УДК 517.52

О.С. Онишкевич
Сумський державний педагогічний університет ім. А.С. Макаренка

ПОСЛІДОВНОСТІ ФІБОНАЧЧІ ТА ЛЮКА

Останнім часом спостерігається значний інтерес науковців до так званих рекурентних або зворотних послідовностей, в тому числі до різноманітних видів прогресій (арифметичної, геометричної, квадратичної, гармонійної, логарифмічної тощо), окремих послідовностей простих чисел тощо.

Найбільш відомою рекурентною (правильніше – рекурентно заданою) числовою послідовністю є послідовність Фібоначчі. Вона стала відомою після публікації знаменитої праці Леонардо Фібоначчі (Пізанського), що дістала назву «*Книга про абак*», і вийшла друком в 1202 році. Існує велика кількість наукових товариств, які професійно вивчають властивості чисел Фібоначчі та їх численні застосування у математиці, фізиці, філософії, ботаніці, біології, геології, кристалографії, медицині, психології, астрономії, економіці, комп'ютерних науках, мистецтві тощо.

Менш відомою є числова послідовність Люка, названа так на честь французького математика XIX ст. Франсуа Едуарда Люка. Числова послідовність Люка тісно пов'язана з послідовністю Фібоначчі та золотою пропорцією, але має ряд своїх унікальних властивостей [3].

Спільна формула для побудови послідовностей Фібоначчі-Люка, має вигляд

$$U_n = U_{n-1} + U_{n-2}. \qquad (1)$$

Якщо у рівності (1) взяти початкові значення $U_0 = 0$, $U_1 = 1$, то отримаємо послідовність Фібоначчі

$$(F_n)_{n=0}^{\infty} = \{0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ 337,\ \ldots\} \qquad (2)$$

Для членів цієї послідовності матиме місце рекурентне співвідношення

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$,

яке випливає з рівності (1). Можна довести, що границі відношень сусідніх чисел Фібоначчі дорівнюють відповідно

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \qquad (3)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}. \qquad (4)$$

Отримані числа називають числами золотої пропорції або «золотими» числами і позначають відповідно $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618033\ldots$ та

$\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618033...$ «Золоті» числа є єдиною парою дійсних чисел, які задовольняють рівності $\Phi + \varphi = 1$ та $\frac{1}{\Phi} = \varphi$.

Повернемось до рівності (1) та покладемо в ній $U_0 = 2$, $U_1 = 1$. Одержимо послідовність

$$\left(L_n\right)_{n=0}^{\infty} = \{2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ 18,\ 29,\ 47,\ 76,\ 123,\ 199,\ 322,\ 521,\ \ldots\} \quad (6)$$

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2},\ L_0 = 2,\ L_1 = 1,$$

яку називають послідовністю Люка. Вона має властивості, аналогічні властивостям послідовності Фібоначчі, а саме:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n}{L_{n-1}} = \Phi, \quad (7)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_{n-1}}{L_n} = \varphi. \quad (8)$$

Існує ряд спільних закономірностей переходу від «золотих» чисел до членів послідовностей Фібоначчі та Люка. Використовуючи метод математичної індукції, можна показати, що n-й по порядку непарний член ($n = 1, 3, 5, ...$) послідовності Фібоначчі визначається з рівності

$$F_n' = \frac{\Phi^n + \varphi^n}{\Phi + \varphi}, \quad (9)$$

а парний член ($n = 2,\ 4,\ 6, ...$) – зі співвідношення

$$F_n'' = \frac{\Phi^n - \varphi^n}{\Phi + \varphi}. \quad (10)$$

Тоді зі співвідношень (9)-(10) та рівності

$$\Phi + \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \sqrt{5}, \quad (11)$$

випливає, що загальний член послідовності Фібоначчі можна подати у вигляді:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}. \quad (12)$$

Отримана рівність дає можливість у явному вигляді визначити n-й член послідовності Фібоначчі і називається формулою Біне [2, 25].

Справді підставивши в (12) $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, отримаємо

$$F_0 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0}{\sqrt{5}} = \frac{1-1}{\sqrt{5}} = 0;$$

$$F_1 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = 1;$$

$$F_2 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+2\sqrt{5}+5-1+2\sqrt{5}-5}{4}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{4\sqrt{5}}{4}}{\sqrt{5}} = 1;$$

$$F_3 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}-1+3\sqrt{5}-15+5\sqrt{5}}{8}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{16\sqrt{5}}{8}}{\sqrt{5}} = 2.$$

У наш час відомі й інші способи обчислення F_n: за допомогою формул Крамера, через перетворення квадратних матриць, твірні функції тощо. Окрім того, визначити F_n можна, використовуючи послідовність Люка з рівності:

$$F_n = \frac{L_{n-1} + L_{n+1}}{5} \text{ [1].}$$

Відповідні розрахунки для n = 1, 2, … 13 наведено у таблиці 1.

Таблиця 1

Знаходження чисел Фібоначчі

n	L_{n-1}	L_{n+1}	F_n
1	2	3	1
2	1	4	1
3	3	7	2
4	4	11	3
5	7	18	5
6	11	29	8
7	18	47	13
8	29	76	21
9	47	123	34
10	76	199	55
11	123	322	89
12	199	521	144
13	322	843	233

Використовуючи метод математичної індукції, можна показати, що n-й по порядку непарний член ($n = 1,\ 3,\ 5, \ldots$) послідовності Люка визначається з рівності:

$$L_n' = \Phi^n - \varphi^n, \tag{13}$$

а парний член ($n = 2,\ 4,\ 6, \ldots.$) – відповідно:

$$L_n'' = \Phi^n + \varphi^n \tag{14}$$

Отже, загальний член послідовності Люка виражаються з формули:

$$L_n = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \qquad (15)$$

де $n = 0, 1, 2, ...$ [5].

