



DOI 10.31110/2413-1571-2023-038-2-007

УДК 378.4

**ЩОДО РОЗРОБКИ
ФАКУЛЬТАТИВНОГО КУРСУ
З ЕЛЕМЕНТІВ
ТЕОРІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ
ДЛЯ УЧНІВ
ЗАКЛАДІВ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ****Олена ПЕТРЕНКО**

Одеське вище професійне училище морського туристичного
сервісу, Державний заклад «Південноукраїнський національний
педагогічний університет імені К. Д. Ушинського», Україна
petrenko2017@gmail.com

Ольга ЧЕПОК ✉

Державний заклад «Південноукраїнський національний
педагогічний університет імені К. Д. Ушинського», Україна
chepok.oo@pdpu.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0001-8514-2769>

**CONCERNING THE DEVELOPING
OF AN ELECTIVE COURSE
ON THE ELEMENTS
OF THE THEORY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS
FOR STUDENTS OF INSTITUTIONS
OF GENERAL SECONDARY EDUCATION****Olena PETRENKO**

Odessa Higher Professional School of marine tourism service,
State institution «South Ukrainian National Pedagogical University
named after K. D. Ushinsky», Ukraine
petrenko2017@gmail.com

Olga CHEPOK ✉

State institution «South Ukrainian National Pedagogical University
named after K. D. Ushinsky», Ukraine
chepok.oo@pdpu.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0001-8514-2769>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. За умов сьогодення володіння основами теорії диференціальних рівнянь представляється наполегливою вимогою до сучасної природничо-математичної та економічної вищої освіти. У той же час знайомство навіть з елементами відповідної теорії не передбачено наявними програмами курсів математики закладів загальної середньої освіти. При цьому в курсах фізики з інтегруванням диференціальних рівнянь учні, фактично, зустрічаються вже у дев'ятому класі, під час опанування властивостей рівноприскореного руху та радіоактивного розпаду, відповідні формули учням пропонуються без жодних обґрунтувань. Подібна ситуація аж ніяк не сприяє розвитку логічного та критичного мислення учнів, суперечить концепції впровадження у навчальний процес на рівні середньої освіти елементів дослідницького навчання. Розумним тимчасовим кроком до вирішення існуючої проблеми може стати впровадження для учнів старших класів закладів загальної середньої освіти факультативного курсу з теорії диференціальних рівнянь.

Матеріали і методи. Дослідження базується на порівняльному аналізі програм і підручників з математики та фізики для учнів 9, 10 і 11 класів закладів загальної середньої освіти щодо їх узгодженості стосовно явного чи неявного використання поняття про диференціальне рівняння та його розв'язок. При цьому проводяться міркування як індуктивного, так і дедуктивного характеру.

Результати. Представлено змістове наповнення запропонованого факультативного курсу для учнів 10-11 класів та методичні рекомендації щодо його впровадження у навчальний процес.

Висновки. Представлені матеріали не передбачають наявності у учнів занадто глибоких знань з відповідних розділів математичного аналізу, для учнів 10-11 класів вони є цілком доступними. Водночас, їх змістове наповнення безумовно буде корисним як для усвідомлення учнями наявності глибинних зв'язків між математикою та фізикою, так і з пропедевтичної точки зору, маючи на увазі їх подальше навчання на наступному рівні освіти.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: заклад загальної середньої освіти; диференціальні рівняння; факультативні заняття з математики; курси фізики закладів загальної середньої освіти; курси математики закладів загальної середньої освіти.

ABSTRACT

Formulation of the problem. Competence on the grounds of the theory of differential equations seems to be an urgent request for modern natural-mathematical and economic higher education. At the same time, the present programs of math courses at institutions of general secondary education make no provisions for mastering even some elements of the corresponding theory. In spite of this, in fact, even students of the ninth form meet with the integration of differential equations in the courses of physics, according to mastering the properties of uniformly accelerated motion and radioactive decay; the corresponding formulas are offered to them without any proofs. Such a situation in no way favors the development of logical and critical thinking of students and contradicts the concept of introducing some elements of research into the educational process at the level of secondary education. The introduction of the elective course on the theory of differential equations for students of senior classes of institutions of general secondary education is proposed as a reasonable temporary step to solve the existing problem.

Materials and methods. The study is based on a comparative analysis of programs and textbooks on mathematics and physics for students of the 9th, 10th, and 11th forms of general secondary education institutions, according to their consistency in the explicit or implicit use of the concept of a differential equation and its solution. Inductive and deductive reasoning are used for it.

Results. Content of the suggested elective course for the students of 10-11 forms and methodical recommendations for its implementation in the educational process are represented.

