



# ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА (PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION)

p-ISSN: 2413-1571, e-ISSN: 2413-158X

2025, 40(4), <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i4-06>

УДК: 519.17:372.851

## МОНОТОННІ ЛАНЦЮЖКИ МНОЖИН В ОЛІМПІАДНИХ ЗАДАЧАХ

**Олександр КУРЧЕНКО**

Київський національний університет  
імені Тараса Шевченка, Україна  
oleksandrurchenko@knu.ua  
<https://orcid.org/0000-0002-0417-5970>

**Ольга СИНЯВСЬКА** ✉

Державний навчальний заклад  
«Ужгородський національний університет», Україна  
olga.syniavska@uzhnu.edu.ua  
<https://orcid.org/0000-0002-2711-3940>

## MONOTONE CHAINS OF SETS IN OLYMPIAD PROBLEMS

**Olexandr KURCHENKO**

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine  
oleksandrurchenko@knu.ua  
<https://orcid.org/0000-0002-0417-5970>

**Olga SYNIAVSKA** ✉

Uzhhorod National University, Ukraine  
olga.syniavska@uzhnu.edu.ua  
<https://orcid.org/0000-0002-2711-3940>

### АНОТАЦІЯ

**Формулювання проблеми.** Задачі з теорії множин і комбінаторики часто можна зустріти на олімпіадах з математики для учнів середньої та старшої школи. Саме такі задачі вимагають від учнів застосування не тільки теоретичних знань, але й логічних міркувань та використання нестандартних методів. Одним із ефективних методів до розв'язування таких задач є використання монотонних ланцюжків множин. За допомогою монотонних ланцюжків учні зможуть оптимально розв'язувати задачі певного типу на принцип Діріхле, застосовуючи при цьому достатньо прості логічні міркування про множини та структуру її підмножин. Застосування монотонних ланцюжків множин у задачах математичних олімпіад є не лише цікавим з точки зору підготовки школярів до олімпіади, а й з точки зору формування математичної компетентності учнів. Такі задачі сприяють розвитку логічного та абстрактного мислення, вміння аналізувати, узагальнювати, будувати математичні моделі, застосовувати відомі методи (наприклад, принцип Діріхле). Вони стимулюють учнів до застосування або пошуку нестандартних підходів.

**Матеріали і методи.** У статті використовувалася аналіз наукової та навчально-методичної літератури, зокрема, посібників для підготовки до олімпіад з математики, а також методів теорії множин, комбінаторики, принцип Діріхле.

**Результати.** У роботі наведено відомості з теорії множин про множини всіх підмножин деякої множини  $X$ , монотонні ланцюжки множин, доведено твердження про мінімальне число таких ланцюжків для розбиття сім'ї всіх підмножин даної множини на монотонні ланцюжки множин. Наведені задачі, які розв'язуються за допомогою описаного підходу і можуть бути використані на математичних олімпіадах та конкурсах різних рівнів.

**Висновки.** Метод монотонних ланцюжків множин є зручним інструментом у розв'язуванні задач математичних олімпіад певного типу. Представлені результати можуть бути використані для підготовки учнів до математичних олімпіад або конкурсів, а також для поглибленого вивчення елементів теорії множин у шкільному курсі математики чи позакласній роботі.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** множина; підмножина; біномний коефіцієнт; монотонні ланцюжки множин; розбиття; математичні олімпіади.

**ДЛЯ ЦИТУВАННЯ:** Курченко О., Синявська О. Монотонні ланцюжки множин в олімпіадних задачах. *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 4. С. 40-44. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i4-06>.

### ABSTRACT

**Formulation of the problem.** Problems in set theory and combinatorics are often found in middle and high school students at mathematics Olympiads. Such problems require students to apply not only theoretical knowledge but also logical reasoning and the use of non-standard methods. One of the effective methods for solving such problems is the use of monotonic chains of sets. With the help of monotonic chains, students can optimally solve problems of a particular type using the Dirichlet principle while applying fairly simple logical reasoning about the set and the structure of its subsets. The use of monotonic chains of sets in Olympiad problems is interesting from the point of view of preparing students for the Olympiad and from the point of view of forming students' mathematical competence. Such problems contribute to the development of logical and abstract thinking, the ability to analyze, generalize, build mathematical models, and apply well-known methods (for example, the Dirichlet principle). They stimulate students to use or seek out non-standard approaches.

