место у школском програму
3.4.	Упознавање са терминима „већа грешка“, „мања грешка“, „тачан број“, „приближан број“.	-	У вези са темом о бројању, мерењу дужине, тежине, времена.
5.	Тачан и приближан број; Заокругљивање целих бројева; Грешке заокругљивања; „тачност до 10, 100, ...“.	1 - 2	У вези са понављањем градива из нижих разреда на почетку школске године
5.	Заокругљивање децималних бројева; Грешка заокругљивања.	1	У вези са појмом децималних разломака
7.	Приближна вредност реалног броја; Приближно већа вредност реалног броја; Приближно мања вредност реалног броја; Заокругљивање реалног броја на приближно мању и приближно већу вредност; Правило парне цифре; Апсолутна грешка; Граница апсолутне грешке.	1-2	У вези са децималним развојем реалног броја
7.	Рачунање приближним бројевима (Метода практичних правила, метода граница); Сигурне цифре; Запис приближног броја; Значајне цифре.	5-6 2	После основних операција са реалним бројевима (у оквиру теме „Неједнакости“). У вези са методом „Практична правила за рачунање приближним бројевима“.
7.	Извлачење корена из приближног броја.	1	Приближна вредност квадратног корена
7.	Употреба калкулатора.	1-2	У вези рачунања са приближним бројевима.
8.	Вежбање	-	У вези са задацима у којима се захтева рачунање са приближним бројевима, као и заокругљивање
И	Приближна вредност реалних бројева: апсолутна и релативна грешка и њихове границе; Заокругљивање децималних бројева; Веза између количине сигурних цифара приближног броја и границе релативне грешке (примери); Операције са приближним бројевима.	1-2 1 1 4-5	У вези са темом „Рачунање са приближним вредностима бројева“ (после теме „Реални бројеви“), као и у вези са задацима у којима се захтева рачунање приближним бројевима, као и заокругљивање

И	Степеновање и кореновање приближних вредности; Заокругливање међурезултата; Израчунавање резултата са унапред задатом тачношћу; Систематизација теме.	2-3	У вези са практичним правилима за рачунање са приближним бројевима.
	У К У П Н О:	21-28	

ЛИТЕРАТУРА

1. Albrecht, J., Collatz, L. (1985). *Beispiele fur numerische Mathematik im Schulunterricht*, Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht, 11, st. 398-403, 452-458.
2. Bakhvalov, N.S. (1977). *Numerical Methods*, Mir Publishers, Moskva, 1977.
3. Березин, И.С., Житков, Н.П.: *Нумеричка анализа*, Научна књига, Београд, 1963.
4. Blankenagel, J. (1985). *Numerische Mathematik im Rahmen der Schulmathematik*, Zurich.
5. Дејић, М. (1997). Зашто је потребно изучавати елементе нумеричке математике у настави, *Педагошка стварност*, година XLIII (7-8), 562-572.
4. Дејић, М. (1996). *Методичка трансформација одабраних садржаја нумеричке математике*, Виша школа за образовање васпитача, Вршац.
5. Миловановић, Г. (1985). *Нумеричка анализа I део*, Научна књига, Београд, 1985.
6. Орлов, К. (1970). *Нумеричка анализа*, ПМФ, Београд.
7. Пејовић, П., Нада, Ђ. (1977). *Елементи нумеричке анализе*, Научна књига, Београд.
8. Првановић, С. (1970). *Методика савременог математичког образовања у основној школи*, Завод за уџбенике и наставна средства Србије, Београд.
9. Рубников, К.А. (1989). *Професија-математик*, Просвещение, Москва..
10. Самарскиј, А.А. (1982). *Введение в численные методы*, Наука, Москва.
11. Сибигаки, W. (1961). Како да систематизујемо наставу нумеричке математике на свим ступњевима, *Настава математике и физике*, 1-4, Београд, стр. 109-117.
12. Стипанић, Е., Стојановић, М. (1983). *Математика за IV разред усмереног образовања*, Научна књига, Београд.
13. Тихонов, А.Н., Костомаров, Д.П. (1984). *Вводные лекции по прикладной математике*, Наука, Москва.
14. Fehring, K., Wieker, R., Pruzina, M. (1974). *Praktische Mathematik im Rahmenprogramm fur die Klassen 9 und 10*, *Mathematik in der Schule*, 12, S. 523-534.
15. Hans, A. (1979). *Numerische Mathematik in der Schule*, *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche unterrihticht*, 31, S. 266-272.
16. Херцег, Д. (1987). *Нумеричка анализа за IV разред средњег усмереног образовања и васпитања математичке струке*, Завод за издавање уџбеника, Нови Сад, 1987.
17. Collatz, L. (1959): *Angewandte, insbesondere numerische Mathematik an der hoheren Schule*, *Mathematisch- Physikalische Semesterberichte*, 6, S. 85-102.
18. <http://www.zuov.gov.rs/poslovi/nastavni-planovi/nastavni-planovi-os-i-ss/?lng=lat>, Новембар, 2015

