272 с.

6. Храповицкий И. С. Методические рекомендации по применению электронного учебного издания Geometer's Sketchpad в учебном процессе общеобразовательных учреждений / Храповицкий И. С. – 2008. – 71 с.

Анотація. Мельникова М. Підтримка вивчення геометричних перетворень в шкільному курсі засобами динамічної математики. *У статті проаналізовано комп'ютерний інструментарій програм динамічної математики GRAN2d, DG, Живая геометрия, Математический конструктор, GeoGebra у контексті підтримки вивчення геометричних перетворень площини. Виділено шляхи використання програм динамічної математики при вивченні теми «Геометричні перетворення на площині» з огляду на доцільність, раціональність та педагогічну виваженість їх використання.*

Ключові слова: *програми динамічної геометрії, геометричне перетворення, комп'ютерні інструменти, GRAN2d, DG, Живая геометрия, Математический конструктор, GeoGebra.*

Abstract. Maria V. Melnykova. Support for the study of geometric transformations in the school course by means of dynamic mathematics software. *The article analyzes the computer tools of dynamic mathematics software GRAN2d, DG, The Geometer's Sketchpad, MathKit, GeoGebra in the context of supporting the study of geometric plane transformations. The ways of using dynamic mathematics software in the study of the topic "Geometric transformations on a plane" are highlighted, considering the expediency, rationality and pedagogical weight of their use.*

Keywords: *dynamic mathematics software, geometric transformations, computer tools, MathKit, The Geometer's Sketchpad, GRAN2d, DG, GeoGebra.*

Недосєка Владислав
Магістрант, спеціальності «Середня освіта (Математика)»
Huniaka123@gmail.com
Науковий Керівник – Лиман Ф. М.

ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ СИСТЕМИ НАД КІЛЬЦЕМ ЦІЛИХ ЧИСЕЛ

1. Лінійні рівняння займають особливе місце серед різних типів рівнянь. Вони є програмною темою шкільного курсу математики. Окремі їх типи зустрічаються в ролі завдань математичних олімпіад.

Нехай Z – кільце цілих чисел і n фіксоване натуральне число. З кільця многочленів $Z[x_1, \dots, x_n]$ візьмемо довільний лінійний вираз

$$f = b_0 + b_1 x_1 + \dots + b_n x_n. \qquad (1)$$

Введемо стовпець невідомих $\boldsymbol{X} = \|x_1, \dots, x_n\|$. Візьмемо довільний стовпець над кільцем B $\boldsymbol{L} = \|l_1, \dots, l_n\|$ над кільцем Z поклавши $x_i = l_i$ для $i = 1, \dots, n$.

Якщо в лінійний вираз f підставити L замість X то отримаємо вираз

$$b_0 + b_1 l_1 + \dots + b_n l_n.$$

Якщо в цьому виразі виконати операції множення і додавання, як операції в кільці B, то ми отримаємо деякий елемент з Z. Цей елемент позначається символом $f(l_1, \dots, l_n)$ і називається значенням лінійного виразу f, що відповідає стовпцю L, L називається стовпцем значень невідомих. **[1]**

Поряд з лінійним виразом f нехай задано ще один лінійний вираз над Z

$$h = c_0 + c_1 x_1 + \dots + c_n x_n.$$

Тоді рядок є істинним , якщо існує стовпець значень невідомих такий, що відповідні йому стовпці значень лінійних виразів f і h рівні. Тоді рівність

$$b_0 + b_1x_1 + \cdots + b_nx_n = c_0 + c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

є істинним твердження . Якщо такого стовпця не існує, то рівність буде хибним твердження.

Ця формула з урахуванням її змісту називається лінійним рівнянням над кільцем цілих чисел.

Для лінійних рівнянь над кільцем цілих чисел Z визначимо перетворення чотирьох типів.