**Materials and methods.** The article used an analysis of scientific and educational literature, particularly manuals for preparing for mathematics Olympiads, as well as methods of set theory, combinatorics, and the Dirichlet principle.

**Results.** The paper presents information from set theory about the set of all subsets of a specific set  $X$ , monotone chains of sets. It proves the statement about the minimal number of such chains for splitting the family of all subsets of a given set into monotone chains of sets. The problems are presented and solved using the described approach. They can be used in mathematical Olympiads and competitions at various levels.

**Conclusions.** The method of monotone chains of sets is a convenient tool for solving Olympiad problems of a specific type. The presented results can be used to prepare students for mathematical Olympiads or competitions and for an in-depth study of the elements of set theory in a school mathematics course or extracurricular work.

**KEYWORDS:** set; subset; binomial coefficient; monotone chains of sets; partition; Mathematical Olympiad.

**FOR CITATION:** Kurchenko, O., & Syniavska, O. (2025). Monotone chains of sets in olympiad problems. *Physical and Mathematical Education*, 40(4), 40-44. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i4-06>.

**ВСТУП**

**Постановка проблеми.** Одним із важливих напрямів у діяльності вчителя математики є позакласна робота та підтримка і розвиток обдарованих учнів. Особливої уваги при цьому заслуговує вдосконалення підходів до викладання математики таким школярам, зокрема, при підготовці їх до олімпіад з математики. Для цього вчителям потрібно розробляти нові підходи до методики викладання, розв'язування нестандартних задач, аналізувати завдання з попередніх років, а також вивчати попередній досвід участі в олімпіадах. Розв'язування задач математичних олімпіад можна вважати вагомим показником математичних здібностей учнів. Участь в олімпіадах не лише виявляє школярів з неабиякими математичними здібностями, а й сприяє формуванню в них логічного мислення, креативності, самостійності, уміння працювати в умовах змагання. Серед основних цілей проведення математичних олімпіад варто відзначити розвиток інтересу до математики, підвищення математичної культури та інтелектуального рівня учнів.

Задачі олімпіад з математики, зазвичай, відзначаються підвищеною складністю, вимагають нестандартних міркувань, використання нових підходів та особливих методів розв'язання. Серед основних типів олімпіадних завдань з математики можна виділити задачі логічного характеру (застосування принципу Діріхле, методу інваріантів, вибору стратегії успіху, комбінаторики) (Вороний, 2008). Одним із ефективних підходів до розв'язування таких задач є використання впорядкованих множин, зокрема, монотонних ланцюжків множин. Розгляд таких задач у рамках підготовки до олімпіад підвищує мотивацію до вивчення предмету, вчить учнів бачити математичні закономірності у нестандартних ситуаціях, а також розвиває інтерес до практичного застосування математики.

**Аналіз актуальних досліджень.** Задачі з теорії множин і комбінаторики часто можна зустріти на олімпіадах з математики для учнів середньої та старшої школи (Сарана, 2011). Розв'язування таких задач не лише розвиває математичне мислення, а й сприяє формуванню ключової математичної компетентності, що є важливим результатом навчання в умовах Нової української школи (Васильєва та ін., 2021). Математична компетентність включає знання, розуміння, виконання, використання та думку про математику та математичну діяльність у різних контекстах, де застосовується або може застосовуватися математика (Niss & Hojgaard, 2019). Згідно з (Semenets et al. 2022), компетентність математичної освіти, переорієнтація з моделі теоретичних знань на модель компетентності зумовлюють новітнє наукове переосмислення місця і ролі внутрішніх ресурсів особистості, які забезпечують ефективність формування та розвитку математичної компетентності. Під математичною компетентністю можна розуміти уміння бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, вміння будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані результати, оцінювати похибку обчислень (Глобін та ін., 2015). Важливою її складовою є логічна компетентність – володіння дедуктивним методом доведення та спростування тверджень, застосування математичної та логічної символіки на практиці (Глобін та ін., 2015).

