Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Синюкова О.М., Чепок О.Л. Практико-орієнтована форма організації процесу навчання як необхідна передумова опанування конструктивних елементів евклідової геометрії у закладах загальної середньої освіти. Фізико-математична освіта. 2020. Випуск 4(26). С. 100-106.

Sinyukova H., Chepok O. Practice-oriented form of organizing the teaching-learning process as a necessary precondition for mastering the constructive elements of euclidean geometry at institutions f general secondary education. Physical and Mathematical Education. 2020. Issue 4(26). P. 100-106.

DOI 10.31110/2413-1571-2020-026-4-017
УДК 378

О.М. Синюкова
Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського», Україна
olachepok@ukr.net
ORCID: 0000-0002-8340-6940
О.Л. Чепок
Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського», Україна
olachepok@ukr.net
ORCID: 0000-0002-2067-6564

ПРАКТИКО-ОРІЄНТОВАНА ФОРМА ОРГАНІЗАЦІЇ ПРОЦЕСУ НАВЧАННЯ ЯК НЕОБХІДНА ПЕРЕДУМОВА ОПАНУВАННЯ КОНСТРУКТИВНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ЕВКЛІДОВОЇ ГЕОМЕТРІЇ У ЗАКЛАДАХ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *Умовиводи конструктивного характеру аксіоматичної теорії евклідової геометрії утворюють так звану елементарну евклідову геометрію, положення якої складають основну частину освітнього контенту курсів геометрії закладів загальної середньої освіти. Якщо навчальний предмет, сформований на базі певної аксіоматичної теорії, містить суттєву кількість елементів саме її конструктивної (елементарної) складової, то опанування контенту цієї складової без організації у визначеному розумінні практико-орієнтованого процесу навчання представляється неможливим. Форми, прийоми і методи подібного навчання змінюються, у першу чергу, завдяки невпинному прискоренню науково-технічного прогресу. Дослідження доцільних сучасних форм, прийомів і методів впровадження практико-орієнтованого навчання під час опанування у закладах загальної середньої освіти визначених навчальною програмою елементів елементарної евклідової геометрії представляється задачею вельми актуальною.*

Матеріали і методи. *Для проведення досліджень використано як теоретичні методи, насамперед, пов'язані з аналізом відповідних інформаційних джерел, так і емпіричні, які ґрунтуються на власному практичному досвіді та дискусійного характеру обговореннях визначених вище питань з вчителями-практиками.*

Результати. *Наведено і проаналізовано конкретні доцільні форми, прийоми і методи практико-орієнтованого навчання по відношенню до елементарної складової систематичних курсів евклідової геометрії закладів загальної середньої освіти. У широкому розумінні практико-орієнтоване навчання передбачає отримання нових знань, умінь та навичок як результат власної свідомої активної діяльності. А така діяльність, як і кожна діяльність людини, є покроковою, конструктивною за своєю сутністю. Звідси випливає, що якісне опанування визначених навчальною програмою розділів елементарної евклідової геометрії як відповідних конструктивних складових евклідової геометрії вимагає організації усього освітнього процесу саме у вигляді практико-орієнтованої системи навчання.*

Висновки. *На підставі обґрунтувань теоретичного характеру практико-орієнтовану у широкому розумінні форму організації процесу навчання представлено як необхідну передумову вдалого опанування положень елементарної евклідової геометрії у закладах загальної середньої освіти, розкрито напрямки організації відповідної цілісної системи практико-орієнтованого навчання. Подальші дослідження можна спрямувати на створення конкретних практичних рекомендацій для відповідної категорії освітян.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *аксіоматика, аксіоматична теорії, конструктивізм, конструктивна складова аксіоматичної теорії, евклідова геометрія, елементарна евклідова геометрія, практико-орієнтоване навчання, заклади загальної середньої освіти, теоретичне підґрунтя систематичного курсу евклідової геометрії, двоїстий характер курсу евклідової геометрії.*

ВСТУП

Постановка проблеми. Умовиводи та означення конструктивного характеру утворюють так звану елементарну складову кожної аксіоматичної теорії. Виходячи з подібної точки зору, на відміну від обмеженого, буденного розуміння, елементарна геометрія – це не просто розділи евклідової геометрії, які у даний конкретний час утворюють контент курсів геометрії закладів загальної середньої освіти, а елементарна складова відповідної аксіоматичної теорії евклідової геометрії. Варто відзначити також, що поняття про елементарну евклідову геометрію як конструктивну складову певної аксіоматичної теорії евклідової геометрії, як і у загальному випадку, поняття про елементарну складову певної аксіоматичної теорії має відносний характер щодо свого змістового наповнення. Часто, таке змістове наповнення суттєвим чином змінюється при переході від однієї обраної аксіоматики до іншої, еквівалентної до неї.