1) до коефіцієнтів при одній і тій же невідомій в лівій і правій частині лінійного рівняння додається один і той самий елемент з Z;
2) до вільного члена правої і лівої частин лінійного рівняння додається один і той самий елемент з Z;
3) кожен коефіцієнт і кожен вільний член в лівій і правій частинах лінійного рівняння множаться на один і той самий елемент з Z, відмінний від нуля;
4) кожен коефіцієнт і кожен вільний член в лівій і правій частинах лінійного рівняння діляться на один і той самий їх спільний дільник.

Застосувавши до лінійного рівняння (1) суперпозицію цих перетворень, в результаті спрощень отримаємо лінійне рівняння виду

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b. \qquad (2)$$

Рівність (2) називається загальним виглядом лінійного діофантового рівняння. Зокрема лінійне діофантове рівняння з двома змінними має вигляд

$$ax + by = c \qquad (3)$$

2. Для розв'язання рівняння застосовують наступні теореми.

Теорема 1. Якщо a і b - взаємно прості числа, то для будь якого цілого c, рівняння (3) має хоча б один розв'язок у цілих числах.

Теорема 2. Якщо a і b мають спільний натуральний дільник $d \neq 1$, а ціле число c не ділиться на d, то рівняння (3) не має розв'язків у цілих числах.

Теорема 3. Якщо a і b взаємно прості числа, то рівняння (3) має нескінченну кількість розв'язків, які знаходять за формулами $x = x_0 + bk; y = y_0 - ak$, де $(x_0; y_0)$ - будь який цілий розв'язок даного рівняння, $k \in Z$.

Частинний розв'язок $(x_0; y_0)$ можна знайти підбором, для малих a і b, а у випадку коли числа a і b великі, то користуємось наступною теоремою.

Теорема 4. НСД$(a, b) = d$ може бути записаний у вигляді $d = am + bn$, де m, n цілі числа.

3. ***Приклад.*** Розв'язати в цілих числах рівняння $45x - 37y = 25$

Розв'язання. Так як НСД(45;37)=1, то рівняння має безліч розв'язків.

Щоб знайти $(x_0; y_0)$ застосуємо алгоритм Евкліда:

$$45 = 37\cdot 1 + 8; 37 = 8\cdot 4 + 5; 8 = 5\cdot 1 + 3; 5 = 3\cdot 1 + 2; 3 = 2\cdot 1 + 1.$$

Отже $d = 1$. Запишемо алгоритм Евкліда в зворотньому напрямку:

$$1 = 3 - 2\cdot 1 = 3 - 1(5 - 3\cdot 1) = 3 - 5 + 3\cdot 1 = 2\cdot 3 - 5 = 2\cdot(8 - 5\cdot 1) - 5 =$$
$$= 2\cdot 8 - 2\cdot 5 - 5 = 2\cdot 8 - 3\cdot 5 = 2\cdot 8 - 3\cdot(37 - 8\cdot 4) = 2\cdot 8 - 3\cdot 37 + 12\cdot 8 =$$
$$= 14\cdot 8 - 3\cdot 37 = 14\cdot(45 - 37\cdot 1) - 3\cdot 37 = 14\cdot 45 - 14\cdot 37 - 3\cdot 37 =$$
$$= 45\cdot 14 - 37\cdot 17.$$

Отже (14;17) частинний розв'язок рівняння $45x\text{-}37y\text{=}1$. Тоді

$$25 = 45\cdot(14\cdot 25) - 37\cdot(17\cdot 25); 25 = 45\cdot 350 - 37\cdot 425$$

тобто $(x_0y_0) = (350; 425)$.

Отже всі розв'язки знайдемо за формулами $x = 350 - 37k;\ y = 425 - 45k, k \in Z$.

Приклад. Розглянемо приклад розв'язування рівняння з 4 змінними в цілих числах $2x + 3y - 5z + 6t = 7$;

Запишемо рівняння у вигляді: $2x + 3y + a = 7$;, де $a = -5z + 6t$.

