

**Міністерство освіти і науки України
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка**

ДРУШЛЯК М.Г.

ЦИФРОВІ ТЕХНОЛОГІЇ У РОБОТІ ВЧИТЕЛЯ

Шкільний курс алгебри та початків аналізу

Суми – 2020

Рекомендовано до друку рішенням кафедри математики
Сумського державного педагогічного університету імені А.С. Макаренка
(протокол № 5/4 від 26.12.2019 року)

Друшляк М.Г. – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики СумДПУ імені А.С.Макаренка.

Рецензенти:

Семеніхіна О.В. – доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри інформатики Сумського державного педагогічного університету імені А. С. Макаренка.

Пипка О.О. – доктор фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри геометрії та алгебри Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара.

Д76 Друшляк М. Г. Цифрові технології у роботі вчителя. Шкільний курс алгебри та початків аналізу: Навчальний посібник / М. Г. Друшляк. – Суми: СумДПУ ім. А.С. Макаренка, 2020. – 118 с.

У посібнику представлено розв'язування математичних задач шкільного курсу алгебри комп'ютерними інструментами програм динамічної математики (*GRAN, Жива Геометрія, Математичний конструктор, GeoGebra*) та надано методичні рекомендації щодо організації навчання алгебри в комп'ютерно орієнтованому навчальному середовищі. Описано технологію організації комп'ютерного контролю знань із використанням програми *Математический конструктор, MyTest* та хмарного середовища *Google*. Розкрито методичні засади впровадження BYOD-підходу до навчання шкільного курсу алгебри на прикладі використання QR-кодів. Запропоновано завдання для самостійної роботи.

Для учителів математики, фізики, інформатики та усіх, хто цікавиться впровадженням програм динамічної математики та BYOD-підходу в освітній процес.

УДК 373.5.016:[512+517]:004

© Друшляк М.Г., 2020

© СумДПУ ім. А.С. Макаренка, 2020

ЗМІСТ

ВСТУП	5
ТЕМА №1. СУЧАСНІ ПРОГРАМИ ДИНАМІЧНОЇ МАТЕМАТИКИ	8
1.1. ПДМ у системі комп'ютерно орієнтованих засобів навчання математики	8
1.2. Короткий огляд програм динамічної математики	11
ТЕМА №2. ВИКОРИСТАННЯ ПРОГРАМ ДИНАМІЧНОЇ МАТЕМАТИКИ ПРИ ВИВЧЕННІ АЛГЕБРИ ТА ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ	18
2.1. Приклади розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем	18
<i>Gran1</i>	18
<i>Математический конструктор (МК)</i>	22
<i>GeoGebra</i>	24
2.2. Приклади розв'язування задач з параметрами	27
<i>Gran1</i>	27
<i>Живая Геометрия</i>	28
<i>Математический конструктор</i>	29
<i>GeoGebra</i>	31
2.3. Приклади розв'язування задач диференціального числення	34
<i>GeoGebra</i>	34
<i>Математический конструктор</i>	36
2.4. Приклади розв'язування задач інтегрального числення	37
<i>Gran1</i>	37
<i>Математический конструктор</i>	39
Лабораторна робота №1-2 (тренувальна)	40
Лабораторна робота №3 (залікова)	46
ТЕМА №3. СТАТИСТИЧНІ РОЗРАХУНКИ У ПРОГРАМАХ ДИНАМІЧНОЇ МАТЕМАТИКИ.....	48
3.1. Приклади статистичних обчислень	48
<i>Gran1</i>	48
<i>GeoGebra</i>	50
3.2. Статистичне означення ймовірності на основі серії випадкових випробувань	53
<i>Математический конструктор</i>	53
<i>GeoGebra</i>	57
Лабораторна робота №4-5 (тренувальна)	61
ТЕМА № 4. ДОДАТКОВІ КОМП'ЮТЕРНІ ІНСТРУМЕНТИ.....	65
4.1. Приклади створення власних інструментів у програмах динамічної математики	65
<i>GRAN2d</i>	65
<i>Живая Геометрия</i>	66
<i>Математический конструктор</i>	66
<i>GeoGebra</i>	67
Лабораторна робота №5 (тренувальна)	67
ТЕМА № 5. ОРГАНІЗАЦІЯ КОМП'ЮТЕРНОГО КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ	68
5.1. Приклади використання програми <i>Математический конструктор</i> при організації контролю.....	68
Лабораторна робота №6 (тренувальна)	73
5.2. Приклади використання режиму <i>GeoGebraExam</i> при організації контролю ...	74
Лабораторна робота № 7 (тренувальна).....	75
5.3. Процедура створення тестів у програмі <i>MyTest</i>	76

Лабораторна робота № 8-9 (тренувальна)	82
5.4. Створення тестів на базі GoogleForm	83
Лабораторна робота № 10 (тренувальна).....	86
Лабораторна робота № 11 (залікова).....	87
ТЕМА №6. СТВОРЕННЯ ІНТЕРАКТИВНИХ АПЛЕТІВ У ПРОГРАМАХ ДИНАМІЧНОЇ МАТЕМАТИКИ	87
6.1. Приклади створення інтерактивних аплетів у програмі GeoGebra	87
Лабораторна робота №12 (тренувальна)	91
ТЕМА №7. ВИКОРИСТАННЯ ВУОД-ПІДХОДУ ПРИ ВИВЧЕННІ АЛГЕБРИ ..	92
7.1. Інтенсифікація освітнього процесу із використанням ВУОД-підходу.....	92
Лабораторна робота № 13 (тренувальна).....	100
7.3. Використання мобільного додатку Plickers при вивченні алгебри та початків аналізу	101
Лабораторна робота № 14-15 (тренувальна)	104
7.4. Створення відео на базі інтерактивних моделей за допомогою програми CamStudio.....	105
Лабораторна робота № 16 (тренувальна).....	106
Лабораторна робота № 17 (залікова).....	106
Лабораторна робота №18-19 (залікова). Урок математики з комп'ютерною підтримкою	107
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	111

ВСТУП

Формування і розвиток візуально-інформаційної культури вчителя сьогодні є одним із провідних завдань закладів вищої освіти, оскільки в умовах «візуального повороту» суспільства затребуваними стають здатність швидко сприймати, узагальнювати, критично оцінювати й подавати результат саме візуальними каналами комунікації. Широке поширення інформаційних технологій, де провідними є саме інфорграфічні матеріали, обумовлюють їх активне використання ще зі школи, коли на вчителя математики та інформатики покладена поважна місія формування адекватної інформаційної картини світу, розвитку абстрактного, логічного і критичного мислення на основі різних візуальних форм і методів, що можна здійснити за допомогою різних комп'ютерних засобів.

Українськими учителями математики та інформатики часто використовуються програми презентацій і педагогічні програмні засоби, рекомендовані Міністерством освіти і науки України. Але в умовах переходу до Освіти 4.0 та «візуального повору» у суспільстві ми звертаємо увагу і на інші засоби, у яких процес візуалізації може поєднуватися разом з актуалізацією математичних знань і сприяти їх систематизації й узагальненню. Маємо на увазі *засоби комп'ютерної візуалізації математичних знань, під якими слід розуміти середовища, де розробниками передбачені інструменти створення математичних об'єктів та їх інтерактивні перетворення для унаочнення певних характеристик математичних об'єктів, вивчення їхніх властивостей, установлення співвідношень структурних компонентів тощо.*

Серед великої кількості засобів комп'ютерної візуалізації математичних знань у контексті підготовки майбутніх вчителів математики та інформатики окреме місце відводиться програмам динамічної математики (ПДМ), в яких реалізована ідея динамізації математичних об'єктів (*Gran (Gran1, Gran2d, Gran3d), DG, The Geometer's SketchPad, GeoGebra, Математический конструктор, Cabri* та подібні до них). Програми такого класу позиціонуються науковцями як комп'ютерні засоби, використання яких здатне перенести навчання шкільної математики на якісно новий рівень і говорити про комп'ютерно орієнтовані системи навчання математики.

Традиційно основна увага вчителів під час навчання математики зосереджувалась на процесі одержання відповіді, важливими були формування умінь перетворювати і спрощувати вирази, обчислювати їх значення тощо, а на дослідження самої відповіді залишалось мало часу. Із залученням ПДМ менш важливим стає процес знаходження числового результату (це робить віртуальна оболонка). Більш значущим стає

емпіричний пошук закономірностей, порівняльний аналіз можливих відповідей, інтерпретація результату і критичний погляд на його застосування, тобто інтелектуальний розвиток молоді особистості, розвиток її візуально-інформаційної культури.

Потужність пропонованого інструментарію засобів комп'ютерної візуалізації математичних знань, а також передбачена можливість створення додаткових авторських інструментів здатні не тільки стати універсальною платформою у розв'язанні математичних задач, а й змістити акценти традиційного навчання математики та говорити про нарізлу необхідність опанування таким інструментарієм саме майбутніми учителями математики та інформатики.

У посібнику представлено розв'язання математичних задач шкільного курсу алгебри комп'ютерними інструментами програм динамічної математики (*GRAN, Жива Геометрія, Математичний конструктор, GeoGebra*) та надано методичні рекомендації щодо організації навчання алгебри та початків аналізу в комп'ютерно орієнтованому навчальному середовищі. Наведено теоретичні відомості про ПДМ, особливості їх використання у освітньому процесі, методичні коментарі щодо застосування окремих комп'ютерних інструментів.

У посібнику свідомо подано розв'язання задач у різних середовищах для формування цілісного бачення як наявного програмного забезпечення у галузі шкільної математики, так і шляхів його використання на уроках алгебри та початків аналізу, у позакласній чи самостійній роботі. Важливими завданнями посібника є сприяння критичному погляду на можливості використання комп'ютерних інструментів на уроках алгебри та початків аналізу, а також формування умінь у майбутнього вчителя математики та інформатики раціонально підійти до вибору певного засобу для підтримки вивчення певної теми чи розв'язання певної задачі.

У посібнику приділяється увага організації комп'ютерного контролю знань. Ми звертаємо увагу на формування умінь у майбутніх учителів математики та інформатики організовувати комп'ютерне тестування із використанням різного програмного забезпечення та хмарних технологій. Але така форма контролю математичних знань як тестування не завжди є ефективною, оскільки не дозволяє продемонструвати хід думок того, хто проходить тестування, і фіксує лише результат навчання. Тому затребуваними стають комп'ютерні засоби, які з одного боку спрощують для вчителя процес контролю, а з іншого, – відслідковують правильність розв'язування поставлених задач, зокрема такого виду задач як задачі на побудову, які складно перевірити автоматизовано.

З метою інтенсифікації освітнього процесу та покращення його технологічної складової майбутній вчитель математики та інформатики

повинен бути в тренді сучасних підходів. Одним із таких підходів, провадження якого ми розглядаємо у контексті мобільного навчання, є BYOD-підхід. При підготовці майбутніх учителів математики та інформатики акцентуємо увагу на окремому аспекті BYOD-підходу – використанні QR-кодів у освітньому процесі.

Посібник зацікавить майбутніх бакалаврів та магістрів освіти, працюючих учителів математики та інформатики, які використовують засоби комп'ютерної візуалізації математичних знань.

ТЕМА №1. СУЧАСНІ ПРОГРАМИ ДИНАМІЧНОЇ МАТЕМАТИКИ

1.1. ПДМ у системі комп'ютерно орієнтованих засобів навчання математики

Комп'ютерно-орієнтовані засоби навчання математики – це такі засоби, які забезпечують цілеспрямований процес здобування знань, набуття умінь і навичок, засвоєння способів пізнавальної діяльності суб'єктом навчання і розвиток його творчих здібностей на основі широкого використання інформаційно-комунікаційних технологій. Відповідно навчання з певної дисципліни, організоване на основі комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання називають комп'ютерно-орієнтованим [70].

Термінологічне поле, яке характеризує комп'ютерно орієнтовані засоби навчання математики, досить широке. Це й системи комп'ютерної математики (СКМ), і комп'ютерні математичні системи (КМС), і програми динамічної математики (ПДМ), й інтерактивні геометричні системи або інтерактивні геометричні середовища тощо.

Під СКМ розуміють засоби, які автоматизують виконання як чисельних, так і аналітичних розрахунків. До них відносять системи для чисельних обчислень, табличні процесори, матричні системи, системи для статистичних, спеціальних обчислень, аналітичних обчислень (комп'ютерної алгебри), універсальні системи. Цей клас програмних продуктів інколи описують терміном «комп'ютерні математичні системи».

Основне призначення СКА (англ. computer algebra system або CAS) – проведення і перетворення символічних операцій, з-поміж яких: обчислення символічних або числових значень виразів, перетворення, зміна форми виразів, знаходження похідної, розв'язання різного роду рівнянь, обчислення границь, інтегралів, робота з множинами, матрицями. Додатково більшість СКА не лише підтримує чисельні операції, а й має високорівневу мову програмування для написання власних алгоритмів.

Про окремий клас програм динамічної геометрії зазначають такі науковці, як С. А. Раков [50], В. Н. Дубровський [24], О. Л. Безумова, Е. Н. Єрилова, С. Н. Котова, С. В. Ларін, Р. П. Овчиннікова, Н. Н. Патронова, М. А. Павлова, А. Е. Томілова, О. Н. Троїцька, Л. В. Форкунова, І. С. Храповицький, М. В. Шабанова, Т. С. Ширікова, Г. Шуман. Вони описують програми динамічної геометрії як комп'ютерні системи, де є можливим створення і використання динамічних креслень, тобто таких геометричних конструкцій, які можна візуально змінювати при збереженні алгоритму їх побудови шляхом задання змін однієї чи кількох геометричних параметрів конструкції.

Під терміном «інтерактивне геометричне середовище» розуміють

програмне забезпечення, яке дозволяє виконувати геометричні побудови на комп'ютері таким чином, що при зміні одного з геометричних об'єктів креслення інші також змінюються, зберігаючи незмінними задані між ними відношення. Перевагами такого середовища та створених на їхній базі цифрових освітніх ресурсів є інтерактивність, тобто передбачена можливість не тільки внесення початкових даних користувачем для побудови зображення геометричної конфігурації, але й додаткові зміни і параметризацію цих даних без зміни загального алгоритму побудови креслення, а також можливість оперативного одержання відомостей про властивості зображених фігур, які цікавлять користувача.

М. Хохенватор у роботі [4] розрізняє два окремих типи програмного забезпечення у галузі навчання математики – системи комп'ютерної алгебри (СКА), які сфокусовані на маніпулюванні символічними виразами, та програми динамічної геометрії (ПДГ), які сконцентровані на зв'язках між точками, прямими, колами тощо. При цьому він зазначає, що програму *GeoGebra* не варто ототожнювати з ПДГ, її слід сприймати ширше, у поєднанні символічних маніпуляцій, які притаманні СКА, та динамічних змін математичних об'єктів, які передбачені у ПДГ.

Разом з цим нам імпонує підхід, який пропонують науковці до опису математичних середовищ, де передбачені динамічні зміни математичних об'єктів. При цьому зазначимо, що термін «програми динамічної геометрії» (поряд з ним «середовища динамічної геометрії» або «інтерактивні геометричні середовища») з'явився, завдяки появі програм для оперування саме геометричними об'єктами. Дещо пізніше розвиток програмного забезпечення зумовив появу наступних версій таких програм, де стали з'являтися інші послуги математичного напрямку (побудова графіків функцій, дотичних, параметрична візуалізація, інтегрування тощо). Тому вважаємо природною і зміну у термінології: «програми динамічної геометрії» перетворилися у «програми динамічної математики».

Таким чином, під програмами динамічної математики варто розуміти програмні засоби комп'ютерної візуалізації математичних знань, які передбачають динамічне оперування різними математичними, у тому числі геометричними, об'єктами і можливість інтерактивного одержання відомостей про їх властивості.

До таких засобів не можна віднести СКМ і СКА, оскільки в них реалізовані дещо інші математичні функції і не передбачено того механізму візуальних перетворень, які притаманні програмам динамічної геометрії. Також до таких засобів не можна віднести табличні процесори, системи статистичних розрахунків тощо через специфіку роботи у згаданих середовищах. Програми динамічної геометрії при такому трактуванні терміну є складовими усіх програм динамічної математики.

Наведемо аргументи на користь використання програм динамічної математики.

1. Порівняно з іншими програмами математичного спрямування ПДМ мають простий інтерфейс і не потребують багато часу на оволодіння їх комп'ютерними інструментами та методичними прийомами роботи з ними. Насамперед, це пов'язано з тим, що у програмах реалізовані всі ті операції, для виконання яких раніше учні використовували лінійку, олівець і транспортир.

2. Високий рівень візуалізації математичних об'єктів, у тому числі за рахунок динамізації, зокрема у тих випадках, коли в учнів недостатньо розвинена просторова уява (наприклад, при вивченні тих тем курсу шкільної математики, коли досить важко наводити відповідні аналогії чи демонструвати певні властивості – геометричні перетворення площини та простору, задачі на ГМТ площини та простору тощо).

3. Можливість організації експериментальних випробувань, наприклад, при вивченні елементів теорії ймовірностей та математичної статистики для візуалізації закономірностей чи їх характеристик (наприклад, вивчення геометричного і статистичного означення ймовірності через «кидання» великої кількості точок).

4. Можливість організації не аналітичного, а емпіричного пошуку відповіді при визначенні окремих характеристик об'єктів (наприклад, при розв'язуванні задач на екстремум і аналізі числових значень досліджуваної функції).

5. Можливість організації пошуку закономірностей між параметрами математичних об'єктів (наприклад, сума кутів трикутника, теорема Фалеса, відношення довжини кола до його діаметра тощо), тобто «підведення» учнів до формулювання гіпотез при доведенні математичних теорем.

При такому підході використання програм динамічної математики вимагає *переосмислення вчителем форм і методів навчання*. Традиційне пропонування розв'язати задачу з підручника за допомогою програмних засобів стикається з рядом проблем. Наприклад, задачі на перетворення виразів потребують знання формул, і середовища динамічної математики тут будуть зайвими, геометричні задачі на доведення вимагають попередньої підготовки – потрібно продумати алгоритм дій учня, який наштовхне його на результативний шлях і правильні висновки. У більшості випадків, якщо вчитель бажає залучити комп'ютерний засіб, то він має бути готовий творчо підійти до переформулювання задач підручника.

6. Істотне скорочення часу, який витрачається на побудову якісного геометричного рисунка, використання раніше створених моделей, створення власних комп'ютерних інструментів.

7. «Миттєве» виявлення помилки у побудовах: якщо допущена

помилка, то побудована конфігурація порушується при як завгодно малій зміні вихідних об'єктів.

8. Використання ПДМ може забезпечити певний рівень самостійності в навчанні, зокрема, при створенні інтерактивних завдань, де передбачено автоматизовану перевірку результатів.

9. Можливість організації контролю знань учнів.

10. Використання ПДМ сприяє більш активному і свідомому засвоєнню учнями навчального матеріалу, що підтвердило дослідження [53; 61].

11. Можливість організації дистанційного навчання за рахунок створення інтерактивних аплетів.

Усе зазначене робить особливо актуальною попередню підготовку вчителя до використання окремих віртуальних середовищ, комп'ютерних інструментів та інтерактивних завдань на уроці математики. Варто не тільки визначитися з кожним із завдань та інструментами їх розв'язування, а і розташувати обрані завдання у такій послідовності, щоб перші з них були простими і посильним більшості учнів у класі, а їх складність зростала поступово (комп'ютер може не лише допомагати, а і заважати – як тільки учень відчує, що завдання йому не по силах, він швидко переорієнтується на щось інше).

Дослідження можливостей використання програм динамічної математики і напрацювання методик їх використання тривають. Однозначного висновку на користь одного зі згаданих програмних засобів науковці та методисти не дають, тому «власні» знайомство і використання комп'ютерних інструментів у професійній діяльності чекають на кожного сучасного вчителя математики. Цим не тільки підвищується власний досвід використання програмних засобів підтримки навчання математики, а і розширюється коло тих методичних питань, які наразі є відкритими і потребують подальшого дослідження і вирішення.

1.2. Короткий огляд програм динамічної математики

Розвиток інформаційних технологій зумовив появу спеціалізованих засобів у галузі математики. І якщо на початку ери інформаційних систем комп'ютер був покликаний розв'язувати суто обчислювальні задачі, то з появою графічних інтерфейсів та розвитком теорії алгоритмів стали можливими візуалізації математичних абстракцій. І тому природною була поява таких віртуальних середовищ, які демонстрували динамічну зміну конструкції на екрані монітора. Особливого статусу набули такі розробки у галузі геометрії площини, оскільки перехід від статичного до рухомого зображення орієнтував на аналіз більшої кількості параметрів, які закладені у візуально статичному об'єкті.

Як зазначається у [26], поява програм динамічної геометрії була «зумовлена» захопленням формальним аксіоматичним підходом у навчанні математики. Найбільше від такого підходу на думку авторів постраждало навчання геометрії: з неї витіснялись наочність, евристичний підхід до розв'язування задач, існували навіть погляди про необов'язковість геометрії в шкільному курсі математики.

Ідея «динамізації» стала деякою мірою реакцією на бурбакістську тенденцію у вивченні математики, чому дуже сприяло поширення персональних комп'ютерів. Робота почалась у 80-х роках з проекту *Cabri* (Cahier de BRouillon Informatique, що в перекладі на українську мову – Чернетка для інформатики), який передбачав створення середовища для роботи з об'єктами дискретної математики (графами і булевими функціями). З 1985 році Жан-Марі Лаборд (Jean-Marie Laborde) написав книгу «Carbi-geometre», присвячену експериментальному вивченню геометрії, а його студенти (Philippe Cayet, Yves Baulac, Frank Bellemain) підготували програмне забезпечення для підтримки курсу динамічної геометрії. Це були програми для операційних систем, які сьогодні вже не використовуються. В. М. Дубровський [26] припускає, що в момент створення цієї програми автори не розуміли, наскільки перспективну ідею використання комп'ютерних технологій вони запропонували. Але посправжньому ця ідея була розкрита після появи операційних систем з графічним інтерфейсом (*Mac* і *Windows*), який дозволив у повній мірі реалізувати підхід моделювання геометричних побудов, перетворень і вимірювань у динаміці.

Паралельно з розвитком *Carbri* в США наприкінці 80-х розроблялася аналогічна програма *The Geometer's Sketchpad* («Блокнот геометра»), яку створив Nicholas Jackiw. Маючи дуже зручний інтерфейс й істотну підтримку видавництва Key Curriculum Press, програма швидко завоювала популярність користувачів.

Ці дві програми отримали найбільше поширення в світі. Зокрема, Інститутом Нових Технологій у Москві була русифікована програма «*The Geometer's Sketchpad*», яка розповсюджується в Росії під назвою *Живая Математика (ЖМ)* (наразі вона рекомендована Міністерством освіти і науки Російської Федерації і активно використовується вчителями російських шкіл).

Дещо пізніше російською компанією 1С була створена програма *Математический конструктор (МК)*, де використовується традиційна для України система позначень. Зокрема, в *ЖМ*, як це прийнято в США, довжина відрізка AB позначається $m(AB)$, що виглядає дещо незвично для наших школярів. Зазначимо, що в останніх версіях програми (починаючи з 4.0) розробниками *МК* передбачена можливість автоматичної перевірки

правильності побудов.

Відзначимо, що існує цілий ряд інших програм динамічної математики зі своїми перевагами і недоліками. Найбільш відомими на даний час є програми *Cinderella*, *Zirkel und Lineal*, *GeoNext* (Німеччина), *GeoGebra* (Австрія). Вони належать до систем з відкритим кодом і вільно поширюються в мережі Інтернет, що сприяє розповсюдженню їх різномовних версій.

На межі ХХ-ХХІ століть на теренах України були розроблені дві програми такого рівня: програми динамічної геометрії *DG* і *GRAN* (*Gran1*, *Gran2d*, *Gran3d*). Про історію виникнення останньої відомо наступне [21].

Наприкінці минулого століття величезний брак обчислювальної техніки у школах поєднувався із ще більшим браком педагогічних програмних засобів. У 1989 році академік М. І. Жалдак поставив завдання створити програми для графічного розв'язування нерівностей. Воно було реалізовано у вигляді комп'ютерної програми *NERAV*, яку вважають родоначальником *GRAN*-напрямку. Аналіз результату показав, що використання програм такого типу при певному удосконаленні надає можливість ілюстрації математичних понять, демонстрації застосувань математичних методів дослідження різноманітних процесів і явищ, проведення чисельного експерименту, створення та вивчення різноманітних математичних моделей, і у 1990 році було створено програму *GRAN*, у якій було передбачено побудову до п'яти графіків функцій на різних відрізках, у тому числі і таких, що містили точки розриву, знаходити точки перетину графіків з віссю Ox , розв'язувати нерівності та уточнювати корені, знаходити значення визначених інтегралів, об'ємів тіл обертання, будувати січні та дотичні тощо.

Стрімкий розвиток апаратної складової комп'ютерної техніки, а також тотальний перехід на *OS Windows* і використання стандартного віконного інтерфейсу потребували подальшого удосконалення розробленої програми: з'явилися інструменти для роботи з функціями, заданими параметрично, неявно, у полярних координатах, таблично, для яких будується апроксимуючий поліном, ламаними, статистичними вибірками. Дуже важливим здобутком стала можливість реалізації роботи з параметрами у математичних об'єктах.

Наразі пакет *Gran* рекомендовано Міністерством освіти та науки України для вивчення шкільного курсу алгебри і початків аналізу.

Серед програм підтримки вивчення стереометрії нами виділені *Gran3d*, *Carbri3D*, *Archimedes Geo3D*, *GeoGebra*, *Geometria*, причому кожна із зазначених програм має як свої переваги, так і недоліки.

Вітчизняним продуктом для підтримки вивчення стереометрії в школі є педагогічний програмний засіб *Gran3d*. Недолік цієї програми

полягає в її обмеженій «динамічності» (дозволяє лише обертати конфігурацію) і виключно обчислювальному призначенні (доцільно використовувати в старшій школі для скорочення часу обчислень).

Більш широкі можливості у використанні надає програма *Cabri3D*, але її основним недоліком є те, що вона ліцензована, і пересічний український вчитель математики обмежений у використанні цього програмного продукту (можна завантажити лише пробну версію на 30 діб). Зауважимо, що це середовище дозволяє не тільки моделювати просторові фігури, а і знаходити їх розгортки.

Програма *Archimedes Geo3D* має досить схожий з *Cabri3D* набір інструментів для побудови фігур у просторі, але у ній відсутня можливість побудови півплощин та променів. З іншого боку, розробниками передбачено ряд інших функцій (побудова кривих, заданих параметрично; режим стереозображення, рекурсивні побудови та інше).

Однією з останніх програм, які з'явилися на ринку динамічних середовищ і до розробки яких долучилися науковці країн СНД, є версія *GeoGebra*. Зауважимо, що у 2010 році з метою підтримки «динамічних» досліджень, локалізації програмного забезпечення та веб-ресурсу в Україні було створено Інститут *GeoGebra* [36, 37] – вільно поширюваного динамічного геометричного середовища, яке об'єднує в собі геометрію та алгебру.

Найбільш поширені динамічні комп'ютерні середовища, які підтримують вивчення шкільної математики та наразі використовуються навчальними закладами, наведені у таблиці 1.1.

Таблиця 1.1

Поширені програми динамічної математики

Програма	Країна, рік	Розробник	Сайт	Вільне поширення
Cabri (Cahier de Brouillon Informatique, Чернетка для інформатики)	Франція 80-ті р.р. XXст.	Philippe Cayet, Yves Baulac, Franck Bellemain)	http://www.cabri.com	-
Cabri 3D	Франція 2000 р.	Jean-Marie Laborde	http://www.cabri.com	-
Geometers' SketchPad (Блокнот геометра)	США, 1995р.	Key Curriculum Press, Nicholas Jackiw	http://www.dynamicgeometry.com	+
GeoGebra (Geometry and Algebra)	Австрія, 2001р.	Markus Hohenwarter	http://www.geogebra.org	+

Програма	Країна, рік	Розробник	Сайт	Вільне поширення
GeoNext	Німеччина, 1999 р.	Кафедра математики та дидактики Університету Байройта	http://geonext.uni-bayreuth.de	+
Cinderella	Німеччина		http://www.cinderella.de	-
Живая Геометрия	Росія, 1995 р.	Інститут Нових Технологій	http://www.int-edu.ru	-
Живая Математика	Росія, 2005 р.	Інститут Нових Технологій	http://www.int-edu.ru	-
Математический конструктор	Росія, 2006 р.	Фирма 1С	http://obr.1c.ru/mathkit	+
DG (Динамічна геометрія)	Україна, 2003 р.	Раков С.А., Осенко К.О.	http://dg.osenkov.com/index_ru.html	+
Gran1	Україна, 1990 р.	Жалдак М.І Горошко О.В.		+
Gran2d, Gran3d	Україна, 2003 р.	Жалдак М.І Вітюк О.В.		+

Інтерфейси згаданих програм наведені на рис.1.1-1.16.

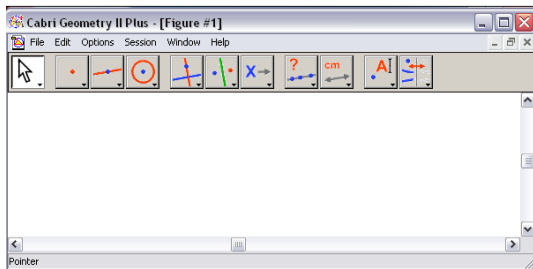


Рис.1.1. Інтерфейс програми *Cabri*

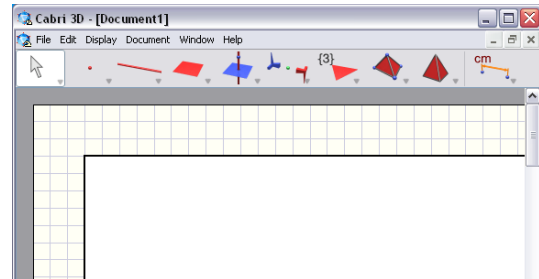


Рис.1.2. Інтерфейс програми *Cabri3D*

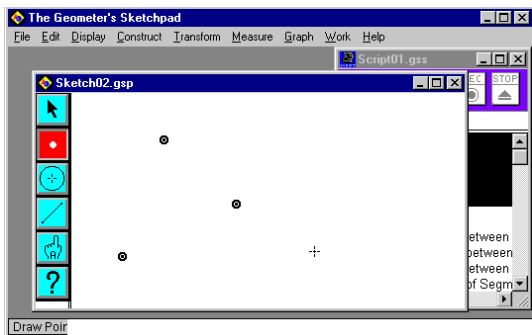


Рис.1.3. Інтерфейс програми *The Geometers` SketchPad*

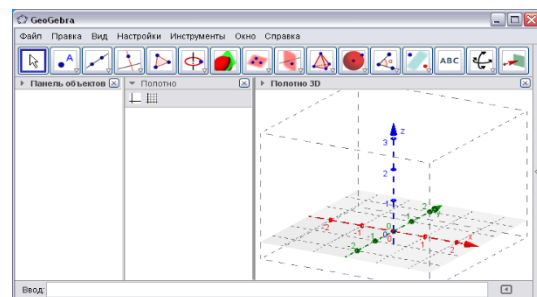


Рис.1.4. Інтерфейс програми *GeoGebra*

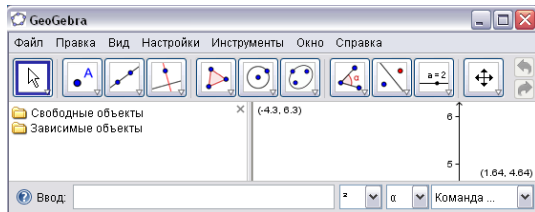


Рис.1.5. Интерфейс програми GeoGebra

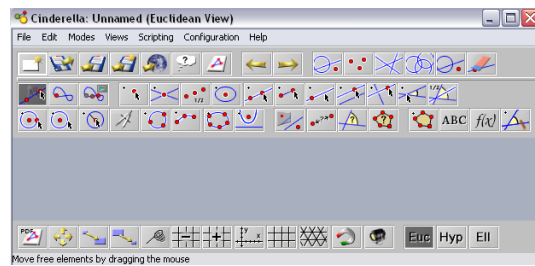


Рис.1.6. Интерфейс програми Cinderella

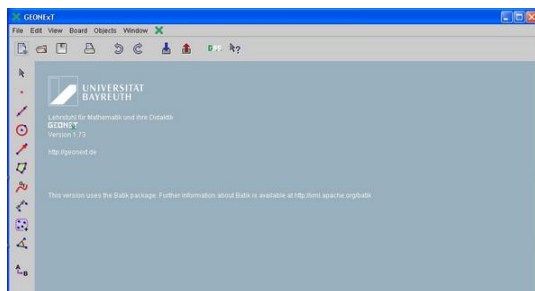


Рис.1.7. Интерфейс програми GeoNext

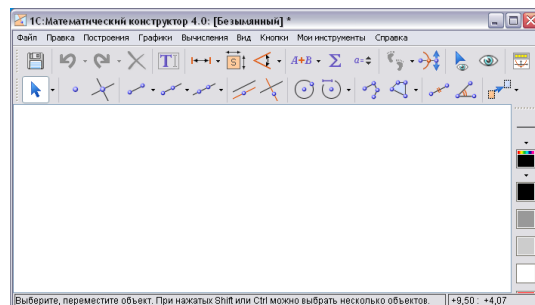


Рис.1.8. Интерфейс програми Математический конструктор

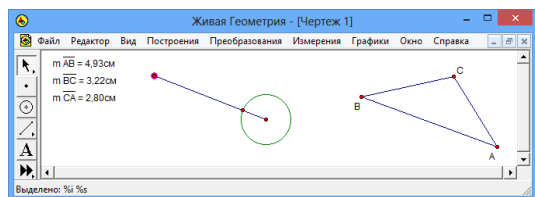


Рис.1.9. Интерфейс програми Живая Геометрия

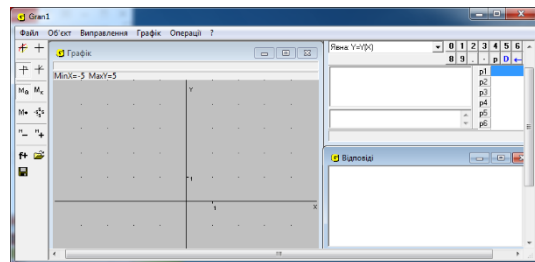


Рис.1.10. Интерфейс програми Gran1

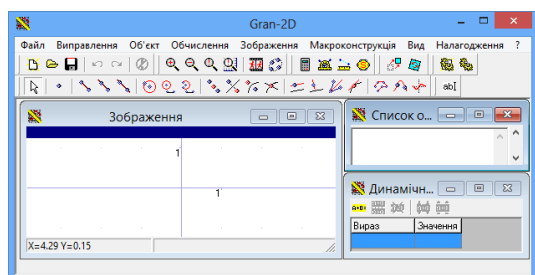


Рис.1.11. Интерфейс програми Gran2d

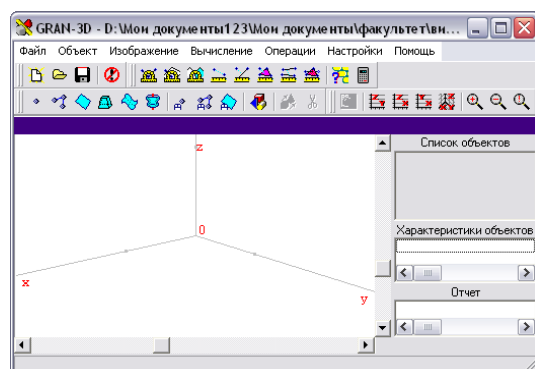


Рис.1.12. Интерфейс програми Gran3d

Кожна зі згаданих програм має своїх прибічників, які власні напрацювання викладають у мережу для вільного користування і розповсюдження. Так існує онлайн бібліотека комп'ютерних моделей на

базі програми *GeoGebra* [3], велика кількість таких робіт знаходить своє відображення і в періодичній навчально-методичній літературі [20-33].