Цілком природно, що при побудові курсів геометрії закладів загальної середньої освіти варто прагнути до збільшення у цих курсах міркувань саме конструктивного характеру. З теоретичної точки зору є два шляхи до досягнення подібної мети. По-перше, можна звузити відповідний програмний об'єм матеріалу з евклідової геометрії, вилучивши з нього низку умовиводів не конструктивного характеру. По-друге, можна перетворити частину умовиводів не конструктивного характеру на умовиводи конструктивного характеру за допомогою безпосереднього перенесення таких умовиводів у категорію аксіом або такою загальною зміною системи аксіом, яка надасть можливість замінити відповідні міркування не конструктивного характеру на міркування конструктивного характеру. Задача розробки відповідного освітнього контенту, знаходження при цьому найоптимальніших варіантів поєднання обох визначених шляхів, є однією з найактуальніших задач методики навчання геометрії у закладах загальної середньої освіти сьогодення, насамперед, з точки зору впровадження у закладах загальної середньої освіти практико-орієнтованого підходу до процесу навчання.

Форми, прийоми і методи подібного навчання змінюються, у першу чергу, завдяки невпинному прискоренню науково-технічного прогресу. Дослідження доцільних сучасних форм, прийомів і методів впровадження практико-орієнтованого навчання під час опанування у закладах загальної середньої освіти визначених навчальною програмою елементів елементарної евклідової геометрії представляється задачею вельми актуальною.

Аналіз актуальних досліджень. Результатам досліджень сутності практико-орієнтованого процесу навчання і доцільності комплексного впровадження різних його форм на різних етапах і різних напрямках освіти присвячено достатньо багато наукових робіт як минулих років, так і сьогодення (Попов, 1913; McLeod, 1992; Trowbridge, 2001). Цілком зрозуміло, що, по відношенню до кожного навчального предмету, ця тема, за своєю сутністю є невичерпною. Зрозуміло також, що будь-які практичні дії людей не можуть не носити у вищенаведеному розумінні конструктивного характеру. Отже, для будь-якої наукової теорії опанування її контенту за допомогою практико-орієнтованого процесу навчання і її конструктивна складова нерозривним чином пов'язані між собою.

Якщо навчальний предмет, сформований на базі певної наукової теорії, містить суттєву кількість елементів саме її конструктивної (елементарної) складової, то опанування контенту цієї складової без організації у визначеному розумінні практико-орієнтованого процесу навчання представляється неможливим. Форми, прийоми і методи подібного навчання залежать як від відповідного змістового наповнення, так і від технічних можливостей організації усього навчального процесу. Останні невпинно вдосконалюються завдяки шаленому прискоренню науково-технічного прогресу. І вже лише завдяки цьому пошуки нових форм, методів і прийомів організації практико-орієнтованого процесу опанування будь-якого навчального предмету з точки зору методики його навчання залишається задачею актуальною. А, як правило, певні зміни відбуваються і у відповідному змістовому наповненні, у тому числі, у його елементарній складовій.

Мета статті. Як відомо, твердження елементарної у вищенаведеному розумінні евклідової геометрії утворюють основну частину контенту курсів геометрії закладів загальної середньої освіти. Мета даної роботи полягає у проведенні теоретичних досліджень щодо визначення доцільних елементів практико-орієнтованого навчання, спрямованого на опанування саме цієї частини даного контенту, з перспективою розробки на підставі таких досліджень доцільних практичних рекомендацій для відповідної категорії освітян.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Робота виступає як теоретичне підґрунтя для реалізації подальших методичних розробок практичного характеру. Для проведення досліджень використано як теоретичні методи, насамперед, пов'язані з аналізом відповідних інформаційних джерел, так і емпіричні, які ґрунтуються на власному практичному досвіді та дискусійного характеру обговореннях визначених вище питань з вчителями-практиками.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Існують різні відповіді на питання про те, що варто мати на увазі під значеннями термінів «конструювати», «конструктивний характер», «конструктивізм» у буденному розумінні, у розумінні математики як науки, у історії та філософії математики, при викладанні математики у профільних закладах вищої освіти, при викладанні математики у закладах загальної середньої або передвищої освіти. Але, при будь-якому розумінні тут мається на увазі можливість отримання результату за допомогою реалізації скінченної кількості конкретних кроків, виходячи зі скінченної кількості передумов. У буденному розумінні, у практичній діяльності людей по-іншому і бути не може. Нескінченна кількість, нескінченність як певне єдине ціле – це, насамперед, математичні абстракції, що знаходять своє практичне застосування лише через скінченну кількість своїх скінченних наближень, тобто, лише через так звану ефективну процедуру своєї наближеної реалізації.