Монотонні ланцюжки множин та їх застосування у задачах різного рівня складності розглядалася в різних роботах із теорії множин, комбінаторики, теорії функцій тощо. Наприклад, в роботах Nelsen & Schmidt (1991), Lehtonen (2006), Inamdar (2023). Багато авторів застосовували монотонні ланцюжки множин у наукових дослідженнях, але не досліджували їх застосування для розв'язування задач олімпіадного типу. Таким чином, потребує подальшого дослідження методика (практичний і дидактичний аспект) застосування цих структур для розв'язування та розробки олімпіадних задач з математики.

**Мета статті.** Метою даної статті є застосування монотонних ланцюжків множин для розв'язування задач з математики підвищеної складності, зокрема, задач олімпіадного типу. Зосереджено увагу на обґрунтування ефективності використання таких структур у задачах логічного типу, наприклад таких, що розв'язуються із застосуванням принципу Діріхле й елементів теорії множин.

**МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ**

У процесі дослідження використано аналіз наукової та навчально-методичної літератури, зокрема посібників для проведення та підготовки до участі у олімпіадах з математики, а також методи теорії множин, комбінаторики, принцип Діріхле (Poop & Shiu, 2008). Доведені твердження супроводжуються прикладами, зокрема, із завдань конкретних математичних олімпіад.

**РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ****1. Множина всіх підмножин множини  $X$** 

Нехай  $X$  – скінченна множина,  $|X|$  – число її елементів,  $2^X$  – сім'я всіх підмножин множини  $X$ , включаючи порожню множину  $\emptyset$  і множину  $X$ .

**Приклад 1.** Нехай  $X = \{1, 2, 3\}$ . Тоді сім'я всіх підмножин множини  $X$

$$2^X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, X\}.$$

Зауважимо, що  $|X| = 3$ ,  $|2^X| = 8$ , так що

$$|2^X| = 2^{|X|}. \quad (1)$$

Рівність (1) справджується для довільної скінченної множини  $X$ . Справді, формуючи підмножину, будемо перебирати елементи множини  $X$ . Для кожного елемента маємо дві можливості: включати його до підмножини або не включати. За комбінаторним правилом множення (Semanisnina, 2011) існують рівно

$$\underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{|X|} = 2^{|X|}$$

різних підмножин множини  $X$  (включаючи  $\emptyset$  і  $X$ ).

**Задача 1.** Вісім учнів відвідують три гуртки (кожний учень відвідує хоча б один гурток). Доведіть, що серед них є хоча б два учні, які відвідують одні і ті самі гуртки.

**Розв'язання.** Сім'я всіх непорожніх підмножин множини всіх гуртків складається з  $2^3 - 1 = 7$  наборів гуртків. За принципом Діріхле, хоча б два з восьми учнів будуть мати один і той же набір гуртків. Це буде означати, що ці учні відвідують одні і ті самі гуртки.

## 2. Розбиття сім'ї всіх підмножин множини $X$ на монотонні ланцюжки

Нехай  $A_1, A_2, \dots, A_k$  – підмножини множини  $X$ . Ланцюжок множин  $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$  є монотонним, якщо

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_k$$

або

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_k$$

(тут включення є строгі).