Зокрема, при $n = 0,\ n = 1,\ n = 2,\ n = 3$, отримаємо:

$$L_0 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = 1+1 = 2;$$

$$L_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = \frac{1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2} = 1;$$

$$L_2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5+1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{12}{4} = 3;$$

$$L_3 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 = \frac{1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}+1-3\sqrt{5}+15-5\sqrt{5}}{8} = \frac{32}{8} = 4.$$

Члени числового ряду Люка (починаючи з третього) також можна отримати з послідовності Фібоначчі (дивись таблицю 2), використовуючи наступну рівність:

$$2F_n + F_{n+1} = L_{n+2}.$$

Таблиця 2

Знаходження числового ряду Люка

n	F_n	$2F_n$	F_{n+1}	L_n
1	1	2	1	
2	1	2	2	
3	2	4	3	3
4	3	6	5	4
5	5	10	8	7
6	8	16	13	11
7	13	26	21	18
8	21	42	34	29
9	34	68	55	47
10	55	110	89	76
11	89	178	144	123
12	144	288	233	199
13	233	466	377	322

Неважко довести (див., наприклад, [6]), що для чисел Люка мають місце рівності

$$L_n \cdot L_{n+1} + 1 = L_{2n},\ \textit{якщо}\ n - \textit{парне},$$

$$L_n \cdot L_{n+1} - 1 = L_{2n}, \text{ якщо } n - \text{непарне.}$$

Зокрема, при $n = 5$ та $n = 6$ одержимо відповідно

$L_5 L_6 - 1 = 7 \cdot 11 - 1 = 77 - 1 = 76 = L_{10}$,

$L_6 L_7 + 1 = 11 \cdot 18 + 1 = 198 + 1 = 199 = L_{12}$.

Зазначимо, що для чисел Фібоначчі аналогічної властивості не існує [6].

Отже, числовий ряд Люка тісно зв'язаний з числовим рядом Фібоначчі, оскільки вони утворюються за одним і тим же правилом, а саме: кожен член ряду (починаючи з другого) дорівнює сумі двох попередніх членів. У зв'язку з цим вказані послідовності мають багато спільних властивостей. Відмінність між ними полягає лише у двох початкових членах, за рахунок чого числовий ряд Люка зростає швидше, ніж числовий ряд Фібоначчі.

Література

1. Анісімов А.В. Алгоритмічна теорія великих чисел / А.В. Анісімов. – К.: Видавничий дім «Академперіодика», 2001. – 153 с.
2. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи / Н.Н. Воробьев. – М.: Наука, 1978. – 144 с.
3. Новосад М.В., Дичка І.А. Числа Люка / М.В. Новосад, І.А. Дичка // Науковий вісник Чернівецького університету – 2009. – Вип. 446. – С. 11 – 15.
4. Ушаков Р.П. Одна цікава проблема про піфагорові трійки / Р.П. Ушаков // У світі математики. – т. 19 в. 1. – 2013. – С. 10.
5. Ясинський С.А. «Золотое» сечение в стандартизации и теории измерения / С.А.Ясинський. – СПб.: ВАС, 2008. – 160 с.
6. Ясинский С.А. Основы динамических аналогий в исследовательской деятельности / С.А. Ясинский. – СПб.: ВУС, 2004. – 164 с.

***Анотація**. Онишкевич О.С. Послідовності Фібоначчі та Люка. В статті розглянуті дві числові послідовності, а саме послідовності Фібоначчі і Люка. Розглянуто властивості цих послідовностей, які є спільними одночасно для обох послідовностей. Також показано, що послідовність Фібоначчі і послідовність Люка мають тісний зв'язок з золотими числами. Стаття призначена для вчителів шкіл, студентів фізико-математичних факультетів та учнів.*

***Ключові слова:** числа Фібоначчі, числа Люка, послідовність Фібоначчі, послідовність Люка, «золоте» число.*

***Аннотация**. Онишкевич Е.С. Последовательности Фибоначчи и Люка. В статье рассмотрены две числовые последовательности, а именно последовательность Фибоначчи и последовательность Люка. Рассмотрены свойства этих последовательностей, которые являются общими одновременно для обеих последовательностей. Также показано, что последовательность Фибоначчи и последовательность Люка имеют тесную связь с золотыми* *числами. Статья предназначена для учителей школ, студентов физико-математических факультетов и учащихся.*

Ключевые слова: *числа Фибоначчи, числа Люка, последовательность Фибоначчи, последовательность Люка, «золотое» число.*

Annotation. *Onishkevich O.S. Sequence of Fibonacci and Luke. In the articles considered two numerical sequences, namely sequence of Fibonacci and sequence of Luke. Properties of these sequences, which are general simultaneously for both sequences, are considered. It is also retined that a sequence of Fibonacci and sequence of Luke have cramped link. The article is intended for the teachers of schools, students of physical and mathematical faculties and pupils.*

Keywords: *number of Fibonacci, number of Luke, a sequence of Fibonacci, sequence of Luke, «gold» number.*