Як добре відомо, математика Давньої Греції була конструктивною. На думку академіка О. Д. Александрова, характерною особливістю математики сьогодення є зростання ролі алгоритмів і алгоритмічних розв'язків, проникнення їх у такі основи математики, головні поняття яких визначаються алгоритмічно. З його точки зору, можна стверджувати, що тут має місце повернення до принципів грецької математики на підставі досвіду, отриманого як результат усього попереднього розвитку (Александров, 1988).

Починаючи з першої половини XX століття сучасну математику найчастіше представляють як науку про аксіоматичні теорії (Бурбакі, 1963; Єгоров, 1976). (Одночасно, у дослідженнях з основ математики було наведено зразки математичних теорій, які неможливо представити у якості аксіоматичних, значення такого відкриття, як з математичної, так і з філософської точки зору, важко переоцінити (Френкель&Бар-Хіллел, 1966).) Евклідова геометрія, вже історично, представляє собою перший досконалий зразок аксіоматичної теорії. Основу, базу подібної теорії, як відомо, створює її аксіоматика. Аксіоматику вважають конструктивною або такою, що має конструктивний характер, якщо вона містить скінченну кількість назв неозначуваних множин, скінченну кількість назв неозначуваних відношень і скінченну кількість аксіом. Конструктивними саме у даному розумінні є переважна більшість аксіоматик класичної математики.

Окреслений вище підхід до конструктивного характеру аксіоматики, фактично, ототожнює конструктивний характер з фінітним. Одночасно, з точки зору конструктивізму, аналізують і окремі аксіоми. Конструктивними за своїм змістом вважають такі аксіоми, які забезпечують існування і однозначну визначеність певної множини (скінченної кількості певних множин) за умови існування певної іншої множини (скінченної кількості інших множин). Одночасно, аксіоми, які забезпечують лише існування множини певного виду, а не існування певної однозначно визначеної множини, і аксіоми, які взагалі не містять ані умовного, ані абсолютного твердження про існування певної множини, вважають не конструктивними за своїм змістом (Френкель&Бар-Хіллел, 1966). Виходячи з подібних міркувань, можна було би вважати конструктивними лише ті аксіоматики, всі аксіоми яких є конструктивними за своїм змістом. Подібна точка зору у математиці існує (Єгоров, 1976), але подібний підхід до аналізу особливостей конструктивізму здається занадто вузьким і, в силу цього, не завжди доцільним.

Аксіоматична теорія, породжена аксіоматикою, або теорія аксіоматики містить саму аксіоматику, а також, всі можливі твердження (теореми), отримані з її аксіом виключно за допомогою законів математичної логіки, та всі поняття, які можна за допомогою тієї ж математичної логіки означити через неозначувані поняття даної аксіоматики, або через попередньо означені поняття.

Якщо у аксіоматиці певної аксіоматичної теорії до назв неозначуваних понять не входять терміни математичної логіки, а її аксіоми не містять правил логічного виведення, то і аксіоматика, і відповідна аксіоматична теорія називаються неформальними (змістовними). І навпаки, якщо поняття і аксіоми математичної логіки, що характеризують правила логічного виведення, включено до аксіоматики явним чином, то аксіоматика і відповідна аксіоматична теорія називаються формальними (або дедуктивними). Отже, формальні аксіоматичні теорії утворюються як результат об'єднання аксіоматичної системи логіки з певною змістовною аксіоматичною теорією.

Переважна більшість аксіоматичних теорій класичної математики є неформальними. Їх побудова передбачає використання так званої буденної або інтуїтивної логіки, яка послідовно формується у людини під час опанування математики. Класичні аксіоматики евклідової геометрії, як і ті їх спрощені варіанти, що покладено у основи курсів геометрії закладів загальної середньої освіти, також носять неформальний характер. Наведена характеристика аксіоматики з точки зору її конструктивного характеру у повному ступені підходить лише для неформальних аксіоматик. Для формальних аксіоматик вона є значно складнішою в силу того, що формальні аксіоматики передбачають використання спеціальної символьної мови, яка також аналізується з точки зору різних підходів до поняття про конструктивний характер (Столл, 1968).

Під умовиводами конструктивного характеру у математиці, у межах певної аксіоматичної теорії, мають на увазі умовиводи, отримані на підставі скінченної кількості вихідних даних, у результаті реалізації скінченної послідовності визнаних допустимими кроків міркувань. Отже, міркування конструктивного характеру є можливими і у межах аксіоматичної теорії, яка сама по собі конструктивного характеру не має. Особливе місце серед умовиводів конструктивного характеру грають теореми існування конструктивного характеру, тобто, умовиводи конструктивного характеру, результатом яких є обґрунтування існування у межах відповідної аксіоматичної теорії певного математичного об'єкту. При цьому конструктивним не вважають обґрунтування існування того чи іншого математичного об'єкту, проведене виключно на підставі апеляції до логічної неминучості.