Conclusions. Present materials do not require students to have too deep knowledge of the relevant sections of mathematical analysis, they are quite accessible for students of 10-11 grades. At the same time, their content undoubtedly will be useful both for students' awareness of the presence of deep connections between mathematics and physics, and, perhaps, from a propaedeutic point of view taking in the mind their further study on the next level of education.

KEYWORDS: institution of general secondary education; differential equations; elective courses in mathematics; physics courses of general secondary education institutions; mathematics courses of institutions of general secondary education.

Для цитування:

Петренко О., Чепок О. Щодо розробки факультативного курсу з елементів теорії диференціальних рівнянь для учнів закладів загальної середньої освіти. *Фізико-математична освіта*, 2023. Том 38, № 2. С. 43-49. DOI: 10.31110/2413-1571-2023-038-2-007

Петренко, О., & Чепок, О. (2023). Щодо розробки факультативного курсу з елементів теорії диференціальних рівнянь для учнів закладів загальної середньої освіти. *Фізико-математична освіта*, 38(2), 43-49. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-007>

For citation:

Petrenko, O., & Chepok, O. (2023). Concerning the developing of an elective course on the elements of the theory of differential equations for students of institutions of general secondary education. *Physical and Mathematical Education*, 38(2), 43-49. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-007>

Petrenko, O., & Chepok, O. (2023). Shchodo rozrobky fakul'tatyvnoho kursu z elementiv teorii dyferentsialnykh rivnyan dla uchniv zakladiv zahalnoi serednoi osvity [Concerning the developing of an elective course on the elements of the theory of differential equations for students of institutions of general secondary education]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 38(2), 43-49. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-007>

ВСТУП

Постановка проблеми. За умов сьогодення диференціальні рівняння покладено у основу математичних моделей багатьох фізичних, біологічних та економічних явищ і процесів. Оволодіння основами теорії диференціальних рівнянь є невід'ємною компонентою сучасної природничо-математичної та економічної вищої освіти. У той же час знайомство навіть з елементами відповідної теорії не передбачено наявними програмами курсів математики закладів загальної середньої освіти. Одночасно, у курсах фізики таких закладів з інтегруванням диференціальних рівнянь учні, фактично, зустрічаються вже у дев'ятому класі, під час опанування властивостей рівноприскореного руху та радіоактивного розпаду (Навчальна програма з фізики для учнів 7-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів, 2017). Те ж саме має місце під час вивчення механічних коливань у десятому класі і електромагнітних коливань – у одинадцятому (Фізика. Навчальні програми для загальноосвітніх навчальних закладів для 10-11 класів, 2017). Звичайно, про те, що мають на увазі саме диференціальні рівняння вчителі на уроках фізики мови не ведуть, відповідні формули учням пропонуються без жодних обґрунтувань. Подібна ситуація аж ніяк не сприяє розвитку логічного та критичного мислення учнів, суперечить концепції реалізації у навчальному процесі закладів загальної середньої освіти елементів дослідницького навчання.

На нашу думку, розумним тимчасовим кроком до вирішення існуючої проблеми може стати впровадження для учнів старших класів закладів загальної середньої освіти факультативного курсу з елементів теорії диференціальних рівнянь. Виникає природне питання про те, чому саме для учнів старших (десятих – одинадцятих) класів, якщо, по відношенню до курсів фізики, питання є актуальним вже на рівні базової загальної середньої освіти (для учнів дев'ятих класів). Відповідь представляється очевидною. Сучасне, традиційне, здається, всіма визнане як цілком доцільне, змістове наповнення курсів математики базової загальної середньої освіти не забезпечує потенційної можливості побудови подібного курсу. Це стає можливим лише на підставі навчального контенту курсів математики 10-11 класів.

Вважаємо, що наявність подібного факультативного курсу дозволить суттєвим чином підвищити якість того узагальнюючого повторення курсів фізики 7-9 класів, яке має місце у 10-11 класах згідно діючих навчальних програм, та під час підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання з фізики. Одночасно, такий курс, безумовно, буде корисним для тих учнів, які у подальшому планують здобувати вищу освіту за технічними, економічними та природничо-математичними спеціальностями.

Аналіз актуальних досліджень. На даний час курс алгебри і початків аналізу в закладах загальної середньої освіти знайомить учнів з базовими поняттями класичного математичного аналізу, створюючи таким чином відповідні передумови для подальшого опанування курсів вищої математики у закладах вищої освіти (далі, ЗВО) (Навчальні програми з математики (алгебри і початків аналізу та геометрії) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту, для класів з поглибленим вивченням математики, 2017). Для класів з поглибленим вивченням математики передбачене первинне знайомство з поняттям диференціального рівняння, але виключно на ознайомлювальному рівні, без ґрунтового занурення у його сутність та доцільного практичного відпрацювання. Одночасно, для кожного профілю навчання передбачена наявність супровідних факультативних курсів, спрямованих на поглиблене усвідомлення сутності відповідних основних понять, природи їх формування у математиці, можливостей різних узагальнень та практичних застосувань.