Інтерфейси згаданих програм динамічної геометрії і принципи роботи у них дуже подібні: за допомогою миші та панелі інструментів можна задавати або будувати математичні об'єкти (функції, графіки), здійснювати поточні обчислення, створювати основні геометричні об'єкти (точки, прямі, відрізки, кола тощо та конструкції), слідкувати за динамічними змінами, досліджувати окремі властивості, знаходити значення довжин, кутів, площ та інших виразів.

Розробники сучасних інформаційних продуктів останнім часом звертають увагу не лише на можливість розв'язання широкого кола задач, а і передбачають інструменти для спрощення організації навчання. Серед таких «методичних знахідок» виділимо, покрокову демонстрацію, можливість приховати текстову інформацію. Сучасні версії окремих програм (*Математичний конструктор*) додатково передбачають на основі проведених досліджень організацію у самому середовищі тестового контролю знань – вибір одної відповіді з багатьох, кількох із багатьох – це передбачили розробники у самому меню.

Більш детальна інформація про можливі методичні інструменти й прийоми використання ПДМ наведена у таблиці 1.2.

Таблиця 1.2

**Методичні інструменти,
передбачені у програмах динамічної математики**

<i>Характеристика</i>	<i>DG</i>	<i>Gran 1</i>	<i>Gran2d</i>	<i>Gran3d</i>	<i>Cabri 3d</i>	<i>GeoGebra</i>	<i>GeoGebra 5.0</i>	<i>ЖМ</i>	<i>МК</i>
Покрокова анімація	+	-	+	-	+	+	+	+	+
Тип і колір об'єктів	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Кнопки	-	-	-	-	+	+	+	+	+
Приховування об'єктів	+	+	+	-	+	+	+	+	+
Організація контролю	-	-	-	-	-	-	-	-	+
Динамічний слід	+	-	+	-	+	+	+	+	+
Побудова власних інструментів	+	-	+	-	-	+	+	+	+
Використання параметру	-	+	-	-	-	+	+	+	+
Встановлення позначок на об'єкті	-	-	-	-	-	±	±	-	+
Обмеження зображення	-	-	-	-	-	-	-	-	+
Вбудовані демонстрації	-	-	-	-	-	-	-	-	+

З використанням пакетів динамічної математики побудови стають не лише точнішими і візуально привабливішими, а й рухомими, що сприяє не лише більш якісному розумінню властивостей геометричних об'єктів, а і більш критичному погляду на результат розв'язування, кількість розв'язків та умови їх існування. Для організації демонстрацій у деяких середовищах динамічної математики передбачені кнопки, які зовні виглядають як надписи, але відрізняються від текстових полів тим, що при натисненні на них відбувається певна дія.

ТЕМА №2. ВИКОРИСТАННЯ ПРОГРАМ ДИНАМІЧНОЇ МАТЕМАТИКИ ПРИ ВИВЧЕННІ АЛГЕБРИ ТА ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ

2.1. Приклади розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем

Gran1

У програмі *Gran1* [31, 32] передбачено можливість побудови різних типів функціональних залежностей (явна, неявна, параметрична, полярна, статистична) та їх графіків за допомогою пункту меню *Графік*.

Вирази залежностей подаються у вікні *Список об'єктів* символами того ж кольору, що і відповідні їм графіки. Кількість таких об'єктів обмежується лише апаратними ресурсами комп'ютера.

Приклад 2.1. (*Gran1*) Знайти розв'язки рівняння $||x| - 2| = 2$ [44, с. 167].

Спочатку потрібно побудувати графік залежності $y = ||x| - 2| - 2$. Встановимо у вікні *Список об'єктів* тип залежності *Явна*: $Y=Y(X)$. Потім звернемося до послуги *Об'єкт/Створити...* В результаті з'явиться допоміжне вікно *Введення виразу залежності* (рис. 2.1).

Введемо вираз $||x| - 2| - 2$ в рядку $Y(X)=$. В рядку $A=$ введемо значення лівої межі відрізка задання функції, наприклад, -7 , а в рядку $B=$ введемо значення правої межі відрізка задання, наприклад, 5 . Кількість точок побудови графіка залишимо заданими за замовчуванням. В результаті у вікні *Список об'єктів* одержимо новий об'єкт $Y(X) = ||x| - 2| - 2$.

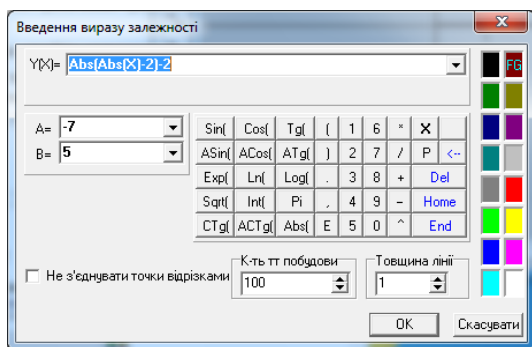


Рис.2.1.

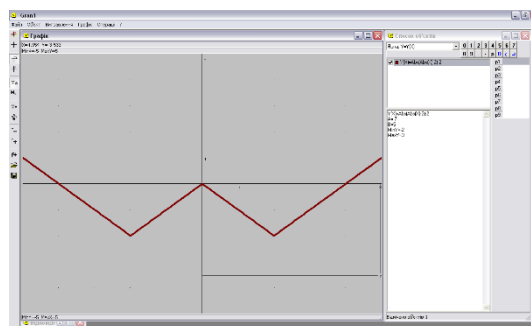


Рис.2.2.

За допомогою послуги головного меню *Графік/Побудувати* у вікні *Графік* з'явиться графік залежності $y = ||x| - 2| - 2$, побудований на відрізку $[-7, 5]$ (рис.2.2).

Іноді буває необхідно збільшити зображення в деякій частині вікна *Графік* до розмірів усього вікна. Для цього слід вказати прямокутник, у якому розміщена частина зображення, що збільшується. Ця послуга використовується для уточнення вигляду графіка у деякій його частині, координати характерних його точок тощо (збільшення масштабу, в якому будуються графіки, фактично приводить до збільшення точності обчислень в околі досліджуваної точки). Щоб після операції збільшення повернутися до попереднього зображення, слід звернутися до послуги *Графік/Масштаб/Попередній масштаб* або скористатись кнопкою M_{\leftarrow} панелі інструментів.

Для вилучення побудованого зображення користуються послугою *Графік/Очистити*.

При обчисленні значення деякого виразу виду $f(x)$ для заданого значення x можна скористатися графіком залежності $y = f(x)$. Для цього слід підвести вказівник миші до відповідної точки на графіку функції у вікні *Графік* і в лівому верхньому куті цього вікна прочитати координати (x, y) точки. Той же результат можна одержати за допомогою клавіатури, скориставшись послугою *Графік/Координати з клавіатури*. При цьому чим більший масштаб побудови, тим точніші результати. Можна також звернутися до послуги *Операції/Калькулятор*.

Щоб розв'язати рівняння $f(x) = 0$, потрібно в області задання залежності $y = f(x)$ знайти всі ті значення аргументу, в яких значення функції дорівнюють нулю. При графічному поданні залежності $y = f(x)$ знайти розв'язок рівняння $f(x) = 0$ означає знайти всі точки перетину графіка з віссю абсцис. Отже, встановивши курсор у відповідному місці, одержимо розв'язки рівняння $x_1 = -4$, $x_2 = 4$, $x_3 = 0$.

Якщо потрібно розв'язати систему рівнянь, то визначають абсциси

точок перетину графіків функцій, які входять у систему.

Крім побудови графіків функцій розробниками передбачені можливості графічного розв'язування нерівностей та їх систем.

Щоб одержати множину розв'язків нерівності виду $f_1(x) \leq f_2(x)$, де $f_i(x)$ – деякий вираз, заданий на проміжку $[a, b]$, потрібно звести задану нерівність до виду $f(x) \leq 0$, побудувати графік залежності $y = f(x)$ для значень x з відрізка $[a, b]$ за допомогою послуги *Операції/Нерівності/Система нерівностей* $y(x) <(>) c$ і визначити, при яких значеннях x графік залежності $y = f(x)$ лежить не вище, ніж вісь абсцис. Множина таких значень x і буде множиною розв'язків нерівності.

Приклад 2.2. (Gran1) Розв'яжемо нерівність $(x+4)\sqrt{x^2-2x-15} > 0$ при $x \in [-10, 10]$ [45, с. 133].

Побудувавши графік залежності $y = (x+4)\sqrt{x^2-2x-15}$ на проміжку $[-10; 10]$, звернемося до послуги *Операції/ Нерівності/С-ма нерівностей* $y(x) <(>) c \dots$, вказавши знак $>$ та значення $c = 0$ (рис. 2.3). У вікні *Відповіді* буде надано розв'язок: відрізок $(-4; 10)$.

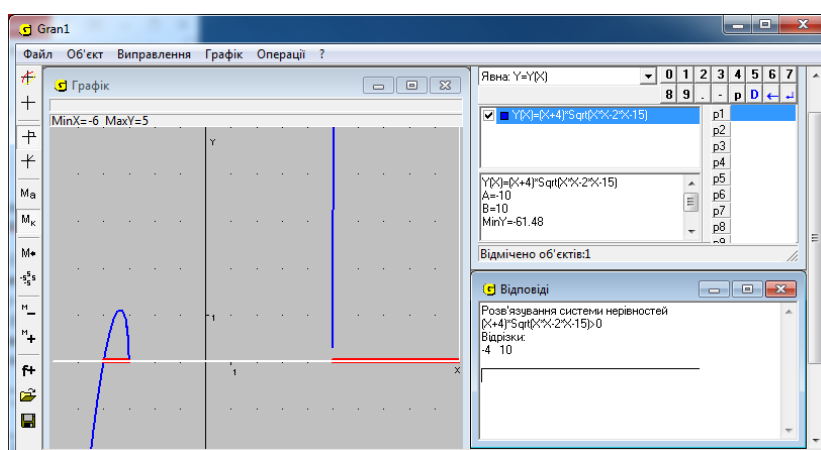


Рис.2.3.

Зауважимо, що вчитель математики має звернути увагу учнів на три моменти. По-перше, вихідна нерівність була строгою, тому варто бути уважним і обережним із типом скобок у відповіді – діти звикли, що відрізок позначається квадратними скобками, а інтервал – круглими. По-друге, у програмі розв'язується нерівність на заданому проміжку, але при цьому не враховується область визначення функції – у точках інтервалу $(-3; 5)$ функція не визначена, що підтверджує побудований графік функції, тому потрібно вилучити ці точки із множини відповідей. По-третє, критичне оцінювання будь-якого одержаного результату – головна умова вдалого застосування комп'ютерного інструменту.

Таким чином, відповіддю до задачі буде $(-4; -3) \cup (5; 10)$.

Зауваження. Кінці проміжків можуть бути обчислені з певною похибкою.

Для графічного розв'язування системи нерівностей у програмі *Gran1* передбачена послуга *Операції/Система нерівностей* $y(x) < (>) c$. При зверненні до цієї послуги з'являється вікно, в якому необхідно вказати знак нерівностей ($>$ або $<$) та число c (в наших рекомендаціях $c=0$).

Зауважимо, що залежності типу $y = f(x)$, для яких буде розглядатися система нерівностей $f_i(x) > c$ (або $f_i(x) < c$), перед зверненням до послуги розв'язання повинні бути відмічені () , а їх графіки побудовані у вікні *Графік*.

При розв'язуванні такої системи нерівностей на осі Ox відзначаються (червоним кольором) точки, які задовольняють усім зазначеним нерівностям одночасно. У вікні *Відповіді* дається список наближених значень координат кінців відрізків осі Ox , точки яких є розв'язками усіх нерівностей системи. Значення коренів обчислюються на відрізку, спільному для усіх проміжків задання функцій, які визначають нерівності системи.

Приклад 2.3. (*Gran1*) Знайдемо множину розв'язків системи нерівностей
$$\begin{cases} 2x - 3y \geq 1, \\ x + 2y > 2. \end{cases} \quad [45, \text{с. 190}]$$

Побудувавши графіки залежностей $F(x, y) = 2x - 3y - 1$, $F(x, y) = 2 - x - 2y$ і звернувшись до послуги *Операції/Нерівності/С-ма нерівностей* $G(x, y) > (<) 0$ (вказавши знак $>$), одержимо – будь-яка внутрішня точка заштрихованої на рис. 2.4 частини площини є розв'язком розглядуваної системи нерівностей. І знову вчителю варто звернути увагу учнів на те, що границі заштрихованої області можуть як задовольняти умови задачі, так і не задовольняти їх, тому варто додатково поміркувати над правильністю і коректністю відповіді.

Приклад 2.4. (*Gran1*) Знайдемо множину розв'язків системи нерівностей
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1, \\ y \geq -|x|. \end{cases} \quad [45, \text{с. 190}]$$

Зазначеній системі нерівностей задовольняють точки заштрихованої множини разом із граничними кривими (рис. 2.5).

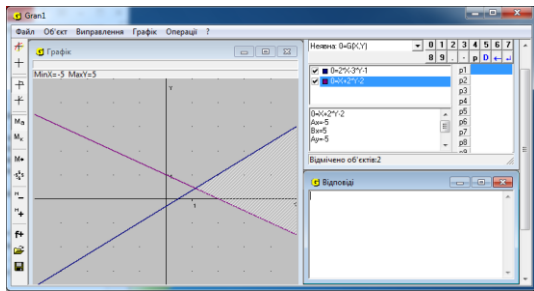


Рис.2.4.

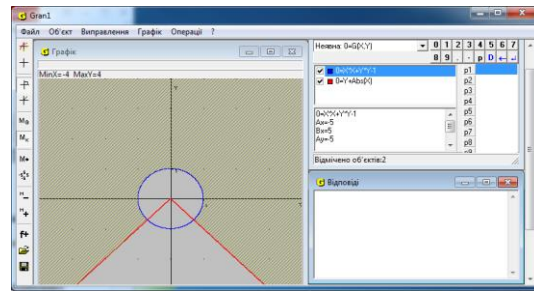


Рис.2.5.

Приклад 2.5. (Gran1) Побудувати графік нерівності $\log_{\frac{x^2+y^2}{2}} x \geq 1$. [13,

с. 41]

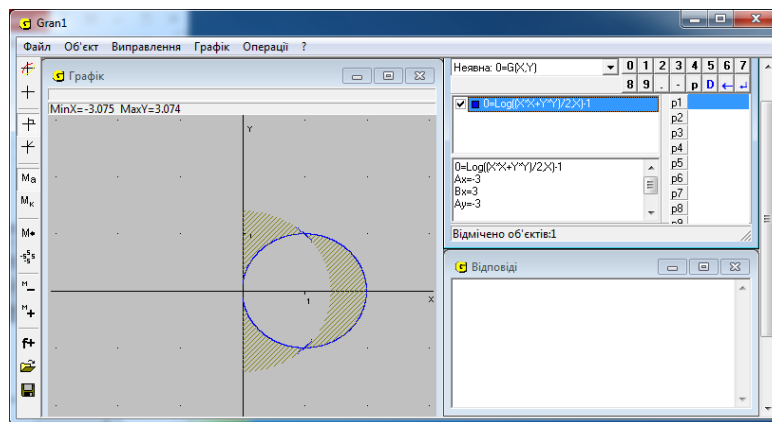


Рис.2.6.

Побудувавши графік залежності $0 = \log_{\frac{x^2+y^2}{2}} x - 1$ (синтаксис логарифмічної функції такий: *Log(основа логарифма, підлогарифмічний вираз)* і звернувшись до послуги *Операції/Нерівності/С-ма нерівностей* $G(x, y) > (<) 0$ (вказавши знак $>$), одержимо – зазначеній нерівності задовольняють точки заштрихованої множини (рис. 2.6).

Математический конструктор (МК)

Програма МК має окрему алгебраїчну панель. Графіки стандартних функцій ($y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = e^x$, $y = \ln x$ і довільного многочлена $y = ax^3 + \dots$ степені не вище 3) можна будувати одним натисненням відповідної кнопки. Розробниками передбачені також інструменти перетворення графіків:

- зсув ($y = f(x) + a$, $y = f(x + a)$),
- розтягування ($y = af(x)$, $y = f(ax)$),
- симетрія відносно осей ($y = -f(x)$, $y = f(-x)$),

- композиції $y = f(|x|)$, $y = \sqrt{f(x)}$, $y = \frac{1}{f(x)}$,
- диференціювання.

Для виконання цих команд потрібно натиснути відповідну кнопку і виділити графік, який потрібно перетворити (вказати параметр за необхідності).

Явну функцію можна задати за допомогою кнопки $f(x)$, неявну – кнопки $F(x, y)$. При цьому з'являться відповідні діалогові вікна (рис.2.7, 2.8).

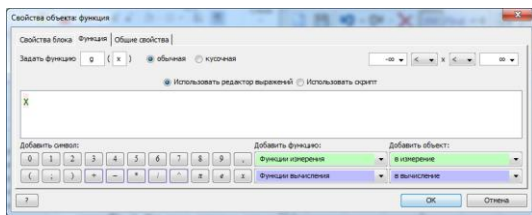


Рис.2.7.

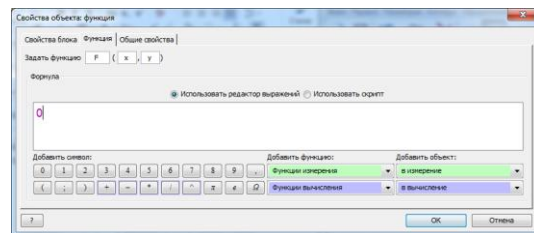



Рис.2.8.

Графічне розв'язування рівнянь та систем рівнянь як пошук точки перетину здійснюється за допомогою кнопки . На відміну від *Gran1* розв'язки рівняння чи системи рівнянь буде знайдено з наперед заданою точністю, що можна задати у властивостях. Зауважимо, що при розв'язуванні рівнянь відразу не вдається побудувати точку перетину графіка з віссю Ox , оскільки осі координат в MK не є геометричними об'єктами. Потрібно провести пряму поверх осі. Для цього, наприклад, будуюмо точку з координатами $(0,0)$ (побудуємо довільну точку, а потім у діалозі її властивостей змінимо координати на $(0,0)$ і заборонимо зміни) та проводимо через неї горизонтальну пряму.


Приклад 2.6. (MK) Розв'язати рівняння $\log_2 \frac{x}{\sqrt{4x-3}} = \sqrt{4x-3} - x$. [13, с. 33]

Скористаємось кнопкою задання явної функції і введемо функцію

виду $h(x) = \frac{\ln(\frac{x}{\sqrt{4x-3}})}{\ln(2)} - \sqrt{4x-3} + x$, оскільки у MK передбачені функції

логарифмів лише натуральних і десяткових. Побудуємо графік функції, натиснувши на відповідну кнопку з панелі інструментів. Точки перетину графіка з віссю Ox є, але вони не відображені, і координати їх нам не відомі. Як у середовищі *Gran1*, підвівши вказівник миші у видиму точку перетину графіка та осі, можна наближено побачити координати шуканих

точок – вони відображаються внизу праворуч. Але середовище дозволяє більш точно знайти розв’язки рівнянь за допомогою наступних кроків.

Проведемо горизонтальну пряму поперх вісі Ox . Потім знайдемо точки перетину графіка функції і побудованої прямої та введемо їх координати на екран кнопкою  (рис. 2.9).

Отримуємо, що розв’язками рівняння є $x_1 = 1, x_2 = 3$.

Розв’язування нерівностей та їх систем розробниками *МК* поки що не реалізовані.

Зауважимо, що у середовищі *ЖГ* функцію можна задати за допомогою пункту меню *Графіки/Новая функция* та побудувати її графік – *Графіки/График новой функции* (або за допомогою меню правої кнопки миші). Але побудувати точки перетину графіка з віссю Ox чи декількох графіків функцій у середовищі неможливо, що змушує ставити додаткову точку у місце перетину і аналізувати абсцису і ординату цієї точки окремо. Програмою *ЖГ* також не передбачено розв’язування нерівностей та їх систем.

GeoGebra

В програмі *GeoGebra* можна будувати графіки довільних функціональних залежностей. На відміну від інших динамічних середовищ розробники програми передбачили активний рядок вводу, який знаходиться внизу і має дуже широку і розвинену довідку. За допомогою такого рядка можна здійснювати велику кількість математичних операцій. Там же можна побачити синтаксис основних команд і функцій.

У програмі передбачено побудову графіка функції на заданому відрізку за допомогою команди $f(x)=[f(x),a,b]$. Якщо перед користувачем стоїть задача побудувати кускову функцію, то потрібно додатково використати оператор *if[умова, якщо вірно, в іншому випадку]*.

Приклад 2.7 (*GeoGebra*). Побудувати графік функції

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, x \in (-1;3) \\ x - 1, x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty) \end{cases}$$

Для побудови графіка функції $f(x)$ в командному рядку вводимо $f(x)=if[-1<x<3,x^2+1,x-1]$ (рис.2.10).

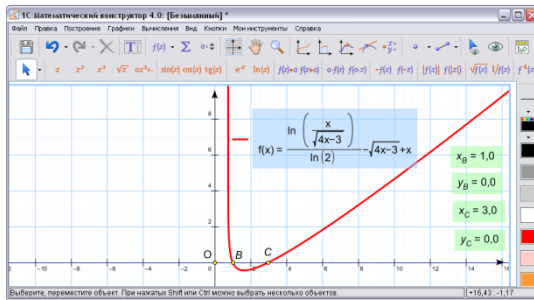


Рис.2.9.

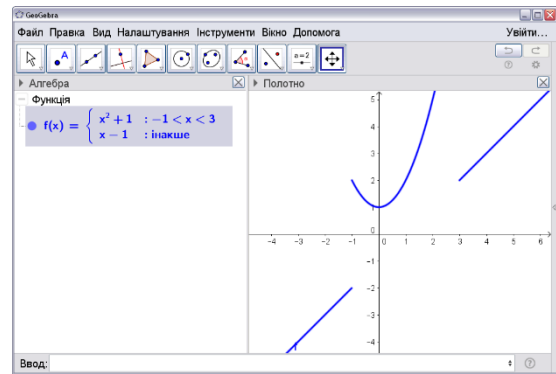


Рис.2.10.

Якщо ж потрібно побудувати графік функції, яка задана на більше, ніж двох інтервалах, то замість аргументу «в іншому випадку», потрібно ввести ще один оператор *if*.

Приклад 2.8 (GeoGebra). Побудувати графік функції

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 3, & x \in (-\infty; -1] \\ x + 1, & x \in (-1; 1] \\ \frac{2}{x}, & x \in (1; +\infty) \end{cases}.$$

Для побудови графіка функції $f(x)$ в командному рядку вводимо $f(x)=if[x \leq -1, x^2 - 4x - 3, if[-1 < x \leq 1, x + 1, 2/x]]$ (рис.2.11).

Ідея розв'язування рівнянь та їх систем аналогічна до вже розглянутих пакетів динамічної математики. Зауважимо, що розв'язки, як і в МК, обчислюються із наперед заданою похибкою.

Приклад 2.9. (GeoGebra) Розв'язати рівняння [13, с. 210].

Через рядок вводу задамо функцію $f(x) = 4^{\text{tg}x} + 4^{\text{ctg}x} - 8$. На полотні з'явиться її графік (рис. 2.12).

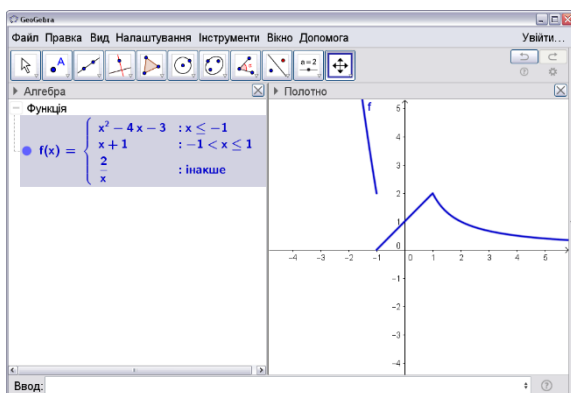


Рис.2.11.

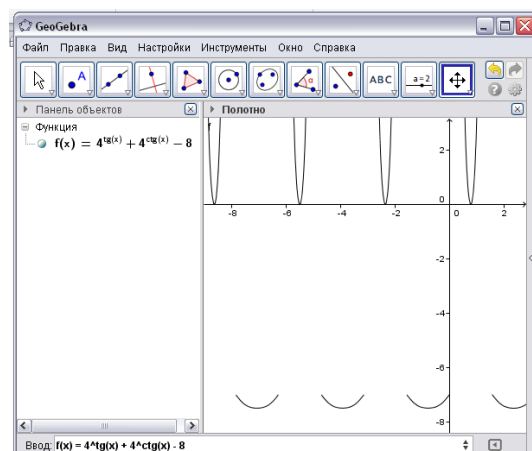


Рис.2.12.

За допомогою інструмента *Исследователь функции* можна побачити

основні характеристики, де, зокрема, зазначено, що коренів на проміжку $[-2;2]$ функція не має (рис.2.13). Разом з цим графік функції очевидно має спільні точки з віссю абсцис. Тому будують на графіку ці точки (при наближенні курсора до відповідного місця буде підсвічуватися віконце одночасно з двома надписами *Функция f* і *ОсьАбсцисс*) і визначають їх властивості за допомогою правої кнопки миші або у інтерактивному режимі (рис.2.14).

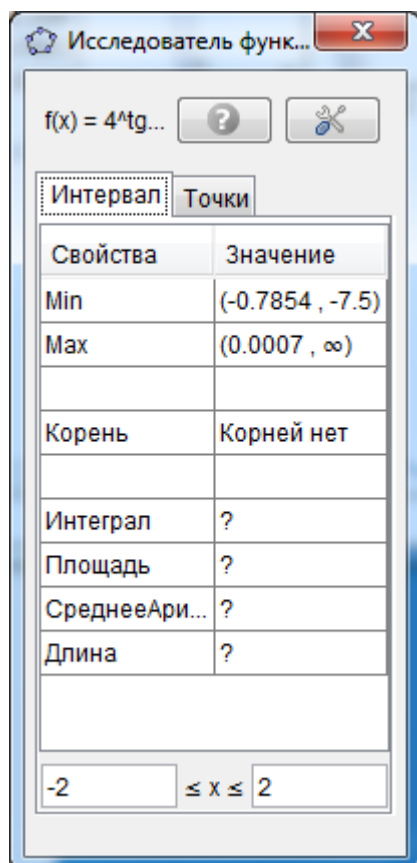


Рис.2.13.

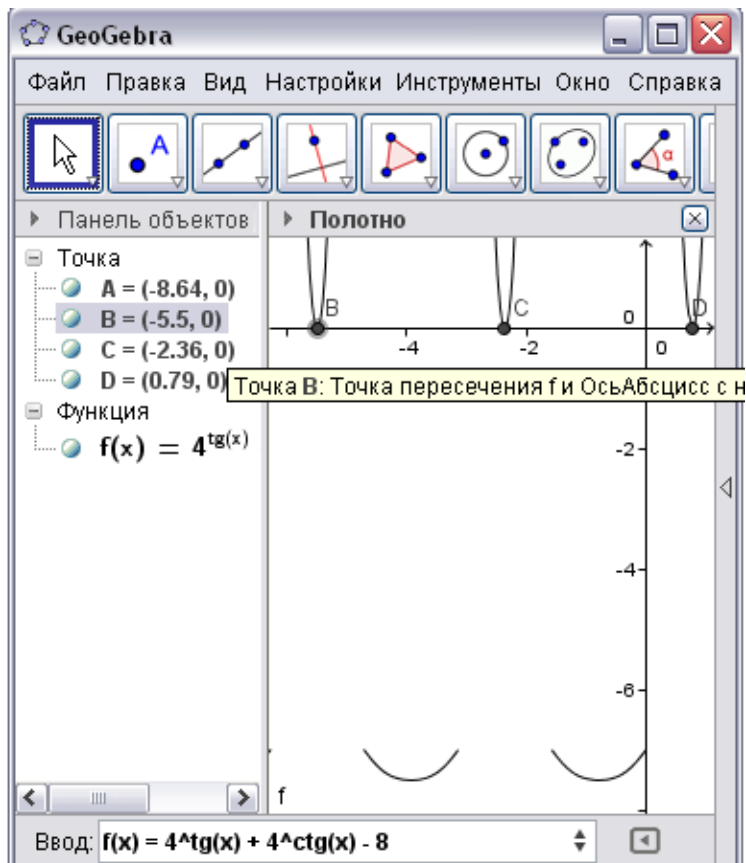


Рис.2.14.

Таким чином знайдено чисельні розв'язки рівняння на заданій області: $x_1 = -5,5$, $x_2 = -2,36$, $x_3 = -0,79$, $x_4 = 3,93$ і т.д., але це не завжди вдовольняє користувача, тому потрібно додатково аналізувати одержані результати: у перекладі на коректну математичну мову точними розв'язками рівняння будуть $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \text{де } n \in Z$.

Зауважимо, що програма *GeoGebra* дозволяє змінювати одиниці поділок осей координат (*Настройки/Дополнительно*), що є зручним при вивченні тригонометричних функцій (рис. 2.15).

GeoGebra дозволяє розв'язувати деякі види нерівностей та їх систем.

Приклад 2.10. (*GeoGebra*) Зобразити на координатній площині xu

множину розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 5, \\ xy \geq 2. \end{cases}$ [45, с. 190]

У командному рядку задамо систему нерівностей: нерівності системи вводимо в дужках, між нерівностями ставимо знак \wedge – логічне «І». Відразу отримує розв'язок нерівності – точки заштрихованої множини (рис. 2.16).

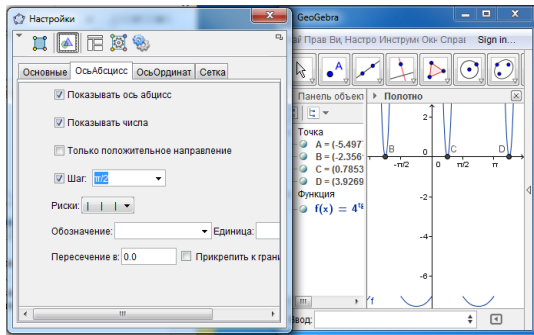


Рис.2.15.

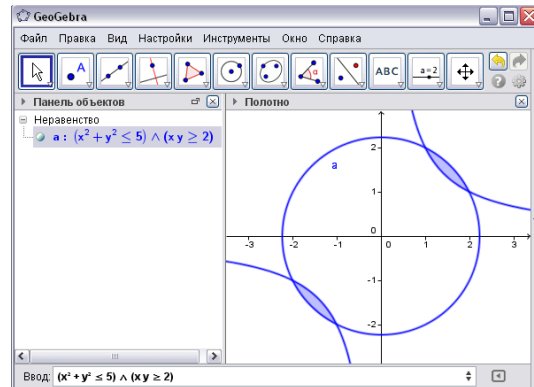


Рис.2.16.