Означення аксіоматичної теорії вважають означенням конструктивного характеру, якщо воно виокремлює означуваний об'єкт з більш широкої множини об'єктів за допомогою скінченної кількості ознак, наявність яких допускає ефективну (за скінченну кількість кроків) перевірку. Вважають також, що означення певного математичного об'єкту має конструктивний характер, якщо воно супроводжується конструктивним доведенням існування означуваного об'єкта.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Загальновизнаним і загальновідомим є той факт, що евклідова геометрія, як аксіоматична теорія, найкращим чином відтворює властивості просторових форм безпосередньо оточуючого людину довкілля. При цьому під таким довкіллям мають на увазі, насамперед, довкілля, у якому людина здійснює свою буденну діяльність. (Це не так звані «макросвіт» та «мікросвіт», властивості просторових форм яких найточнішим чином відтворюються за допомогою інших геометрій.) Основу кожної аксіоматичної теорії складає її аксіоматика. Теоретично, існує безліч різних, еквівалентних між собою у тому розумінні, що вони породжують однакову аксіоматичну теорію, аксіоматик евклідової геометрії. Практично, зрозуміло, розроблено лише скінченну кількість з них. Всі відомі розроблені аксіоматики евклідової геометрії у вищевказаному сенсі мають конструктивний характер. Основні неозначувані множини та основні неозначувані відношення цих аксіоматик є математичними абстракціями реальних «фізичних» сукупностей об'єктів оточуючого людину середовища, точніше, можуть розглядатися як такого типу абстракції при виконанні певних умов (і, відповідно, не можуть розглядатися при зміні подібних умов). Навчальні програми з геометрії для закладів загальної середньої освіти України (Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5-9 класи. Затверджена Наказом

Міністерства освіти і науки України від 07.06.2017 № 804; Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 10-11 класи.) зараз не визначають певної єдиної аксіоматики, обраної у якості теоретичного підґрунтя цих курсів (а були часи, коли у якості подібного підґрунтя обирали, наприклад, аксіоматику Д. Гільберта, або аксіоматику О. В. Погорєлова). Але, незважаючи на існування сьогодні для закладів загальної середньої освіти значної кількості рекомендованих Міністерством освіти і науки України підручників з геометрії різних колективів авторів, аксіоматики, покладені у їх основу, у значному ступені є схожими між собою, мають однакові назви основних неозначуваних множин і основних неозначуваних відношень, однакові типізації останніх.

Отже, з урахуванням двоїстого характеру курсів геометрії закладів загальної середньої освіти (органічного, в ідеалі, поєднання у цих курсах геометрії реального фізичного простору довкілля і геометрії як аксіоматичної теорії) першими, цілком необхідними, ознаками практико-орієнтованого процесу навчання є знаходження в оточуючому середовищі різних прикладів «фізичних» прототипів основних неозначуваних множин, основних неозначуваних відношень і аксіом. При цьому обов'язковою серією подібних прототипів для планіметрії повинні стати ті фігури і відношення між ними, які можна зобразити за допомогою крейди або маркера на дошці, олівця або ручки у зошиті, як з використанням, так і без використання лінійки. Реальне відпрацювання техніки виконання подібних зображень варто визнати невід'ємною складовою практико-орієнтованого процесу навчання.

У курсах геометрії, як і у інших курсах математики закладів загальної середньої освіти до прийомів практико-орієнтованого навчання, як правило, відносять розв'язування сюжетних задач, або, так званих, геометричних задач «практичного» змісту. Це задачі, які безпосередньо у своїй повсякденній роботі розв'язують робітники самих різних професій, пов'язаних з використанням або перетворенням просторових форм довкілля. Це і прибиральники, і працівники сільського господарства, і будівельними, і кравці, і архітектори, інженери тощо. Природним бажанням психічно здорової дитини є бажання якомога швидше стати дорослою людиною, розпочати самостійну трудову діяльність. Отже, доцільним чином підібрані задачі практичного змісту подобаються дітям, заохочують їх до поглибленого занурення у контент дисципліни. Але лише при вузькому розумінні поставленого питання виключно задачі практичного змісту формують сутність процесу практико-орієнтованого навчання.

У широкому розумінні практико-орієнтоване навчання передбачає отримання нових знань, умінь та навичок як результат власної свідомої активної діяльності. А така діяльність, як і кожна діяльність людини, є покроковою, конструктивною за своєю сутністю. Звідси випливає, що якісне опанування визначених навчальною програмою розділів елементарної евклідової геометрії як відповідних конструктивних складових евклідової геометрії вимагає організації усього освітнього процесу саме у вигляді практико-орієнтованої системи навчання.