Навчальними планами закладів загальної середньої освіти наявність факультативних курсів була передбачена, фактично, завжди. Сама ідея факультативного курсу полягає у тому, що це курс за вибором учня. Загальновідомо, що в ЗВО студенти зараз навчаються за певними освітньо-професійними програмами, від чверті до третини кредитів яких відводиться на опанування навчальних курсів за вибором студента. Мова йде про те, що студент у значній мірі має можливість будувати власну освітню стратегію у межах, або, навіть, поза межами самостійно обраної ним спеціальності. Середня освіта у старшій школі є профільною. Відповідний профіль навчання учні, разом з батьками, обирають самостійно. Наявність факультативних курсів, які не є обов'язковими, дозволяє заздалегідь адаптувати їх до сучасних технологій навчання, до формування власної освітньої стратегії, усвідомлення необхідності навчатися впродовж усього життя. Суттєвою ознакою сьогодення є можливість впровадження спільних факультативних курсів для учнів різних профілів та різних років навчання. Зрозуміло, що тематика факультативних курсів може і повинна бути різною, у залежності від профілів навчання учнів старших класів, побажань учнів та їх батьків, кадрових можливостей відповідного закладу загальної середньої освіти. МОН України надає перелік рекомендованих курсів для учнів різних класів, який у той же час, не обмежує власний вибір відповідного закладу освіти. Курсу, присвяченого основам чи елементам теорії диференціальних рівнянь, серед запропонованих натеper факультативних курсів немає. Незважаючи на реальні можливості авторів, апробації розробленого факультативного курсу у реальному навчальному процесі ще не було. Частковою апробацією можна вважати обговорення загальної ідеї відповідного змістового наповнення курсу з колегами. Думки при цьому розділилися. Частина викладачів математики і фізики висловила за його недоцільність. Автори же, навпаки, наполягають на доцільності, у своїй подальшій практичній роботі планують здійснити впровадження розробленого курсу у реальний навчальний процес. Зрозуміло, що внаслідок подібного впровадження виникнуть подальші ідеї щодо його вдосконалення.

Мета статті полягає у представленні методичної розробки факультативного курсу «Елементи теорії диференціальних рівнянь» на базі змістового наповнення курсів математики 10-11 класів закладів загальної середньої освіти (насамперед, з поглибленим вивченням математики).

Навчальна мета запропонованого курсу полягає у тому, щоб відповідні здобувачі освіти усвідомили сутність загального поняття про звичайне диференціальне рівняння та його розв'язок, навчилися розпізнавати та раціональним чином розв'язувати диференціальні рівняння певних видів, застосовувати опановані елементи теорії диференціальних рівнянь до розв'язування прикладних задач, зокрема, задач курсів фізики закладів загальної середньої освіти.

Розвиваюча мета запропонованого курсу полягає у тому, щоб сформувати у відповідних здобувачів освіти пропедевтичне підґрунтя для наступного вдалого опанування теорії диференціальних рівнянь у профільних ЗВО, поглибити їхнє усвідомлення ролі і місця математики у загальній системі наук про природу і суспільство, у повній мірі

реалізувати узагальнююче повторення тих розділів фізики, в яких, попередньо, елементи теорії диференціальних рівнянь було використано у неявному вигляді.

Виховна мета запропонованого курсу за своєю сутністю не відрізняється від виховної мети всіх факультативних курсів з математики, всіх курсів математики у закладах загальної середньої освіти взагалі, забезпечується потенційними можливостями цих курсів і полягає у тому, щоб сприяти формуванню у відповідних здобувачів освіти загальної логічної культури мислення, зокрема, культури діалектичного мислення, таких рис особистості як чесність та правдивість, мужність та наполегливість, підвищенню їхнього загальнокультурного рівня, формуванню їхнього світогляду.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У курсі фізики сьомого класу, під час вивчення теми «Рівномірний рух. Швидкість руху», надають означення рівномірного руху та швидкості рівномірного руху. При цьому формують характеристики графіка залежності швидкості руху матеріальної точки від часу та графіка залежності від часу пройденого шляху, які, за своєю сутністю, описують геометричний зміст похідної (функції швидкості) та первісної (функції шляху) (Навчальна програма з фізики для учнів 7-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів, 2017).