На відміну від *Gran1* не вдається розв'язати нерівність прикладу 2.4, оскільки вираз $\log_{\frac{x^2+y^2}{2}} x \geq 1$ середовищем *GeoGebra* сприймається як функція багатьох змінних

2.2. Приклади розв'язування задач з параметрами

Gran1

Складність задач з параметрами багато у чому пов'язана зі складністю унаочнити традиційними методами динамічні математичні об'єкти. У програмі *Gran1* передбачено можливості побудови об'єктів, опис яких використовує динамічні параметри [20, 31].

Праворуч від вікна «Список об'єктів» розміщена таблиця із дев'яти елементів p_1, p_2, \dots, p_9 . Кожен рядок таблиці відповідає одному з динамічних параметрів, що можуть бути використані в аналітичному записі функціональної залежності. Якщо жоден з параметрів не використаний – таблиця порожня. Для параметрів, які в даний час використовуються, відповідні рядки таблиці містять поточне значення цього параметра.

При створенні об'єкта з використанням параметра вираз, який задає залежність між змінними може містити один або кілька параметрів. Після створення об'єкта з параметром, що ще не використовувався, у відповідний рядок таблиці заноситься початкове значення параметра, яке дорівнює 1, а також встановлюються максимальне і мінімальне значення відрізка, на якому відбувається зміна параметра та його приріст. Для кожного з параметрів можна встановлювати мінімальне (*Min*),

максимальне (Max) значення та крок (h) зміни параметра у відповідних рядках ($Min < Max, h > 0$).

У нижній частині вікна «Список об'єктів» знаходиться бігунець, за допомогою якого можна змінювати значення поточного параметра. Якщо під час роботи необхідно уточнити значення параметра, то потрібне значення заносять безпосередньо в таблицю.

Зміна будь-якого з динамічних параметрів призводить до того, що графіки всіх об'єктів, які містять цей параметр, перерисовуються.

Приклад 2.11. (*Gran1*) Знайти всі значення параметра a , при яких система рівнянь
$$\begin{cases} x^2 - (2a+1)x + a^2 - 3 = y, \\ y^2 - (2a+1)y + a^2 - 3 = x \end{cases}$$
 має єдиний розв'язок?

[45, с. 180]

Графіками заданих залежностей є параболи (рис. 2.17).

Змінюючи параметр a (у нас це $p1$) і аналізуючи взаємне розміщення парабол, одержимо, що вони дотикаються при $a = -2$.

Живая Геометрия

Розробниками середовища ЖГ не передбачено явне використання параметрів при заданні об'єктів. Але дослідження параметричних виразів в ньому також можливо.

Приклад 2.12. (*ЖГ*) Побудувати графік функції $f(x) = a(x - m)^2 + n$ та дослідити його залежність від параметрів a , m та n .

Задамо параметри a , m та n за допомогою повзунків.

Рисуємо на заданій прямій (або окремо) горизонтальний відрізок AB , обчислюємо абсиси його кінців та вводимо параметр a , клацнувши правою кнопкою миші і вибравши *Новый параметр*. Спочатку він буде прийнятий за одиницю, але змінюємо його примусово на різницю $x_B - x_A$. Рухаючи точку B (повзунок), ми змінюємо параметр a . Аналогічно будемо повзунки для параметрів $m = CD$ і $n = EF$.

Далі побудуємо графік функції $f(x) = a(x - m)^2 + n$ через пункт меню *График/График новой функции*. При заданні функції звертаємося до відповідних параметрів на екрані (рис. 2.18).

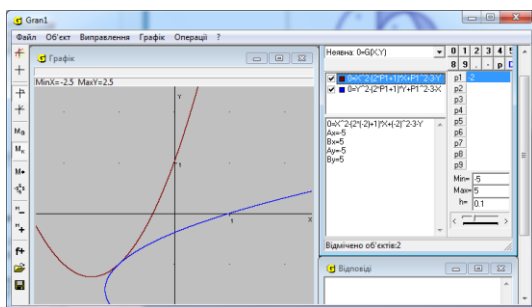


Рис.2.17.

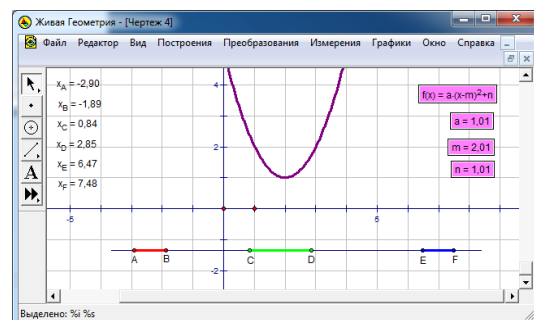



Рис.2.18.

Змінюючи параметр (рухаючи кінець відповідного відрізка), робимо висновки про залежність форми графіка функції $f(x) = a(x - m)^2 + n$ від параметрів a , m та n .

Математический конструктор

У програмі МК окремо передбачено набір послуг, який можна викликати за допомогою крайньої справа кнопки у верхньому рядку панелі інструментів.

Приклад 2.13. (МК) При яких значеннях параметра a рівняння $ax + \sqrt{-5 - x^2} - 6x = 2$ має два корені. [45, с. 154]

Щоб додати параметр в МК, потрібно обрати кнопку  на панелі інструментів або в меню *Вычисления* і клацнути там, де потрібно розмістити параметр. При цьому відкриється діалогове вікно (рис. 2.19).

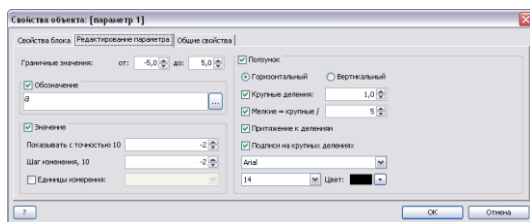


Рис.2.19.

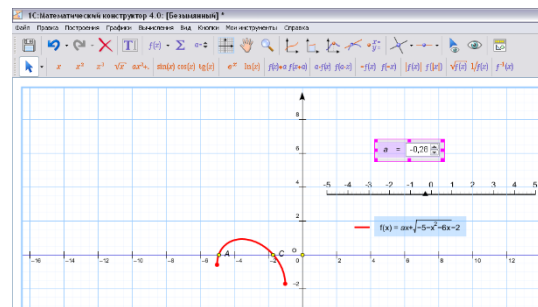



Рис.2.20.

У цьому вікні параметр можна перейменувати, а також створити повзунок, який дозволить змінювати значення параметра мишою. До створеного параметра можна звертатися при заданні функцій та виразів.

Рухаючи повзунок і тим самим змінюючи параметр a , приходимо до висновку, що рівність $ax + \sqrt{-5 - x^2} - 6x = 2$ має два розв'язки, якщо $a \in [-0,4; 0]$ (рис.2.20).

Приклад 2.14. (МК) При якому значенні параметра a дотична до графіка функції $y = a - x^2$ відтинає від першої чверті рівнобедрений трикутник площею 0,3 кв. од. [12, с. 265]

Традиційне розв'язання задачі пов'язано із знаходженням дотичної, яка утворює з осями рівнобедрений трикутник, та подальшого складання рівняння, де невідомим буде виступати шукане значення a .

Введемо параметр a , задамо функцію $y = a - x^2$ та побудуємо її графік. Через довільну точку K на параболі проведемо дотичну за допомогою інструменту *Построить касательную к кривой* .

Побудуємо точки перетину дотичної з осями координат – точки A та

В. Зауважимо, що це не вдається зробити відразу, оскільки осі координат у середовищі *МК* не є геометричними об'єктами. Потрібно додатково провести прямі поверх осей – будуюмо довільну точку, потім у діалозі її властивостей змінимо координати на (0,0) і через контекстне меню заборонимо їх зміну, потім проводимо через неї горизонтальну та вертикальну прямі.

Обчислимо довжини відрізків *OA* та *OB* і знайдемо місце точки *K* на параболі, при якому відбувається рівність $OA=OB$.

Далі визначимо площу трикутника *AOB* і, змінюючи значення параметра *a*, знайдемо таку конфігурацію, яка задовольняє умову задачі: при значенні $a=0,5$ площа трикутника буде 0,3 кв. од. (рис. 2.21).

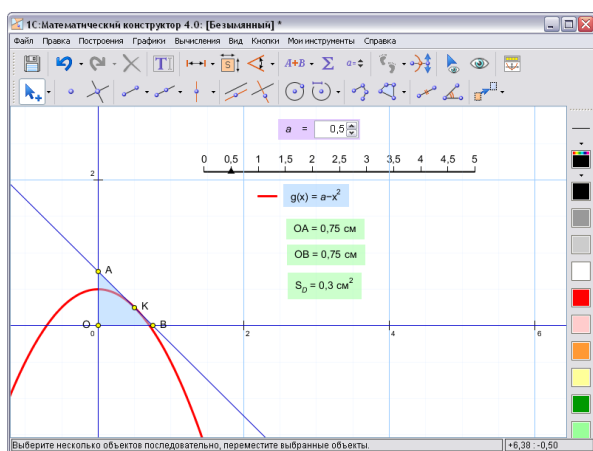


Рис. 2.21

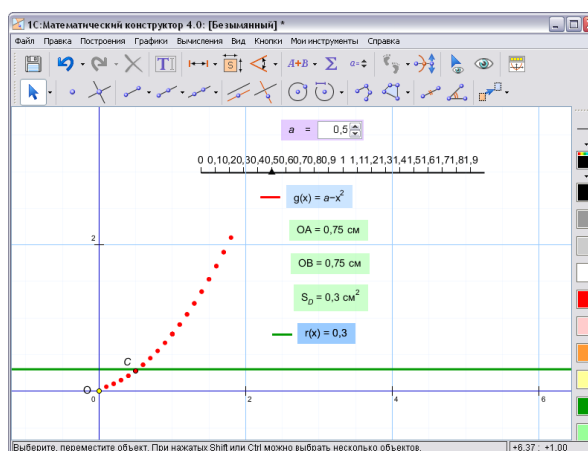


Рис. 2.22

Можливий інший підхід до останнього етапу розв'язування задачі – в окремому полі створюємо емпіричну функцію, яка буде визначатися динамічним слідом деякої точки *C* з особливими координатами: аргументом, що відповідає параметру *a*, і значенням функції, що відповідає площі трикутника. Зазначимо, що у такий спосіб побудована емпірична функція буде залежати від кроку зміни параметру – чим менший крок зміни параметру *a*, тим щільніше будуть розташовані точки-сліди і тим якіснішою буде побудова.

Якщо на цьому ж полі побудувати графік функції $r(x)=0,3$ (задана площа), то точка його перетину з емпіричною функцією буде надавати відповідь задачі (рис.2.22).

Приклад 2.15. (*МК*) Знайти всі значення параметра *a* ($a \geq 1$), при яких фігура, обмежена лініями $\{y = 1, y = 2, x \geq 0, y = ax^2, y = \frac{1}{2}ax^2\}$, буде мати найбільшу площу. [13, с. 360]

Задамо параметр *a* і побудуємо функції $y = 1, y = 2, y = ax^2,$

$y = \frac{1}{2}ax^2$, для кожної з яких обмежимо область визначення $0 \leq x \leq \infty$.

Інструментами середовища знайдемо точки A, B, C, D перетину заданих ліній і площу утвореної фігури E .

Змінюючи параметр a і візуально спостерігаючи за значенням площі, приходимо до висновку, що при $a = 1$ площа буде найбільшою.

Тут також можна створити емпіричну функцію, яка буде визначатися динамічним слідом точки F з аргументом, що відповідає параметру a , і значенням функції, що відповідає площі E . На графіку за умови маленького кроку для параметру a очевидним буде максимум $S=0.5$, який буде відповідати шуканій величині (рис. 2.23).

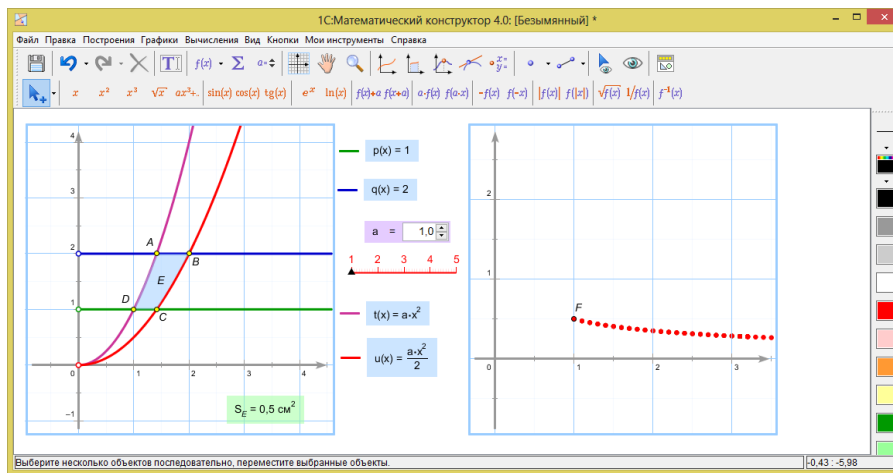



Рис. 2.23.

Нами застосовано і продемонстровано суто візуальний і конструктивний підхід до розв'язування задачі, яке традиційно реалізується аналітично, причому із залученням інтегрального числення. При такому підході для її розв'язання учню достатньо знати інструменти віртуального середовища для побудови графіків та розуміти поняття функції та способів її задання.

GeoGebra

Розглянемо використання параметра у середовищі *GeoGebra*.

Приклад 2.16. (*GeoGebra*) При яких значеннях параметра a рівняння $(a-1)\sin \frac{x}{8} + \sin x = 1$ і $(a-a^2)\cos 2x + \sin x = a$ мають рівні непорожні множини розв'язків? [12, с. 295]

У програмі *GeoGebra* на панелі інструментів обираємо кнопку . У вікні, що з'явилося, потрібно вказати властивості повзунка (рис. 2.24). Зауважимо, що параметр може бути не тільки лінійним, але й кутовим.

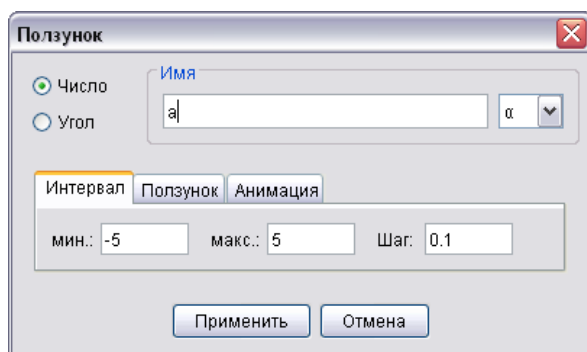


Рис.2.24.

Побудуємо функціональні залежності $g(x) = (a-1)\sin\frac{x}{8} + \sin x - 1$ і $h(x) = (a-a^2)\cos 2x + \sin x - a$ через рядок вводу (рис. 2.25).

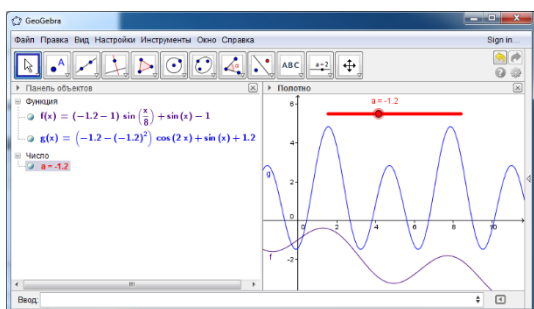


Рис.2.25.

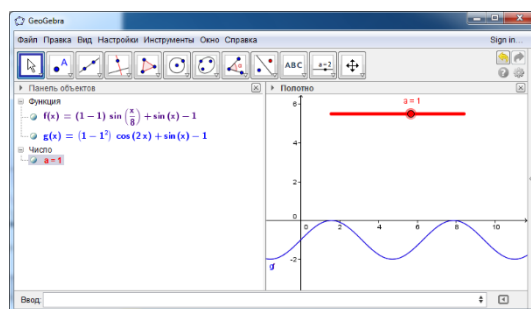


Рис.2.26.

Змінюючи параметр a , отримуємо, що графіки збігаються і мають однакові множини розв'язків при $a = 1$ (рис.2.26).

Приклад 2.17. (*GeoGebra*) Знайти всі від'ємні значення параметра a , при яких система рівнянь
$$\begin{cases} 2\sqrt{y^2 - 4y + 4} + 3|x| = 11 - y, \\ 25x^2 - 20ax = y^2 - 4a^2 \end{cases}$$
 має єдиний розв'язок. Якщо такий розв'язок один, то записати його у відповідь. Якщо таких значень декілька, то у відповідь записати їх суму [33].

Перетворимо перше рівняння системи

$$2\sqrt{y^2 - 4y + 4} + 3|x| = 11 - y,$$

$$2\sqrt{(y-2)^2} + 3|x| = 11 - y,$$

$$2|y-2| + 3|x| = 11 - y,$$

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 2 \\ y = -x + 5 \\ x \geq 0, y < 2 \\ y = 3x - 7 \\ x < 0, y \geq 2 \\ y = x + 5 \\ x < 0, y < 2 \\ y = -3x - 7 \end{cases}$$

Перше рівняння не містить параметр і його фіксований геометричний образ – межі дельтоїда.

Друге рівняння $25x^2 - 20ax = y^2 - 4a^2$, $(5x - 4a)^2 = y^2$, $\begin{cases} y = 5x - 2a, \\ y = -5x + 2a \end{cases}$

задає множину «хрестів» – пар прямих, що перетинаються на осі абсцис. Кутові коефіцієнти цих прямих не залежать від параметра, тому всі прямі в кожній парі паралельні.

Побудуємо графіки рівнянь системи (рис. 2.27).

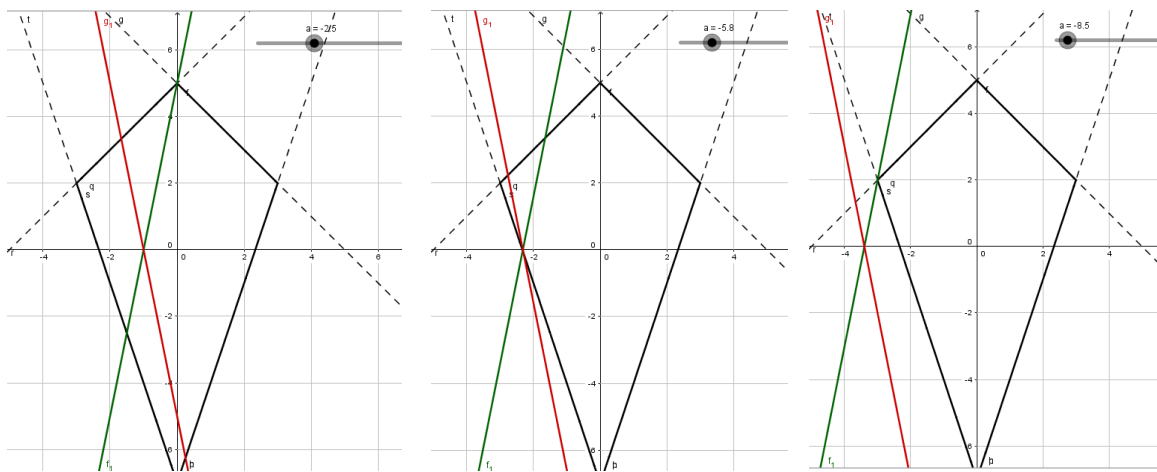


Рис. 2.27.

Змінюючи параметр a , отримуємо наступні кількості розв'язків (табл. 2.1).

Таблиця 2.1

Кількість розв'язків для різних значень параметра a

Значення параметра	Кількість розв'язків
$a \in (-6,5;5,8) \cup (-5,8;5,8) \cup (5,8;6,5)$	4
$a = \pm 5,8, a = \pm 6,5$	3
$a \in (-8,5;-6,5) \cup (6,5;8,5)$	2
$a = \pm 8,5$	1

$a \in (-\infty; -8,5) \cup (8,5; +\infty)$	немає розв'язків
---	------------------

Система рівнянь має єдиний розв'язок при одному від'ємному значенні параметра a – це значення $-8,5$.

Лише використовуючи графічний метод розв'язування задач з параметром, вдається майже безпомилково провести повне дослідження числа розв'язків.

2.3. Приклади розв'язування задач диференціального числення

У програмах динамічної математики розробники завжди передбачають можливість побудови так званого динамічного сліду, якій ототожнюють з геометричним місцем точок (ГМТ). В окремих середовищах «підфарбовують» точку, яка під час руху буде залишати слід на екрані монітора. Проте цей слід не сприймається середовищем як геометричний самостійний об'єкт. Він залишається у своєму первісному вигляді при будь-яких подальших змінах рисунка і не буде «прив'язаний» до жодної з фігур.

У ПДМ також використовують «локус», під яким розуміють ГМТ як динамічну криву (математичний об'єкт) з певними властивостями, що будуть відображатися і під час динамічних змін самої конструкції, зокрема, на них можна ставити точки, будувати їх перетин з іншими лініями (у тому числі, і з іншими ГМТ), будувати їх образи при перетвореннях.


Для побудови динамічного сліду за даними задачі потрібно створити «точку-олівець», яка буде пробігати шукане геометричне місце, і забезпечити механізм цього «пробігу». Для цього створюється «точка-водій», від якої залежить вся конструкція і яку можна вільно пересувати по деякій лінії: переміщення «точки-водія» забезпечує автоматичну побудову шуканого ГМТ або його частини.

Зауважимо, що команда побудови сліду застосовна не тільки до точок, а і до довільних об'єктів (відрізків, прямих, кіл, багатокутників, навіть ГМТ). Разом з цим можна отримати ресурсогроміздкі конструкції, і робота програми може сильно сповільнитися.

GeoGebra

Приклад 2.18. (*GeoGebra*) Побудувати графік похідної функції $y = \sin x$ за її графіком [24].

Побудуємо графік похідної, не обчислюючи її аналітично. Графік функції $y = \sin x$ побудуємо через рядок вводу, після будуємо дотичну до графіка функції $y = \sin x$, попередньо задавши точку A на графіку (після натиснення кнопки *Касательная* на точці A графіка функції з'явиться дотична, що проходить через цю точку). Обчислимо кутівий коефіцієнт дотичної за допомогою кнопки *Наклон прямой*, який чисельно дорівнює

похідній функції у точці A . Далі будуємо точку $B(x(A), k)$, яка належить графіку похідної. Побудуємо графік похідної заданої функції як гмт, що визначається «точкою-водієм» A та точкою-олівцем» B , за допомогою кнопки *Локус*  (рис. 2.28).

Якщо змінити вихідну функцію, то відповідно зміниться і графік похідної, тобто дану модель можна вважати універсальною для побудови графіків похідних.

Приклад 2.19. (*GeoGebra*) Знайти проміжки зростання та спадання функції $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 2}$. [13, с. 139]

Через рядок вводу задамо функцію $f(x)$ та її похідну $g(x)$ (команда *Производная[f(x)]*) (рис.2.29).

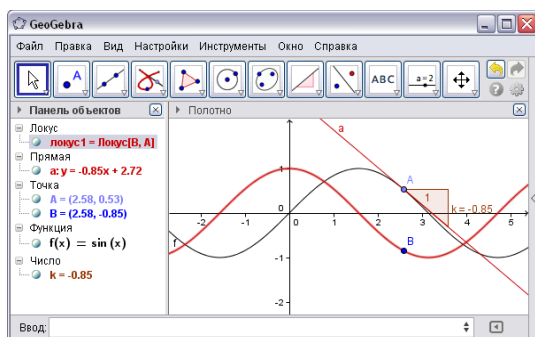


Рис.2.28.

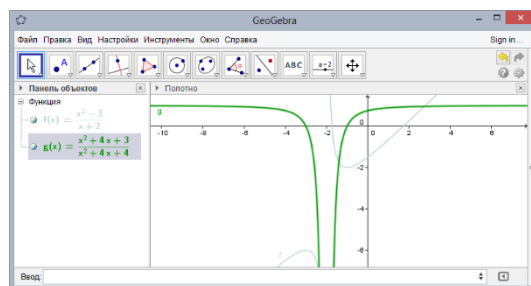


Рис.2.29.

Критичні точки – це точки перетину графіка похідної функції з віссю абсцис і точки, в яких похідна не існує. Отже, критичними будуть точки $x_1 = -3$ (абсциса точки B), $x_2 = -2$ (в цій точці похідна не існує) та $x_2 = -1$ (абсциса точки A) (рис.2.30).

Побудуємо проміжки спадання функції, які співпадають з проміжками сталого від'ємного знаку її похідної. Якщо з точок графіка похідної провести вгору вертикальні промені, то вони перетнуть вісь абсцис тоді і тільки тоді, коли точки графіка лежать у нижній півплощині.

Візьмемо довільну точку C графіка похідної, через рядок вводу задамо вектор $u = (0,1)$ (команда *Вектор[(0,0),(0,1)]*) і виконаємо паралельне перенесення точки C на вектор u – одержимо точку C' . Побудуємо промінь CC' і знайдемо точку E його перетину з віссю абсцис. Такі «складні» дії потрібні для того, щоб враховувався лише напрям вгору, і не відбувалося просте з'єднання точок C і C' .

Побудуємо ГМТ (локус) точки перетину E при русі по графіку точки C , з якої проводився промінь (рис. 2.31).

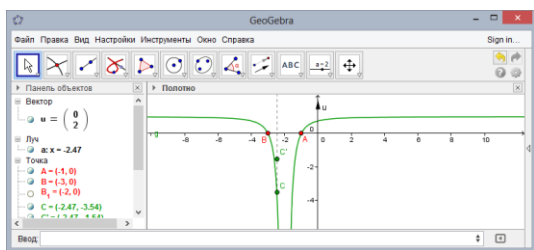


Рис.2.30

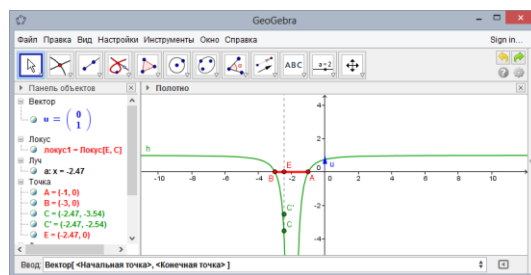


Рис.2.31.

Одержимо слід, який визначить проміжок спадання функції $(-3;-1)$. З урахуванням області визначення відповіддю буде $(-3;-2) \cup (-2;-1)$.



Завдяки тому, що побудовано локус, а не простий слід точки при зміні напрямку вектора на протилежний, наприклад, $(0;-1)$, відразу маємо проміжки зростання функції (рис.2.34).

Зауважимо, що описана ідея дозволяє знайти область визначення та область значень функції, проміжки опуклості графіка функції.

Математический конструктор

Приклад 2.20. (МК) Знайти точки екстремуму функції $y = 2|x|(x - 3) - x^3$ [13, с. 156].

Нагадаємо, що точки максимуму та мінімуму називаються точками екстремуму, а значення функції в цих точках – її екстремумами.

В МК екстремуми функції можна побудувати за допомогою кнопки  Отримаємо точки A та B, координати яких автоматично можуть бути визначені кнопкою  (рис.2.33).

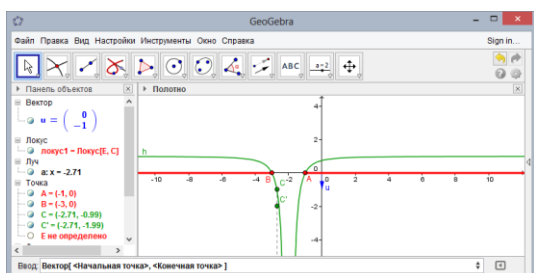


Рис.2.32.

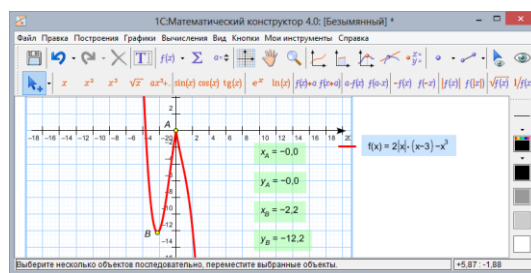



Рис.2.33.

Отже, критичні точки функції $x_1 = -2,2$ та $x_2 = 0$ і максимум функції $f(0) = 0$, мінімум $f(-3) = -12,2$ (рис. 2.33).

Приклад 2.21. (МК) При яких значеннях параметра a пряма $y = ax + 1$ є дотичною до графіка функції $y = \sqrt{4x + 1}$ [13, с. 123].

Побудуємо графіки функцій $y = \sqrt{4x + 1}$ і $y = ax + 1$, задавши попередньо параметр. Позначимо точки перетину цих графіків і

слідкуватимемо за кількістю точок перетину при зміні параметра (рис. 2.32). Як тільки графіки будуть мати єдину точку перетину, то пряма $y = ax + 1$ буде дотичною до графіка функції $y = \sqrt{4x + 1}$. Це відбувається при $a = 2$ (рис. 2.34).

Зауважимо, що у середовищі *MK* передбачена побудова дотичних до графіка функції у точці за допомогою кнопки .

2.4. Приклади розв'язування задач інтегрального числення

Gran1

Для обчислення визначених інтегралів виду $\int_b^a f(x)dx$ можна використовувати послугу *Операції/Інтеграл/Інтеграл*. [31, 32]

Якщо відмічено кілька функцій, то значення інтегралів, знайдених для кожної окремої функції, додаються. Останнє дає можливість обчислювати інтеграл для функцій, заданих різними виразами на різних відрізках. Якщо вказані межі інтегрування функції виходять за відрізок, на якому задана функція, то інтеграл обчислюється на частині відрізка, спільній для двох заданих. Наприклад, якщо функція задана на відрізок $[-5;5]$, а межі інтегрування вказані $[0;10]$, то значення інтеграла буде обчислено на відрізок $[0;5]$.

Якщо у вікні *Графік* була побудована функція, інтеграл від якої обчислюється, то відповідна криволінійна трапеція заштриховується.

Приклад 2.22. (*Gran1*) Знайти площу криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = -\frac{8}{x}$, $x = -4$, $x = -2$, $y = 0$ [14, с. 82].

Побудувавши графік функції $y = -\frac{8}{x}$ на проміжку $[-10;10]$, звернемося до послуги *Операції/Інтеграл/Інтеграл...* На відповідні запити введемо ліву межу інтегрування $A = -4$ і праву межу інтегрування $B = -2$. В результаті одержимо $I \approx 5,545$ (рис.2.35).

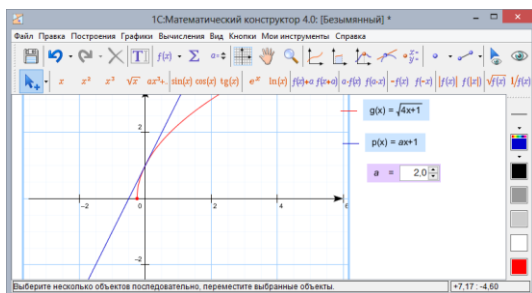


Рис.2.34.

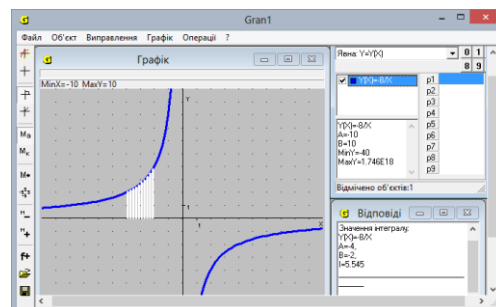


Рис.2.35.

Зауваження. Наближене значення визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ можна одержати також як площу многокутника, обмеженого замкненою ламаною з вершинами $(a,0)$, $(a, f(x))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, ..., $(x_n, f(x_n))$, $(b,0)$, де вершини $(x_i, f(x_i))$ і їх кількість добираються так, щоб на відрізку $[a,b]$ ламана лінія була якомога ближче до кривої $y = f(x)$ (звертаючись до послуги *Операції/Операції з ламаними/Площа многокутника*).

Аналогічно для наближеного обчислення головного значення невластного інтеграла виду $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ можна обчислювати інтеграл $\int_{-A}^A f(x)dx$, поступово збільшуючи A до стабілізації певної кількості цифр, якщо така наступить (можуть знадобитися додаткові аналітичні дослідження стосовно збіжності інтеграла).

Приклад 2.23. (*Gran1*) Обчислити наближено інтеграл $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

[31, с. 180]

Побудуємо графік функції $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ на проміжку $[-6,6]$ (рис. 2.36).

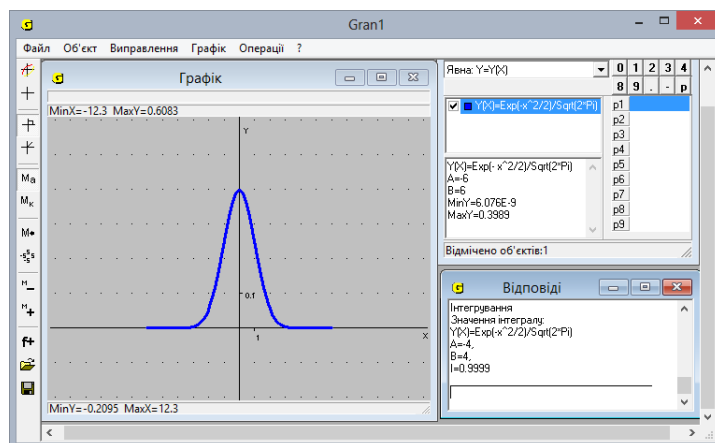


Рис. 2.36.