Зрозуміло, що перші означення, перші доказові міркування на підставі того чи іншого варіанту оглядово введеної аксіоматики евклідової геометрії наводить вчитель. Учні слухають. Здається, це класичний приклад догматичного, аж ніяк не творчого, практико-орієнтованого навчання. Але, ні. Насправді, якщо учні дійсно слухають, то це вже їх особиста діяльність, вони знайомляться з конструктивними правилами виведення тієї буденної логіки, формування якої у дитини є однією з основних задач загальної середньої освіти. Багато видатних математиків порівнювали (і порівнюють) математику з музикою і вважають, що, «так само, як композитор може підказати учню ідею, як створити симфонію – не просто навчаючи гармонії, а й намагаючись описати, як він сам це зробив, – так і математик повинен на власних прикладах, відкривати своїм учням конструктивне таїнство математичної творчості» (Френкель&Бар-Хіллел, 1966). Наступним логічним кроком відповідного заняття представляється пропозиція до найсильнішого, середнього та найслабшого з учнів повторити проведені вчителем міркування. І це також відпрацювання, насамперед, навичок проведення логічних міркувань, і для того, хто повторює, і для тих, хто слухає. Зрозуміло, що пропагування подібних прийомів навчання з геометрії погано узгоджується з тенденцією скорочення навчальних годин на опанування предмету та прагненням до строгої регламентації усіх етапів процесу навчання.

Практична орієнтація процесу навчання передбачає і загальну тенденцію до збільшення у цьому процесі кількості задач у порівнянні з кількістю теорем. Не приймаючи до уваги вже обговорені задачі практичного змісту, з теоретичної точки зору, по відношенню до курсу евклідової геометрії подібна вимога представляється незрозумілою: у межах аксіоматичної теорії принципової різниці між задачею і теоремою не існує, і те, і інше, є умовиводом, що вимагає доведення. Якщо під задачею мати на увазі твердження, справедливість якого учень обґрунтовує самостійно, а під теоремою – твердження, справедливість якого доводить вчитель, або зі справедливістю якого учень знайомиться за підручником, то, може, варто було би обґрунтувати систему пропедевтики доведень теорем за допомогою відповідних систем задач. Елементарна складова курсів евклідової геометрії дозволяє реалізувати цю ідею. Це створить для учнів можливості не лише доводити, а й, навіть, формулювати значну кількість теорем самостійно, що також варто, у широкому розумінні, визнати практико-орієнтованими прийомами навчання. Тим більш дивною представляється концепція так званих «опорних» задач. Простіше за все було би відкоригувати у відповідних навчальних курсах доцільні системи теорем.

Загальновідомим є той факт, що значна кількість різних інформаційних джерел безпосередньо ототожнює поняття про конструктивну геометрію з теорією геометричних «побудов» на площині за допомогою різних «інструментів», у першу чергу, за допомогою «циркуля і лінійки». Зрозуміло, що циркуль і лінійка, традиційно, є основними інструментами такого виду професійної діяльності людей, як креслення, креслення на плоских поверхнях. Процес креслення, як і будь-який інший вид діяльності людей є процесом дискретним і, більш за це, фінітним. Послідовну реалізацію необхідних етапів процесу креслення можна розглядати як процес конструювання підсумкового зображення. Кожний етап такого конструювання, як правило, передбачає появу певних елементів підсумкового зображення, природними математичними абстракціями яких є певні фігури евклідової планіметрії. Саме це стало передумовою виникнення доцільних форм математичного моделювання подібного процесу креслення у межах аксіоматичної теорії евклідової планіметрії.

Точніше, на перших етапах формування евклідової геометрії як науки, тоді, коли вона виступала лише як «фізична» геометрія, вчення про властивості просторових форм довкілля, циркуль і лінійка безпосередньо розглядалися як внутрішні інструменти самої геометрії, факт існування у геометрії відповідної геометричної фігури ототожнювався з реальною можливістю побудови фізичної моделі такої фігури за допомогою реальних циркуля і лінійки. У подальшому, в процесі формування евклідової геометрії як дедуктивної теорії, в процесі її організації у вигляді аксіоматичної теорії, природною стала необхідність чіткого визначення поняття про те, що треба мати на увазі під «побудовами за допомогою циркуля і лінійки» у межах саме аксіоматичної теорії евклідової планіметрії, необхідність чіткого розмежування змісту поняття про можливість «побудови» геометричної фігури і поняття про її існування. (Перші питання такого типу виникли у зв'язку з відомими задачами про трисекцію кута і про подвоєння кубу).