Так як НСД(2;3;1) = 1 і 7 ділиться на 1 то рівняння $2x + 3y + a = 7$; має розв'язки в цілих числах.

Так як НСД(2;3)=1, то представимо $1 = 2m + 3n$, де m, n - деякі цілі числа. Способом підбору $m = -1; n = 1$, підставивши в рівняння отримаємо $2x + 3y + (3 - 2)a = 7; 2(x - a) + 3(y + a) = 7$;

$x - a = u, y + a = v$; тоді $2u + 3v = 7$. Частинний розв'язок (2;1), тоді загальний його розв'язок $u = 2 + 3k, v = 1 + 2k, k \in Z$. З цього

$$x - a = 2 + 3k; y + a = 1 + 2k;\ x = 2 + 3k + a;\ y = 1 + 2k - a.$$

$$x = 2 + 3k - 5z + 6t, \quad y = 1 + 2k - 5z + 6t;$$

Знайдемо загальний розв'язок даного рівняння:

$$x = 2 + 3k - 5l + 6p, \quad y = 1 + 2k - 5l + 6p;\ z = l; t = p; k, l, k \in Z.$$

4. Далі перейдемо до розгляду систем лінійних рівнянь над кільцем цілих чисел.

Нехай задано $s \geq 2$ пар лінійних виразів над кільцем цілих чисел Z:

$$f_v = b_{v0} + b_{v1}x_1 + \cdots + b_{vn}x_n,$$
$$h_v = c_{v0} + c_{v1}x_1 + \cdots + c_{vn}x_n,$$

де $v = 1, \dots, s$. Математичне твердження яке може бути або істинним, або хибним, «існує стовпець значень невідомих такий, що відповідні до цього стовпця значення лінійних виразів f_v і h_v рівні для всіх вказаних значень індексу v» записується у формі впорядкованої системи s рівностей.

$$\begin{array}{c} b_{10} + b_{11}x_1 + \cdots + b_{1n}x_n = c_{10} + c_{11}x_1 + \cdots + c_{1n}x_n, \\ b_{20} + b_{21}x_1 + \cdots + b_{2n}x_n = c_{20} + c_{21}x_1 + \cdots + c_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{s0} + b_{s1}x_1 + \cdots + b_{sn}x_n = c_{s0} + c_{s1}x_1 + \cdots + c_{sn}x_n, \end{array} \quad (4)$$ **[1]**

Впорядкована система рівностей (4) з урахуванням її змісту, називається системою лінійних рівнянь на кільцем Z.

Якщо існує стовпець $\boldsymbol{K}$ над кільцем Z такий, що відповідні до цього стовпця значення лінійних виразів f_v і h_v рівні для всіх $v = 1, \dots, s$, то стовпець $\boldsymbol{K}$ називається розв'язком цієї системи, а сама ця система називається сумісною; якщо вона не має розв'язків то вона називається несумісною. Множина всіх розв'язків сумісної системи лінійних рівнянь записаних в одній формі, називається її загальним розв'язком.

Перетворення систем л. р. наступних типів називаються елементарними;

1) Множення рівняння системи на елемент $\varepsilon \epsilon Z$.
2) Додавання до одного з лінійного рівняння другого рівняння, помноженого на елемент $\varepsilon \epsilon Z$.

Слід відмітити ще один факт, система лінійних рівнянь буде перетворена в рівносильну, якщо одне з її лінійних рівнянь замінити на рівносильне. Тому якщо корне рівняння системи замінити рівносильним рівнянням, то ця система перетвориться в систему виду

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{array} \quad (5)$$ **[1]**

5. Розглянемо процес розв'язування цієї системи.