Обчислимо інтеграл $\int_{-p1}^{p1} f(x)dx$. В результаті одержимо, що для даної функції інтеграли на відрізках $[-3,3]$, $[-4,4]$ практично не відрізняються між собою і з досить великою точністю дорівнюють 1 (рис. 2.37, 2.38).

Цей результат спеціальними прийомами можна вивести й

аналітично (хоч для функції $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ первісна в скінченному вигляді не існує) і показати, що $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$. Він має спеціальну назву – інтеграл

Ейлера-Пуассона. Для обчислення значень функції $y = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, яку називають функцією Лапласа, давно побудовані спеціальні таблиці її значень і широко використовуються у теорії ймовірностей і математичній статистиці.

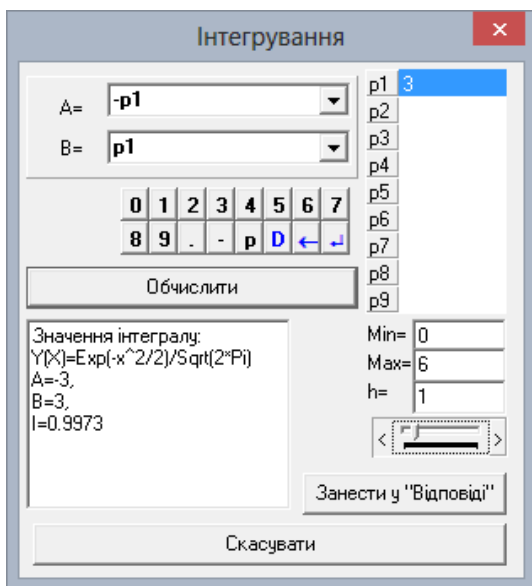


Рис.2.37

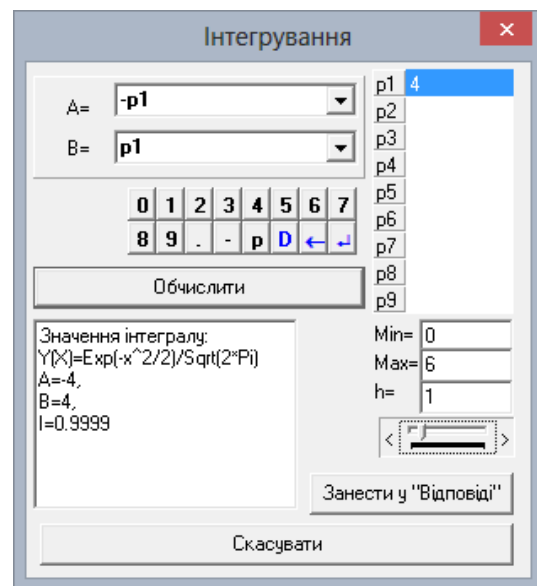



Рис.2.38



Математический конструктор

Приклад 2.24. (МК) Знайти площу фігури, обмеженої графіком функції $y = \begin{cases} x + 3, & x < -1 \\ x^2 + 1, & x \geq -1 \end{cases}$ і прямими $y = 0$, $x = -2$, $x = 0$ [14, с. 86].

Традиційно задача зводиться до обчислення інтеграла на відрізьку $[-2; 0]$ від заданої функції. Ми пропонуємо інший підхід.

Побудуємо графіки функцій $y = x + 3$ при $x < -1$, $y = x^2 + 1$ при $x \geq -1$ (деякі версії передбачають можливість побудови кусочно-гладкої функції). Потім за допомогою кнопки  побудуємо області під графіками, причому у вкладці *Свойства объекта/Границы отрисовки по оси x* області F задамо межі від $x = -2$ до $x = -1$, а для області G – від $x = -1$ до $x = 0$ (рис. 2.39). Зауважимо, що за замовчуванням будується область під графіком функції до осі Ox . У діалозі властивостей побудованої області

можна вказати спосіб розташування області (над чи під графіком), границі побудови області по осям координат (до певного значення чи до нескінченності) та кольорові характеристики.

Знайдемо площі областей F і G за допомогою кнопки  та їх суму за допомогою кнопки .

Площа області F дорівнює 1,5, а області G – 1,3. Площа криволінійної трапеції дорівнює 2,8 (рис.2.40).

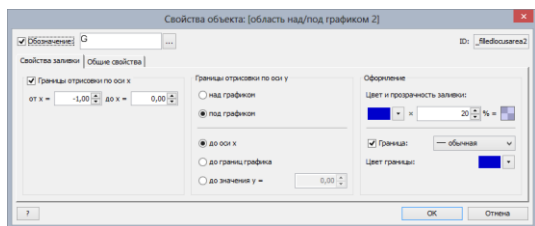


Рис.2.39.



Рис.2.40.

Лабораторна робота №1-2 (тренувальна)

Мета: навчитись використовувати програми динамічної математики для побудови графіків функціональних залежностей, розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем, уточнити шляхи використання програм для підтримки вивчення змістової лінії «Функція», «Рівняння та нерівності»; навчитись використовувати ПДМ для розв'язування задач з параметрами; визначити шляхи використання ПДМ під час дослідження функцій, обчислення визначених і невласних інтегралів, навчитись застосовувати ПДМ для розв'язування типових задач початків аналізу.

Обладнання. Комп'ютер, ППЗ *Gran1*, *ЖГ*, *МК*, *GeoGebra*.

Теоретичні питання.

- 1.Способи задання функцій (явний, неявний, параметричний, табличний, описовий).
- 2.Область визначення, множина значень функції.
- 3.Системи координат на площині (декартова, полярна).
- 4.Рівняння з однією змінною. Корінь рівняння. Точні і наближені розв'язки рівнянь. Способи розв'язування рівнянь (аналітичні і графічні).
- 5.Системи рівнянь. Розв'язки системи рівнянь. Методи розв'язування систем рівнянь в школі.
- 6.Нерівності і системи нерівностей у шкільному курсі математики. Способи розв'язування алгебраїчних нерівностей. Графічне розв'язування нерівностей та їх систем.

7. Поняття параметра.
8. Графічний спосіб розв'язування рівнянь, нерівностей, систем рівнянь та нерівностей з параметрами.
9. Область визначення і множина значень функції.
10. Критичні точки, екстремуми функції.
11. Дотична до графіка функції.
12. Загальна схема дослідження функції.
13. Поняття про криволінійну трапецію та її площу.
14. Визначений інтеграл як площа криволінійної трапеції.

Практичні завдання

1. Розв'язати рівняння в програмах *МК*, *ЖГ* та *GeoGebra*.
2. Розв'язати нерівність в програмі *Gran1*.
3. Розв'язати систему нерівностей в програмі *Gran1*.
4. Обчислити визначений інтеграл в програмах *Gran1* та *GeoGebra*.

В-т	Завдання	В-т	Завдання
1	1) $x^2 - 17x + 3 = 0$; 2) $(3x - 8)(3x + 8) \leq 6x - 40$ 3) $\begin{cases} x(1-x) \geq -3, \\ \log_{1/2}(x) \log_2(x) \geq -1. \end{cases}$ 4) $\int_1^5 x dx$	6	1) $ x - 1 - x^2 + 5 = 0$; 2) $\frac{x^2 - 7x + 12}{(x - 2)^2} \geq 0$; 3) $\begin{cases} x^2 - 9x - 10 \leq 0, \\ 6x - x^2 < 0. \end{cases}$ 4) $\int_{-3}^3 (2 + \cos(x^2)) dx$
2	1) $x^2 - \cos x = 0$; 2) $\sin x \leq \frac{1}{3}, x \in [-5, 5]$; 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16, \\ x + y \leq 5. \end{cases}$ 4) $\int_0^4 x^2 dx$	7	1) $(x^2 - 6x + 9)^2 + 2(x - 3)^2 = 3$; 2) $\sin(\sin(xy) + \cos(xy)) \leq 0$; 3) $\begin{cases} x^2 - 7x - 18 < 0, \\ 5x - x^2 \leq 0. \end{cases}$ 4) $\int_{-3}^3 \log_2(2 x) dx$
3	1) $\log_2(-x) = x$; 2) $x^2 - 7x - 1 \leq 3$	8	1) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 3$; 2) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 9$

В-т	Завдання	В-т	Завдання
	3) $\begin{cases} 2x^2 + 5x - 3 \geq 0, \\ 2 - x \geq 0. \end{cases}$ 4) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x) dx$		3) $\begin{cases} \frac{x-4}{8} + \frac{x+3}{6} < 7, \\ (x-3)^2 < (x+3)(x-2) + 1. \end{cases}$ 4) $\int \frac{27 dx}{8 \sqrt[3]{x^2}}$
4	1) $x^2 - \sin x = 0$; 2) $x^2 - 5x - 1 \leq \cos x$; 3) $\begin{cases} y \leq x^2 + 4x + 4, \\ (x+2)^2 + y^2 \leq 1. \end{cases}$ 4) $\int_{-1}^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$	9	1) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 3$; 2) $ x + y \leq 5$; 3) $\begin{cases} \frac{x-2}{4} + \frac{x+4}{8} < 6, \\ (x-4)^2 < (x+1)(x-3) - 5. \end{cases}$ 4) $\int_1^2 (x^2 + \frac{1}{x^4}) dx$
5	1) $\log_2(x) - \sin x = 0$; 2) $\frac{x^2 - 16}{ x+1 } \leq 0$; 3) $\begin{cases} -2x + y + 4 \leq 0, \\ -x - y + 5 \leq 0, \\ -x - 2y + 8 \leq 0, \end{cases}$ 4) $\int_{0,1}^{7,2} \log_2 \sqrt{\frac{x^3}{7} + x + 3} dx$	10	1) $x^2 - 20x + 3 = 0$; 2) $\frac{1}{\log_{1/2}(x+1)} \geq -2$; 3) $\begin{cases} x + y - 1 \leq 0, \\ x - y - 4 \leq 0, \\ -2x + y - 4 \leq 0. \end{cases}$ 4) $\int_2^7 x^4 dx$

2. Розв'язати задачі, використовуючи програми *Gran1*, *МК* та *GeoGebra*.

В-т	Завдання
1	1. При яких значеннях параметра a рівняння $ x^2 - 5x + 6 + a = 0$ має найбільшу кількість розв'язків? Найменшу кількість розв'язків? Три розв'язки? 2. Знайти всі значення параметра k , при яких система рівнянь $\begin{cases} y - \frac{1}{2} = k(x+2), \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$ має розв'язки

В-т	Завдання
2	1. Для кожного значення параметра a визначити число розв'язків рівняння $ x^2 - 2x - 3 = a$. 2. При яких значеннях параметра a система має три різних розв'язки? $\begin{cases} y^2 + 2(x-2)y + (x^2 - 4)(2x - x^2) = 0 \\ y = a(x-4) \end{cases}$
3	1. Для кожного значення параметра a визначити число розв'язків рівняння $\sqrt{2 x - x^2} = a$. 2. Знайти всі значення параметра k , при яких система рівнянь $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 6, \\ y = 8 + k(x-6) \end{cases}$ має два різних розв'язки.
4	1. Знайти число розв'язків рівняння $ x^2 - 6x + 8 + x^2 - 6x + 5 = a$ 2. При яких дійсних значеннях a система $\begin{cases} 2 x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$ має 8 різних розв'язків?
5	1. Знайти всі значення параметра b , при яких рівняння $\lg 2 x + \lg(2-x) - \lg(\lg b) = 0$ має єдиний розв'язок. 2. Знайти число розв'язків системи рівнянь ($a > 0$) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$
6	1. При яких a рівняння $ 2x - 1 = x - a$ має рівно три розв'язки? 2. При яких c система $\begin{cases} 2^{3x} - 2^{8y-3x+3} \geq 2^{4y+1} \\ x^2 + y^2 = c \end{cases}$, має хоча б один розв'язок?
7	1. При яких значеннях параметра c рівняння має тільки один розв'язок? Хоча б один розв'язок? $2\log_7(cx-2) = \log_{\sqrt{7}}(-x^2 - 9x - 18)$ 2. Знайти всі значення параметра a , при яких система рівнянь $\begin{cases} x^2 + y = 2x + a \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$ має розв'язки.
8	1. При яких значеннях параметра a рівняння $\sqrt{x+a} = x$ має два корені? 2. При яких значеннях параметра a система рівнянь не має розв'язків $\begin{cases} y = a(x-3), \\ \frac{1}{\log_x 2} + \frac{1}{\log_y 2} = 1 \end{cases}$

В-т	Завдання
9	1. При яких значеннях параметра a рівняння $ x - a - 2x + 2 = 3$ має єдиний розв'язок? 2. Знайти всі значення параметра a , для яких існує пара від'ємних чисел x та y , які задовольняють умові $\begin{cases} 2ax + y = 1, \\ x + 2y > a \end{cases}$
10	1. Розв'язати нерівність $\sqrt{x - a} > x + 1$. 2. Визначити, при яких значеннях параметра a система рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1 + a) \\ (x + y)^2 = 14 \end{cases}$ має точно два розв'язки.

3. Побудувати графік функції $y = a f(x - m) + n$ в одній з програм *Gran1*, *MK* або *GeoGebra* та дослідити залежність графіка від параметрів a , m та n .

В-т	Завдання	В-т	Завдання
1	$y = \frac{a}{x - m} + n$	6	$y = a \cdot \text{ctg}(x - m) + n$
2	$y = a(x - m)^3 + n$	7	$y = a\left(\frac{1}{2}\right)^{x - m} + n$
3	$y = a \cdot \sin(x - m) + n$	8	$y = a \cdot \ln(x - m) + n$
4	$y = a \cdot \cos(x - m) + n$	9	$y = a \cdot e^{x - m} + n$
5	$y = a \cdot \text{tg}(x - m) + n$	10	$y = a\sqrt{x - m} + n$

Питання для самоконтролю. Заповнити таблицю для порівняльного аналізу програм динамічної математики. Чи можна її доповнити?

№	Комп'ютерні інструменти, наявні у середовищі	Gran1	ЖГ	MK	GG
1	Задання явної функціональної залежності				
2	Задання неявної функціональної залежності				
3	Задання параметричної функціональної залежності				
4	Задання оберненої функціональної залежності				
5	Задання функції у декартовій системі координат				
6	Задання функції у полярній системі координат				

№	Комп'ютерні інструменти, наявні у середовищі	Gran1	ЖГ	МК	GG
7	Побудова графіка функціональної залежності				
8	Знаходження точок перетину графіка з осями координат				
9	Візуалізація точок перетину графіка з осями координат				
10	Знаходження точок перетину декількох графіків				
11	Розв'язування рівнянь				
12	Розв'язування систем рівнянь				
13	Точність розв'язування рівнянь та їх систем				
14	Розв'язування нерівностей				
15	Візуалізація розв'язків нерівностей				
16	Розв'язування систем нерівностей				
17	Автоматичне задання параметра				
18	Створення повзунка				
19	Зміна властивостей параметра				
20	Задання кроку параметра				
21	Побудова графіка функції, що залежить від параметра				
22	Лінійна форма повзунка				
23	Кутова форма повзунка				
24	Знаходження похідної функції				
25	Знаходження критичних точок функції				
26	Знаходження точок екстремуму функції				
27	Побудова дотичної до графіка функції				
28	Знаходження рівняння дотичної				
29	Обчислення визначеного інтеграла				
30	Інтегрування з параметрами				
31	Обчислення невластивого інтеграла				
32	Знаходження площі криволінійної трапеції				

Лабораторна робота №3 (залікова)

Мета: порівняти можливості використання програм *Gran1*, *ЖГ*, *МК*, *GeoGebra*; виділити переваги та недоліки програм при розв'язуванні задач алгебри та початків аналізу; уточнити пакети, які доцільно використовувати для розв'язування окремих класів задач шкільного курсу математики.

Обладнання. Комп'ютер, ППЗ *Gran1*, *ЖГ*, *МК*, *GeoGebra*.

Практичні завдання

1. Розробити фрагмент уроку математики з комп'ютерною підтримкою на запропоновану тему. Підібрати завдання, підготувати наочність і, якщо потрібно, дидактичний матеріал. Провести «захист» розробленого фрагменту.

Зауваження. Наголошуємо, що застосування комп'ютера на уроці математики має бути виваженим, доцільним та виправданим. Програми динамічної математики не повинні використовуватися тільки як інструмент для побудови статичного рисунку, тобто використовуватися там, де достатньо дошки та крейди або паперу та олівця. Потрібно знайти такі точки дотику програм динамічної математики та методики навчання математики, які б розкривали родзинку ПДМ, привносили ідею динамізації в окремі фрагменти уроку, унаочнювали математичний матеріал для більш якісного його засвоєння.

2. Визначити переваги і недоліки кожної з програм *Gran1*, *ЖГ*, *МК* та *GeoGebra* на прикладі підтримки запропонованої теми.

В-т	Завдання
1	Тема «Графік квадратичної функції» Розташування параболи $y = p_1x^2 + p_2x + p_3$ відносно вісі Ox залежить від значення дискримінанта. Створити динамічну модель. Розробити учнівський бланк у вигляді незавершених речень для проведення дослідження (таблиця) та для запису результатів.
2	Тема «Показникова функції» Перетворення графіка функції $y = f(x)$, а саме, $y = f(x)$, $y = f(x) $, $y = f(x) $, $ y = f(x)$ на прикладі графіка функції $y = 2^x$. Створити динамічну модель та організувати покрокову демонстрацію з текстовими блоками, що містять пояснення.
3	Тема «Квадратична функція» Перетворення графіка функції $y = x^2$, а саме, $y = x^2 + b$, $y = (x + b)^2$, $y = ax^2$, $y = (ax)^2$. Створити динамічну модель та організувати покрокову демонстрацію з текстовими блоками, що містять пояснення.

В-т	Завдання
4	<p>Тема «Логарифмічна функція» Порівняти швидкість зростання степеневі функції $y = x^n$, ($n > 0$), показникової функції $y = a^x$ та логарифмічної функції $y = \log_a x$, ($a > 0$) при $x \rightarrow \infty$. Створити динамічну модель та організувати покрокову демонстрацію з текстовими блоками, що містять пояснення.</p>
5	<p>Тема «Логарифмічна функція» Побудувати графік функції $y = \log_2(x - 3) - 1$. Записати ланцюжок перетворень графіка функції. Організувати покрокову демонстрацію з підказками, що з'являються поступово.</p>
6	<p>Тема «Ейдографіка» Ейдографіка – це різновид комп'ютерного моделювання за допомогою графіків функцій. Побудувати рисунок за допомогою графіків функцій та їх елементарних перетворень.</p>
7	<p>Тема «Задачі з параметрами» 1. При яких значеннях параметра a рівняння $\log_2(\sqrt{2x^2 + 2y^2 - z + 1}) + \arcsin(3x + 3y - z + a) = 0$ має єдиний розв'язок? 2. При якому значенні параметра a, система рівнянь має єдиний розв'язок $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y - x = a \end{cases}$?</p>
8	<p>Тема «Задачі на екстремум» <u>Задача.</u> Біля кам'яної стіни побудувати прямокутний майданчик найбільшої площі, який з трьох сторін обнесений дротом довжини a, а четвертою стороною дотикається до стіни. Прописати покроковий алгоритм побудови моделі задачі, тим самим створивши інструкцію для учнів. Продумати додаткові запитання до задачі, зокрема, ті, що містять підказки до розв'язання, та ті, що модифікують умову задачі.</p>
9	<p>Тема «Задачі на екстремум» <u>Задача.</u> Якими повинні бути розміри закритого циліндричного баку об'ємом $V = 16\pi$ куб.од. (радіус R і висота H), щоб на його виготовлення пішла найменша кількість матеріалу? Прописати покроковий алгоритм побудови моделі задачі, тим самим створивши інструкцію для учнів. Продумати додаткові запитання до задачі, зокрема, ті, що містять підказки до розв'язання, та ті, що модифікують умову задачі.</p>

В-т	Завдання
10	<p>Тема «Задачі з параметрами»</p> <p>1. Знайти всі дійсні значення параметра a, при яких для функції $f(x) = \sqrt{1 - \log_{5+4a-a^2}(5-a) - \log_{5+4a-a^2}(4 + \sin x)}$ область визначення збігається з множиною всіх дійсних чисел.</p> <p>2. При якому значенні параметра a система рівнянь має єдиний розв'язок $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y - x = a \end{cases} ?$</p>

ТЕМА №3.

СТАТИСТИЧНІ РОЗРАХУНКИ У ПРОГРАМАХ ДИНАМІЧНОЇ МАТЕМАТИКИ

3.1. Приклади статистичних обчислень

Gran1

Перед початком введення набору спостережених значень слід встановити у вікні *Список об'єктів* тип задання залежності *Статистична вибірка* і звернутися до послуги *Об'єкт/Створити* [30]. З'являється допоміжне вікно *Дані статистичної вибірки* (рис. 3.1), вигляд якого може змінюватись в залежності від типу вибірки і способу її задання.

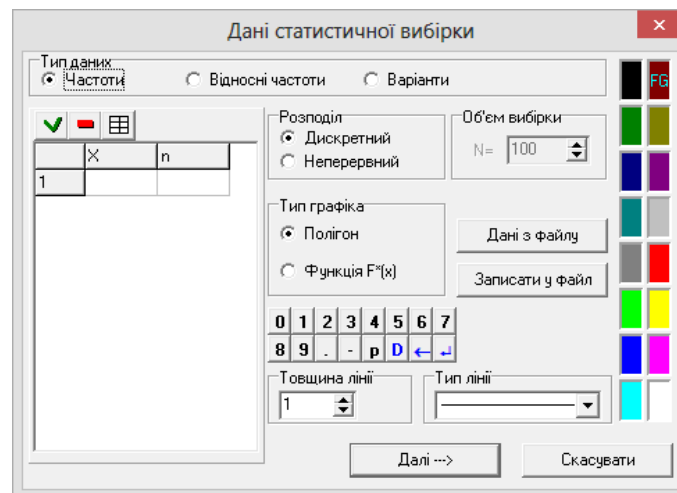


Рис. 3.1.

Тип даних необхідно вказати перед початком введення самих даних, оскільки при зміні типу даних таблиця, що їх містить, очищується. У випадку дискретного набору значень необхідно вказувати окремі можливі значення досліджуваної величини і частоти появи цих значень. При цьому неможливо буде побудувати гістограму і неперервну функцію розподілу частот. При виборі неперервного розподілу неможливо буде побудувати

полігон частот і ступінчату кусково-сталу функцію розподілу, а при введенні даних необхідно вказувати рівновіддалені середини інтервалів однакової довжини і частоти попадання у ці інтервали. Набір спостережених значень у обох випадках вводиться однаково.

Приклад 3.1. (*Gran1*) Телефонна компанія хоче дізнатися про кількість телефонних дзвінків, які робить людина протягом доби. Дані щодо 100 людей подано на діаграмі (рис.3.2). Обчисліть розмах, середнє значення, моду та медіану цієї вибірки. [14, с. 164]

Оскільки досліджується дискретний розподіл частот, то у вікні *Дані статистичної вибірки* вказуємо тип *Дискретний*, тип даних – *Частоти*, тип графіка – *Полігон* та введемо таблицю даних (рис. 3.3).



Рис. 3.2.

В результаті у вікні *Список об'єктів* з'являється позначення щойно введеної вибірки і деякі її характеристики, які дають відповідь задачі (рис.3.4).

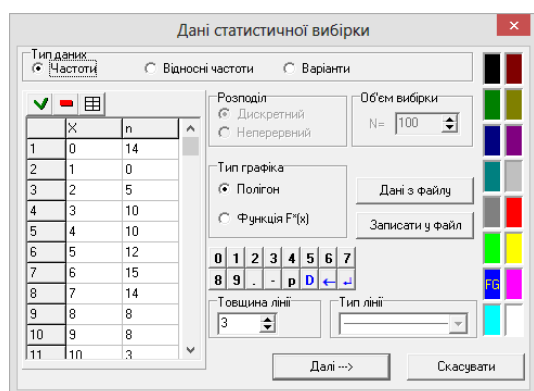


Рис. 3.3.

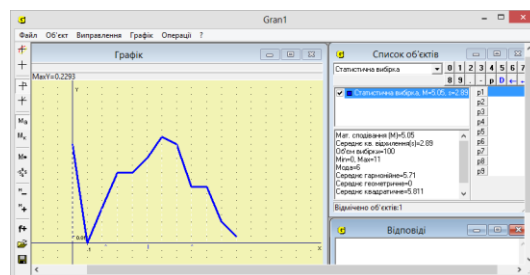


Рис.3.4.

- У вікні "*Графік*" також можна бачити деякі характеристики вибірки:
- статистичне математичне сподівання M відмічене на осі абсцис вертикальною рисою;
 - статистичне середнє квадратичне відхилення S можна визначити, враховуючи, що на осі абсцис позначками \wedge відзначені межі відрізка $[M - S, M + S]$.

Щоб побудувати графік функції розподілу відносних частот $F_n^*(x)$, потрібно звернутися до послуги *Об'єкт/Змінити...* та змінити тип графіка на *Функція $F^*(x)$* і потім знов побудувати графік (рис. 3.5).

Приклад 3.2. (*Gran1*) Зміни рівня води в річці вимірювали протягом 32 весняних паводків. Результати занесені в таблицю. Побудувати гістограму, функцію розподілу, обчислити математичне сподівання, моду та медіану.

Рівень, см	0-24	25-49	50-74	75-79	100-124	125-149	150-174	175-199
Кількість	0	1	3	6	7	6	5	4

Оскільки досліджується неперервний розподіл частот, то у вікні *Дані статистичної вибірки* вказуємо тип *Неперервний*, тип даних – *Частоти*, тип графіка – *Гістограма*. При введенні даних необхідно вказувати рівновіддалені середини інтервалів однакової довжини і частоти попадання у ці інтервали (рис.3.6). В результаті у вікні *Список об'єктів* з'являється позначення щойно введеної вибірки і деякі її характеристики, які дають відповідь задачі (рис.3.7).

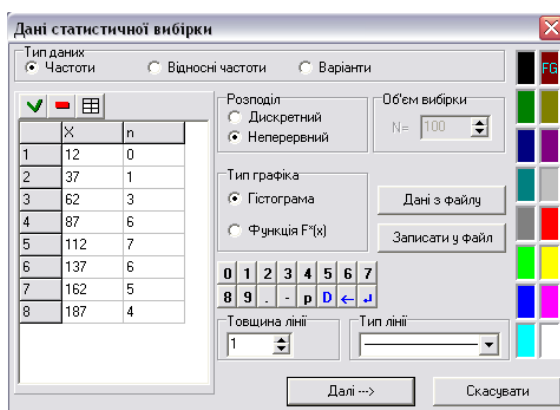


Рис.3.6

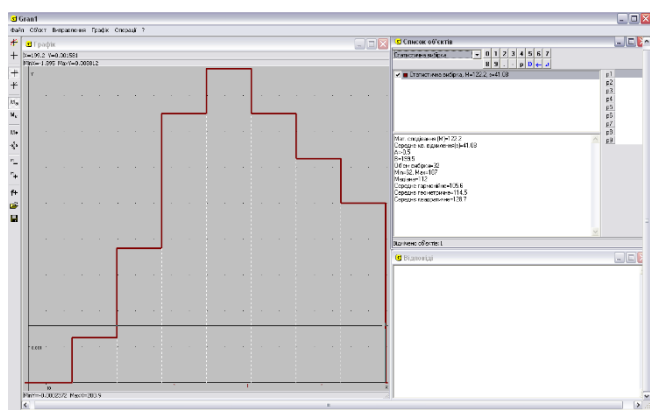


Рис.3.7

Отримуємо, що математичне сподівання дорівнює 122.2, середнє квадратичне відхилення – 41.08, медіана – 112. Щоб побудувати графік функції розподілу відносних частот $F_n^*(x)$, потрібно звернутися до послуги *Об'єкт/Змінити...* та змінити тип графіка на *Функція $F^*(x)$* і потім знов побудувати графік (рис. 3.8).

GeoGebra

Для організації статистичних обчислень у програмі *GeoGebra 5.0* передбачено також спеціальне вікно зі спеціальним набором інструментів, який можна знайти у вкладці *Таблиці і графіки* на бічній панелі

Перспективи або обрати Таблицю з меню Вид.

Таблиця подібна до електронних таблиць *Excel*. Імена комірок можна використовувати у виразах та командах. У комірки можна вводити не лише числа, але й інші типи математичних об'єктів, які підтримує *GeoGebra* (наприклад, координати точок, функції, команди). Якщо це можливо, *GeoGebra* відразу виводить на екран графічне представлення об'єкта.

Приклад 3.3. (*GeoGebra*) 25 учнів відповідали на питання тесту. Потім учні оцінили складність тесту від 1 (дуже простий) до 5 (дуже складний) і отримали результати: 4 учня оцінили тест як дуже простий (1); 6 учнів оцінили тест як простий (2); 6 учнів оцінили тест як складний (4); 1 учень оцінив тест як дуже складний (5). Інші учні вважали, що складність тесту була середня (3). Для одержаних результатів побудувати гістограму, обчислити математичне сподівання, моду та медіану. [70, с. 152]

Спочатку введемо дані в електронну таблицю. Виділимо заповнені комірки і, клацнувши правою кнопкою миші, виберемо *Створити список*. За допомогою інструменту *Аналіз однієї змінної*, проаналізуємо дані (рис. 3.9). Відразу з'явиться зображення гістограми.

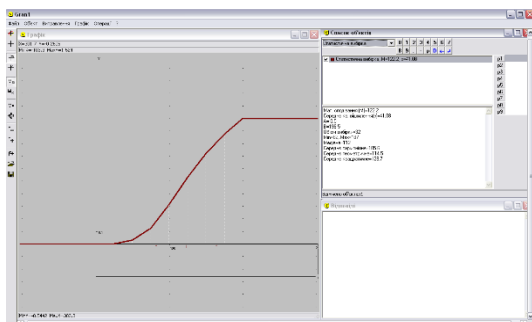


Рис. 3.8.

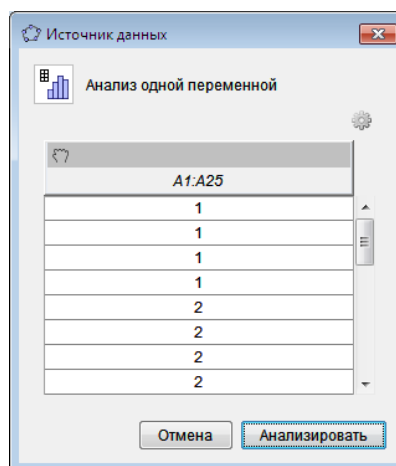


Рис.3.9.

Потім у вікні *Аналіз даних* натиснемо на кнопку Σx – *Показать статистические данные*. Отримаємо значення числових характеристик статистичної вибірки (рис. 3.10).

Отримуємо, що математичне сподівання дорівнює 2,76, медіана – 3. Повернувшись до класичного інтерфейсу, через рядок вводу обчислимо моду (рис. 3.11).

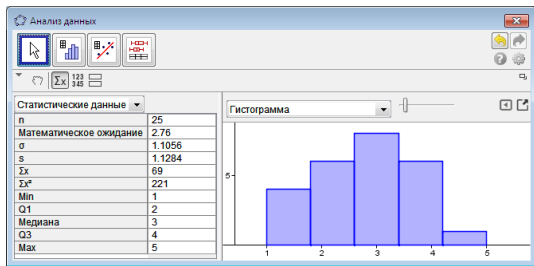


Рис. 3.10.

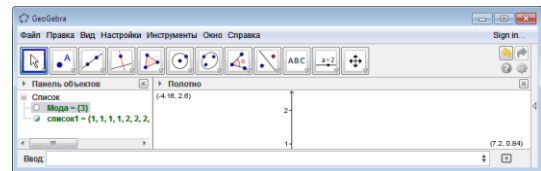


Рис.3.11.

Розв'яжемо задачу прикладу 3.2 із використанням програми *GeoGebra*.

Введемо в електронну таблицю результат експерименту – кількість випадків. Виділивши потрібний стовпчик зі значеннями, обираємо інструмент *Анализ одной переменной*. У налаштуваннях діалогового вікна оберемо *Класс частоты*, в якому вкажемо *Начало* – 0 (початкове значення рівня води в експерименті), *Ширина* – 24 (різниця в значеннях експерименту) (рис.3.12). Натиснемо кнопку *Анализировать*, а потім у вікні *Анализ даних* натиснемо на кнопку Σx – *Показать статистические данные*. Отримаємо значення числових характеристик статистичної вибірки (рис. 3.13).



Рис.3.12

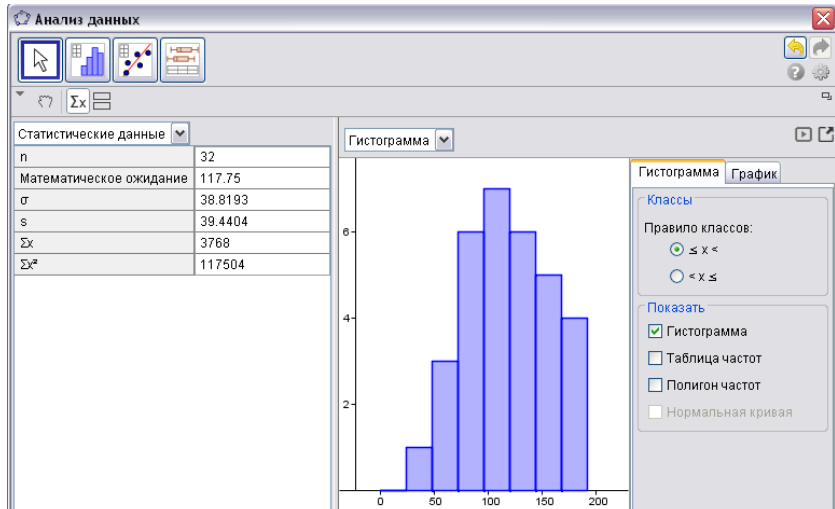


Рис.3.13

Отримуємо, що математичне сподівання дорівнює 117.75, середнє квадратичне відхилення – 38.01.