Сучасні дослідження з підстав геометрії переконливо свідчать про те, що, як аксіоматична теорія усієї евклідової геометрії, так і аксіоматична теорія її складової – евклідової планіметрії, – є повними. Цей факт не залежить від покладених у основу цих теорій аксіоматик, бо всі аксіоматики як евклідової геометрії у цілому, так і евклідової планіметрії, є еквівалентними між собою. Згадаємо, що повнота аксіоматичної теорії означає, що до цієї теорії не можна додати незалежне від аксіом її аксіоматики твердження про поняття цієї теорії так, щоб у результаті не отримати суперечність. З іншого боку, на відміну від креслення, формування геометричної теорії «побудов за допомогою циркуля і лінійки», явно вимагає певної математичної формалізації характеристичних рис таких побудов у вигляді відповідних аксіом. В силу повноти, незалежно від обраної аксіоматики останнє не є можливим у межах аксіоматичної теорії евклідової планіметрії. Треба будувати продовження відповідної аксіоматики, принаймні канонічне. Одночасно, очевидно, можна вести розмову і про відповідне канонічне продовження відповідної аксіоматики усієї евклідової геометрії. Як результат утворюється нова аксіоматика, для якої аксіоматика евклідової геометрії є власною складовою.

Існують різні варіанти аксіоматики теорії «побудов на евклідовій площині за допомогою циркуля і лінійки» як канонічного продовження аксіоматики евклідової планіметрії. На відміну від загального поняття про аксіоматичну теорію евклідової геометрії, стандартний курс геометрії закладів загальної середньої освіти, як правило, не містить жодної тези щодо аксіоматики теорії «побудов за допомогою циркуля і лінійки». У той же час, на початку введення поняття про «побудови» за допомогою циркуля і лінійки, у кожному відповідному підручнику вміщено твердження типу «Давайте домовимося, що за допомогою лінійки ми можемо…, за допомогою циркуля ми можемо…Жодних інших дій за допомогою цих інструментів ми виконувати не можемо…». Отже, поняття про аксіоматику «циркуля і лінійки» у курсах геометрії закладів загальної середньої освіти присутнє, хоча і у неявному вигляді.

Традиційно, у теорії аксіоматики «циркуля і лінійки» під загальною задачею на «побудову» геометричної фігури евклідової площини розуміють задачу наступного виду.

1.На евклідовій площині задано скінченну кількість геометричних фігур. Або не задано жодної геометричної фігури. Задані фігури вважаються побудованими.

2.Вказано властивості певної не побудованої геометричної фігури, яку визначено як мету розв'язання даної задачі на побудову.

3.Застосовуючи ті дії, які «можна» виконувати за допомогою «циркуля і лінійки», у будь-якій послідовності, у необхідній кількості, але лише скінченну кількість разів, треба перетворити не побудовану геометричну фігуру у побудовану.

У відповідності до загального поняття про конструктивізм у математиці, цілком очевидним є конструктивний, навіть, фінітний, характер умови сформульованої загальної задачі. Теорію розв'язання подібних задач беззаперечно віднесено до конструктивних аспектів евклідової планіметрії.

Визначеною і визнаною є загальна схема знаходження розв'язку такої задачі. Схема є конструктивною. Вона передбачає послідовну реалізацію чотирьох етапів розв'язання, які мають назви аналіз, побудова, доведення і дослідження. Реалізація кожного з етапів вимагає різнопланової практичної діяльності учнів, значення якої для формування відповідної творчої особистості важко перебільшити.

У тривимірному евклідовому просторі теорію «побудов» конструюють за аналогічною схемою. Зрозуміло, що реальні побудови у «фізичному» просторі виконують за допомогою інших інструментів, ніж такі креслярські інструменти, як циркуль і лінійка. Виокремлені у результаті абстрагування, певні властивості подібних інструментів реальних просторових побудов, так само, як властивості циркуля і лінійки, можна сформувати у вигляді відповідного канонічного продовження аксіоматичної теорії геометрії тривимірного евклідового простору (евклідової стереометрії). У результаті буде створено один з можливих варіантів аксіоматики і відповідної аксіоматичної теорії «побудов» у тривимірному евклідовому просторі. Зрозуміло, що у межах такої теорії всі «побудови» будуть виконуватися лише «у думках». А теорія виявиться тим більш вагомою з усіх точок зору, чим більше у діяльності людей знайдеться таких реальних «фізичних» побудов, для яких вона стане теоретичним підґрунтям.

У математиці розроблено певну кількість відповідних канонічних продовжень аксіоматик тривимірного евклідового простору. Деякі з них знайшли своє відображення і у певних підручниках з геометрії для закладів загальної середньої освіти (Александров А. Д.; Вернер А. Л.& Рыжик В. И., 1992).

Традиційно, точніше, навіть, насамперед, до конструктивних аспектів геометрії тривимірного евклідового простору відносять теорію «побудов зображень» геометричних фігур .

У загальному випадку, під зображенням геометричної фігури розуміють окремий спосіб її відображення на певну поверхню тривимірного евклідового простору. Основу поняття про зображення геометричної фігури на певній поверхні тривимірного евклідового простору складає поняття про проєкцію даної фігури на дану поверхню. Конкретний спосіб реалізації процесу побудови проєкцій фігур називають методом проєктування. Використання того чи іншого методу залежить від мети проєктування. Можна стверджувати, що існує безліч різних методів проєктування. Теоретично розроблено, головним чином, саме ті методи, які виявилися корисними для певних практичних застосувань.