Означення лінійної швидкості руху тіла та миттєвої швидкості у термінах границі («за нескінченно малий проміжок часу») надають вже у підручнику десятого класу під час повторення та поглиблення всіх тем курсів фізики 7-9 класів (Бар'яхтар та ін., 2018). Там вказується, що миттєва швидкість – це фізична величина, яка дорівнює відношенню шляху, який пройдено тілом за деякий достатньо малий проміжок часу до величини цього проміжку часу. В такий спосіб, у підручнику неявним чином вказується на те, що швидкість тіла у момент часу дорівнює значенню похідної функції руху матеріальної точки у цей момент часу (Бар'яхтар та ін., 2018).

Наприкінці дев'ятого класу програма з фізики передбачає знайомство учнів з поняттями прискорення та рівноприскореного руху. При означенні прискорення у підручнику з фізики дев'ятого класу неявним чином визначають той факт, що прискорення є похідною функції швидкості (Навчальна програма з фізики для учнів 7-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів, 2017; Бар'яхтар та ін., 2017).

Як ми знаємо, основна задача механіки – це визначення положення тіла (координату тіла, наприклад за віссю Ox) у даний момент часу t , тобто знаходження за вихідними даними задачі функції $x = x(t)$. У сьомому класі – це задача про знаходження координати точки у кожний момент часу при рівномірному прямолінійному русі, у випадку, коли швидкість є сталою величиною, тобто, $v_x(t) = c$, $c = const$ (Навчальна програма з фізики для учнів 7-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів, 2017; Бар'яхтар та ін., 2017).

Тоді, ми маємо найпростіше диференціальне рівняння першого порядку, яке містить похідну функції руху: $x'(t) = c$, розв'язок якого можна знайти інтегруванням: $x(t) = ct + x(0)$. У звичних термінах фізики, враховуючи початкову умову $x(0) = x_0$, маємо: $x(t) = v_x t + x_0$.

Потім у дев'ятому класі (Бар'яхтар та ін., 2017) учні розглядають рівноприскорений рух як рух зі сталим прискоренням. Оскільки прискорення є похідною від швидкості, а швидкість є похідною від функції руху тіла, то основна задача механіки зводиться до знаходження розв'язку диференціального рівняння другого порядку: $x''(t) = c$, $c = const$.

Це рівняння можна розв'язати двома послідовними інтегруваннями:

$$\begin{aligned}x'(t) &= ct + c, \\x(t) &= ct^2 + c_1 t + x(0).\end{aligned}$$

У звичних термінах фізики, враховуючи початкові умови

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_{0x},$$

маємо:

$$x(t) = \frac{a_x}{2} t^2 + v_{0x} t + x_0,$$

де a_x – проекція прискорення на вісь Ox , v_{0x} – проекція початкової швидкості на вісь Ox .

У підручнику дев'ятого класу це рівняння не виокремлюється і не розв'язується, а переміщення пропонують знаходити як площу фігури розташовану під графіком функції швидкості (Бар'яхтар та ін., 2017).

При розгляді руху тіла під дією сили тяжіння, зокрема, при вільному падінні (або киданні тіла вгору) ми зустрічаємося з рівноприскореним рухом, для якого прискорення $\vec{a} = -\vec{g}$, \vec{g} – прискорення вільного падіння.

Оберемо за вісі OY вертикальну пряму, якою рухається (падає) точка; початок координат розташуємо на поверхні землі, а додатній напрямок умовимося відраховувати вгору. Щоб знати положення нашої точки у будь-який момент часу t після початку руху (відповідного до значення $t = 0$), необхідно знати закон зміни єдиної координати цієї точки у як функції часу t . Отже, незалежною змінною у нас є час t , а шуканою функцією – координата y . Складемо рівняння для знаходження y . З механічного змісту другої похідної випливає, що прискорення дорівнює $\frac{d^2 y}{dt^2}$; з іншого боку, ми знаємо, що прискорення сили тяжіння в кожній точці Земної поверхні та поблизу неї є постійним і (наближено) дорівнює 981 см/сек^2 , позначається $g = 981 \text{ см/сек}^2$; оскільки прискорення спрямоване донизу, то у обраній системі координат йому треба надати знак «-». Прирівнявши два знайдені вирази для прискорення точки, отримаємо рівняння, з якого можна буде визначити функцію y : $\frac{d^2 y}{dt^2} = -g$.

Оскільки тут маємо другу похідну від змінної y , то розв'язуватимемо за допомогою подвійного інтегрування. Двічі знайдемо невизначений інтеграл від обох частин рівняння за змінною t . Отримаємо:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= -gt + C_1, \\y &= -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2\end{aligned}$$

Останнє отримане рівняння – загальний розв’язок розглянутого диференціального рівняння, яке містить дві сталі C_1 і C_2 . З’ясуємо їх фізичний зміст:

1) в першому рівнянні при $t = 0$, $C_1 = \frac{dy}{dt} = v_0$ (початкова швидкість матеріальної точки);

2) аналогічно, з другого рівняння маємо при $t = 0$, $C_2 = y$ (початкове положення точки).