Підтримку статистичних розрахунків можна здійснювати у програмах *Gran1* та *GeoGebra*. На відміну від *GeoGebra*, де дані потрібно увести у таблицю і використати інструменти аналізу, у середовищі *Gran1* пропонується обрати тип розподілу (дискретний чи неперервний) і тип даних (частоти, відносні частоти, варіанти). Також варто пам'ятати, що у *Gran1* для неперервного розподілу потрібно власноруч вводити

рівновіддалені середини інтервалів і частоти попадання у ці інтервали. У *GeoGebra* можна вводити частоти, а потім в автоматизованому режимі задати ширину карманів і значення варіант.

В обох програмах передбачено можливість побудови полігону частот, але графік функції розподілу розраховується в автоматичному режимі лише у *Gran1*. В обох програмах обчислюється математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення. У *Gran1* для дискретного розподілу автоматично визначиться мода, для неперервного – медіана. При використанні *GeoGebra* моду можна визначити додатково через командний рядок, а медіану програма обчислить автоматично.

Можна також побачити відмінності у відповідях до задач. Їх можна пояснити особливістю введення даних: у програмі *Gran1* беруться середини інтервалів, які задаються власноруч, а у середовищі *GeoGebra* довжина інтервалу вводиться вручну, а інтервали потім розраховуються автоматично у межах заданих значень.

У контексті вивчення шкільного курсу математики вважаємо, що найкращим вибором при розв'язуванні даної задачі є програма *Gran1*.

3.2. Статистичне означення ймовірності на основі серії випадкових випробувань

Стохастична лінія є важливим розділом сучасного курсу шкільної математики. Ця тема складна з позицій візуалізації, тому вчителі усіляко намагаються залучити до її вивчення різні комп'ютерні засоби, в тому числі програми динамічної математики.

Математический конструктор

В версії 8 ПДМ *Математический конструктор* розробники додали інструментарій, який підтримує вивчення теорії ймовірностей та статистики [19]. Комп'ютерні інструменти розділу Статистика розроблені спеціально для вивчення ймовірнісно-статистичної лінії шкільного курсу математики та дозволяють:

- візуалізувати процес проведення випадкового експерименту з можливістю зміни його параметрів;
- провести серію випадкових випробувань і продемонструвати основні ймовірнісно-статистичні закономірності;
- перевірити теоретично отримані результати через статистичний експеримент;
- обробити дані, отримані в експерименті, за допомогою статистичних функцій і показати їх на графіках;
- виконати самостійне статистичне дослідження.

Розробники пропонують наступні комп'ютерні інструменти у розділі

Статистика: Случайное испытание, Плеер случайных испытаний, Вычисление статистик, Временной ряд (таблица), Временной ряд (график), Полигон частот, Гистограмма частот.

Розглянемо детальніше інструмент *Случайное испытание*. При виборі даного інструменту можна задати тип випробування: випадкове кидання чи випадковий вибір. Якщо обрати у якості випробування *Случайное бросание* (рис.3.14), то потрібно обрати:

- число предметів, які кидаються одночасно;
- предмети, що використовуються (монета, кнопка, гральний кубик), при цьому вказуються чисельні значення результатів випробування. Оскільки кнопка не є симетричним предметом і результати її кидання не є рівноможливими подіями, то потрібно додатково вказати ймовірність, з якою кнопка впаде вістрям догори.

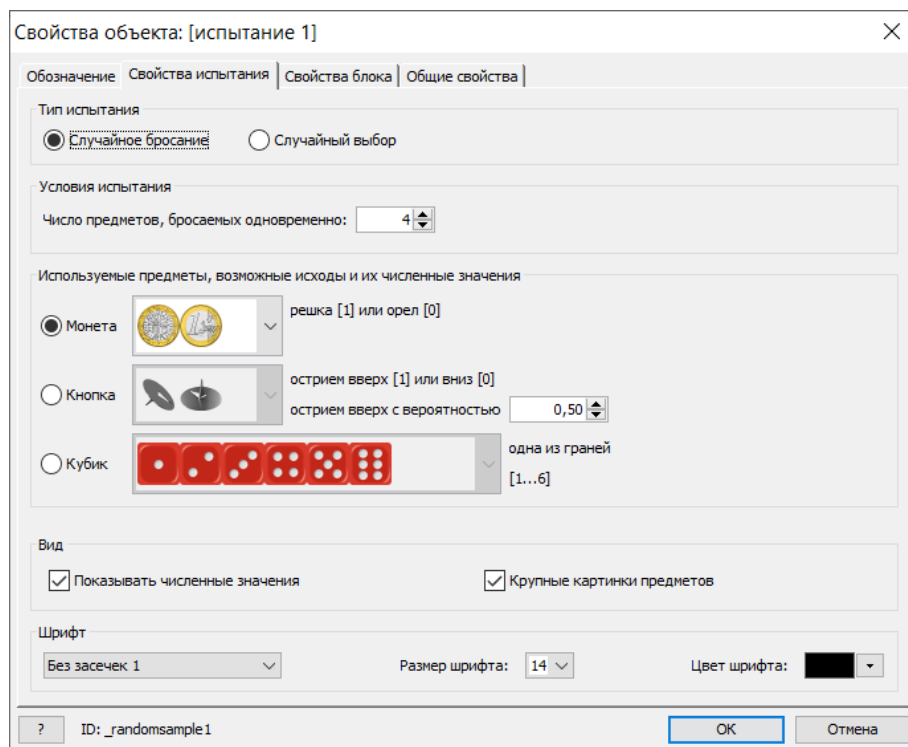


Рис.3.14.

Якщо ж у якості випробування обрати *Случайный выбор* (рис.3.15), то потрібно додатково вказати:

- число предметів, які дістаються з корзини одночасно;
- яким чином ці предмети дістаються з корзини – з поверненням, без повернення чи одночасно;
- предмети, що використовуються (кулі, гральні карти, цифри, російські літери, англійські літери, люди, рукавички, черевики, руки, різні предмети, грані грального кубика, різні боки монети євро, російського рубля, кнопки, шкарпетки, випробування Бернуллі (успіх чи невдача),

причому перед початком випробування потрібно помістити предмети з каталогу у корзину.

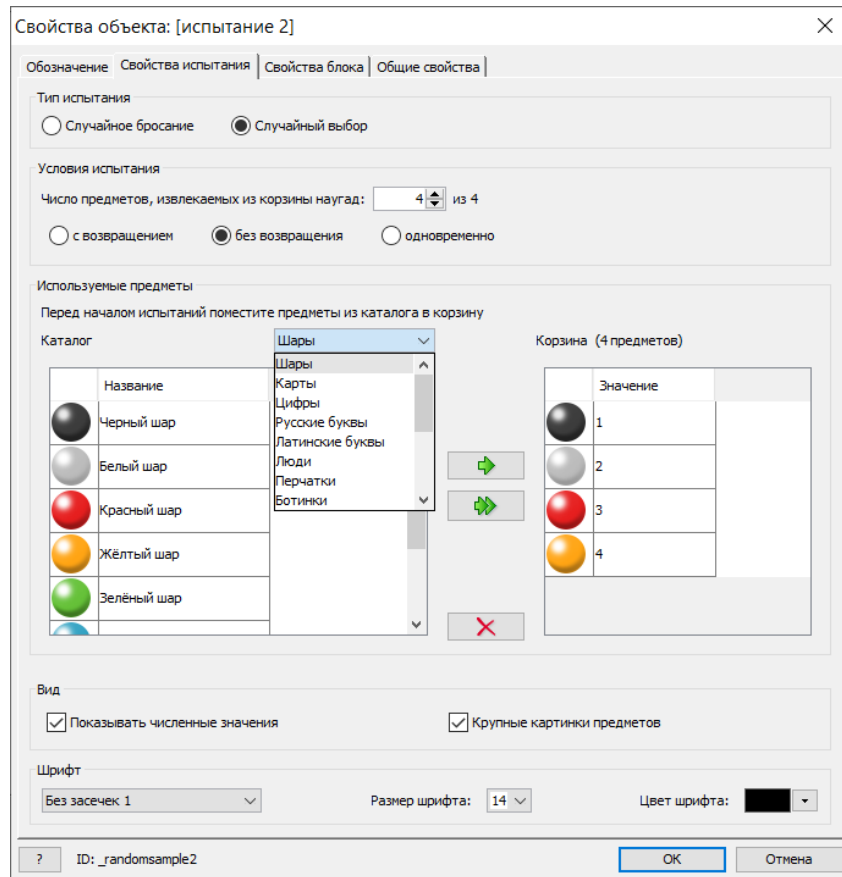


Рис.3.15.

Інструмент *Вычисление статистик* дозволяє обчислити кількість повторів значень, суму значень у випробуванні, мінімальне та максимальне значення у випробуванні, значення елемента з номером (рис. 3.16).

Інструмент *Временной ряд (таблица)* дозволяє заносити значення до таблиці, а *Временной ряд (график)* буде графік залежності однієї із функцій, значених у статистиках (рис.3.16), від номера випробування.

Інструмент *Полигон частот* побудує полігон частот за даними одного із стовпців таблиці, а інструмент *Гистограмма частот* – відповідно гістограму частот (рис.3.17).

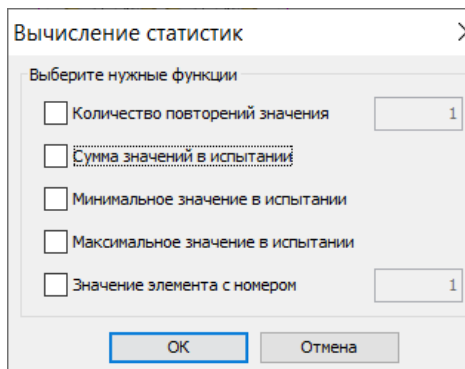


Рис.3.16.

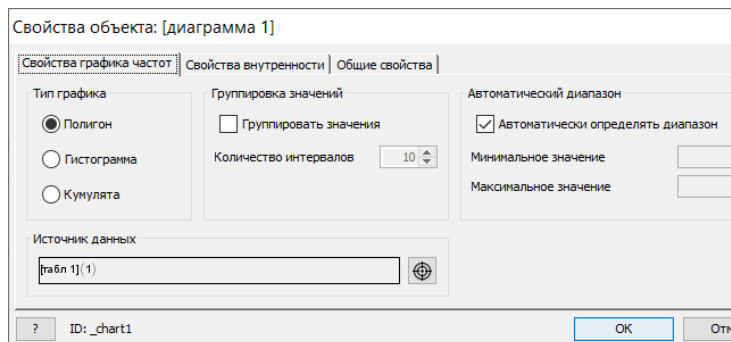


Рис.3.17.

Програми динамічної математики дозволяють продемонструвати статистичне означення ймовірності як граничне значення частоти в ході проведення комп'ютерного експерименту, коли відбувається процес стабілізації частот із збільшенням числа дослідів.

Приклад 3.4. (МК) Провести експерименти з підкиданням канцелярської кнопки (два результати: кнопка може впасти на підлогу вістрям вгору, або вістрям вниз) та підкиданням монети (два результати: випаде «герб» або «число»).

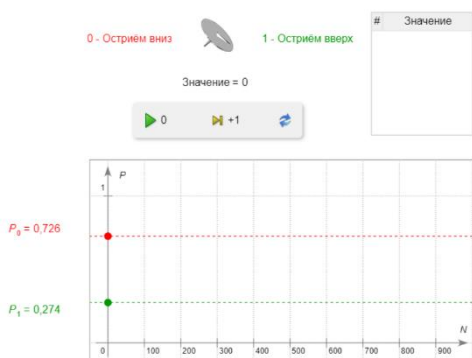


Рис. 3.18.

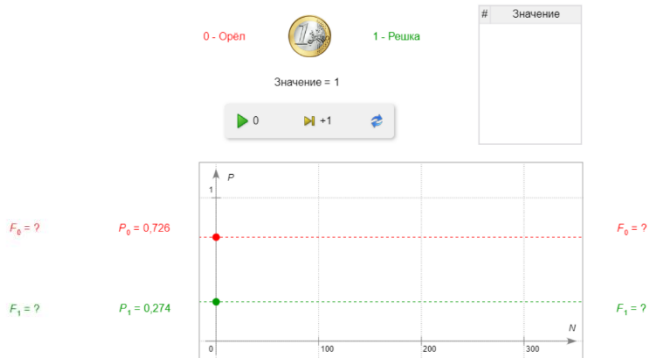


Рис. 3.19.

Під час обговорення даної моделі можна зробити наступні важливі зауваження.

1. Ймовірність закладена «в природі речей»: якщо дослід з тією ж кнопкою повторити через тиждень, частота буде прямувати до того ж числа (для кнопки, зробленої за іншою технологією, це число може бути вже іншим).

2. Значні відхилення частоти від ймовірності можливі навіть за великої кількості дослідів, але чим більше дослідів, тим менш ймовірні такі відхилення (питання про їх кількісну оцінку виходить за рамки шкільного курсу).

3. У деяких випадках можна «передбачити» ймовірність (тобто майбутню частоту) без проведення експерименту.

4. У прикладі з монетою ми мали справу з симетричним предметом, тому всі результати досліду були рівно можливими. При підкиданні монети було два рівноможливі результати – «герб» і «число». В силу симетрії не було ніяких підстав вважати один з таких випадків більш імовірним. Тому у цьому випадку можна сформулювати наступне означення (воно називається класичним визначенням ймовірності).

Означення. Нехай випадковий експеримент може завершитися одним з n рівноможливих результатів; і нехай рівно m з цих випадків цьому сприяють, тобто призводять до настання випадкової події A . Тоді ймовірність цієї події може бути обчислена за формулою $P(A)=m/n$.

5. Але у досліді з кнопкою цим означенням користуватися не можна, оскільки предмет не симетричний, і результати випробування не є рівноможливими.

GeoGebra

Приклад 3.5 (задача про зустріч). Юнак та дівчина домовилися про побачення з 15.00 до 16.00. Відомо, що кожен з них приходить у будь-який момент з 15.00 до 16.00 незалежно від іншого. Якщо юнак прийде і не зустріне дівчину, то він буде чекати її ще протягом 20 хв. Дівчина в аналогічній ситуації буде чекати юнака протягом лише 10 хв. Яка ймовірність того, що побачення відбудеться? [14, с.149]

Нехай a та b – час (у хвилинах) приходу на побачення юнака і дівчини відповідно, відраховані від 15.00. Задамо відповідні параметри a та b , використовуючи інструмент *Ползунок*. За умовою $a \in [0;60]$, $b \in [0;60]$. При їх заданні поставимо позначку *Случайное число*. У квадраті, побудованому на осях з вершиною в початку координат і довжиною сторони 60, координати точки $(a;b)$ можуть характеризувати час приходу юнака і дівчини відповідно.

За умовою задачі побачення відбудеться, якщо виконуються аналітичні умови $(a < b \leq a + 20) \vee (b \leq a \leq b + 10)$. Побудуємо точку з координатами $(a;b)$. У властивостях точки у вкладці *Дополнительно* зазначимо *Условия отображения объекта* $(a < b \leq a + 20) \vee (b \leq a \leq b + 10)$, тобто умову, за якої відбудеться побачення (рис.3.20).

Вкажемо у властивостях точки *Оставляют след* і анімуємо параметри a та b . Отримаємо результат, який наочно показує, де має знаходитися точка $(a;b)$ для того, щоб зустріч відбулась (рис. 3.21). Через командний рядок задамо логічну функцію, яка дорівнює 1, якщо виконуються умови для побачення, і яка дорівнює 0, якщо побачення не відбудеться – *Если* $[a < b \leq a + 20 \vee b \leq a \leq b + 10, 1, 0]$. Далі у властивостях даної функції оберемо послугу *Запись в таблицу* для запису експериментальних

даних у електронну таблицю. При анімації параметрів a та b значення цієї функції будуть заноситися у перший стовпчик таблиці.

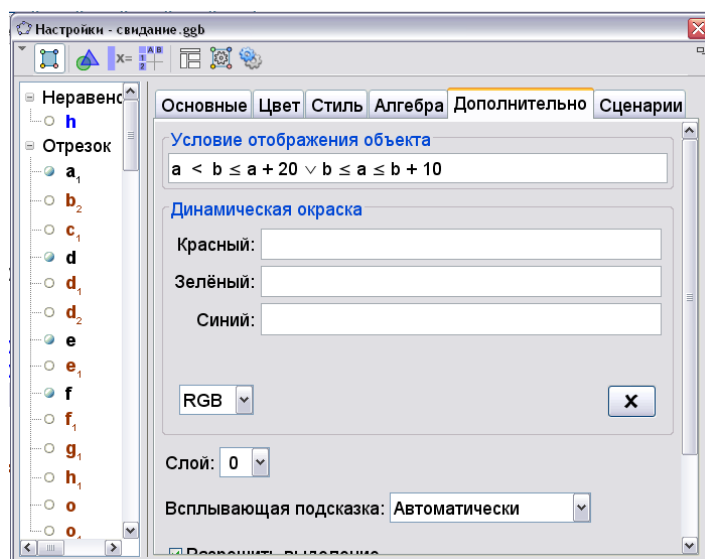


Рис.3.20

Потім виділимо усі отримані значення і обчислимо відносну частоту того, що зустрів відбудеться, тобто відносну частоту значень 1 для заданої функції. Для цього скористаємося інструментом *Среднее арифметическое* на панелі вікна *Таблица*.

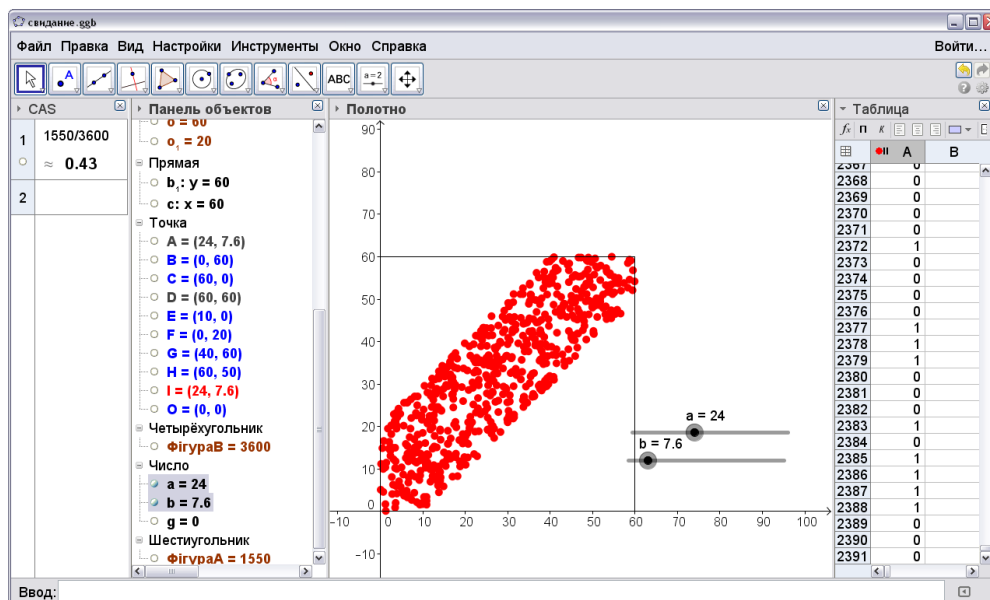


Рис. 3.21

Якщо провести 408 експериментів, то отримаємо відносну частоту значень або ймовірність зустрічі 0,4606; при кількості експериментів 594 – 0,4476; при 806 – 0,4353; при 1041 – 0,4306. Як бачимо, при збільшенні кількості випробувань ймовірність зустрічі прямує до 0,4306.

Після одержання результатів комп'ютерного експерименту розв'яжемо задачу класичним способом, використовуючи геометричне означення ймовірності.

Побудуємо фігуру A , точки якої задовольняють нерівності $x < y \leq x + 20$ або $y \leq x \leq y + 10$ або $0 \leq x \leq 60$ або $0 \leq y \leq 60$. Побудуємо також квадрат B зі сторонами на осях координат, вершиною в початку координат і довжиною сторони 60. Юнак і дівчина зустрінуться тоді і лише тоді, коли навмання вибрана в квадраті точка належатиме фігурі A .

Обчислимо площі фігур A та B : площа фігури A – 1550, площа фігури B – 3600. Використовуючи геометричне означення ймовірності, за допомогою полотна CAS отримаємо – $\frac{1550}{3600} \approx 0,4306$ (рис. 3.22). Цей результат співпадає з результатом, одержаним завдяки випадковому вибору точок у квадраті і визначенню відносної частоти появи зустрічі.

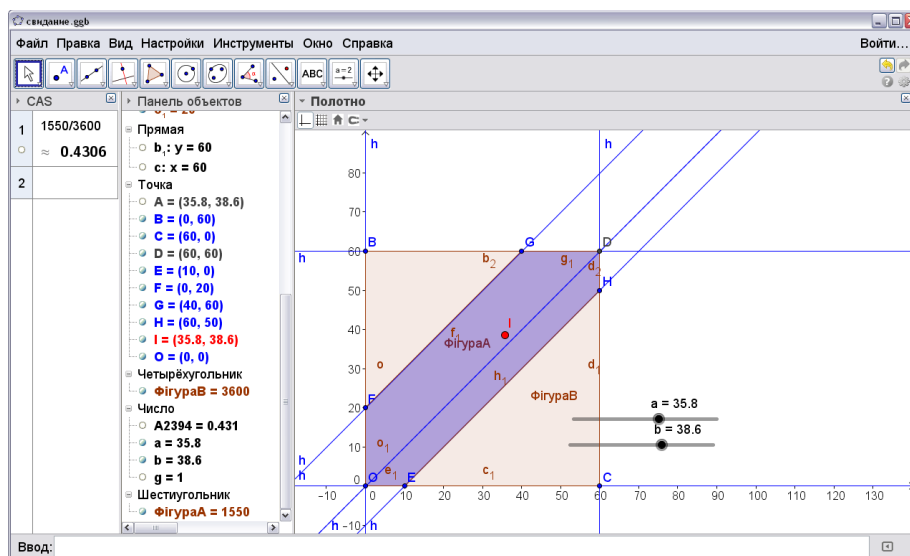


Рис. 3.22.

Наступні задачі можна пропонувати для закріплення ідеї візуалізації експериментальних випробувань у середовищі *GeoGebra*. Ми наведемо лише їх умови та можливі вказівки для самостійного розв'язування.

Приклад 3.6. На відрізку $[-2;2]$ навмання обирають число x . Яка ймовірність того, що $|x| < 1$? [14, с.150]

Вказівка. Нехай a – параметр точки на відрізку, $a \in [-2;2]$. Подія відбудеться за умови $(-1 < a < 1)$. Побудуємо точку з координатами $(a;0)$ та задамо логічну функцію – *Если* $[(-1 < a < 1), 1, 0]$ (рис. 3.23).

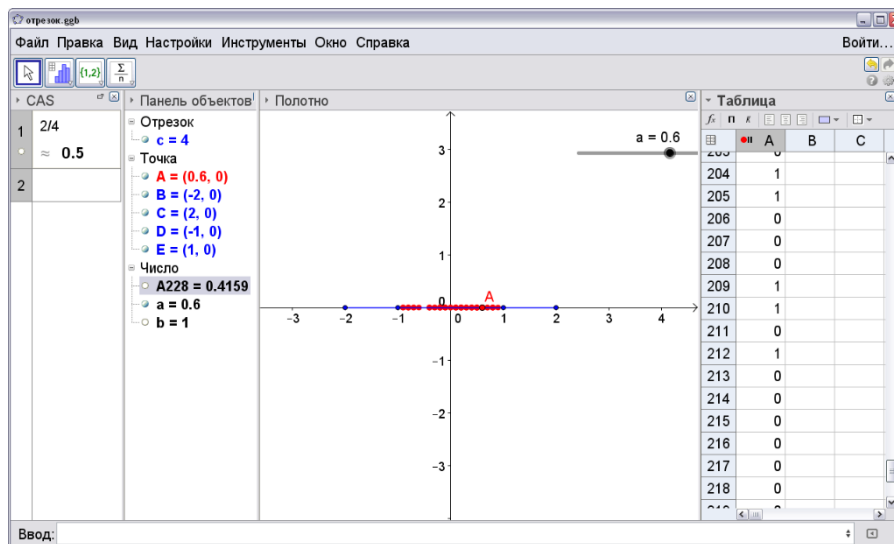


Рис. 3.23.

Приклад 3.7. У прямокутнику зі сторонами 5 і 7 навмання обирають точку. Яка ймовірність того, що відстань від обраної точки до кожної зі сторін прямокутника виявиться меншою від 4? [14, с.150]

Вказівка. Побудуємо довільну точку $(a;b)$, що лежить в прямокутнику, тобто $a \in [0;7]$, $b \in [0;5]$. Відстань від обраної точки до всіх сторін прямокутника буде меншою від 4 за умови $(7 - a < 4) \wedge (a < 4) \wedge (5 - b < 4) \wedge (b < 4)$. Отже, задаємо логічну функцію – *Если*[(7 - a < 4) \wedge (a < 4) \wedge (5 - b < 4) \wedge (b < 4), 1, 0] (рис. 3.24).

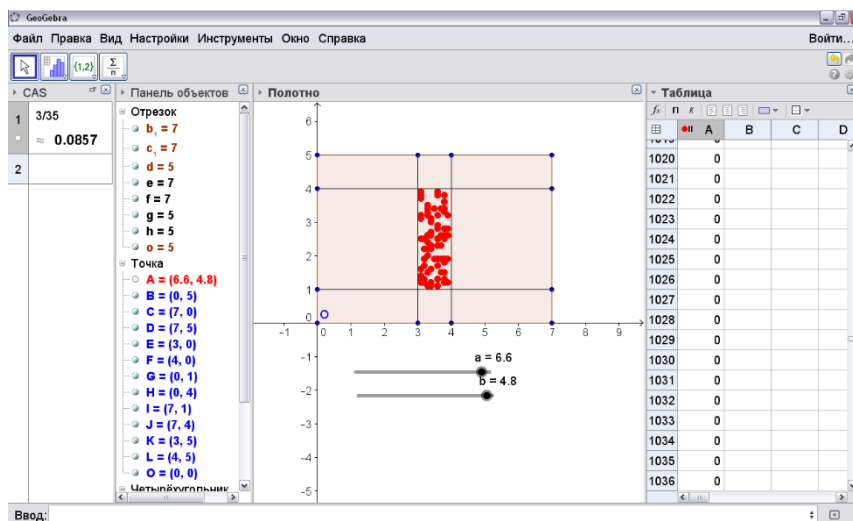


Рис. 3.24.

Приклад 3.8. У кулю радіуса 2 вписали куб. Яка ймовірність того, що точка, навмання обрана в кулі, потрапить до вписаного куба? [14, с.151]

Вказівка. Побудуємо кулю радіуса 2 з центром в початку координат. Для того, щоб точка завжди була всередині кулі, пропонуємо скористатися

сферичними координатами – потрібно, щоб сферичні координати (r, ϑ, φ) точки задовольняли умови $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 180^0$, $0 \leq \varphi \leq 360^0$. Саме ці межі будемо ототожнювати з межами параметрів r, ϑ, φ . У середовищі *GeoGebra* можна побудувати точку лише за декартовими координатами через командний рядок. Тому потрібно задати точку з координатами (a, b, c) , де $a = r \sin \theta \cos \varphi$, $b = r \sin \theta \sin \varphi$, $c = r \cos \theta$.

Наступним кроком впишемо в кулю куб. Ребро куба дорівнює $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Куб можна побудувати за двома його вершинами. Отже, будемо, наприклад, точки-вершини $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3})$ та $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3})$. Тепер будемо куб за цими двома вершинами.

Точка, яка навмання обрана в кулі, потрапить до вписаного куба за умови, що $(-\frac{2\sqrt{3}}{3} < a < \frac{2\sqrt{3}}{3}) \wedge (-\frac{2\sqrt{3}}{3} < b < \frac{2\sqrt{3}}{3}) \wedge (-\frac{2\sqrt{3}}{3} < c < \frac{2\sqrt{3}}{3})$. Отже, потрібно задати логічну функцію – *Если* $(-\frac{2\sqrt{3}}{3} < a < \frac{2\sqrt{3}}{3}) \wedge (-\frac{2\sqrt{3}}{3} < b < \frac{2\sqrt{3}}{3}) \wedge (-\frac{2\sqrt{3}}{3} < c < \frac{2\sqrt{3}}{3}), 1, 0]$ (рис.3.25).

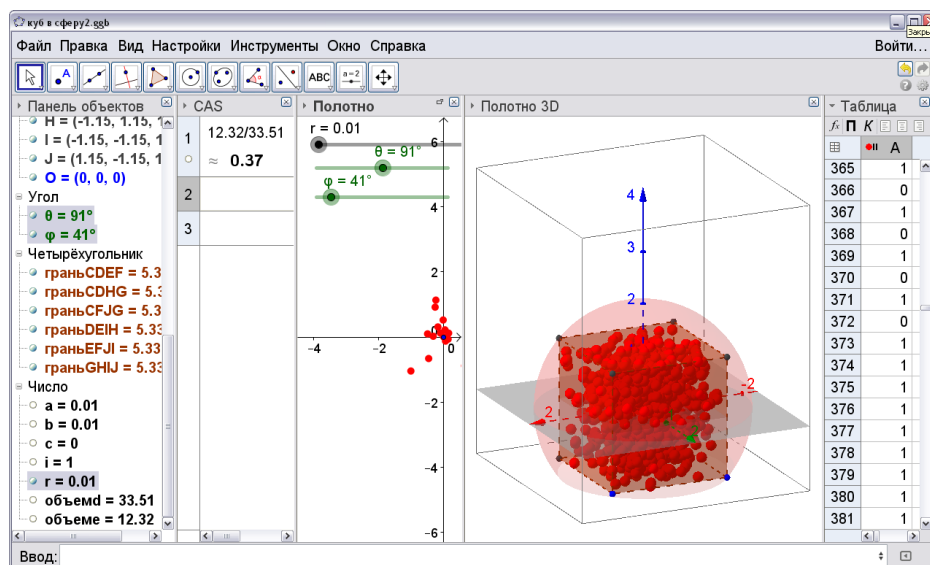


Рис. 3.25.

Лабораторна робота №4-5 (тренувальна)

Мета: навчитись розв'язувати типові задачі шкільного курсу статистики у програмах динамічної математики.

Обладнання. Комп'ютер, програми *Gran1*, *GeoGebra*, *Математический конструктор*.

Теоретичні питання.

1. Генеральна сукупність і вибірка. Обсяг вибірки. Варіаційний ряд.

Частота. Відносна частота. Властивість суми відносних частот. Гістограма і полігон (частотна ламана) як графічні інтерпретації вибірки.

2. Статистичний розподіл. Мода, медіана, середні вибірки як міри центральної тенденції.
3. Методичні особливості вивчення теми «Елементи статистики» у шкільному курсі математики.

Практичні завдання

1. Побудувати графік функції розподілу відносних частот, полігон відносних частот (для дискретного розподілу), гістограму (для неперервного розподілу). Обчислити математичне сподівання, середнє квадратичне відхилення, моду та медіану, використовуючи програму GRAN1.

В-т	Завдання								
1	20 навмання взятих учнів виконують стрибки у висоту, при цьому зафіксовані такі результати: 137, 140, 143, 135, 142, 139, 141, 137, 142, 131, 145, 138, 141, 143, 130, 138, 140, 135, 137, 138.								
2	Вага новонароджених немовлят зафіксована в таблиці								
	Вага	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3	3,3	3,4
	Кількість	15	10	11	13	18	34	19	24
	Вага	3,1	3,8	4	4,2	4,4	4,6	4,8	5
	Кількість	6	5	2	10	6	4	2	1
3	На 100 навмання взятих ділянках землі в даному районі висаджені по 100 фруктових дерев. Для кількості саджанців, що прийнялися, побудовано інтервальный розподіл відносних частот.								
	I_i	[0,10)	[10,20)	[20,30)	[30,40)	[40,50)			
	p_{ni}^*	0,05	0,08	0,12	0,14	0,15			
	I_i	[50,60)	[60,70]	[70,80)	[80,90)	[90,100)			
	p_{ni}^*	0,20	0,10	0,08	0,06	0,02			
4	На 100 однакових за розмірами навмання взятих ділянках землі з однаковою кількістю внесених добрив зібрані різні врожаї зерна. Результати наведені в таблиці:								

В-т	Завдання								
		Врожай (ц/га)	14	15	16	17	18	19	20
	Кількість ділянок	6	10	18	28	20	12	6	
5	Наведено результати вимірювання зросту випадково відібраних 100 студентів.								
	Зріст, см	154-158		158-162		162-166		166-170	
	Кількість студенті	0		12		26		28	
	Зріст у см	170-174		174-178		178-182		182-186	
	Кількість студентів	12		8		2		2	

2. Функція щільності розподілу $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ повністю визначається двома параметрами a та σ . З'ясувати, як вони впливають на форму і розташування кривої та на величину інтегралу $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, використовуючи програму *GRAN1*.