Нехай $\boldsymbol{A} -$ матриця коефіцієнтів системи (6) $\boldsymbol{B} -$ стовпець вільних членів тієї ж системи. Системі (6) відповідає блочна матриця $\overline{\boldsymbol{A}} = \|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}\|$, яка називається розширеною матрицею системи, і нехай $\boldsymbol{X}$ стовпчик невідомих . Матрична форма запису системи виглядатиме так:

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}, \qquad (7)$$

З нього слідує, що коли існує стовпець $\boldsymbol{K}$ такий, що має місце рівність $\boldsymbol{AK} = \boldsymbol{B}$, то $\boldsymbol{K}$ називається розв'язком матричного рівняння (7), а воно називається розв'язним.

Із означення елементарних перетворень системи (ЕПС) і відповідних їм елементарних перетворень матриць (ЕПМ) слідує, що результат застосування суперпозиції σ ЕПС до системи (5) можна отримати наступним чином: суперпозицію відповідних ЕПМ застосувати до розширеної матриці $\|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}\|$ системи (5) і, отримавши перетворену матрицю $\|\boldsymbol{C}|\boldsymbol{D}\|$, перейти до відповідної їй системи л. р.; вона і буде шуканим результатом застосування застосування суперпозиції σ ЕПС до системи (5) а матриця $\|\boldsymbol{C}|\boldsymbol{D}\|$ буде її розширеною матрицею. **[1]**

В свою чергу, виконання ЕПМ розширеної матриці $\|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}\|$ можна замінити множенням її зліва на відповідний елемент матриці. Нехай це будуть матриці $\boldsymbol{V}_1, \dots, \boldsymbol{V}_k$. Поклавши $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_k \dots, \boldsymbol{V}_2\boldsymbol{V}_1$, можемо записати наступну формулу для перетворення розширеної матриці:

$$\|\boldsymbol{C}|\boldsymbol{D}\| = \|\boldsymbol{VA}|\boldsymbol{VB}\|.$$

Відповідну цій розширеній матриці перетворену систему л. р. запишемо в матричній формі

$$(\boldsymbol{VA})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{VB}.$$

Спростити обчислення допомагає метод Гауса, в основі якого лежить використання елементарних перетворень матриці, до перетворення в трикутний вигляд.

Приклад. Розв'язати систему л. р. над кільцем Z.

$$9x - 3y + 5z = 4$$
$$6x - 2y + 3z = 5$$
$$3x - y + 3z = -8$$

Розв'язання.

1) Помножимо 3 рядок на -2 і додамо до 2.
2) Помножимо 3 рядок на -3 і додамо до 1.
3) Помножимо 2 рядок на -1 і додамо до 1.
4) Помножимо 3 рядок на -3 і додамо до 2.

$$\boldsymbol{V}_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \boldsymbol{V}_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \boldsymbol{V}_3 = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \boldsymbol{V}_4 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_4\boldsymbol{V}_3\boldsymbol{V}_2\boldsymbol{V}_1 = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \left\| \begin{array}{ccc|c} 9 & -3 & 5 & 4 \\ 6 & -2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & -8 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & -8 \end{array} \right\|$$

Записуємо перетворену систему $-z = 7$

$$3x - y + 3z = -8$$

тоді $z = -7$, $3x - y = 14$, $y = 3x - 14$,де x – вільна змінна. Тобто система має безліч розв'язків.

6. Нехай дано систему з n л. р.

$$c_{11}x_1 + \dots + c_{1r}x_r + \dots + c_{1n}x_n = d_1$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (8)$$
$$c_{r1}x_1 + \dots + c_{rr}x_r + \dots + c_{rn}x_n = d_r$$

Систему (8) назвемо крамерівською, якщо існує мінор порядку r її матриці коефіцієнтів, що є оборотним елементом кільця. Крамерівська система л. р. завжди сумісна. Для визначеності припустимо, що головний мінор порядку r матриці коефіцієнтів системи л. р. є оборотним елементом і перетворює цю систему наступним чином:

$$c_{11}x_1 + \dots + c_{1r}x_r = -c_{1,r+1}x_{n+1} - \dots - c_{1n}x_n - d_1$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..$$

$$c_{r1}x_1 + \dots + c_{rr}x_r = -c_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - c_{rn}x_n - d_r.$$