Delich M. Position and role of numerical mathematics in teaching.

Very important, but very rarely present field of mathematics in curriculums, which makes a connection between mathematics and everyday practical problems and finds approximate solutions to abstract mathematical problems, is numerical mathematics. If children are to understand quantitative side of the real world correctly they must study the contents of numerical mathematics. This paper discusses the position of numerical mathematics in teaching, its importance and teaching objectives will be defined and the suggestion to incorporate these contents in mathematics curricula will also be made. The

necessity of studying numerical mathematics contents will be shown on some concrete examples.

Key words: *numerical mathematics, mathematics teaching, importance of numerical mathematics, approximate number, «numerical aspects».*

Делич М. Місце і роль обчислювальної математики у викладанні.

Дуже важлива, але дуже рідко присутній в навчальних програмах з математики, зв'язок між математикою і повсякденним практичними завданнями, наближені розв'язування абстрактних математичних задач, - так звана обчислювальна математика. Якщо діти повинні розуміти кількісну сторону реального світу правильно, вони повинні вивчити зміст обчислювальної математики. У даній статті обговорюється положення обчислювальної математики в навчанні, її значення і мета навчання, запропоновано включити в зміст навчальних програм з математики. Необхідність вивчення чисельного змісту математики буде показана на деяких конкретних прикладах.

Ключові слова: *обчислення у математиці, навчання математики, важливість обчислень у математиці, наближені числа, «числові аспекти».*

УДК 371.315.6:51

Н. В. Кульчицька, Р. І. Собкович
ДВНЗ «Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника»

**ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ В РІЗНИХ
МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧАХ**

У статті розглянуто приклади застосування методів векторної алгебри при розв'язуванні різних математичних задач (відшукування найбільших та найменших значень, оцінка виразів, доведення нерівностей, розв'язування рівнянь та нерівностей, нерівності у геометричних фігурах), використання векторів у яких є досить ефективним, хоча не завжди очевидним. Запропоновані ідеї не нові та неодноразово висвітлювались науково-методичній літературі. Наш педагогічний досвід показує, що пошук розв'язку математичної задачі із застосуванням різних методів, порівняння їх між собою, аналіз ефективності та раціональності шляху розв'язання, демонстрація несподіваних прийомів дозволяє покращити фахову методичну підготовку студентів. Автори використовують запропонований матеріал при викладанні математичних дисциплін за вибором для студентів старших курсів, які планують у майбутньому працювати в освіті.

Ключові слова: *векторна алгебра, нестандартні методи розв'язування рівнянь та нерівностей, оцінка виразу, фахова методична підготовка студентів.*

Постановка проблеми. Наш багаторічний досвід викладацької роботи показує, що час від часу доцільно повертатись до загально відомих математичних істин з тим, щоб ще раз підкреслити їх ефективність: можливо під дещо іншим, ніж раніше, кутом зору, можливо в деяких нових поєднаннях та в нових сферах.

Ідея застосування векторів при розв'язуванні математичних задач добре відома. Її досліджували та розвивали Бевз Г. П., Бурда М. І., Гельфанд І. М., Горнштейн П. І., Готман Е. Г., Кадубовська О. Л., Кушнір І. А., Лейфура В. М., Мерзляк А. Г., Нелін Є. П., Радченко В. М., Сарана О. А., Самойленко М. О., Слєпкань З. І., Тарасенкова Н. А., Федак І. В., Ясінський В. А. та багато інших науковців. Можливості застосування векторного методу багаторазово висвітлювалась в різних публікаціях,