3. Коректор навмання вибрав 40 сторінок з 400-сторінкового рукопису книги і перевірів ці сторінки на наявність помилок. Кількість помилок на кожній сторінці така:

0	1	1	3	0	0	1	1	0	1
3	2	0	2	1	0	0	0	1	2
0	0	0	2	1	0	2	0	0	0
0	1	0	1	0	2	3	2	1	0

Побудувати частотну таблицю для кількості помилок на сторінці, використовуючи програму *GRAN1*. Розрахувати наближену кількість сторінок без помилок; сторінок з трьома і більше помилками; сторінок з двома і менше помилками; загальну кількість помилок.

4. Протестовано 30 компонентів приладів на час їх роботи (у годинах). Отримані результати занесені в таблицю:

1,2	21,0	34,7	13,2	3,6	14,7
31,0	17,1	22,1	16,4	21,2	15,2
11,3	6,8	2,7	31,2	9,0	6,8
23,7	16,3	30,0	28,6	19,0	29,0
4,4	44,3	18,5	5,3	5,5	10,0

Створити частотну таблицю з довжиною інтервалу 10 годин.

Аналітики стверджують, що не менше 90% компонентів працює не менше 10 годин. Чи можна довіряти цьому твердженню. Для отримання відповіді використати програму *GRAN1*.

5. Візуалізувати результати випадкового випробування, використовуючи програму *Математический конструктор*.

В-т	Завдання
1	Екперимент: підкидання монети. Обчислити кількість, частоту, ймовірність випадання гербів та чисел. Обчислити відхилення частоти від ймовірності.
2	Екперимент: підкидання грального кубика. Обчислити частоту випадання кожної грані кубика. Обчислити ймовірність того, що випаде парна кількість очок. Обчислити відхилення частоти від ймовірності випадіння певної грані.
3	Екперимент: підкидання двох монет (монети не нумеруємо). Обчислити частоту випадіння двох орлів, орла і решки, двох решок. Обчислити ймовірність того, що дві монети випадуть однаковими сторонами, різними сторонами.
4	Екперимент: в корзині лежать чотири кулі різного кольору, навмання виймаємо дві кулі (з поверненням і без повернення). Обчислити ймовірність того, що дві кулі будуть різного кольору.
5	Екперимент: в корзині лежать два яблука і одна груша, з корзини навмання виймають два фрукти (без повернення). Обчислити ймовірність того, що два фрукти будуть однакові, різні.
6	Екперимент: у шафі стоять п'ять пар черевиків (розміри від 41-го до 45-го), з шафи навмання виймають 4 черевики. Обчислити ймовірність того, що серед обраних черевиків відсутні парні.
7	Екперимент: у маленької Варі дві однакові пари рукавичок. Збираючись на прогулянку, вона навмання бере дві рукавички. Обчислити ймовірність того, що Варя обрала пару.
8	Екперимент: в корзині лежать 2 червоні і 2 зелені кулі, з неї навмання виймають дві кулі (без повернення). Обчислити ймовірність того, що вийняті дві кулі однакового кольору, різного кольору.
9	Екперимент: підкидають два гральні кубики. Обчислити ймовірність того, що на кубиках випадуть однакові значення, різні значення.
10	Екперимент: підкидають дві кнопки. Обчислити ймовірність того, що обидві випадуть вістрям догори; одна випаде вістрям дороги, інша вістрям вниз.

Питання для самоконтролю. Вказати, які на Ваш погляд переваги та

недоліки має кожна з програм. Заповнити таблицю та доповнити її.

№	Комп'ютерні інструменти, наявні у середовищі	Gran1	GG	МК
1	Задання статистичної вибірки дискретного розподілу			
2	Задання статистичної вибірки неперервного розподілу			
3	Побудова полігону частот			
4	Побудова гістограми			
5	Побудова функції розподілу відносних частот			
6	Обчислення математичного сподівання			
7	Обчислення середнього квадратичного відхилення			
8	Обчислення медіани			
9	Обчислення моди			
10	Застосування різних статистичних критеріїв			
11	Побудова регресії			
12	Візуалізація випадкового випробування			
13				

ТЕМА № 4. ДОДАТКОВІ КОМП'ЮТЕРНІ ІНСТРУМЕНТИ

4.1. Приклади створення власних інструментів у програмах динамічної математики

Програми динамічної математики серед іншого дозволяють швидкі та якісні геометричні побудови. Але трапляються випадки, коли певні геометричні конструкції не закладені розробниками як готові інструменти. При цьому велика кількість задач пов'язана саме з такими об'єктами. Щоб не витратити час уроку на вже відому побудову і вивільнити час на аналіз задачі та її розв'язків, у нагоді стане можливість створення у середовищі динамічної математики власного інструменту, який при завантаженні відразу буде потрібну конструкцію.

GRAN2d

У програмі *Gran2d* нові інструменти ототожнюються з макроконструкцією, під якою розуміють комбінацію об'єктів, яка часто використовується і передбачає швидкий і простий виклик.

Для створення макроконструкції призначено послугу *Макроконструкція/Створити*: у полі зображення слід послідовно вказати вихідні об'єкти, потім необхідно знову звернутися до означеної послуги,



після чого потрібно вказати результуючі об'єкти. Вказавши останній результуючий об'єкт, потрібно знову активізувати послугу *Макроконструкція/Створити*.

У разі коректного задання вихідних і результуючих об'єктів з'явиться вікно *Назва конструкції*, де у відповідне поле необхідно ввести назву створюваної макроконструкції (ця назва з'являтиметься потім у вікні *Встановлення макроконструкції*), потім натиснути кнопку *Продовжити*, після чого з'явиться стандартний запит збереження файлів системи *Windows*, у якому необхідно вказати ім'я файлу для збереження конструкції. У разі некоректного задання конструкції з'явиться повідомлення про помилку.

Для встановлення створеної раніше макроконструкції призначено послугу *Макроконструкція/Встановити*. При зверненні до неї з'являється вікно *Встановлення макроконструкції* з переліком назв макроконструкцій, причому у переліку будуть назви лише тих макроконструкцій, які збережені у папці *Макроконструкція* у директорії програми.

Після вибору потрібної слід натиснути кнопку *Встановити*, після чого за відповідними запитам програми, що з'являтимуться у *полі підказки*, необхідно вказати опорні об'єкти конструкції. При цьому типи опорних об'єктів, що вказуються, повинні співпадати з базовими типами вихідних об'єктів вибраної макроконструкції.

Живая Геометрия

У середовищі ЖГ передбачено кнопку , яка дає можливість додавати нові комп'ютерні інструменти. Якщо нарисувати, наприклад, трикутник, обвести його курсором миші, натиснути , то з'явиться пропозиція *Создать новый инструмент*, який програма запам'ятає, як інструмент створення трикутника. Фіксуємо у відповідному полі назву. Інструмент створено. Зауважимо, що у ЖГ не потрібно вказувати вихідні і результуючі об'єкти – програма це робить сама (!).

Математический конструктор

Аналогічні функції є в інших інтерактивних геометричних середовищах, але вони можуть мати інші назви, наприклад, в програмі *DG* вони називаються макроси, у *MK* та *GeoGebra* – інструменти, причому в *MK* надається колекція вже готових інструментів деяких конфігурацій, які часто використовуються.

Приклад 4.1. (*MK*) Створити новий інструмент, який будує пряму за заданим кутовим коефіцієнтом.

Спочатку побудуємо конфігурацію (рис.4.1).

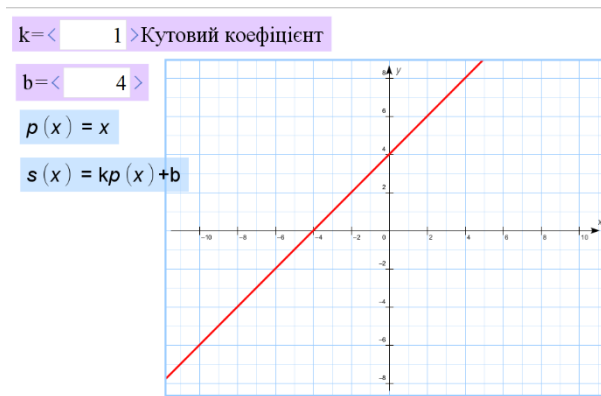


Рис. 4.1.

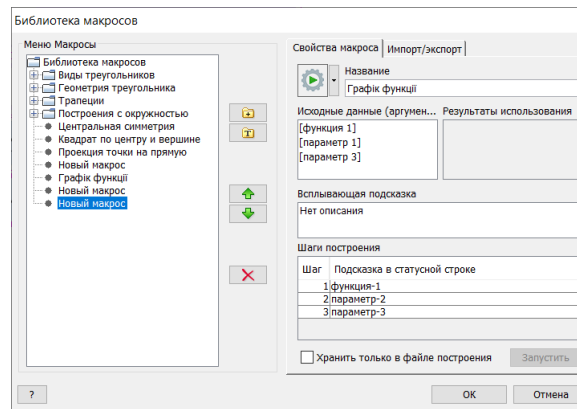



Рис.4.2.

Для створення нового інструменту виділимо аргументи (параметри k та b) і результати побудови (аналітичне задання функції та її графік). Обираємо пункт меню *Макросы/Новый макрос*. Відкриється діалог створення нового інструмента (рис. 4.2).

При створенні інструменту програма сама аналізує виділені об'єкти і зв'язки між ними, шукає серед них вільні, незалежні від інших, приймає їх за аргументи, а інші – за результат.

GeoGebra

Для створення авторського інструменту потрібно обрати команду *Инструменты/Создать инструмент* . Після чого відкриється діалогове вікно, де активізується вкладка *Выходные объекты*, куди потрібно занести ті об'єкти, які є результатом побудов. У наступній вкладці *Входные объекты* середовищем автоматично пропонуються «батьківські об'єкти», які усе ж таки можна змінити. Потім потрібно перейти до вкладки *Имя и значок*. Якщо усі вхідні і результуючі об'єкти введені коректно, то середовищем пропонується ввести назву інструменту та його логотип (можна створити за допомогою програми *Microsoft Paint*, *GeoGebra* дозволяє використовувати у якості логотипа файли із зображеннями наступних типів: *gif, jpeg, jpg, tif, png, bmp*). Назву команди текстового поля програма заповнює автоматично. Новий інструмент стає частиною панелі інструментів.

Лабораторна робота №5 (тренувальна)

Створення власних інструментів у програмах динамічної математики

Мета: навчитись створювати власні комп'ютерні інструменти у програмах

динамічної математики; навчитися використовувати програму *МК* для організації контролю знань учнів.

Обладнання. Комп'ютер, ППЗ *ЖГ, МК, GeoGebra*.

Практичні завдання

1. У програмах *ЖГ, МК, GeoGebra* створити новий інструмент.

В-т	Завдання
1	Інструмент, який за формулою або за графіком лінійної функції визначає кутівий коефіцієнт (<i>Gran2d, МК</i>). В яких ПДМ цей інструмент передбачено розробниками?
2	Інструмент, який обчислює корені квадратного рівняння за заданим рівнянням (<i>ЖГ, МК</i>).
3	Інструмент, який обчислює площу криволінійної трапеції, обмеженої заданими лініями (<i>ЖГ, МК</i>).
4	Інструмент, який будує графік функції, що обчислює суму дільників натурального числа (<i>GeoGebra</i>).
5	Інструмент, який будує графік функції, що обчислює кількість дільників натурального числа (<i>GeoGebra</i>).

Питання для самоконтролю. Заповнити порівняльну таблицю.

Можлива послуга у ПДМ	ЖГ	МК	GG
Створення власного інструменту			
Створення геометричних інструментів			
Створення алгебраїчних інструментів			
Сприйняття результатів обчислень та числових значень виразів як об'єктів нового інструменту			
Автоматичне визначення вихідних та результуючих об'єктів			
Створення або завантаження власної іконки для інструменту			

ТЕМА № 5. ОРГАНІЗАЦІЯ КОМП'ЮТЕРНОГО КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ

5.1. Приклади використання програми *Математический конструктор* при організації контролю

Обов'язковим компонентом освітнього процесу є перевірка результативності навчання. Така перевірка може здійснюватися різними способами, серед яких достатньо актуальним є контроль знань, реалізований засобами інформаційних технологій. Зокрема, на теренах України активно поширюються автоматизоване тестування та освітній

моніторинг, який також базується на тестових оцінках і реалізується з використанням ІКТ для швидкого технічного опрацювання одержаних результатів.

Упровадження таких форм контролю, з одного боку, нівелює суб'єктивізм у оцінюванні та полегшує роботу пересічного вчителя, вивільнивши час від рутинної перевірки кожної контрольної роботи. З іншого боку, тестова перевірка знань, як правило, не може продемонструвати хід думок учня, вона фіксує лише результат, що не завжди є ефективним з позицій перевірки якості засвоєних знань та вмінь. Тому серед форм контролю залишаються традиційні самостійні роботи, які не передбачають вибір відповідей, як це вимагається при тестуванні, а вимагають фіксацію ходу розв'язування задачі. При цьому питання автоматизації контролю залишається актуальним.

Проведений нами аналіз програмних продуктів спеціалізованого спрямування (програми організації комп'ютерного тестування, системи комп'ютерної математики, програми динамічної математики тощо) виявив, що організація автоматизованого контролю у формі тестування вимагає попередньої розробки самих тестових завдань, і якщо система таких питань має адекватно перевіряти рівень одержаних знань та умінь, то її розробка вимагає не тільки великих часових затрат, а і залучення фахівців з психології та освітніх вимірювань.

Окремі середовища (зокрема, системи комп'ютерної математики) передбачають прописування команд. Це дає змогу перевірити хід думок суб'єкта навчання, але потребує попереднього вивчення самого середовища як учителем, так і учнями, що з позицій економії навчального часу в умовах інтенсифікації навчання не є раціональним.

Програми динамічної математики передбачають можливість покрокової демонстрації розв'язання. Це дозволяє перевірити міркування учня при розв'язуванні певної математичної задачі, але така форма контролю все ж вимагає витрат часу на перегляд учителем кожного файлу розв'язання.

Ці міркування змушують не лише науковців, а і розробників програмних засобів навчального призначення пропонувати такі інструменти, які передбачають *автоматизовану* перевірку самого ходу розв'язування. Так, розробниками програми *Математичний конструктор* пропонується набір засобів, серед яких міститься інструмент *Перевірить ответ, Поле вводу, Чекбокс*.

МК – інструмент *Перевірить ответ*

Інструмент *Перевірить ответ* дозволяє визначити, чи привели побудови до потрібного результату [24].

Для використання інструменту потрібно обрати відповідний пункт в меню, вказати послідовно всі об'єкти, наявність яких потрібно перевірити, натиснути *Enter* на знак того, що всі об'єкти обрано, і вказати місцезнаходження кнопки на листі. Потім сховати усі допоміжні побудови.

Вважається, що «правильна відповідь» – це сукупність об'єктів, які були виділені при створенні кнопки. Побудова вважається вірною, якщо «правильні» і побудовані об'єкти співпали. Якщо для перевірки не було використано виділення потрібних об'єктів, то інструмент *Проверить ответ* шукає правильну відповідь серед усіх побудованих об'єктів. Якщо об'єкти для перевірки виділено, то інструмент *Проверить ответ* порівнює «правильну відповідь» із виділеними об'єктами.

Текст повідомлення про правильність чи неправильність побудови, а також програму (скрипт) кожної кнопки можна редагувати у її властивостях. Результат перевірки можна передавати і в програмну оболонку, що формує оцінку.

Зауважимо, що програма *МК* сприймає точки (в тому числі точки екстремума), відрізки, промені, прямі (в тому числі дотичні до кола чи графіка функції), функції, результати вимірювань як об'єкти для перевірки. Але не реагує на багатокутник (як частину площини), ГМТ (побудоване чи як локус, чи як слід), графіки функцій.

Приклад 5.1. Побудувати кут, синус якого дорівнює $3/5$.

Організуємо автоматизовану перевірку потрібного результату.

Виділимо сторони та вершину побудованого кута, оберемо в меню *Кнопки* довільну з двох команд створення кнопки *Проверка ответа* і клацнемо в тому місці екрану, де ми бажаємо її розмістити. Після цього залишається лише за допомогою інструменту *Спрятать/Показать* сховати усі допоміжні побудови, залишивши лише об'єкти, задані умовою. Якщо знову відтворити побудову і виділити сторони та вершину відновленого кута, а потім натиснути перевірку відповіді, то одержимо результат «Правильно» (рис. 5.1).

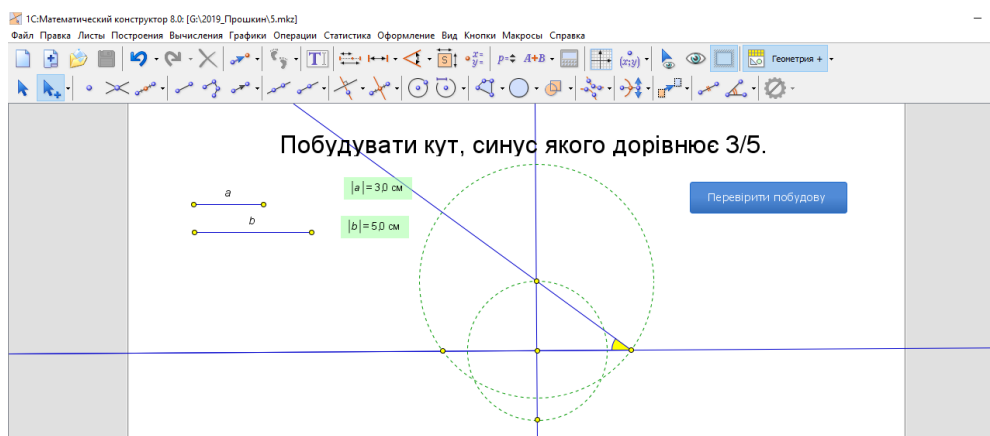


Рис.5.1.

МК – інструмент *Поле вводу ответа*

МК дозволяє перевіряти не тільки геометричні побудови, але і правильність введеної числової, текстової або іншої форми відповіді. Розробниками передбачено редактор для вводу і перевірки складних математичних виразів.

Інструмент *Поле вводу ответа* створює у вказаному місці листа поле для вводу відповіді і кнопку *Проверить*. Одночасно з появою поля і кнопки відкривається діалог властивостей зі скриптом, який визначає роботу кнопки (рис. 5.2).

У цьому вікні замість тексту у лапках (він виділений червоним) потрібно вписати варіанти вірних відповідей (вони надані у кількості 3, але їх кількість можна збільшити): якщо в поле відповіді буде введено текст, що співпадає з одним з цих варіантів, відповідь буде вважатися вірною.

Для перевірки потрібно ввести варіанти відповідей і натиснути кнопку *Проверить*: введений текст буде порівнюватися з «правильною відповіддю» (раніше підготовленими варіантами) і на основі результату порівняння на екрані буде з'являтися відповідне повідомлення.

Приклад 5.2. (МК) Кімната має розміри 10м, 6,5м, 4м. Обчисліть площу стін, які необхідно побілити, якщо площа вікон і дверей становить 0,2 площі стін (рис.5.3).

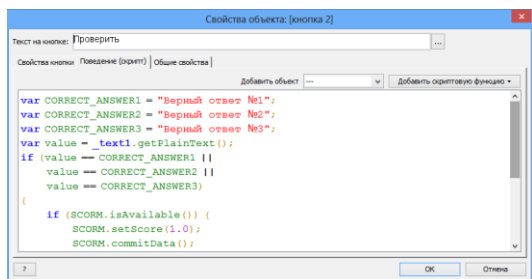


Рис. 5.2.

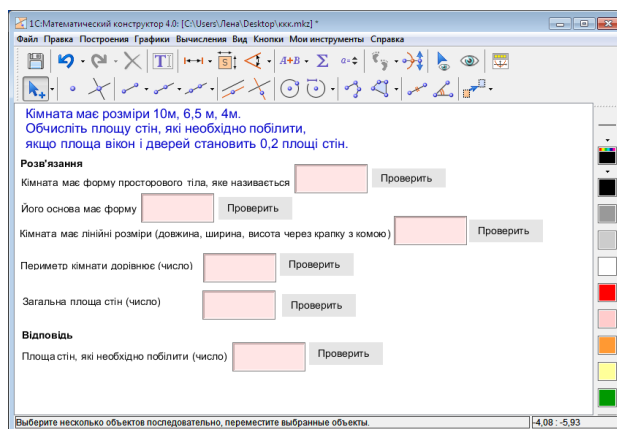


Рис.5.3.

Приклад 5.3. (МК) Точка *A* розташована на додатній півосі *Ox*, а точка *C* розташована на додатній півосі *Oy*. Нарисувати прямокутник *OABC* і його діагоналі. Визначити координати вершин прямокутника *OABC* та точки *D* перетину діагоналей, якщо довжина сторони *OA* дорівнює 18, а довжина сторони *OC* дорівнює 6 (рис.5.4).

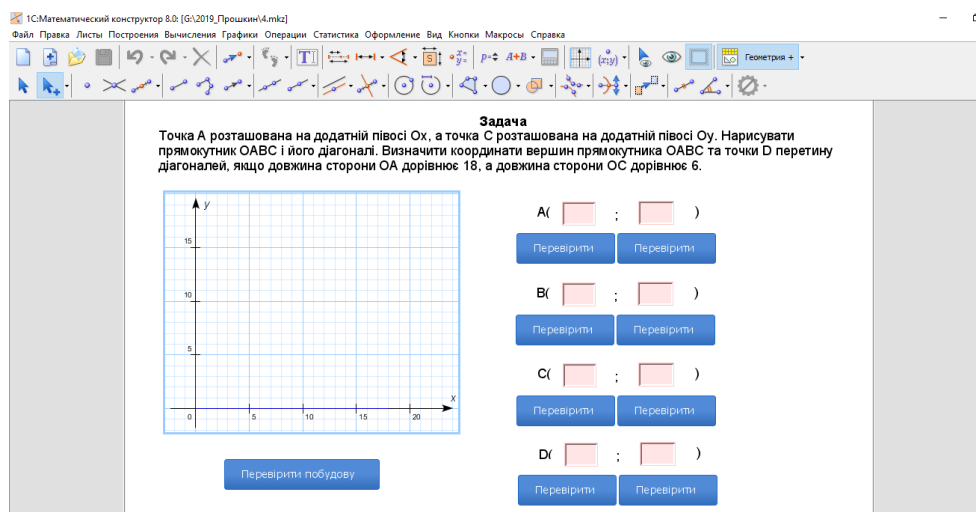


Рис.5.4.

МК – інструмент Чекбокс

Інструмент *Чекбокс* створює на листі поле з віконцем, в якому можна поставити «галочку». Поряд з віконцем в тому ж полі можна розмістити підпис. Фактично «галочка» ототожнюється з числовим параметром, що приймає значення 0, якщо відмітки немає, і 1, якщо вона поставлена. Якщо створити декілька чекбоксів, відмітити деякі з них, сформувавши «правильну відповідь», виділити їх (з проставленими відмітками) і обрати в меню команду *Проверить ответ*, то буде створено кнопку, при натисненні на яку проставлений набір «галочок» буде порівнюватися з «правильною відповіддю». При повному співпадінні буде видаватися повідомлення про правильність.

Приклад 5.4. (МК) Обрати, які з ліній є графіками функцій (рис. 5.5).

Будуємо можливі фрейми із зображеннями ліній, обов'язково враховуючи типові помилки, які виникають при розв'язуванні такого типу задачі. Навпроти кожного варіанту відповіді пропонуємо чекбокс із «обґрунтуванням». Вказуємо правильні відповіді. Виділяємо усі чекбокси разом і створюємо кнопку *Проверить ответ* (меню *Кнопки/ Проверить ответ*). «Обнуляємо» чекбокси. Завдання готове до використання.

Які з ліній є графіками функцій?

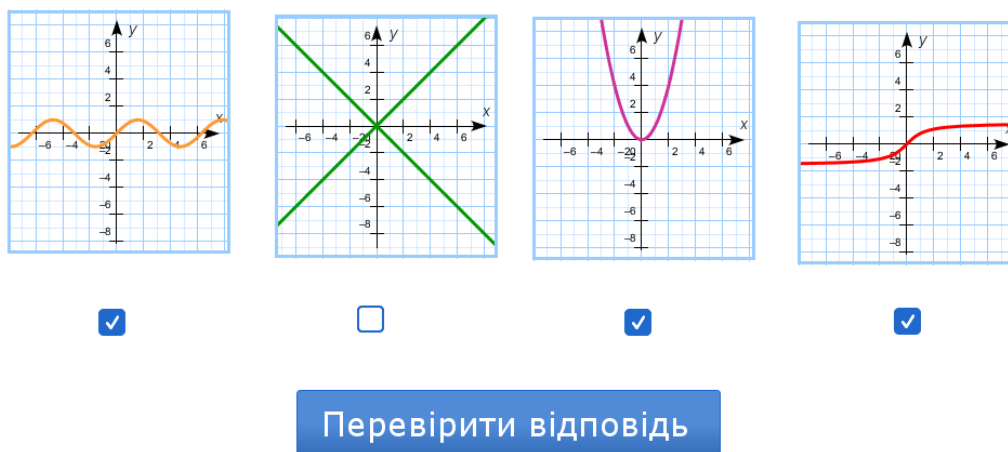


Рис.5.5.

Лабораторна робота №6 (тренувальна)

Організація контролю знань із використанням програми Математический конструктор

Мета: навчитися використовувати програму *Математический конструктор* для організації контролю знань учнів.

Обладнання. Комп'ютер, ППЗ *Математический конструктор*.

Теоретичні питання.

1. Види і форми контролю знань.
2. Методи контролю знань.
3. Місце контролю знань в процесі навчання.

Практичні завдання

1. У програмі МК створити модель з можливістю проведення дослідження та за допомогою інструменту *Чекбокс* організувати тестову перевірку відповідей завдання (вказати правильну відповідь та декілька неправильних з урахуванням можливих помилок учнів).

В-т	Завдання
1	1. При яких значеннях m рівно один з коренів рівняння $3x^2 + x + 2m - 3 = 0$ дорівнює 0? 2. При якому a має єдиний розв'язок рівняння $\log_2(\sqrt{2x^2 + 2y^2 - z + 1}) + \arcsin(3x + 3y - z + a) = 0$?
2	1. При яких значеннях a корені рівняння $x^2 + (3a - 5)x = 2$ рівні за модулем, але протилежні за знаком? 2. При якому значенні параметра k рівняння


	$\frac{x^2 + (3 - 2k)x + 4k - 10}{\sqrt{2x^2 - 2x - 1}} = 0$ має єдиний розв'язок?
3	1. При яких значеннях k обидва корені рівняння $3x^2 + (k - 1)x + 1 - k = 0$ рівні 0? 2. Скільки розв'язків може мати рівняння $\cos(\sqrt{a^2 - x^2}) = 1$?
4	1. При якому значенні параметра a рівняння $(a - 2)x^2 + (4 - 2a)x + 3 = 0$ має єдиний корінь? 2. Скільки розв'язків може мати рівняння $\sqrt{6 - x} + \sqrt{x + 3} = kx$?
5	1. При якому значенні a рівняння $x^2 + ax + 1 = 0$ та $x^2 + x + a = 0$ мають спільний корінь? 2. Скільки розв'язків може мати рівняння $\sqrt{3x - 5} = b - \sqrt{3x + 11}$?

2. Розробити варіант розв'язання текстової задачі на рух з використанням інструменту *Поле вводу ответа* програми *Математичний конструктор*.

5.2. Приклади використання режиму *GeoGebraExam* при організації контролю

Для посилення самостійності при виконанні завдань розробниками *GeoGebra* передбачено режим *GeoGebra Exam*, який передбачає обмеження доступу до окремих комп'ютерних інструментів (обираються викладачем) та файлів, розміщених на комп'ютері, а також заборону виходу в інтернет. Режим не автоматизує контроль за навчальними досягненнями, але фіксацією дій у спеціальному журналі підтверджує/спростовує самостійність виконання завдань. У журналі фіксуються: дата і час початку виконання завдання, встановлені налаштування, вихід з повноекранного режиму, якщо такий мав місце, та повернення до нього, час завершення роботи [54].

Організація роботи в режимі *GeoGebra Exam* не потребує великих часових затрат.

Розпочати роботу можна після переходу на сайт www.geogebra.org/exam, використовуючи будь-який браузер і не обов'язково встановлюючи програму на комп'ютері. Після запуску *GeoGebra Exam* з'явиться діалогове вікно. Викладач встановлює обмеження на використання інструментарію (за потреби, наприклад, можна деактивувати CAS або полотно 3D). Деактивовані функції відображаються у заголовку екзамену  закресленими. Після запуску екзамену (кнопка «Запустити екзамен») запуститься таймер і колір панелі зміниться на синій. Кожний екзамен

починається з порожньої конструкції, і поки екран *GeoGebra* активований, зберегти свою роботу не можна, оскільки всі параметри меню «Файл» деактивуються.

У ході виконання екзамену можна в будь-який час перевірити журнал, натиснувши на заголовок екзамену. Журнал містить інформацію про дату і час початку, налаштування, відмітки про вихід з повноекранного режиму (колір панелі змінюється на червоний) та повернення до нього, час закінчення екзамену. Зауважимо, що журнал не зберігається автоматично, і якщо студент вийшов з повноекранного режиму випадково, йому необхідно повернутися в нього якомога скоріше, наприклад, натиснувши F11. Якщо екзамен завершено, потрібно обрати *Exit Exam* у меню «Файл».

Опишемо фрагмент такого контролю на прикладі використання ПДМ у розв'язуванні задачі: визначити скільки розв'язків має рівняння $\sqrt{1-x^2} = a - x$ залежно від значення параметра a (рис.5.6). При виконанні даного завдання на перший план висувається перевірка ідеї розв'язання та її реалізація.

По завершенні екзамену можна побачити деталі його проходження у журналі (рис.5.6): на розв'язування задачі витратив 3,38 хвилин. І хоча студент розв'язав задачу правильно, вихід з повноекранного режиму мав місце, причому два рази приблизно на 20 і 10 секунд, що дає підстави сумніватися у самостійності розв'язання. По завершенні екзамену програма дозволяє зберегти файл (рис.5.7).

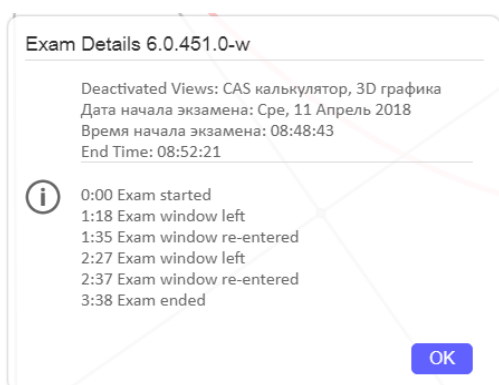


Рис.5.6.

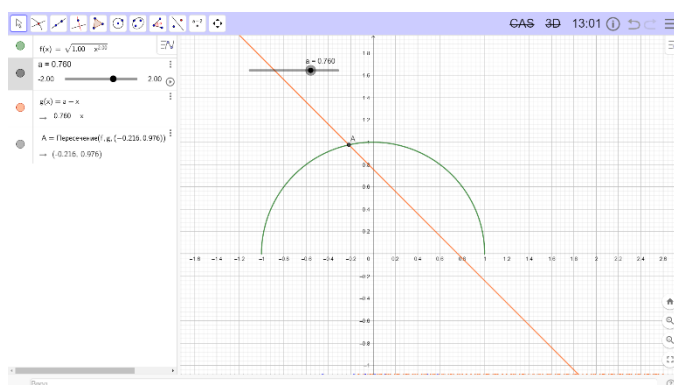


Рис.5.7.

Лабораторна робота № 7 (тренувальна)

Організація контролю знань із використанням режиму *GeoGebraExam*

Мета: навчитися використовувати програму *GeoGebra* для організації контролю знань учнів.

Обладнання. Комп'ютер, ППЗ *GeoGebra*.

Практичні завдання

1. Виконати завдання в режимі *GeoGebraExam* (декілька разів виходити з

режиму за підказкою), продемонструвати звіт про виконання завдання, який потрібно зберегти окремим файлом *ExamLog*.

Завдання			
В-т	Побудувати різним кольором всі проміжні графіки, які необхідні для побудови графіка функції.		
1	$y = \log_3 x - 1 $	4	$y = 1 - x ^2$
2	$y = -3^{ x } + 2$	5	$y = \sqrt{x+1} + 1$
3	$y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$		

5.3. Процедура створення тестів у програмі MyTest

Як правило, з комп'ютерним контролем пов'язують такий метод контролю знань, умінь та навичок, як тестування (комп'ютерне тестування). Комп'ютерне педагогічне тестування – це метод педагогічної діагностики, який полягає у стандартизованій процедурі подання тестових матеріалів й обробки результатів у спеціалізованому комп'ютерному середовищі.

В методичній літературі описано можливості використання різних програм комп'ютерного тестування – *MyTest*, *OpenTEST*, *ADTester*, *Асистент2*, *УТК* (Універсальний тестовий комплекс) тощо. Такі програми передбачають використання запитань із закритою та відкритою формою відповіді, але, як правило, не дозволяють перевірити правильність міркувань, які здійснює суб'єкт навчання для одержання відповіді, що є важливим, зокрема, при розв'язуванні математичних задач.