**Приклад 2.** Нехай  $X = \{1,2,3\}$ . Тоді

$$\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$$

– монотонний ланцюжок множини  $X$ , оскільки

$$\{1\} \subset \{1,2\} \subset \{1,2,3\}.$$

Набір монотонних ланцюжків  $L_1, L_2, \dots, L_N$  множини  $X$  називається розбиттям сім'ї всіх підмножин множини  $X$ , якщо:

$$1) \emptyset \cup L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_N = 2^X;$$

$$2) L_i \cap L_j = \emptyset, i \neq j, i, j \in \{1,2, \dots, N\}.$$

**Приклад 3.** Нехай  $X = \{1,2,3\}$ . Набір монотонних ланцюжків:

$$L_1 = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\},$$

$$L_2 = \{\{2\}, \{2,3\}\},$$

$$L_3 = \{\{3\}, \{1,3\}\},$$

є розбиттям сім'ї  $2^X$ . Дійсно, виконуються умови:

$$1) \emptyset \cup L_1 \cup L_2 \cup L_3 = 2^X;$$

$$2) L_1 \cap L_2 = \emptyset, L_1 \cap L_3 = \emptyset, L_2 \cap L_3 = \emptyset.$$

**Задача 2.** Чотири учні відвідують три гуртки (кожний учень відвідує хоча б один гурток). Доведіть, що серед них є хоча б два учні  $A$  і  $B$ , такі, що всі гуртки, які відвідує учень  $A$ , відвідує й учень  $B$ .

**Розв'язання.** Нехай  $X = \{1,2,3\}$ . У прикладі 3 вказано розбиття сім'ї множин  $2^X$  на три монотонні ланцюжки  $L_1, L_2, L_3$ . За принципом Діріхле (Roop & Shiu, 2008), знайдуться хоча б два учні, такі, що набори гуртків, які вони відвідують, потрапляють до одного монотонного ланцюжка. Для цих учнів виконується твердження задачі: всі гуртки, що відвідує один з цих учнів, відвідує і другий.

Наступна задача пропонувалась у шостому і сьомому класах на другому етапі Всеукраїнської математичної олімпіади у 2000-2001 навчальному році (Лейфура та ін., 2008).

**Задача 3.** одинадцять учнів відвідують п'ять гуртків (учень не обов'язково відвідує всі гуртки). Доведіть, що серед них є хоча б два учні  $A$  і  $B$ , такі, що всі гуртки, які відвідує учень  $A$ , відвідує й учень  $B$ .

**Розв'язання.** Нехай  $X = \{1,2,3,4,5\}$  – множина всіх гуртків. Сім'я  $2^X$  всіх наборів гуртків має таке розбиття на 10 монотонних ланцюжків

$$L_1 = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, X\},$$

$$L_2 = \{\{2\}, \{2,3\}, \{2,3,4\}, \{2,3,4,5\}\},$$

$$L_3 = \{\{3\}, \{3,4\}, \{3,4,5\}, \{1,3,4,5\}\},$$

$$L_4 = \{\{4\}, \{4,5\}, \{4,5,1\}, \{4,5,1,2\}\},$$

$$L_5 = \{\{5\}, \{5,1\}, \{5,1,2\}, \{5,1,2,3\}\},$$

$$L_6 = \{\{1,3\}, \{1,3,4\}\},$$

$$L_7 = \{\{1,4\}, \{1,4,2\}\},$$

$$L_8 = \{\{2,4\}, \{2,4,5\}\},$$

$$L_9 = \{\{2,5\}, \{2,5,3\}\},$$

$$L_{10} = \{\{3,5\}, \{3,5,1\}\}.$$

За принципом Діріхле, знайдуться хоча б два учні, такі, що набори гуртків, які вони відвідують, потрапляють до одного монотонного ланцюжка. Для цих учнів виконується твердження задачі: всі гуртки, що відвідує один з цих учнів, відвідує і другий.

**Задача 4.** Двадцять один учень відвідують п'ять гуртків (учень не обов'язково відвідує всі гуртки). Доведіть, що серед них є хоча б три учні  $A, B$  і  $C$ , такі, що всі гуртки, які відвідує  $A$ , відвідує й  $B$ ; всі гуртки, які відвідує  $B$ , відвідує й  $C$ .

**Розв'язання.** Нехай  $X = \{1,2,3,4,5\}$  – множина всіх гуртків. Застосуємо вказане у розв'язанні попередньої задачі розбиття сім'ї  $2^X$  на 10 монотонних ланцюжків. За принципом Діріхле, знайдуться хоча б три учні, такі, що набори гуртків, які вони відвідують, потрапляють до одного монотонного ланцюжка. Для цих учнів виконується твердження задачі.