Після введення нових позначень для даних довільних констант отримаємо загальний розв’язок розглянутого диференціального рівняння у вигляді:

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0t + y_0$$

Стає зрозумілим, які додаткові данні необхідно мати, щоб отримати частинний розв’язок, а саме: числове значення y_0 початкового положення точки та початкову швидкість v_0 .

У підручнику з фізики десятого класу (Бар’яхтар та ін., 2018) під гармонічними коливаннями розуміють коливання за законами синусу або косинусу: $x = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Насправді, фізична величина, яка характеризує тіло, яке здійснює гармонічні коливання, задовольняє наступне диференціальне рівняння:

$$a_x = -\omega^2 x, \quad \text{де } a_x = \ddot{x}.$$

У підручнику з фізики (Бар’яхтар та ін., 2018) пропонують з’ясувати фізичний зміст кожної величини у наведених рівняннях гармонічних коливань, пояснення наведено у таблиці підручника; але виведення рівнянь гармонічних коливань не наводиться. Насправді, ці формули можна вивести, використовуючи диференціальні рівняння.

Формули гармонічної швидкості та гармонічного прискорення також пропонують в підручнику без жодних обґрунтувань.

Ми пропонуємо наступне виведення рівняння гармонічного прискорення $a_x = -\omega^2 x$: запишемо першу та другу похідні величин, що гармонічно коливаються в залежності від часу:

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

та

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi).$$

Маємо гармонічні коливання з тією ж циклічною частотою, тоді амплітуди швидкості та прискорення відповідно дорівнюють $A\omega_0$ та $A\omega_0^2$.

З виразу $\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi)$ впливає диференціальне рівняння гармонічних коливань $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$. Розв’язком цього рівняння є функція, представлена запропонованою у підручнику формулою:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Тепер доведемо обернене твердження: якщо в будь-який момент часу руху тіла його прискорення є прямо пропорційним до його зміщення та спрямоване у бік, протилежний до зміщенню, такий рух являє собою гармонічні коливання.

Запишемо загальне диференціальне рівняння гармонічних коливань: $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$. Розв’яжемо диференціальне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами. Для цього запишемо характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0,$$

$$\lambda^2 = -\omega_0^2.$$

Таке рівняння має два комплексних кореня: $\lambda = \pm \omega i$. Загальний розв’язок диференціального рівняння гармонічних коливань має вигляд: $x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$. Що й треба було довести.

Отже, ми переконалися у тому, що доведення цих формул не є занадто складним, більш того, запропоновані нами доведення є корисними для розуміння старшокласниками теми «Гармонічні коливання».

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Дослідження базується на порівняльному аналізі програм та підручників з математики та фізики для учнів 9, 10 і 11 класів закладів загальної середньої освіти як рівня «стандарт», так і поглибленого рівнів навчання, щодо їх узгодженості стосовно явного чи неявного використання поняття про диференціальне рівняння та його розв’язок. При цьому використовуються міркування як індуктивного, так і дедуктивного характеру.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Представлено змістове наповнення факультативного курсу з елементів теорії диференціальних рівнянь для учнів 10-11 класів закладів загальної середньої освіти та методичні рекомендації щодо його впровадження. Запропонований курс «Елементи теорії диференціальних рівнянь» не вимагає дуже глибоких знань з математичного аналізу. У той же час такий курс представляється вельми корисним для майбутнього студента ЗВО з позиції наявності початкових уявлень про предмет, який він буде опанувати у майбутньому.

Розроблений факультативний курс більше розраховано на учнів 11-их класів в силу того, що його теоретичне підґрунтя складають базові теми саме курсу алгебри та початків аналізу 11-го класу. Залучення до роботи десятикласників не виключається, бо поняття про похідну, згідно діючих на даний час навчальних програм, вводиться саме наприкінці 10-го класу, і, як правило, серед учнів 10-х класів завжди знаходиться кілька обдарованих осіб, здатних навчатися самостійно та опановувати необхідний матеріал за мінімальної допомоги викладача (Навчальні програми з математики (алгебри і початків аналізу та геометрії) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту, для класів з поглибленим вивченням математики, 2017).

При розробці даного факультативного курсу ми виходили з того, що учні, які виявили бажання його прослухати, вже ознайомлені з поняттями похідної та інтеграла зі шкільного курсу алгебри і початків аналізу, календарно вже пройшли

цей матеріал. Тому, у запропонованому факультативному курсі дані теми лише повторюються. При знайомстві з методами розв'язання найпростіших диференціальних рівнянь, акцент зроблено саме на практичній стороні – на вмінні розпізнати відповідний вид рівняння та розв'язати його за допомогою одного із вивчених методів. Курс не представляється перевантаженим теоретичними відомостями. У ньому розглянуто методи розв'язання найпростіших диференціальних рівнянь першого та другого порядків, які, зокрема, зустрічаються у курсах фізики закладів загальної середньої освіти.