Розглянемо алгоритм по створенню тестів з різними типами завдань із використанням програми *MyTest*. Для додавання нового завдання в створюваному/редагованому тесті потрібно виконати команду *Завдання-Додати*, де обирати тип завдання (рис. 5.8).

Типи завдань

- одиночний вибір;
- множинний вибір;
- встановлення порядку проходження;
- встановлення відповідності;
- встановлення істинності або помилковості тверджень;
- ручне введення числа;
- ручний ввід тексту;
- вибір місця на зображенні;
- перестановка літер;
- заповнення пропусків.

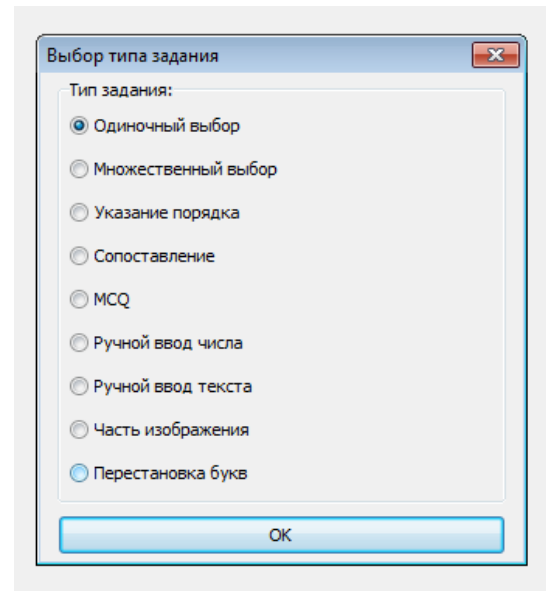


Рис.5.8.

Завдання з одиночним варіантом відповіді

1. У полі введення тексту запитання пишемо сам текст.
2. Якщо запитання містить рисунок, то для додавання його до тексту завдання натискаємо кнопку з зеленим плюсиком. Відкривається вікно огляду файлів комп'ютера, де потрібно вибрати потрібне зображення.
4. Далі в Полях введення варіантів відповіді вводимо текст, встановлюємо перемикач навпроти правильної відповіді.

Завдання з множинним варіантом відповіді

Виконуємо дії аналогічні до попереднього пункту, зазначивши кілька правильних варіантів відповіді.

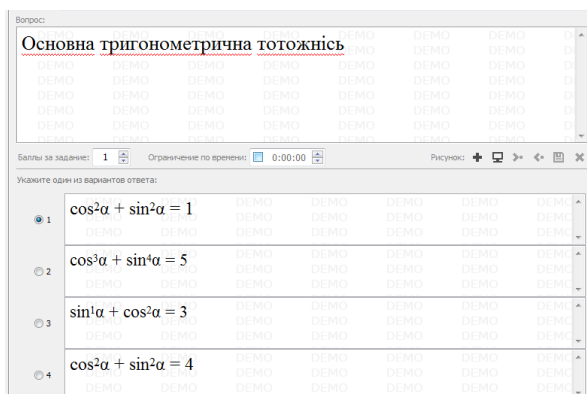


Рис.5.9.

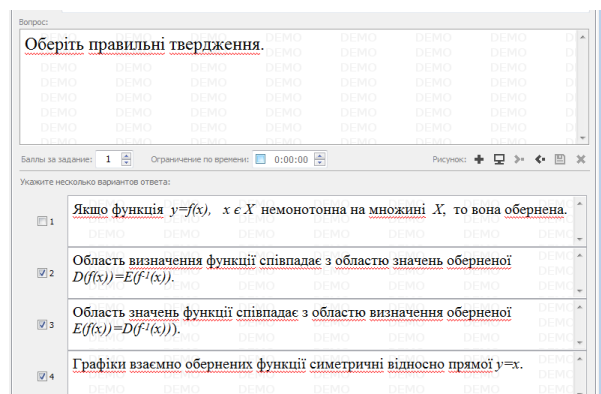


Рис.5.10.

Завдання із зазначенням порядку

Запитання із зазначенням порядку передбачає визначення порядку варіантів за номером (1,2,...). Алгоритм аналогічний. Відповідь – правильна послідовність.

Завдання на зіставлення

Запитання на зіставлення передбачає вибір номера відповідного варіанта з усіх запропонованих.

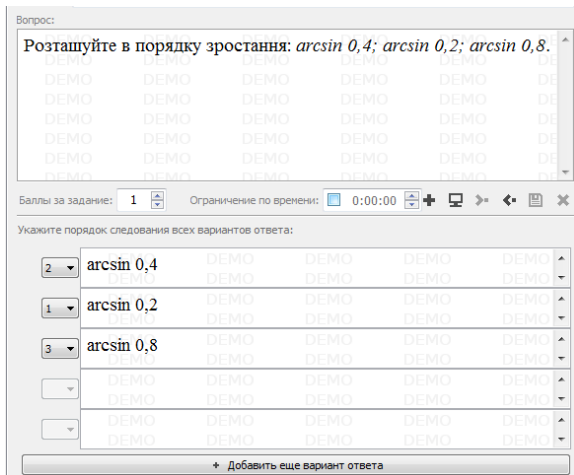


Рис.5.11.

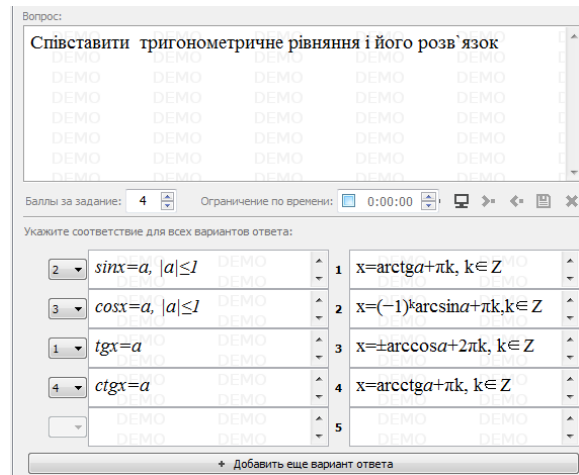


Рис.5.12.

Завдання на встановлення істинності чи хибності тверджень

Запитання на встановлення істинності чи хибності тверджень передбачає вибір "так" або "ні" для кожного варіанту з усіх запропонованих. Відповідь – правильна відповідність.

Завдання на ручне введення числа (відкрита форма)

Запитання на ручне введення числа припускає введення числа в якості відповіді. Правильна відповідь може бути задана у вигляді числа, або у вигляді числового діапазону. В останньому випадку відповідь учня вважається правильною, якщо його відповідь потрапляє у вказаний діапазон.

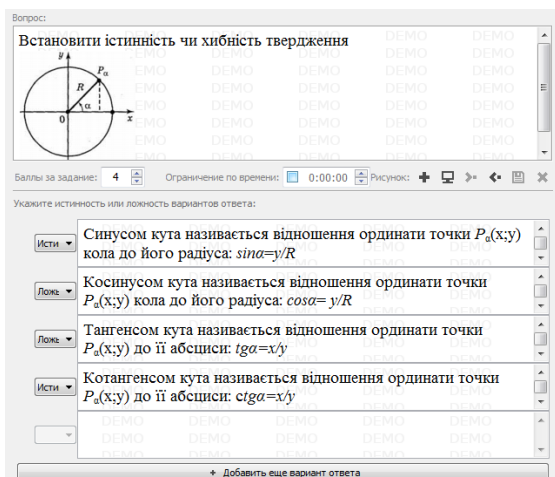


Рис.5.13.

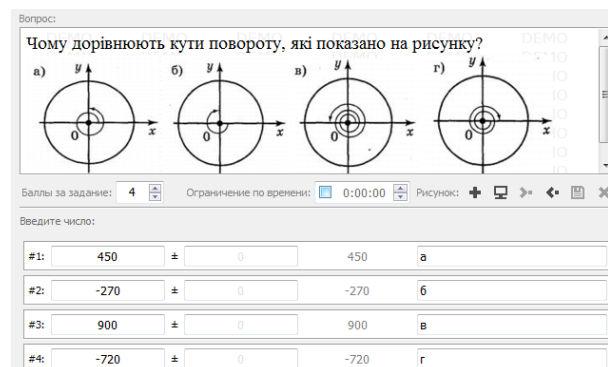


Рис.5.14.

Завдання на ручне введення тексту (відкрита форма)

Запитання на ручне введення тексту припускає введення текстового рядка в якості відповіді. Можна задати не один, а кілька варіантів

відповіді, оскільки варто передбачити, в якому саме вигляді учень буде вводити відповідь. Відповідь вважається правильною, якщо вона збігається хоча б з одним з варіантів.

Завдання на вибір місця на зображенні

Для відповіді на запитання типу «частина зображення» необхідно вказати точку на зображенні: якщо вона потрапляє в зазначену область, відповідь вірна. Після додавання рисунку потрібно двічі клацнути лівою клавішею миші по ньому. На панелі, що з'явиться, потрібно клацнути по кнопці *Виділення зображення* і виділити прямокутну область.

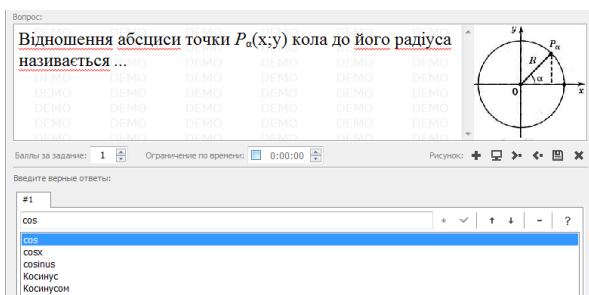


Рис.5.15.

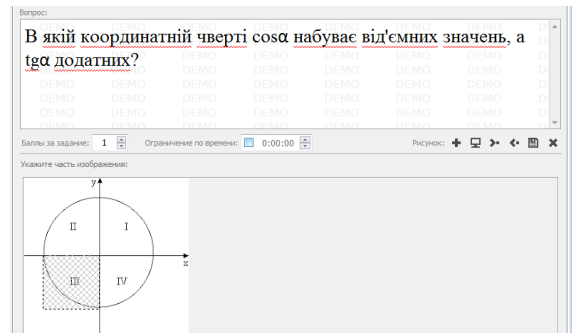


Рис.5.16.

Завдання на перестановку букв

Відповіддю до цього типу завдань є слово (або текст). Букви потрібного слова виводяться в окремих областях (прямокутних блоках) і в довільному порядку. Тестований може, клацаючи мишею, обмінювати букви місцями. Вчителю не потрібно переставляти букви, він просто вводить потрібне слово або термін, а учню букви будуть представлені у випадковому порядку. Букви автоматично переводяться у верхній регістр.

Завдання на заповнення пропусків

Пропонується два типи пропусків – текстове поле і поле зі списком. У текст завдання можна вставляти малюнки, символи, таблиці.

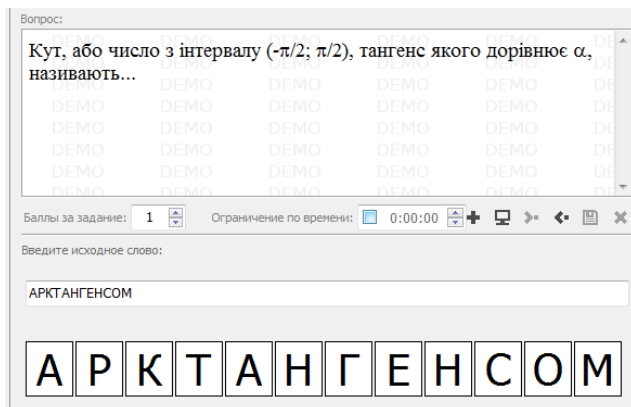


Рис.5.17.

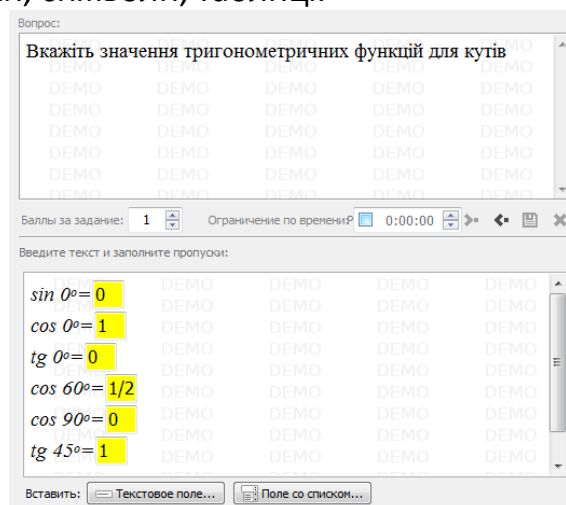


Рис.5.18.

Після введення кожного запитання потрібно перевірити завдання, варіанти відповіді, правильний варіант відповіді. Якщо все вірно, то натискаємо кнопку внизу вікна *Зберегти завдання*. Якщо хочемо створити завдання заново, натискаємо *Скинути*.

Перехід між створеними завданнями здійснюється клацанням лівою кнопкою миші в списку всіх завдань тесту.

Будь-яке готове завдання можна: видалити (команда Завдання – Видалити); дублювати (команда Завдання – Дублювати); змінити порядок проходження завдань (команда Завдання – Перемістити...); змінити тип завдання (команда Завдання – Змінити тип)

Після введення всіх завдань можна встановити обмеження по часу на виконання кожного завдання: Параметри завдань – Обмеження часу для всіх завдань.

Для організації тестування потрібно визначитися з *параметрами тесту*: заголовок і опис, інструкція учню, порядок запитань та варіантів (звичайний, випадковий), обмеження часу на проходження всього тесту. А також потрібно визначитися з *режимом проходження тестування*: навчальний (учень відразу бачить повідомлення про допущені помилки); вільний (учень може вільно відповідати на запитання, пропускати запитання, а потім повертатися до них); штрафний (за неправильні відповіді в учня віднімаються набрані бали); монопольний (вікно модуля тестування розгорнуто на весь екран і відсутня можливість перемикається на інші програми). Тести зберігаються в окремих файлах.

Алгоритм проведення тестування.

1. Запустити модуль MyTestStudent.exe.
2. Відкрити тест, наприклад, за допомогою команди Файл – Открыть.
3. Після відкриття тесту з'являється вікно з інформацією про назву тесту та критерії оцінювання. Відкриті тести автоматично додаються до підменю "Попередні файли" меню "Пуск".
4. Для початку проходження тесту виконати команду Тест – Почати або натиснути F5.
5. Ввести ім'я учня, яке в подальшому буде використовуватися при запису результатів у файл або відсиланні результатів вчителю. Варто звернути увагу на те, що прізвище та ім'я вводяться у відповідному форматі.
6. Завершити тест достроково можна командою Тест – Завершити. Повідомлення про відкриття або завершення тесту при відповідних налаштуваннях відправляються вчителю на сервер.
7. Для вибору правильного варіанту відповіді потрібно користуватися лівою кнопкою миші або клавішами на клавіатурі. Якщо Ви впевнені у відповіді, то для переходу до наступного запитання натисніть кнопку Далі

або на клавіатурі ENTER або ПРОБІЛ. Індикатор під кнопкою "Далі" відображає хід тесту, тобто кількість заданих на цей час запитань. Якщо є рисунок, то його мініатюра відображається праворуч від тексту завдання (крім завдання на вибір місця на малюнку). Для перегляду рисунка в повний розмір досить по ньому клацнути мишкою – рисунок відкриється в новому вікно. При відкритому рисунку можна відповідати на завдання.

Нижня частина вікна програми подає інформацію про: кількість запитань в тесті; кількість заданих запитань (задано/всього); час, що витрачений на весь тест і на поточне завдання; якщо включено обмеження по часу, то так само буде відображатися інформація про те, скільки залишається часу на обдумування завдання або всього тесту.

По закінченні тесту виводиться вікно з оцінкою. Ця інформація (але більш детальна) виводиться в полі інформації (поле питання). У вікні з оцінкою подаються дві діаграми – одна статистика із запитаннями, інша з балами. Кольори на діаграмі № 1 означають: білий – кількість пропущених питань (тест був зупинений або закінчився час), зелений – кількість правильних відповідей, червоний – кількість помилок. Кольори на діаграмі № 2 означають: зелений – кількість набраних балів, червоний – кількість ненабраних балів через помилки. Кількість балів за відповідь задається в редакторі тестів.

Якщо зроблені відповідні налаштування, то результати тесту будуть також відправлені на сервер вчителю. Так само, при активованому налаштуванні "Зберігати результати в файл" детальні результати зберігаються у файл результатів. За замовчуванням файл знаходиться в каталозі з програмою, але Ви можете вказати інше місце в налаштуваннях програми.

Журнал тестування (сервер) – модуль програми MyTestXPro, що дозволяє централізовано приймати і обробляти результати тестування, роздавати тести за допомогою комп'ютерної мережі, аналізувати результати тестування.

Головне вікно Журналу тестування містить шість вкладок: Результати, Монітор, Повідомлення, Лог, Роздати тест, Роздати список.

Вкладка Результати містить дві таблиці – таблицю з результатами тестування і (внизу) таблицю з результатами за завданнями для обраного запису. У цій таблиці з результатами тестування відображаються результати тестів, отримані мережею відкриті або імпортовані з файлу. Таблиця з результатами може містити досить велику кількість колонок, що дозволяє отримати детальну інформацію про проведене тестування.

Ви можете впорядкувати результати по стовпчиках. Для цього клацніть по його заголовку. Якщо при натисканні утримувати клавішу Alt, то сортування виконується в зворотному порядку.

Зібрані результати можна проаналізувати. Дайте команду Дії → Результати → Аналіз → Вибрати з усіх ... (або Вибрати з виділених ...).

Аналіз тестування за завданнями дозволяє отримати таблицю, стовпці якої відповідають номерам завдань у тесті, а верхні рядки таблиці кожному учню, що проходив цей тест, нижні рядки загальну статистичну інформацію за завданнями.

Аналіз тестування за групами дозволяє дізнатися результативність за кожною групою завдань тесту. Аналіз за оцінками показує Середній бал, Успішність, Якість знань тощо. Програма вирахує їх сама. Коефіцієнти для обчислення можна задати або змінити в налаштуваннях програми.

У вкладці *Монитор* виводиться інформація про процес тестування. Вчитель може бачити, які учні на яких комп'ютерах виконують тест (і який тест) і які поточні результати. На цій вкладці можна поставити мітку перервати тест (з повідомленням або без) або просто надіслати повідомлення учню (наприклад, про списування). Тест буде перерваний або буде показано повідомлення після відповіді на поточне завдання. Записи з *Монітору* можна перенести в *Результати*.

У вкладці *Сообщения* відображається інформація про початок або закінчення тестування учнями та повідомлення від учнів про можливі помилки у тесті.

Про налаштування журналу тестування можна детальніше ознайомитися на сайті:

http://mytest.klyaksa.net/wiki/%D0%98%D1%81%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%B7%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%B6%D1%83%D1%80%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B0_%D1%82%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%8F_%D0%B2_MyTestXPro.

Лабораторна робота № 8-9 (тренувальна)

Створення тестів із використанням програми *MyTest*

Мета: навчитися використовувати програму *MyTest* для організації автоматизованого контролю знань учнів.

Обладнання. Комп'ютер, ППЗ *MyTest*.

Теоретичні питання.

1. Тестовий контроль знань.
2. Види завдань, які можна реалізувати у програмі *MyTest*.
3. Налаштування програми *MyTest*.

Практичні завдання

1. Створити тест, що складається із завдань певного типу, з відповідної теми у програмі *MyTest*.

Номер завдання тесту	Тип завдання
1	Завдання з одиночним вибором відповіді.
2	Завдання з множинним вибором відповіді.
3	Завдання на встановлення порядку проходження.
4	Завдання на встановлення відповідності.
5	Завдання на визначення істинності чи хибності твердження.
6	Завдання на ручне введення числа у відповідь.
7	Завдання на ручне введення тексту у відповідь.
8	Завдання на вибір місця на зображенні.
9	Завдання на перестановку літер.
10	Завдання на заповнення пропусків.

В-т	Теми
1	Корінь n -го степеня. Арифметичний корінь n -го степеня, його властивості. Степенева функція, її властивості та графік. 10 клас.
2	Синус, косинус, тангенс, котангенс кута. Тригонометричні функції числового аргументу. Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу. Формули зведення. Періодичність функцій. 10 клас.
3	Поняття про обернену функцію. Обернені тригонометричні функції та їх графіки. 10 клас.
4	Степінь з дійсним показником. Властивості та графік показникової функції. 11 клас.
5	Логарифми та їх властивості. Властивості та графік логарифмічної функції. 11 клас.

5.4. Створення тестів на базі GoogleForm

GoogleForms – це хмарний інструмент, який може використовуватися вчителем для організації автоматизованого контролю. Серед переваг *GoogleForms* можна виділити: безкоштовність, відсутність потреби у програмному забезпеченні, автоматизоване опрацювання результатів тестування, простота створення, економія ресурсів на тиражуванні матеріалів, постійний доступ до тестів та результатів опитування в хмарі.

Алгоритм створення тесту у хмарному середовищі Google

1. Для того, щоб почати роботу з формами опитування, необхідно авторизуватися в Google (наприклад, через поштову скриньку).

2. На головній сторінці пошуковика *Google* у верхньому правому куті потрібно знайти піктограму з квадратами – Додатки *Google*. Потім

натисніть «Ще», після чого виберіть «Форми», а потім «Тестування».

3. Введіть назву форми та її короткий опис.

4. Введіть текст запитання. До запитання можна додати зображення, клацнувши на піктограмі біля нього. Виберіть тип запитання (рис. 5.19).

Типи запитань

Текст (рядок): запитання має коротку текстову відповідь, яку необхідно ввести самостійно. Зручно використовувати для ПІБ учня.

Текст (абзац): запитання має довгу текстову відповідь, що складається з кількох абзаців. Підійде для завдань з відкритою відповіддю.

Одиночний вибір: вибір однієї правильної відповіді з декількох.

Множинний вибір: вибір декількох правильних відповідей.

Прапорці: підходить для запитань з декількома правильними відповідями, які потрібно позначити галочкою.

Виберіть зі списку: вибір однієї правильної відповіді зі списку, який випадає.

Сітка: таблиця для вибору однієї правильної відповіді в кожному рядку. Підходить для завдань, де потрібно встановити відповідність.

Дата: запитання на знання точної дати – число, місяць, рік.

Час: запитання на знання точного часу – години, хвилини і секунди.

Шкала: виставлення оцінки за заданою шкалою, наприклад від 1 до 5.

За необхідності потрібно обрати «Обов'язкова відповідь». Таке запитання буде позначено червоною зірочкою. Будь-яка зміна у запитаннях моментально зберігається на хмарному сервісі.

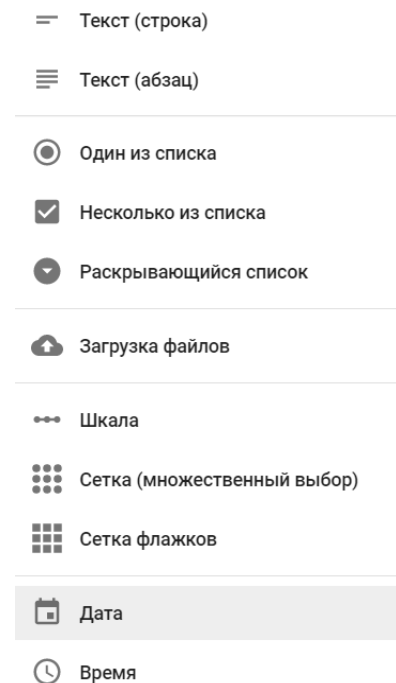


Рис. 5.19.

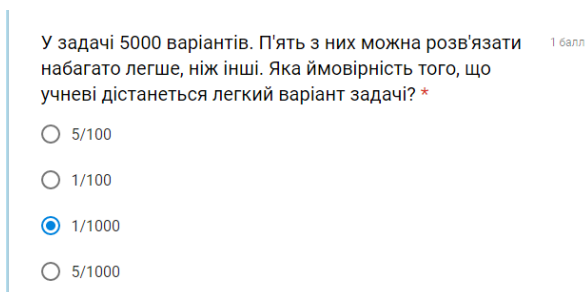


Рис. 5.20. Одиночний вибір

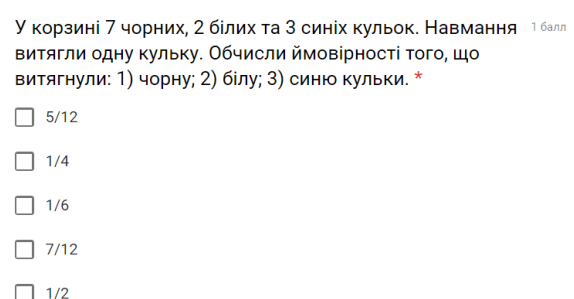


Рис. 5.21. Множинний вибір

Сергій забув першу цифру п'ятизначного кода свого мобільного телефона. Яка ймовірність того, що Сергій вгадає цю цифру? *

Мой ответ

Рис. 5.22. Текст (рядок)

У колоді 52 гральні карти. Навмання витягується одна карта. Скільки всього наслідків у даного експерименту? *

Вибрати

- 52
- 104
- 26
- 13

Рис. 5.23. Виберіть зі списку

Зберіть правильні твердження: *

	Неможлива подія	Достовірна подія	Випадкова подія
Подія, що обов'язково відбудеться за виконання певної сукупності умов.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Подія, що може відбутися, або не відбудеться - за виконання певної сукупності умов.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Подія, що ніколи не відбудеться, за виконання певної сукупності умов.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Рис. 5.24. Сітка (у кожному рядку одна правильна відповідь)

Зіставте подію зі значенням її ймовірності. *

	2/5	0	0,5	1	1/10	0,999	4/4
Ймовірність неможливої події	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ймовірність достовірної події	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ймовірність випадкової події	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Рис. 5.25. Сітка (у кожному рядку декілька правильних відповідей)

У Марійчиному пеналі лежать зелений, червоний, жовтий, блакитний, чорний, та сріблястий олівці. Її брат Сергійко витягнув один, Скільки сприятливих наслідків даного експерименту?

0 1 2 3 4 5 6 7

Рис. 5.26. Шкала

Придумайте власну задачу на знаходження ймовірності випадкової події.

[ДОБАВИТЬ ФАЙЛ](#)

Рис. 5.27. Завантаження файлу

4. Налаштування форми. У верхній частині форми є кілька налаштувань. Можна задати колірну гамму форми, клацнувши на піктограмі з палітрою. У розділі «Налаштування» можна:

- дати можливість змінювати відповіді після відправки форми;
- включити систему оцінювання відповідей;
- показувати індикатор проходження тесту (скільки запитань пройдено, скільки залишилося) внизу сторінки;
- дозволити проходити тест тільки один раз для кожного користувача;
- перемішувати запитання (якщо активувати цю функцію, то для кожного учня запитання в тесті будуть зображатися у випадковому порядку).

5. Коли форма заповнена, потрібно попередньо її переглянути.

6. Відправка форми. Це можна зробити декількома способами, натиснувши кнопку «Відправити»:

- відправити форму на електронну пошту, Фейсбук чи Твіттер;
- поділитися посиланням (створити короткий URL);
- поділитися HTML-кодом.

7. Аналіз результатів тестування. На сторінці створеного тесту є можливість швидкого перегляду статистики результатів – натисніть «Відповіді→Підсумок відповідей» у верхньому меню.

У таблиці з результатами тесту учнів автоматично відкриється лист з оцінками. При цьому стовпчики із запитаннями, на які було дано найменше правильних відповідей, будуть виділені кольором. Так Ви зможете визначити, що викликає в учнів найбільшу складність.

Діаграми та графіки дозволять побачити загальну картину, але не дадуть деталізації результатів по кожному учневі. Щоб отримати детальну інформацію у вигляді таблиці, натисніть “Переглянути відповіді у Таблицях”, і Google автоматично запропонує скористатися своїм сервісом Google Sheets (Таблиці). Відкриється таблиця з відповідями кожного учасника опитування. У правому нижньому куті таблиці пропонується «Аналіз даних», який дозволить побудувати діаграми за результатами тестування.

Лабораторна робота № 10 (тренувальна) Створення тестів на базі GoogleForm

Мета: навчитися використовувати хмарний сервіс *Google* для організації контролю знань учнів.

Обладнання. Комп’ютер, хмарний сервіс *Google*.

Теоретичні питання.

1. Тестовий контроль знань.
2. Типи завдань
3. Технологія створення тестів за допомогою *Google*.

Практичні завдання

1. Створити форму, що містить усі типи завдань, які представлені на відповідному сервісі *Google*.

Номер завдання тесту	Тип завдання
1	Завдання з одиночним вибором відповіді.
2	Завдання з множинним вибором відповіді.
3	Завдання на вибір із списку.
4	Завдання на встановлення відповідності.
5	Завдання на знання точної дати.
6	Завдання із використанням шкали.
7	Завдання на ручне введення тексту у відповідь.

2. Налаштувати форму.
3. Надіслати посилання на форму на e-mail всіх студентів групи.

4. Опрацювати результати тестування.

В-т	Теми
1	Тема «Елементи комбінаторики. Комбінаторні правила суми та добутку» (11 клас).
2	Тема «Випадкова подія. Відносна частота події» (11 клас).
3	Тема «Ймовірність події» (11 клас).
4	Тема «Операції над подіями. Аксиоми теорії ймовірностей та основні наслідки з них» (11 клас).
5	Тема «Незалежні події. Умовна ймовірність» (11 клас).

Лабораторна робота № 11 (залікова)

Організація комп'ютерного контролю знань

Мета: навчитися організовувати комп'ютерний контроль знань учнів, а саме комп'ютерне тестування із використанням програм динамічної математики.

Обладнання. Комп'ютер, ППЗ МК, *GeoGebra*, *MyTest*, *Google*.

Практичні завдання

Створити п'ять завдань контролю, використовуючи програми МК, *GeoGebra*, *MyTest* у різних комбінаціях, з відповідної теми. Описати критерії оцінювання для двох завдань.

В-т	Теми
1	Тема «Застосування похідної до дослідження функцій та побудови їх графіків». 11 клас.
2	Тема «Рівняння дотичної до графіка функції у заданій точці». 11 клас.
3	Тема «Визначений інтеграл, його геометричний зміст». 11 клас.
4	Тема «Формула Ньютона-Лейбніца. Обчислення площ плоских фігур». 11 клас.
5	Тема «Властивості та графіки тригонометричних функцій». 10 клас.

ТЕМА №6. СТВОРЕННЯ ІНТЕРАКТИВНИХ АПЛЕТІВ У ПРОГРАМАХ ДИНАМІЧНОЇ МАТЕМАТИКИ

6.1. Приклади створення інтерактивних аплетів у програмі *GeoGebra*

Аплети трактують як несамостійний компонент програмного забезпечення, який працює у межах іншого додатку і призначений для моделювання певної задачі. Прикладами аплетів є Java-додатки і Flash-фільми. Аплети, які стосуються математики, інколи називають матлетами,

фізики – фізлетами.

Технологія створення аплетів передбачена у програмі *GeoGebra*, де створення інтерактивного аплету можливе шляхом завантаження динамічного рисунка на ресурс geogebra.org через сайт ресурсу.

Для втілення цієї технології необхідно виконати наступні кроки.

1. Зареєструватися на сайті *geogebra.org* для отримання можливості використовувати функції завантаження інтерактивних аплетів в мережу Інтернет. Процес реєстрації (створення персонального кабінету) аналогічний до реєстрації на будь-яких інших інтернет-ресурсах.

1.1. Натиснути кнопку *Войти* на сайті *geogebra.org*.

1.2. Авторизуватися: можлива реєстрація за допомогою існуючих акаунтів *Google, Office 365, Microsoft, Facebook, Twitter* та реєстрація через процес *Создание профиля*. У разі наявності акаунтів соціальних мереж краще обирати перший варіант і авторизуватися, наприклад, через існуючий акаунт *Google*. Після авторизації необхідно заповнити форму і можна вільно користуватися ресурсом.

2. Для завантаження аплетів на сайт у розділі *Материалы* необхідно натиснути кнопку *+New*.

Пропонується два способи завантаження аплетів:

- з мережевого ресурсу (посилання на статтю, рисунок, відео чи урок);
- з комп'ютера (готовий файл у форматі програми *GeoGebra* – *.ggb).

Після виконання цих кроків файл завантажувється на сервер ресурсу *geogebra.org*.

Автор аплету має також можливість вносити корективи: надавати додаткову інформацію для учнів та вчителів, різного роду пояснення, змінювати видимість (доступність) файлів.

Інтеграція аплетів у сторінки формату *html* відбувається шляхом додавання коду з посиланням на аплет, який міститься на ресурсі *geogebra.org*. Після вибору аплету, який планується використовувати, необхідно обрати тип «HTML» у розділі *Материалы/Вставить* та скопіювати код до буфера обміну. Даний код можна вставляти в структуру електронного підручника, веб-сторінки чи системи *Moodle*.

Для більш повного розуміння ідеї використання аплетів у навчанні математики наведемо приклад.

Геометричні задачі на екстремум часто викликають труднощі навіть у дітей, рівень математичної освіти яких вище середнього. Такі задачі вважаються складними через дещо незвичний для типових вправ теми спосіб формулювання умови і пошук відповіді – потрібно визначитися із заданими величинами, побудувати функцію, яка пов'яже ці величини з шуканою, а потім ще дослідити цю функцію на наявність екстремуму. Такі дії часто не усвідомлюються пересічними учнями, оскільки додатково

вимагають уже сформованих геометричних понять та аналітичних умінь.