Найпоширенішими з них є ті, картинна поверхня апарату яких є площиною (картинною площиною). Зображенням фігури евклідового простору називають будь-яку фігуру, подібну до проєкції цієї фігури. У випадку розміщення зображення фігури евклідового простору на картинній площині, для значної кількості фігур можна вести мову про «побудову» на цій площині їх зображень «за допомогою циркуля і лінійки». Отже, у всіх подібних випадках, для геометричної фігури тривимірного евклідового простору задача на «побудову» її зображення у вищевказаному розумінні є конструктивною задачею евклідової планіметрії. У результаті, ми одночасно, маємо як «побудови» на зображенні, так і «побудови» за зображенням. Задачі вищевказаного типу також входять до конструктивної складової геометрії тривимірного евклідового простору. Розв'язання подібних задач, безумовно, вимагає практико-орієнтованого у широкому розумінні процесу навчання.

ОБГОВОРЕННЯ

Отже, у математиці, у теорії навчання математики, не залежно від тієї чи іншої точки зору на сутність поняття про конструктивізм та міркування конструктивного характеру, під цим, як правило, мають на увазі можливість отримання результату за допомогою реалізації скінченної кількості конкретних кроків, виходячи зі скінченної кількості передумов, найчастіше, у межах певної аксіоматичної теорії. Умовиводи конструктивного характеру аксіоматичної теорії утворюють її так звану елементарну складову. Аксіоматична теорія саме евклідової геометрії була першим зразком аксіоматичної теорії взагалі, першим зразком досконалої з сучасної точки зору аксіоматичної теорії. У всьому світі, починаючи з третього століття до нашої ери, кожний систематичний навчальний курс евклідової геометрії будується у вигляді явним чи неявним чином представленої аксіоматичної теорії. Умовиводи конструктивного характеру аксіоматичної теорії евклідової геометрії утворюють так звану елементарну евклідову геометрію, положення якої складають основну частину освітнього контенту курсів геометрії закладів загальної середньої освіти. Конкретні доцільні форми, прийоми і методи впровадження практико-орієнтованого навчання по відношенню до елементарної складової систематичних курсів евклідової геометрії закладів загальної середньої освіти виокремлено і проаналізовано у основній частині роботи. Наведені міркування є не лише наслідком суто теоретичних міркувань, а й спираються на власний практичний досвід, у певному сенсі підсумовують результати обговорення відповідних питань з діючими вчителями-практиками.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Роботу виконано у межах міжнародного проекту MoPED. У роботі розглянуто різні підходи до поняття про конструктивізм у математиці, висвітлено точку зору на елементарну евклідову геометрію, як на конструктивну складову геометрії тривимірного евклідового простору, роль і місце елементарної евклідової геометрії у контенті сучасних курсів геометрії закладів загальної середньої освіти. На підставі обґрунтувань теоретичного характеру практико-орієнтовану у широкому розумінні форму організації процесу навчання представлено як необхідну передумову вдалого опанування положень елементарної евклідової геометрії у закладах загальної середньої освіти, розкрито напрямки організації відповідної цілісної системи практико-орієнтованого навчання. Подальші дослідження можна спрямувати на створення конкретних практичних рекомендацій для відповідної категорії освітян.

Список використаних джерел

1. Александров А. Д. *Проблемы науки и позиция учёного.* Ленинград: Наука, 1988. 511 с.
2. Бурбаки Н. Архитектура математики. *Матем. просв*., 1960. сер. 2, 5. С. 99–112.
3. *Егоров И. П. О математических структурах*. М.: Знание, 1976. 64 с.
4. Френкель А. А., Бар-Хиллел И. *Основания теории множеств.* М.: Мир, 1966. 556 с.
5. Столл Р. *Множества. Логика. Аксиоматические теории.* М.: Просвещени, 1968. 231 с.
6. Попов Е. И. *Новая геометрия*: систематический курс геометрии, изложенный согласно законам познания. М.: Типо-литография Т-ва И.Н. Кушнерев и К, 1913. 242 с
7. McLeod. (1992). Research on affect in mathematics education: a reconceptualization. *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* New York: Macmillian, 575-596.
8. Trowbridge L. (2001). *Learning Cycle Science Activities for Elementary and Secondary Schools*. Greely, CO, University of Northern Colorado.
9. Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5-9 класи. URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas (Дата звернення 14.10.2020)
10. Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 10-11 класи. URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv (Дата звернення 14.10.2020)
11. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. *Геометрия для 10–11 классов*: учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. математики. М.: Просвещение, 1992. 464 с.