## 3. Мінімальне число монотонних ланцюжків

Символом  $[x]$  позначимо цілу частину дійсного числа  $x$  – найбільше ціле число, яке не перевищує  $x$ . Наприклад,  $[23,54] = 23$ ,  $[\pi] = 3$ ,  $[-\pi] = -4$ . Нагадаємо також, що  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  – біномний коефіцієнт.

**Теорема 1.** Нехай  $|X| = d$ . Кожне розбиття сім'ї  $2^X$  на монотонні ланцюжки містить не менше  $C_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$  монотонних ланцюжків.

**Доведення.** Дві різні  $\binom{d}{2}$  елементні підмножини множини  $X$  не можуть належати одному й тому ж монотонному ланцюжку. Як відомо з комбінаторики, всього є  $C_d^{\binom{d}{2}}$  таких підмножин. Отже, число монотонних ланцюжків не менше  $C_d^{\binom{d}{2}}$ . Теорему доведено.

**Теорема 2.** Нехай  $|X| = d$ . Існує розбиття сім'ї  $2^X$  на  $C_d^{\binom{d}{2}}$  монотонні ланцюжки.

**Доведення.** Нехай  $X = \{1, 2, \dots, d\}$ . Зауважимо, що  $C_d^1, C_d^2, \dots, C_d^{\binom{d}{2}}$  – зростаючий набір біномних коефіцієнтів. Монотонні ланцюжки  $L_1, L_2, \dots, L_d$  починаємо з одноелементних множин і на кожному кроці робимо максимально можливої довжини:

$$L_1 = \{\{1\}, \{1, 2\}, \dots, \{1, 2, \dots, d-1\}, X\},$$

$$L_2 = \{\{2\}, \{2, 3\}, \dots, \{2, 3, \dots, d-1\}\},$$

...

$$L_d = \{\{d\}, \{d, 1\}, \dots, \{d, 1, 2, \dots, d-2\}\}.$$

У цих монотонних ланцюжках відсутні  $C_d^2 - C_d^1$  двоелементні підмножини множини  $X$ . У наступній серії монотонних ланцюжків кожний ланцюжок стартує з ще не задіяної двоелементної множини і має максимально можливої довжину. Після цього залишаються не задіяними в побудованих монотонних ланцюжках  $C_d^3 - (C_d^1 - (C_d^2 - C_d^1)) = C_d^3 - C_d^2$  трьохелементні множини. Будуємо відповідну серію  $C_d^3 - C_d^2$  монотонних ланцюжків, починаючи з відповідних множин з трьох елементів. Після цього кроку матимемо  $C_d^3 - C_d^2 + C_d^2 - C_d^1 + C_d^1 = C_d^3$  монотонних ланцюжків. Всі підмножини множини  $X$  будуть вичерпані на  $\binom{d}{2}$ -му кроці, оскільки набір біномних коефіцієнтів  $C_d^{\binom{d}{2}}, C_d^{\binom{d}{2}+1}, \dots, C_d^d$  незростаючий.

Таким чином, побудовано розбиття сім'ї  $2^X$  на  $C_d^{\binom{d}{2}}$  монотонних ланцюжків. Теорему доведено.

Із попередніх теорем 1-2 слідує наступне твердження.

**Наслідок 1.** Нехай  $|X| = d$ . Мінімальне число монотонних ланцюжків, на яке можна розбити сім'ю  $2^X$ , дорівнює  $C_d^{\binom{d}{2}}$ .

Наприклад, при  $d = 3$ :  $C_3^{\binom{3}{2}} = C_3^1 = 3$ ; при  $d = 5$ :  $C_5^{\binom{5}{2}} = C_5^2 = 10$ .

**Задача 5.** Нехай  $d \geq 3$  натуральне число.  $C_d^{\binom{d}{2}} + 1$  учнів відвідують  $d$  гуртків (кожен учень відвідує хоча б один гурток). Доведіть, що серед них є два учні  $A$  і  $B$ , такі, що всі гуртки, які відвідує  $A$ , відвідує й  $B$ .