Отже, на початку факультативного курсу передбачено повторення основних методів диференціювання та інтегрування функцій. При цьому, треба переконатися у тому, що учні правильно розуміють терміни «похідна» та «інтеграл», чітко уявляють собі їх сутність та властивості. Для подальшого вдалого введення поняття про диференціальні рівняння варто присвятити деякий час розгляданню різних методів інтегрування в силу того, що навіть елементарні диференціальні рівняння розв'язуються саме за допомогою інтегрування.

Після повторення матеріалу з тем «Похідна функції. Геометричний та фізичний зміст похідної» та «Первісна та інтеграл» вводиться поняття інтегралу зі змінною верхньою межею, яке зв'язує поняття первісної з поняттям визначеного інтегралу (цей матеріал є новим для більшості школярів, у той же час він не представляється занадто складним; одночасно, він є дуже важливим для введення поняття про диференціальне рівняння).

Далі розглядаються теоретичні обґрунтування різних методів розв'язання диференціальних рівнянь, для визначених методів наводяться відповідні приклади їхнього застосування. Представлені теоретичні питання з диференціальних рівнянь не є складними, на знайомство з ними в одинадцятому класі достатньо виділити 1 годину на тиждень. Отже, краще за все, для опанування контенту вищевказаного курсу мати 30 навчальних годин впродовж учебного року.

У таблиці 1 представлено тематичне планування розробленого факультативного курсу.

Таблиця 1.

Тематичне планування факультативного курсу «Елементи теорії диференціальних рівнянь»

№	Тема заняття	Кількість годин
1.	Похідна функції.	2
2.	Первісна та інтеграл. Поняття про інтеграл зі змінною верхньою межею.	3
3.	Загальне поняття про диференціальне рівняння.	2
4.	Метод ізоклін побудови інтегральних кривих.	3
5.	Рівняння з відокремлюваними змінними.	3
6.	Однорідні диференціальні рівняння першого порядку.	3
7.	Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння першого порядку та методи їх розв'язання: метод Лагранжа, метод Бернуллі.	3
8.	Однорідні диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами.	3
9.	Неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами, способи їх розв'язання у випадку спеціального виду правої частини.	3
10.	Задачі навчальних курсів закладів загальної середньої освіти, які зводяться до диференціальних рівнянь першого та другого порядків.	4
11.	Узагальнення та систематизація засвоєних знань, умінь та навичок. Підсумковий контроль.	1
	Усього	30 годин

Отже, до змістового наповнення представленого факультативного курсу включено наступні теми: метод ізоклін, диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними, однорідні диференціальні рівняння першого порядку, лінійні неоднорідні диференціальні рівняння першого порядку, лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Ми не ставили собі за мету навчити відповідних здобувачів освіти розв'язувати якомога більше різних типів диференціальних рівнянь, обрали лише ті, які, на наш погляд, є найпростішими, найчастіше використовуються на практиці. Обраних видів рівнянь цілком достатньо для занурення учнів у сутність предмету, для формування їхньої готовності до розширення знань з теорії диференціальних рівнянь під час подальшого навчання у ЗВО відповідного профілю (Bibi et al., 2019).

У процесі висвітлення змістового наповнення десятої теми представленого тематичного плану курсу ми проаналізували взаємний зв'язок між диференціальними рівняннями та задачами курсів фізики закладів загальної середньої освіти. Під час аналізу шкільних підручників з фізики було визначено три розділи, у практичному контенті яких зустрічаються диференціальні рівняння. Це задачі на знаходження закону руху матеріальної точки, гармонічні коливання та радіоактивний розпад елементів. Для кожного з цих розділів було показано, яким чином можна обґрунтувати справедливості відповідних формул руху, коливання, розпаду тощо використовуючи диференціальні рівняння тих видів, що розглянуто попередньо, а не тільки навести відповідні формули як аксіоми. Нам також вдалося проілюструвати можливості використання теорії диференціальних рівнянь при розв'язуванні фізичних задач.

Зрозуміло, що у межах розробленого факультативного курсу ми не мали можливості навести достатньої кількості прикладів, необхідних для повноцінного опанування розглянутих методів розв'язання визначених типів диференціальних рівнянь. Передбачається, що кожний викладач, виходячи із можливостей та потреб відповідних учнів, повинен проводити

самостійну роботу із пошуку доцільних завдань. Основними джерелами прикладів при цьому можуть бути відповідні навчальні посібники та збірники задач для ЗВО ((Самойленко, 2003), наприклад).