References

1. Aleksandrov, A. D. (1988). *Problemy nauki i pozicija uchjonogo [Problems of science and the position of the scientist].* Leningrad: Nauka. [in Russian].
2. Burbaki, N. (1963). *Arhitektura matematiki [Architecture of mathematics].* Matem. prosv., 1960. ser. 2, 5. [in Russian].
3. Egorov, I. P. (1976). *O matematicheskih strukturah. [About mathematical structures].* M.: Znanie. 64 s. [in Russian].
4. Frenkel', A. A. (1966). Bar-Hillel I. *Osnovanija teorii mnozhestv [Foundations of set theory].* M.: Mir. [in Russian].

5. Stoll, R. (1968). *Mnozhestva. Logika. Aksiomaticheskie teorii [Sets. Logics. Axiomatic theories].* M., Prosveshhenie. 231 s. [in Russian].
6. Popov, E. I. New geometry. *Novaja geometrija: sistematicheskij kurs geometrii, izlozhennyj soglasno zakonam poznanija. [New geometry: a systematic course in geometry, presented according to the laws of knowledge].* M.: Tipo-litografija T-va I.N. Kushnerev i K, 1913. 242 s. [in Russian].
7. McLeod. (1992). Research on affect in mathematics education: a reconceptualization. *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* New York: Macmillian, 575-596. [In English]
8. Trowbridge, L. (2001). *Learning Cycle Science Activities for Elementary and Secondary Schools*. Greely, CO, University of Northern Colorado. [In English].
9. Navchalna prohrama dlia zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv. Matematyka 5-9 klasy. [Basic home schooling program. Mathematics 5-9 grade]. URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas [in Ukrainian]. (14.10.2020)
10. Navchalna prohrama dlia zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv. Matematyka 10-11 klasy. [Basic home schooling program. Mathematics 10-11 grade]. URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv [in Ukrainian]. (14.10.2020)
11. Aleksandrov, A. D., Verner, A. L. & Ryzhik, V. I. (1992). *Geometrija dlja 10–11 klassov: ucheb. posobie dlja uchashhihsja shk. i klassov s uglubl. izuch. matematiki [Geometry for grades 10-11: textbook. manual for school students and advanced learning classes. study mathematicians].* M.: Prosveshhenie. [in Russian].

PRACTICE-ORIENTED FORM OF ORGANIZING THE TEACHING-LEARNING PROCESS AS A NECESSARY PRECONDITION FOR MASTERING THE CONSTRUCTIVE ELEMENTS OF EUCLIDEAN GEOMETRY AT INSTITUTIONS F GENERAL SECONDARY EDUCATION

Helena Sinyukova, Oleg Chepok

State institution "South Ukrainian National Pedagogical University named after K. D. Ushinsky ", Ukraine

Abstract.

Formulation of the problem. *The reasoning of the constructive character of the axiomatic theory of Euclidean geometry forms the so-called elementary Euclidean geometry, statements of which form the main part of the educational content of geometry courses at institutions of general secondary education. If the subject, formed based on a certain axiomatic theory, contains a significant number of elements of its constructive (elementary) component, then mastering the content of this component without organization in a defined sense practice-oriented learning process is impossible. Forms, techniques, and methods of such mastering are constantly improving firstly due to the furious acceleration of scientific and technological progress. Investigation of the expediency of up-to-date forms, techniques, and methods of introduction the practice-oriented learning during the process of mastering at institutions of general secondary education determined by the education of program elements of the elementary Euclidean geometry seems a rather actual task.*

Materials and methods. *To conduct our investigations we use theoretical methods, firstly, connected with analyzing the corresponding sources of information, as the empirical ones that are based on the own practical experience and discussions onto the assessee of the problem with the currently working teachers.*

Results. *Concrete expedience forms, techniques, and methods of practice-oriented learning according to the elementary addend of the systematic courses of Euclidean geometry at institutions of general secondary education are introduced and analyzed. In the broad sense, practice-oriented training supposes the receipt of new knowledge, skills, and habits as a result of own deliberate activity of step by step, a constructive activity by its essence. It follows from this that qualitative mastering the parts of elementary Euclidean geometry, determined by the educational program as the corresponding constructive addend of Euclidean geometry calls for the organization of the whole teaching-learning process just in a form of a practice-oriented educational system.*

Conclusions. *Based on theoretical grounds, in a broad sense practice-oriented form of organization of the teaching-learning process is presented as a necessary precondition for successful mastering of elementary geometry at institutions of general secondary education, directions for building a corresponding system of such learning are revealed. Further investigations can be directed to create practical recommendations for the corresponding categories of educators.*

Keywords: *axiomatic basis; axiomatic theory; constructivism; constructive component of axiomatic theory; Euclidean geometry; elementary Euclidean geometry; practice-oriented training; institutions of general secondary education; theoretical grounds of a systematic course of Euclidean geometry; the dual character of Euclidean geometry's course.*