Введемо дві матриці : матрицю $\boldsymbol{C}$ коефіцієнтів при невідомих $x_1, \dots, x_r$, і матрицю $\boldsymbol{C_0}$ коефіцієнтів при невідомих $x_{r+1}, \dots, x_n$, якщо такі існують. За допомогою цих матриць запишемо систему л. р. (8) в матричній формі

$$\boldsymbol{CX} = \boldsymbol{C_0X_0} + \boldsymbol{B} \tag{9}$$

де $\boldsymbol{X}-$ стовпець невідомих $x_1, \dots, x_r$ і $\boldsymbol{X_0}-$ стовпець невідомих $x_{r+1}, \dots, x_n$.Так як визначник $\boldsymbol{C}$ є головним мінором порядку r матриці коефіцієнтів системи (8), то він є оборотним елементом. З цього слідує, що матриця унімодулярна, тобто квадратна матриця з цілими коефіцієнтами, визначник якої дорівнює +1 або -1. Помноживши зліва обидві частини матричного рівняння (9) на матрицю $\boldsymbol{C^{-1}}$, отримаємо його загальний розв'язок

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C^{-1}C_0X_0} + \boldsymbol{C^{-1}B} \tag{10}$$

В правій частині рівності (10) доданок $\boldsymbol{C^{-1}C_0X_0}$ відсутній, якщо $r = n$; якщо $r < n$,то цей доданок існуватиме і стовпець $\boldsymbol{X_0}$ пробігає всі стовпці над кільцем B, що мають розмір $(n - r) \times 1$. **[1]**

Приклад. Дано систему л. р. над кільцем Z

$$4x + 3y + 2z = 10$$

$$3x + 2y + 3z = 0.$$

Розв'язання. Вона є крамерівською, бо головний мінор другого порядку матриці коефіцієнтів дорівнює -1. Далі $\boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$, $\boldsymbol{C^{-1}} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$. Використовуючи формулу (10) отримаємо загальний розв'язок системи л. р. в матричній формі $\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 \\ 6 \end{vmatrix} z + \begin{vmatrix} -20 \\ 30 \end{vmatrix}$. Стовпець $\boldsymbol{X_0}$ є одноелементною матрицею, в розв'язку вона замінена власним елементом z.

Список використаних джерел

1. Родосский К. А. Алгоритм Евклида. М.: Наука, 1988. 240 с.
2. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії : для студентів базових напрям. інж.-техн. спец. / П. П. Костробій [та ін.]; ред. Ю. К. Рудавський; Нац. ун-т "Львівська політехніка". – Львів; Львів : Бескид Біт, 2002. – 256 с.
3. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії : для студентів базових напрям. інж.-техн. спец. / П. П. Костробій [та ін.]; ред. Ю. К. Рудавський; Нац. ун-т "Львівська політехніка". – Львів; Львів : Бескид Біт, 2002. – 256 с.
4. Гельфонд. А. О. Решение уравнений в целых числах.- М.: Наука, 1978.

Анотація. Недосєка В. Лінійні рівняння та їх системи над полем цілих чисел. *В статті подані основні поняття і деякі факти, які відносяться до лінійних рівнянь і систем лінійних рівнянь над кільцем цілих чисел. Розглянуті деякі види та методи розв'язання лінійних рівнянь та систем лінійних рівнянь.*

Abstract. Nedoseka V. Linear equations and their systems over the field of integers. *The article presents the basic concepts and some facts that relate to linear equations and systems of linear equations over a ring of integers. Some types and methods of solving linear equations and systems of linear equations are considered.*

Ключові слова: *Лінійне рівняння, система лінійних рівнянь, мінор, сумісна система векторів, крамерівська система векторів.*