Взагалі, готуючись до будь-якого заняття, викладач повинен враховувати велику кількість факторів. Насамперед, важливою представляється дидактична типологія уроку. Структура кожного параграфу розробленого курсу, тісно перегукується з найбільш поширеними типами уроків. Так, теоретична частина вкладається у рамки уроку засвоєння нових знань; додаток, що містить задачі з фізики, – це урок застосування знань, навичок та умінь; сюди ж ми можемо зарахувати й ту частину параграфу, в якій наводяться приклади розв'язання завдань; додаток із завданнями для самостійної роботи можна також використовувати для перевірки та корекції знань, умінь та навичок учнів (Wadhwa, 2004; Posamentier & Smith, 2014).

Зрозуміло, що якісне викладання факультативного курсу «Елементи теорії диференціальних рівнянь» може відбуватися лише за університетською схемою. Реалізувати це можна за допомогою наступних видів уроків: урок-лекція – для викладу нової теми; урок-семінар – до розглядання застосувань у курсах фізики та спільного з учнями розв'язування прикладів; урок-практикум – для самостійного розв'язування завдань відповідними здобувачами освіти; урок-консультація – для роботи з учнями, які слабо встигають або пропустили заняття; урок-залік для контролю набутих знань, умінь та навичок.

Переконані, що завдяки відібраному нами теоретичному та практичному матеріалу, проведенню занять відповідно до розробленого календарного планування, може бути досягнуто визначену навчальну мету представленого факультативного курсу.

Під час розробки домашніх завдань варто враховувати індивідуальні особливості відповідних учнів. Учень вдома у меншому ступені є обмеженим часовими рамками, ніж викладач під час уроку, і тому в нього є можливість витратити більше часу на розпізнавання виду рівняння та пошук доцільного методу його розв'язання. Але, здається, навіть найкращим учням не варто задавати додому рівняння, що вимагають громіздких перетворень. У підсумку, ми схиляємося до думки, що найбільш ефективними є самостійні роботи з єдиною основою, яка, залежно від рівня підготовки учнів, може коригуватися за допомогою наборів вказівок до виконання запропонованого завдання.

Отже, методика проведення занять з факультативного курсу «Елементи теорії диференціальних рівнянь» на базі закладів загальної середньої освіти не надто відрізняється від проведення уроків з будь-якого розділу математики, якщо викладач враховує специфіку курсу, аудиторії та матеріалу, що викладається. Ґрунтовні знання самого педагога, чітке планування кожного заняття та увага до всіх учнів, безумовно, стануть запорукою успішних результатів.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Запропоновані методичні матеріали до факультативного курсу не передбачають наявності в учнів занадто глибоких знань з відповідних розділів математичного аналізу, для учнів 10-11 класів закладів загальної середньої освіти вони є цілком доступними. Водночас, їх змістове наповнення представляється корисним як з позиції сприяння усвідомленню учнями наявності міждисциплінарних зв'язків математики та фізики, так і, з пропедевтичної точки зору, для тих учнів, які будуть опановувати теорію диференціальних рівнянь на наступному рівні освіти.

Зрозуміло, що представлений факультативний курс вимагає апробації у формі впровадження у реальний навчальний процес, передувати подібну апробацію буде розробка детальних планів-конспектів відповідних занять. І лише унаслідок такої апробації може бути остаточно сформоване переконання у його доцільності для відповідних категорій здобувачів середньої освіти, виникнуть додаткові ідеї щодо його подальшого вдосконалення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бар'яхтар, В. Г., Довгий, С. О., Божинова, Ф. Я., & Кірюхіна, О. О. (2017). *Фізика: підруч. для 9 кл. загал. серед. освіти* Х.: «Ранок». URL: <https://shkola.in.ua/864-fizyka-9-klas-bar-iahtar-2017.html>
2. Бар'яхтар, В. Г., Довгий, С. О., Божинова, Ф. Я., & Кірюхіна, О. О. (2018). *Фізика. Рівень стандарту: підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти*. Х.: «Ранок». URL: <https://shkola.in.ua/1719-fizyka-10-klas-bar-iahtar-2018.html>
3. *Навчальні програми з математики (алгебри і початків аналізу та геометрії) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту, для класів з поглибленим вивченням математики*. Затверджена Наказом Міністерства освіти і науки України від 07.06.2017 № 804. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>
4. *Навчальна програма з фізики для учнів 7-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів*. Затверджена Наказом Міністерства освіти і науки України від 07.06.2017 № 804. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas>
5. *Навчальна програма з фізики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту та профільний рівень*. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>
6. Самойленко, А. М., Кривошея, С. А., & Перестюк М. О. (2003). *Диференціальні рівняння в задачах*. К: Либідь. URL: http://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Samoylenko_2003_504.pdf
7. Thomas, E.J., Brunsting, J.R., & Warrick, P.L. (2010). *Styles and Strategies for Teaching High School Mathematics*. Corwin Press. <https://www.amazon.com/Styles-Strategies-Teaching-School-Mathematics/dp/1412968356>
8. Wadhwa S. *Modern Methods of Teaching Mathematics* (2004). New Delhi: Sarup&Sons. <https://books.google.com.gh/books?id=vLclR7qVkhYC&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false>
9. Posamentier, A.S., & Smith, B.S. (2014). *Teaching Secondary Mathematics: Techniques and Enrichment Units*. Pearson Education: Pearson College Division. <https://www.amazon.com/Teaching-Secondary-Mathematics-Techniques-Enrichment/dp/0135000033>
10. Bibi, A., Ahmad, M., Shahid, W., Zamri, S. N. S., & Abedalaziz, N. A. M. (2019). An Evolving Research to Tackle Teaching and Learning Challenges during Differential Equations Course: A Combination of Non-routine Problems and Teacher Training. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 14(3), 647-656. <https://doi.org/10.29333/iejme/5777>