**Розв'язання.** Нехай  $X = \{1, 2, \dots, d\}$ . Розглянемо розбиття сім'ї  $2^X$ , яке містить  $C_d^{\binom{d}{2}}$  монотонних ланцюжків. За принципом Діріхле, знайдуться хоча б два учні, такі, що набори гуртків, які вони відвідують, потрапляють до одного монотонного ланцюжка. Для цих учнів виконується твердження задачі.

## ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

У цій статті дано означення і досліджено розбиття сім'ї всіх підмножин скінченної множини  $X$  на монотонні ланцюжки підмножин. Ланцюжки одного й того ж розбиття не містять спільних підмножин. Отриманий результат про мінімальну кількість монотонних ланцюжків підмножин у розбитті.

Ознайомлення вчителів, а через них і учнів, з поняттями сім'ї всіх підмножин заданої множини, монотонного ланцюжка підмножин, розбиття сім'ї всіх підмножин заданої скінченної множини  $X$  на монотонні ланцюжки, результат про мінімальну кількість монотонних ланцюжків підмножин у такому розбитті сприятиме розвитку математичної, зокрема теоретико-множинної, компетентності учнів середніх навчальних закладів.

Розглянуті теоретичні поняття і отримані результати застосовані для укладання і розв'язування задач математичних олімпіад різного рівня.

Подальші дослідження можуть бути спрямовані на підрахунок кількості розбиттів з мінімальним числом монотонних ланцюжків підмножин, підрахунок числа всіх можливих розбиттів на монотонні ланцюжки, а також на укладання і розв'язування задач математичних олімпіад.

Отримані результати можуть бути включені до вибіркового курсів для студентів-математиків педагогічних університетів з підготовки до олімпіад з математики різного рівня, укладання та розв'язування задач математичних олімпіад.

## КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори підтверджують відсутність фінансових, особистих чи інших інтересів, що можуть розглядатися як потенційний конфлікт інтересів щодо публікації цієї статті.

## ФІНАНСУВАННЯ

Робота виконана за відсутності фінансової підтримки з боку будь-яких організацій.

## ДОСТУПНІСТЬ ДАНИХ

Це теоретичне дослідження не передбачає використання додаткових наборів даних.

## ВИКОРИСТАННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Інструменти штучного інтелекту не використовувались при написанні цієї роботи.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- Inamdar, T. C. (2023). On strong chains of sets and functions. *Mathematika*, 69 (1), 286-301. <https://doi.org/10.1112/mtk.12183>
- Lehtonen, E. (2006). Descending Chains and Antichains of the Unary, Linear, and Monotone Subfunction Relations. *Order*, 23, 129-142. <https://doi.org/10.1007/s11083-006-9036-y>
- Nelsen, R. B., & Schmidt, H. (1991). Chains in Power Sets. *Mathematics Magazine*, 64 (1), 23-31. <https://doi.org/10.1080/0025570X.1991.11977568>
- Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educ Stud Math*, 102, 9-28. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9>
- Semenets, S. P., Semenets, L. M., Andriichuk, N. M., & Lutsyk, O. M. (2022). Mathematical competence and mathematical abilities: structural relations and development methodology. *Journal of Physics Conference Series*, 2288 (1), 012023. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2288/1/012023>
- Бардачов, Ю. М., Соколова Н.А., & Ходаков В.Є. (2002). *Дискретна математика: Підручник*. К.: Вища шк.
- Васильєва, Д. В., Вашуленко, О. П., & Волошена В. В. (2021). *Методика компетентнісно орієнтованого навчання математики в ліцеї на рівні стандарту: методичний посібник*. К.: КОНВІ ПРИНТ.
- Вишеський, В.А., & Перестюк, М.О. (2010). *Комбінаторика. Перші кроки*. Кам'янець-Подільський, Аксиома.
- Вороний, О. М. (2008). *Готуємось до олімпіад з математики*. Х.: Основа.
- Глобін О.І., Бурда, М.І., Васильєва, Д.В., Волошена, В.В., Вашуленко, О.П., Мацько, Н.Д., & Хмара, Т.М. (2015). *Компетентнісно орієнтована методика навчання математики в основній школі: Метод. посібник*. К.: Педагогічна думка.
- Лейфура, В., Мігельман, І., Радченко, В., & Ясінський, В. (2008). *Математичні олімпіади школярів України: 2001–2006 рр.: навч.-метод. посібник*. Львів: Каменяр.
- Сарана, О.А. (2011). *Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навчальний посібник (2 вид.)*. Тернопіль: Навчальна книга: Богдан.

## REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

- Inamdar, T. C. (2023). On strong chains of sets and functions. *Mathematika*, 69 (1), 286-301. <https://doi.org/10.1112/mtk.12183>
- Lehtonen, E. (2006). Descending Chains and Antichains of the Unary, Linear, and Monotone Subfunction Relations. *Order*, 23, 129-142. <https://doi.org/10.1007/s11083-006-9036-y>
- Nelsen, R. B., & Schmidt, H. (1991). Chains in Power Sets. *Mathematics Magazine*, 64 (1), 23-31. <https://doi.org/10.1080/0025570X.1991.11977568>
- Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educ Stud Math*, 102, 9-28. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9>
- Semenets, S. P., Semenets, L. M., Andriichuk, N. M., & Lutsyk, O. M. (2022). Mathematical competence and mathematical abilities: structural relations and development methodology. *Journal of Physics Conference Series*, 2288 (1), 012023. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2288/1/012023>
- Bardachov, Yu. M., Sokolova N.A., & Khodakov V.Ye. (2002). *Dyskretna matematika: Pidruchnyk [Discrete Mathematics: Textbook]*. K.: Vyshcha shk. (in Ukrainian).
- Vasylyeva, D. V., Vashulenko, O. P., & Voloshena V. V. (2021). *Metodyka kompetentnisno oriientovanoho navchannia matematyky v litsei na rivni standartu: metodychnyi posibnyk [Methodology of Competency-Based Teaching of Mathematics in Lyceum at the Standard Level: Methodological Guide]*. K.: KONVI PRINT (in Ukrainian).
- Vyshensky, V.A., & Perestyuk, M.O. (2010). *Kombinatoryka. Pershi kroky [Combinatorics. First Steps]*. Kamianets-Podilsky, Axioma (in Ukrainian).
- Voronyi, O. M. (2008). *Hotuiemos do olimpiad z matematyky [Preparing for the Mathematics Olympiads]*. Kh.: Osнова (in Ukrainian).
- Globin O.I., Burda, M.I., Vasylyeva, D.V., Voloshena, V.V., Vashulenko, O.P., Matsko, N.D., & Khmara, T.M. (2015). *Kompetentnisno oriientovana metodyka navchannia matematyky v osnovnii shkoli: Metod. posibnyk [Competency-oriented methodology of teaching mathematics in primary school: Methodological manual]*. K.: Pedahohichna dumka (in Ukrainian).
- Leyfura, V., Mitelman, I., Radchenko, V., & Yasinsky, V. (2008). *Matematychni olimpiady shkoliariv Ukrainy: 2001–2006 rr.: navch.-metod. posibnyk [Mathematical Olympiads of Schoolchildren of Ukraine: 1991–2000: teaching and methodical manual]*. Lviv: Kamenyar (in Ukrainian).
- Sarana, O.A. (2011). *Matematychni olimpiady: proste i skladne poruch: Navchalnyi posibnyk (2 vyd.) [Mathematical Olympiads: simple and complex side by side: Textbook (2 ed.)]*. Ternopil: Navchalna knyha - Bohdan (in Ukrainian).

| Матеріал надійшов до редакції: 23.04.2025 р. | Прийнято до друку: 05.06.2025 р. | Опубліковано: 29.09.2025 р. |



This work is licensed under Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.