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Bariakhtar, V. H., Dovhyi, S. O., Bozhynova, F. Ya., & Kiriukhina, O. O. (2017). Fyzyka. pidruch. dlia 9 kl. zahal. sered. osvity [Physics: a textbook for 9th grade. institutions of secondary education]. Kh.: «Ranok». URL: <https://shkola.in.ua/864-fyzyka-9-klas-bar-iakhtar-2017.html> (in Ukrainian).
2. Bariakhtar, V. H., Dovhyi, S. O., Bozhynova, F. Ya., & Kiriukhina, O. O. (2018). Fyzyka. Riven standartu: pidruch. dlia 10 kl. zakl. zahal. sered. osvity. [Physics. Standard level: textbook for 10th grade of general secondary education institutions]. Kh.: «Ranok». URL: <https://shkola.in.ua/1719-fyzyka-10-klas-bar-iakhtar-2018.html> (in Ukrainian).
3. Navchalni prohramy z matematyky (alheby i pochatkiv analizu ta heometrii) dlia uchniv 10-11 klasiv zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv. Riven standartu, dlia klasiv z pohlyblenym vyvchenniam matematyky [Educational programs in mathematics (algebra and the beginnings of analysis and geometry) for students of 10-11 grades of general educational institutions. Standard level, for advanced math classes]. Zatverdzhena Nakazom Ministerstva osvity i nauky Ukrainy vid 07.06.2017 № 804. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv> (in Ukrainian).
4. Navchalna prohrama z fizyky dlia uchniv 7-9 klasiv zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv [Physics curriculum for students of grades 7-9 of general educational institutions]. Zatverdzhena Nakazom Ministerstva osvity i nauky Ukrainy vid 07.06.2017 № 804. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas> (in Ukrainian).
5. Navchalna prohrama z fizyky dlia uchniv 10-11 klasiv zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv [Physics curriculum for students of 10-11 grades of general educational institutions]. Riven standartu ta profilnyi riven.]. Zatverdzhena Nakazom Ministerstva osvity i nauky Ukrainy vid 07.06.2017 № 804. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv> (in Ukrainian).
6. Samoilenko, A. M., Kryvosheia, S.A., & Perestiuk M.O. (2003). Dyferentsialni rivniannia v zadachakh [Differential equations in problems]. K: Lybid. URL: http://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Samoilenko_2003_504.pdf (in Ukrainian).
7. Thomas, E.J., Brunsting, J.R., & Warrick, P.L. (2010). Styles and Strategies for Teaching High School Mathematics. Corwin Press. <https://www.amazon.com/Styles-Strategies-Teaching-School-Mathematics/dp/1412968356>
8. Wadhwa, S. *Modern Methods of Teaching Mathematics* (2004). New Delhi: Sarup&Sons. <https://books.google.com.gh/books?id=vLcIR7qVkJHYC&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false>
9. Posamentier, A.S., & Smith, B.S. (2014). Teaching Secondary Mathematics: Techniques and Enrichment Units. Pearson Education: Pearson College Division. <https://www.amazon.com/Teaching-Secondary-Mathematics-Techniques-Enrichment/dp/0135000033>
10. Bibi, A., Ahmad, M., Shahid, W., Zamri, S. N. S., & Abedalaziz, N. A. M. (2019). An Evolving Research to Tackle Teaching and Learning Challenges during Differential Equations Course: A Combination of Non-routine Problems and Teacher Training. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 14(3), 647-656. <https://doi.org/10.29333/iejme/5777>