Конструктивні підходи до розв'язування таких задач, реалізовані у ПДМ, зменшують вагу аналітичних розрахунків і на перший план висувають потребу у вміннях змодельовати потрібну конструкцію, урахувати залежності між її параметрами, візуалізувати окремі позиції можливих результатів, навіть «побачити» шукану функцією, для якої потрібно визначити екстремум.

Приклад 6.1. Дві вершини прямокутника належать графіку функції $y = 12 - x^2$, $D(y) = [-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}]$, а дві інші – осі абсцис. Яку найбільшу площу може мати такий прямокутник?

Класичний спосіб розв'язування задачі полягає у використанні похідної до невідомої функції площі такого прямокутника.

Розв'язування цієї задачі у ПДМ реалізується через побудову динамічної конструкції та візуальне спостереження за значенням площі, яке буде динамічно змінюватися при переміщенні базової точки: оскільки прямокутник вписано у параболу, яка симетрична відносно осі Oy , то прямокутник також буде симетричним відносно цієї осі, тому взявши довільно на параболі точку, однозначно формується прямокутник, площу якого потрібно досліджувати.

Вчитель розміщує в мережі Інтернет (зокрема, на сайті *geogebra.org* або на власному сайті) відповідний аплет (рис.6.1), який можна знайти в мережі Інтернет за адресою <https://www.geogebra.org/m/ZSYwrk89>).



Рис.6.1.

Інший нетрадиційний метод розв'язування цієї задачі – метод, який базується на побудові емпіричного графіка залежності між довжиною сторони прямокутника та його площі з використанням інструменту

Динамічний слід.

Використання інструменту *Динамічний слід* передбачає побудову кривої, точкам якої притаманна певна властивість. Якщо задіяти цей інструмент, то під час динамічних змін вихідної конструкції обрана точка буде залишати слід, який і буде геометричним місцем точок з потрібною нам властивістю.

Такий слід може залишати додатково побудована точка E , абсциса якої відповідає абсцисі базової точки A вихідної конструкції, а ордината дорівнює значенню площі досліджуваного прямокутника. В параметрах точки E потрібно замовити послугу залишати слід. Учні змінюють положення точки A , що зумовлює зміну положення точки E .

Побудований слід точки E і буде емпіричним графіком функції площі прямокутника (рис.6.2), можна знайти в мережі Інтернет за адресою <https://www.geogebra.org/m/UppfhJ2w>.

Учні приходять до висновку, що максимум побудованої функції, а отже, і найбільше значення площі прямокутника дорівнює 32.

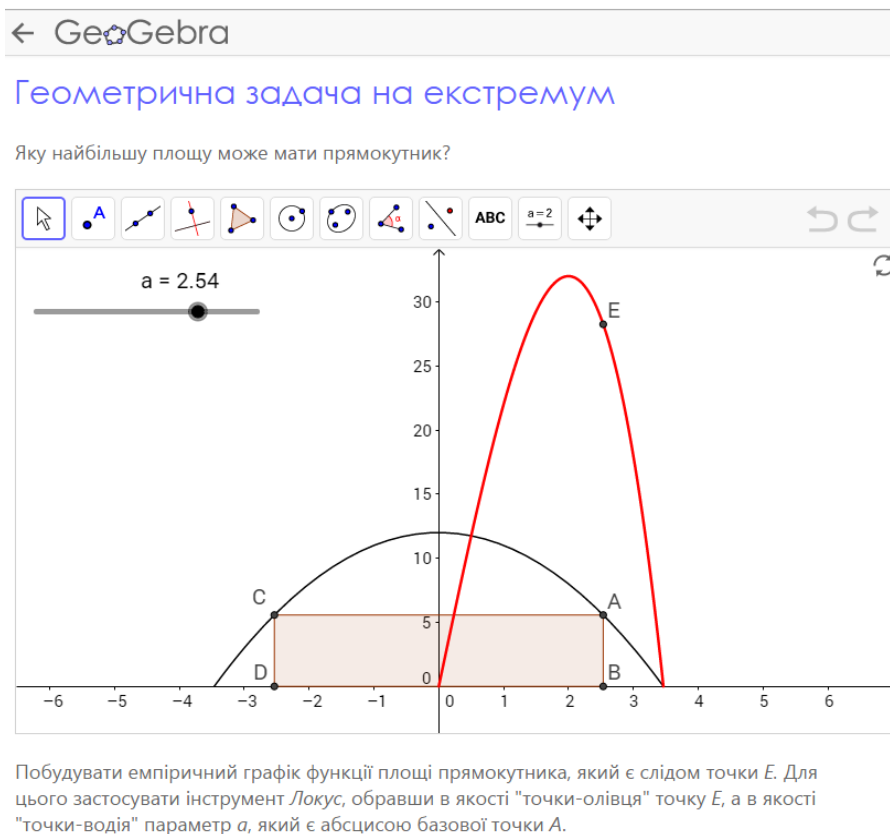


Рис.6.2.

Вчитель може запропонувати учням ще один нетрадиційний метод – метод, який базується на виведенні таблиці значень емпіричної функції та їх аналізі.

Після побудови основної конструкції створюється таблиця, до якої

заносяться значення абсциси базової точки, довжини сторін прямокутника та його площі. Під час зміни положення базової точки така таблиця заповнюється відповідними наборами значень. Аналіз цих значень дозволяє унаочнити функціональну залежність між довжинами сторін та площею прямокутника. Учні можуть побачити екстремальне значення площі і зробити висновок про відповідні йому довжини сторін прямокутника – найбільше значення площі прямокутника дорівнює 32 (рис.6.3, можна знайти в мережі Інтернет за адресою <https://www.geogebra.org/m/n3gBqnZk>).

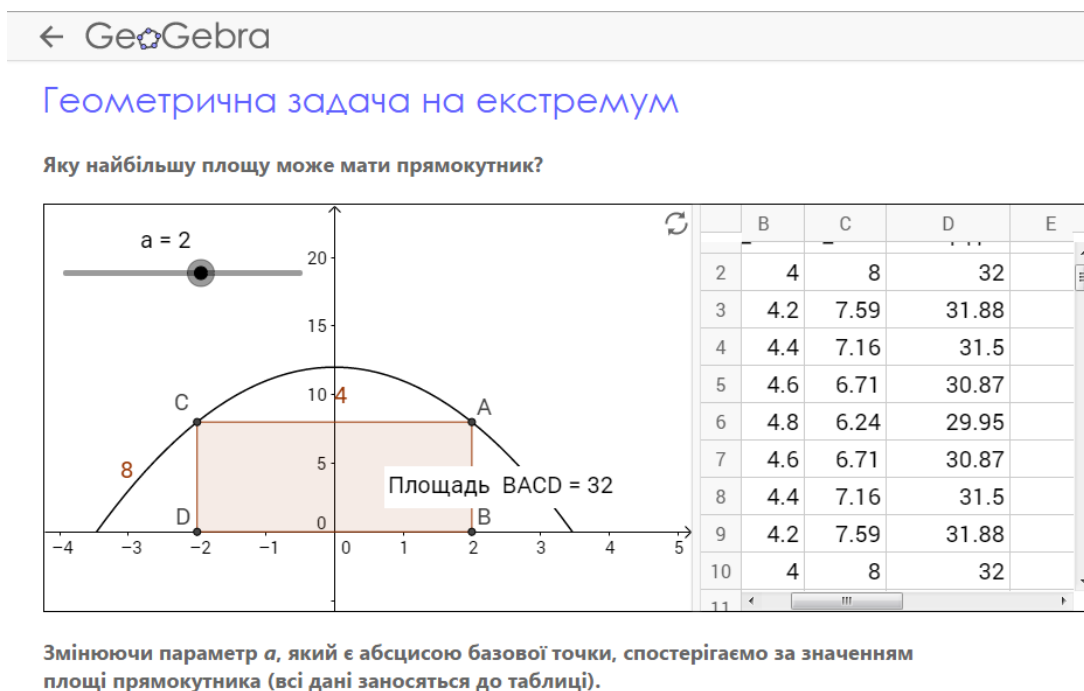


Рис.6.3.

Лабораторна робота №12 (тренувальна)

Створення інтерактивних аплетів у програмі динамічної математики *GeoGebra*

Мета: навчити створювати інтерактивні аплети та розміщувати власні дидактичні матеріали на хмарному сервісі *GeoGebra*.

Обладнання. Комп'ютер, ППЗ *GeoGebra*.

Практичні завдання

1. Створити власний аккаунт на хмарному сервісі *geogebra.org*. Ознайомитися із навчальними матеріалами, які призначені для підтримки вивчення алгебри та початків аналізу, розміщеними на сервісі.
2. Створити інтерактивний аплет для демонстрації властивостей функції та розмістити його на хмарному сервісі *GeoGebra*.

В-т	Функція
1	Степенева функція $y = x^n$, $n \in N$, n – парне.
2	Степенева функція $y = x^n$, $n \in N$, n – непарне.
3	Степенева функція $y = x^{-n}$, $n \in N$, n – парне.
4	Степенева функція $y = x^{-n}$, $n \in N$, n – непарне.
5	Степенева функція $y = \sqrt[n]{x}$, $n \in N$, n – парне.

ТЕМА №7. ВИКОРИСТАННЯ BYOD-ПІДХОДУ ПРИ ВИВЧЕННІ АЛГЕБРИ

7.1. Інтенсифікація освітнього процесу із використанням BYOD-підходу

Тенденції залучення приватних мобільних пристроїв (смартфонів, планшетів, нетбуків тощо) у освітній процес є наразі актуальними. Зокрема, виділимо активне впровадження *BYOD-підходу* (Bring Your Own Device, з англ. «використовуй свій власний пристрій»), що дозволяє залучити в освітній процес часто більш потужні мобільні пристрої з передбаченим у них 3G-зв'язком, а ніж ті, що пропонує навчальний заклад, а також використання хмарних сервісів предметного спрямування. Підготовка вчителя математики реалізовувати такі підходи у професійній діяльності наразі є актуальною педагогічною проблемою.

Вперше термін BYOD з'явився у роботі Рафаеля Баллагаса «BYOD: Bring Your Own Device» [1] і використовується з 2005 року. Вперше практику використання співробітниками компанії власних мобільних пристроїв в робочому процесі почали використовувати в сфері ІТ ще у 2009 році, коли в компанії Intel помітили зростаючу тенденцію серед працівників приносити на робочі місця свої власні ноутбуки, планшети та смартфони з метою їх використання для роботи в корпоративній мережі.

Згодом з масовим розповсюдженням смартфонів та планшетів, ця практика поступово перейшла і в інші сфери життя, зокрема в освіту, де власне поступово інтегрується в освітній процес. І хоча на початку вчителі доволі скептично ставилися до BYOD-підходу та надавали перевагу класичним формам навчання, останнім часом потенціал цього методу розкривається сповна. Адже учні все одно ходять в школу з гаджетами, граючи на них в ігри чи виходячи в соціальні мережі. Тому постає природне питання: чому б не використовувати гаджети в освітніх цілях? Планшети, ноутбуки, нетбуки, смартфони та будь-які інші мобільні пристрої можуть принести користь у навчанні, головне – правильно і раціонально їх використовувати.

Сенс BYOD-підходу в освіті полягає в тому, що вчителі та адміністрація шкіл не забороняє, а навпаки дозволяє учням користуватися

своїми мобільними пристроями на уроці і всіляко мотивують їх у цьому

Останнім часом з'являються роботи, пов'язані з впровадженням BYOD-підходу в межах мобільного навчання. За аналізом наукових досліджень нами встановлено, що пропонуються шляхи вирішення фізіологічних, соціальних, педагогічних, технічних проблем, які можуть виникати за умов використання підходу BYOD (М. А. Зільберман [34], Т. В. Алексєєва [15]), описані переваги й недоліки використання моделі BYOD у освітньому процесі (Є. Л. Тележинська і О. Б. Дударєва [69]), досвід використання сервісів presentain.com, preso.tv для трансляції презентацій і лекцій на мобільні пристрої студентів (А. Г. Дубинський [23]), доцільність використання хмарних дисків MS OneDrive для перегляду вмісту файлів як веб-сторінки, чату Messenger, Skype, які інтегровані в середовище MS OneDrive (авторський колектив на чолі з П. Г. Матухінім [43]), досвід використання власних мобільних пристроїв учнів початкової школи під час контролю знань за допомогою сервісу Plickers як мобільного додатку для зчитування QR-кодів з карток учнів (Н. В. Долматова [23]), технології опитування студентів коледжу з використанням сервісу Plickers (Р. І. Остапенко [48]).

Технологія BYOD дає можливість учням та викладачам працювати в режимі онлайн. Для учнів це можливість у короткі терміни опрацювати поданий навчальний матеріал, знайомитись з додатковим навчальним контентом, розміщеним у мережі, в цікавій формі проводити опитування, тестування, зберігати цікаву та корисну інформацію в закладках тощо. Для вчителя використання даної технології також має низку переваг, а саме: здійснення процесу навчання в цікавій та захоплюючій формі, можливість подавати учням додаткову інформацію поза межами уроку, вивільняючи час на інші види діяльності – розв'язування задач чи обговорення проблемних питань, швидко проводити оцінювання рівня навчальних досягнень учнів та можливість опрацювати отримані результати за допомогою сучасних технічних засобів та програм, відстежувати виконання завдань по кожному учневі тощо.

Вчитель у своїй роботі має можливість використовувати такі сервіси як Google Classroom, LearnBoost, Socrative, Google Drive, завдяки яким можна з легкістю організувати та контролювати навчальний процес, а також інтегрувати додаткові аудіо, відео та інші візуальні матеріали, які допоможуть полегшити сприйняття теми. Навіть звичайна фотокамера на смартфоні може якісно доповнити виконання завдань. А робота онлайн дозволить швидко отримувати оброблені результати, проходити опитування, не витрачати час на роботу з методичними матеріалами та створювати свою базу потрібних закладок.

Завдяки BYOD можна не лише зробити цікавішим процес навчання,

але й пришвидшити його. Адже не доведеться використовувати додатковий час на прості дії, наприклад, на занесення завдань у щоденник або на копіювання графіків чи цитат. Час, який вивільняється, можна використати для дискусії або консультації.

Важливим аспектом впровадження BYOD-підходу є використання електронних підручників. І ми маємо на увазі не просто оцифровані друковані підручники, а електронні підручники з інтерактивними елементами, наприклад відео, додаткові матеріали, посилання інтерактивні та 3D-моделі.

Безперечно в ході впровадження BYOD-підходу виникає питання про коректність поведінки учнів зі своїми девайсами. Це питання майстерності вчителя зацікавити дитину своїм предметом, щоб в учня не виникала потреба грати в ігри чи переписуватись з друзями в месенджерах під час уроку. Щоб утримати увагу учнів, потрібно чітко продумати, які програми краще вибрати для спільної роботи в класі.

У своїх дослідженнях М. А. Зільберман пропонує шляхи розв'язання деяких проблем використання BYOD-підходу в навчанні [35].

Таблиця 7.1

Проблеми використання BYOD-підходу в навчанні та шляхи їх вирішення

Можлива проблема	Шляхи вирішення
Відсутність відповідного мобільного пристрою.	Організувати роботу в малих групах, у парах; ознайомити батьків з освітніми можливостями мобільних пристроїв.
Доступ до Інтернету.	Використання шкільного Wi-Fi, мобільного 3G Інтернету.
Заборонений контент.	Використання функції чи програми «Батьківський контроль».
Обмін інформацією між мобільними пристроями та ПК.	Використання Google+, електронної пошти, соціальних мереж, Bluetooth, картридерів тощо.
Розрядження пристроїв.	Одночасне зарядження пристроїв. Оснащення класу подовжувачем та універсальними зарядними пристроями або Power Bank.
Можливість для учнів під час навчання грати в ігри.	Продумувати завдання та роботу таким чином, щоб в учнів не було часу на розваги.
Шкідливий вплив на зір.	Продумувати та організувати роботу з пристроями так, щоб за тривалістю вона не перебільшувала 10-15 хв.; проводити фізкультхвилинки.

За доволі малий проміжок часу практика використання BYOD-підходу дозволила виділити деякі переваги і недоліки пов'язані з ним.

До *переваг* слід віднести:

- зменшення витрат та мобільність;
- можливість працювати на уроках, використовуючи смартфони замість комп'ютерів;
- можливість працювати поза межами класу;
- пристрій завжди з собою, тому є можливість фіксувати будь-які моменти;
- можливість виконувати завдання та навчатися будь-де в індивідуальному режимі.

До *недоліків* слід віднести сумісність – різні пристрої, що працюють на різних операційних системах повинні мати ряд спільних функцій та додатків.

Нижче опишемо використання QR-кодів в умовах BYOD-підходу.



Абревіатура QR (quick response) в перекладі з англійської означає «швидкий відгук». Це двомірний штрих-код (матричний код), який розробила японська компанія «Denso Wave» в 1994 році [49]. Він дозволяє в одному невеликому квадраті помістити 2953 байти інформації, тобто 7089 цифр або 4296 букв (близько 1-2 сторінок тексту в форматі А4). QR-код дозволяє швидко кодувати й зчитувати (декодувати) тексти, URL різних сайтів, активні посилання для завантаження інформації, рекламу тощо.

Зчитування QR-коду відбувається за допомогою звичайної камери типового смартфона. Для цього на смартфоні має бути попередньо встановлена відповідна програма-сканер. QR-коди включають три квадрати, що призначені для орієнтації та визначення меж всього закодованого зображення, та окремі пікселі, які розташовані в області між цими квадратами і які несуть закодований зміст.

У сучасному світі переважна більшість дітей має мобільний телефон, на який можна встановити програму для зчитування QR-кодів. Вчитель, у свою чергу, здатен створити QR-код, закодувавши в ньому певну інформацію або посилання на сайт з корисним повідомленням для дітей. Використання QR-кодів дозволить урізноманітнити навчальний процес.

У таблицях 7.2 та 7.3 описано основні характеристики найпоширеніших програм для кодування та декодування інформації.

Огляд програмного забезпечення для створення QR-кодів

Назва програми Характеристика	QR Code Generator 	Qrcodes 	Генератор QR-кода	QR Coder	QR Mania
Розробник	Ніл Дрешер, Нілс Енгелькінг	-	-	-	Сергій Лимарь
Сайт програми	http://ua.qr-code-generator.com	http://qrcodes.com.ua	http://www.qr-code.com.ua	http://qrcoder.ru	https://qrmania.ru
Мова інтерфейсу	Англійська	Російська	Російська	Російська	Російська
Ліцензія	€ 12,50/ місяць Демо – 14 діб	-	-	-	-
Реєстрація у програмі	+	+	-	-	-
Тип інформації для кодування	<i>Статистичі:</i> текст, візитна картка, веб-адреса, email, SMS. <i>Динамічні:</i> зображення, додаток, PDF, відео, зворотній зв'язок, соціальні медіа, купони та знижки, події, MP3.	Текст, візитна картка, веб-адреса, email, SMS, GPS-координати	Текст, контактна інформація, email, календар (події), геолокація, веб-адреса, SMS, номер телефону, Wi-Fi.	Текст, веб-адреса, візитна картка, SMS	Текст, веб-адреса, візитна картка, SMS, номер телефону, email адреса, email повідомлення, SMS, Twitter, Wi-Fi.
Дизайн коду	Кольоровий (можливість корегувати кольори окремих елементів коду) QR-код зі своїм логотипом, корегування форми кутів	Кольоровий, змінюється розмір та кут оберт	Чорно-білий, змінюється розмір, корекція помилок та три типи кодування (UTF-8, ISO-8859-1)	Чорно-білий, змінюється лише розмір	Кольоровий, можна створювати прозорий фон, є округлення кутів та корекція помилок
Формат вихідного файлу	*.jpg, *.eps, *.svg, *.png	*.png	*.png	*.gif	*.png, *.svg

Завдяки простоті програм QR-кодерів, кожен вчитель та учень може створювати їх самостійно та абсолютно безкоштовно. Для створення знадобиться лише Інтернет та навчальний матеріал, який необхідно закодувати. Для цього у вікно QR-генератора вводять дані, у деяких з QR-кодерів можна обирати власні налаштування дизайну. Коди можна зберігати у вигляді графічного зображення, а потім занести до потрібного файлу або роздрукувати.

Огляд програмного забезпечення для зчитування QR-кодів

Назва програми Характеристика	<i>Bakodo</i>	<i>bcTester</i>	<i>QR Droid</i>	<i>I-Nigma</i>
Розробник	Dedoware	QS QualitySoft GmbH	DroidLa	3GVision
Сайт програми	http://bakodo.do	http://www.bctester.de	https://qr-droid.ru.uptodown.com/android	http://www.i-nigma.com
ОС	iPhone iOS 8.1 і вище	Windows XP, Windows Vista, Windows 7, Windows 8	Android 3.0 і вище	Phone, Android, Windows 10 + Mobile Windows, Phone 8, BlackBerry, Windows Mobile
Формат розпізнавання	Штрих-коди та QR-коди	Зчитувати штрих-кодів та QR-кодів у файлах зображень або в документах Adobe PDF	Штрих-коди, 1D, QR-коди	EAN, UPC, JAN, QR-коди, Микро-QR, Матриця даних,

Перейдемо до опису можливостей використання QR-кодів на уроках алгебри та початків аналізу. При цьому зазначимо, що в Україні починають з'являтися підручники з посиланням QR-коди [16, 46].

1. Розміщення у підручниках з математики довідкового матеріалу, відомостей про вчених-математиків, підказок до вивчення теми, візуалізації умов деяких задач та геометричних об'єктів, завдань для самоперевірки, будь-якої додаткової інформації. Як приклад, наведемо фрагмент підручника з алгебри для 9 класу авторів Г. П. Бевз В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова (2017), в якому за допомогою QR-коду візуалізовано процес знаходження перерізу двох числових множин двома способами (рис.7.1).

➔ **Перерізом двох числових проміжків називають їх спільну частину.**

Наприклад, перерізом проміжків $(-\infty; 4)$ і $(-3; \infty)$ є проміжок $(-3; 4)$.

Переріз двох множин позначають знаком \cap . Тому пишуть:

$$(-\infty; 4) \cap (-3; \infty) = (-3; 4).$$

Наочно цю рівність ілюструє малюнок 24.

Інші приклади.

Малюнкам 25–27 відповідають рівності:

$$(-3; 5) \cap (-2; 4) = (-2; 4);$$

$$[-3; 5] \cap (-4; -3] = \{-3\};$$

$$(-3; 5) \cap (-5; -4) = \emptyset.$$



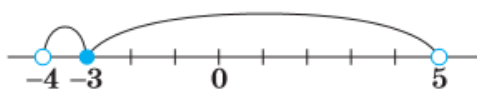
Переріз проміжків*



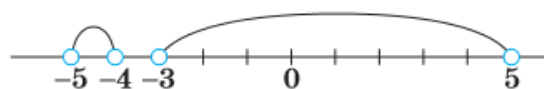
Мал. 24



Мал. 25



Мал. 26



Мал. 27

Друга рівність стверджує, що числові проміжки $[-3; 5]$ і $(-4; -3]$ мають тільки одне спільне число -3 .

Знаком \emptyset позначають *порожню множину*. Остання рівність стверджує, що числові проміжки $(-3; 5)$ і $(-5; -4)$ не мають спільних чисел.

Рис.7.1.

2. Завдання для самостійної або контрольної роботи. На кожному аркуші з контрольним завданням можна розмістити надрукований QR-код з підказкою, алгоритмом розв'язання задачі або додаткове завдання для учнів з високим рівнем успішності. Організувати таку роботу можна із використанням сервісу ClassTools (<http://www.classtools.net/QR>) та мобільного додатку Plickers (<https://www.plickers.com>), які дозволяють створювати контрольні-тестові завдання у QR-вигляді.

3. При проведенні навчальних ігор, квестів, вікторин із завданнями з QR-кодом. Наведемо приклад завдання для квесту з алгебри.

Завдання квесту. Розв'язати анаграми і знайти зайве слово:

КВАРОТЕ, ОІКНРЬ, ТПЬСЕНІ, ЛТЦСІЕЬ.



Відповідь. Квадрат, Корінь, Степінь, Стілець (зайве слово).

4. У домашньому завданні. Вчитель може вклеїти в зошит (щоденник) QR-код або роздати карточки з цим кодом, у якому будуть

зашифровані вправи, які учні повинні будуть виконати вдома. Можна буде підібрати вправи відповідно до рівня знань учнів, зробивши QR-коди різних кольорів (зелений – достатній рівень складності, помаранчевий – середній, червоний – високий).

Розв'язати рівняння

$$x-56=41$$

$$392-x=22$$

$$37x-23x-8x=72$$



Завдання. Периметр квадрата 32 см. Чому дорівнює його площа?

Підказка. У квадрата всі сторони рівні. Площа дорівнює добутку довжин його сторін. Успіхів!



5. Доповнення до реального об'єкту. Наприклад, на стендах в кабінеті математики. На стенді розміщується фото вченого та код із зашифрованою його біографією, теоремами вченого, які вивчаються в шкільному курсі математики, чи відео про нього.

Михаїл Кравчук – відомий на весь світ український математик (відео).



6. Аудіо та відео версія теоретичного матеріалу. За типом сприймання та запам'ятовування діти поділяються на візуалів та аудіалів, тому для останніх при засвоєнні та запам'ятовуванні теоретичного матеріалу буде більш дієвим, аудіо формат навчального матеріалу (сприймання на слух). На полях підручника може розміщуватись QR-код з посиланням на аудіо ресурс.

Навчальний посібник «Математика з інтерактивними відеоуроками. 5 клас», автор О.С. Істер. Посилання на відеоурок з теми «Об'єм прямокутного паралелепіпеда і куба» http://www.e-litera.com.ua/Grade/5/Subject/Mathematica/Math_Ister/26/26.html.



7. Інформаційна дошка для повторення навчального матеріалу. Наприклад, вчитель може повісити на двері в клас QR-код з матеріалом для повторення під час перерви перед контрольною роботою.

Посилання на сторінку Вікіпедії з теоретичним матеріалом за темою «Корінь n -го степеня».



QR-коди можна використовувати на різних етапах уроку: від постановки цілей до домашнього завдання. За допомогою QR-кодів можна задавати алгоритми роботи та покрокові інструкції. У вигляді QR-кодів у підручниках можна розміщувати додаткові матеріали для вчителя та методичний супровід.

Слід зауважити, що процес створення та впровадження навчальних матеріалів, які містять у собі закодовану інформацію досить трудомісткий і включає такі етапи:

- розробка методичних основ;
- підбір електронного контенту;
- якісна інтеграція відкритого та закодованого контенту.

Важливо, щоб навчальні матеріали з математики були структуровані належним чином, містили всі необхідні матеріали для засвоєння запропонованої теми, гармонічно доповнювались закодованою інформацією у вигляді візуального контенту та оберненого зв'язку. Зауважимо, що впровадження QR-кодів у освітній процес повинно базуватися на виваженій методичній ідеї, бути доречним, а головним критерієм ефективності застосування QR-коду є те, наскільки усвідомлений буде досвід взаємодії учнів з додатком і наскільки активно учні будуть задіяні у процес осмислення одержаних результатів.

Лабораторна робота № 13 (тренувальна)

Використання QR-кодів при вивченні алгебри та початків аналізу

Мета: навчитися використовувати програми для створення та зчитування QR-кодів, розглянути різні шляхи використання QR-кодів при вивченні шкільного курсу алгебри та початків аналізу.

Обладнання. Комп'ютер, програми для створення та зчитування QR-кодів.

Практичні завдання

1. Завантажити з Інтернету програми для створення та зчитування QR-кодів, які якнайкраще підходять для виконання відповідного завдання.
2. Розглянути та реалізувати різні шляхи використання QR-кодів при вивченні шкільного курсу алгебри та початків аналізу.

В-т	Завдання
1	В курсі алгебри та початків аналізу 11 класу учні знайомляться з теоремами Больцано-Коші. Підготувати макети стендів для кабінету математики, які містять портрети вчених, біографічні відомості про них

	та формулювання першої та другої теорем Больцано-Коші. Текстову інформацію зашифрувати QR-кодом.
2	Розробити картку для проведення контрольної роботи з теми «Показникові рівняння» (10 клас). На аркуші з контрольним завданням розмістити QR-код з підказкою до першого завдання, прикладом розв'язання завдання аналогічного до другого завдання, додаткове завдання для учнів з високим рівнем успішності. Зробивши QR-коди різних кольорів для різних завдань.
3	Розробити контрольньо-тестовий матеріал у QR-вигляді з теми «Логарифмічна функція та її властивості» (11 клас), використовуючи спеціальний сервіс ClassTools (http://www.classtools.net/QR).
4	Розробити квест з алгебри із завданнями з QR-кодом до тижня математики для 10 класу.
5	Розробити картку для проведення контрольної роботи з теми «Логарифмічні нерівності» (11 клас). На аркуші з контрольним завданням розмістити QR-код з підказкою до першого завдання, прикладом розв'язання завдання аналогічного до другого завдання, додаткове завдання для учнів з високим рівнем успішності. Зробивши QR-коди різних кольорів для різних завдань.

7.3. Використання мобільного додатку Plickers при вивченні алгебри та початків аналізу

Організація контролю знань із використанням мобільного додатку Plickers потребує: мобільного додатку Plickers, роздрукованих карток з відповідями у вигляді QR-кодів, сайту Plickers. Важливо, що організація контролю в такий спосіб не потребує наявності мобільних телефонів у самих учнів.

Алгоритм роботи із додатком Plickers

1. Щоб почати користуватися додатком, потрібно зареєструватися на сайті <http://plickers.com>.

2. Потім на сторінці Library, обравши послугу New Set, потрібно ввести назву тесту та запитання тесту. Для кожного запитання потрібно ввести текст (до нього можна додати картинку) і варіанти відповідей, вказавши правильну (рис.7.2).

3. Створити клас (+New Class), додати список учнів, відсортувати його за алфавітом (рис.7.3).

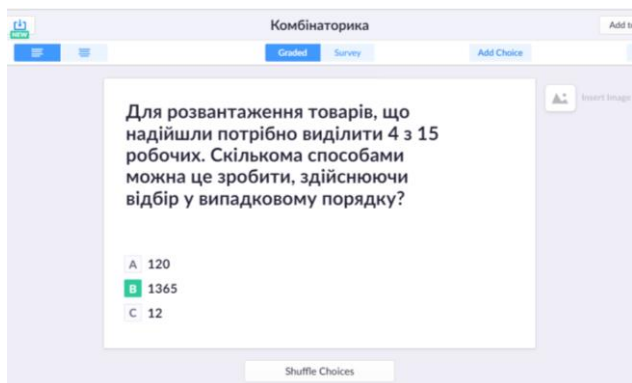


Рис.7.2.

10-A
Students

+ Quick Add Student Add Students Class Roster ...

FIRST NAME	LAST NAME	CARD NO
Диченю	Віра	1
Засць	Вікторія	2
Захарченко	Тетяна	3
Кирноз	Каріна	4
Кривко	Антоніна	5
Лесик	Антон	6
Реза	Тетяна	7
Тарасюк	Олена	8
Чунту	Світлана	9

Рис.7.3.

4. До кожного класу прикріпити відповідні тести, тобто додати тести у так звану чергу (Add to Queue). Черга – це послідовність запитань, які потрібно задати зазначеному класу на найближчому уроці. Після того як запитання вже задане, то воно видаляється з черги. Кожного разу необхідно поновлювати чергу потрібних запитань.

5. Роздрукувати картки. Макети карток доступні для скачування на офіційному сайті у розділі Help/ Get Plickers Cards. Пропонується 5 різних наборів карток, кожна картка унікальна і має свій власний номер, який відповідає номеру учня у списку класу. Тому опитування можна зробити персоналізованим і відстежувати його успіхи. Доступні такі види наборів:

Standard – на одному аркуші A4 розміщено 2 картки, всього 40 різних карток;

Expanded – на одному аркуші A4 розміщено 2 картки, всього 63 різних карток;

Large Font – варіанти відповідей написані великими літерами;

Large Cards – на одному аркуші A4 розміщено 1 картку, всього 40 різних карток;

Large Card Expanded – на одному аркуші A4 розміщено 1 картку, всього 63 різних карток.

Кожній стороні картки відповідає окремий варіант відповіді – А, В, С, D (рис.7.4). Картки можуть використовуватися при кожному тестуванні, тому варто роздруковувати їх на цупкому папері.

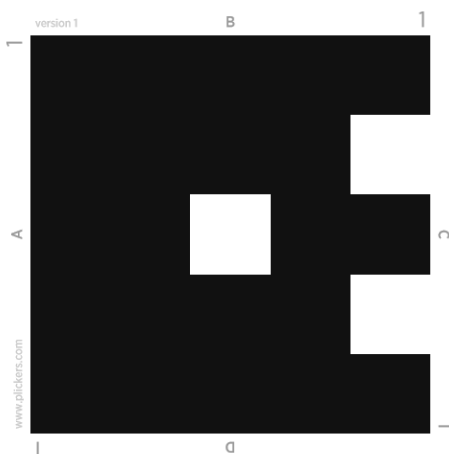


Рис.7.4.

6. Завантажити на мобільний телефон вчителя додаток Plickers. Вчителю потрібно зайти на власну сторінку і обрати клас та тест.

7. Для того, щоб розпочати тестування, потрібно на комп'ютері на сайті зайти у режим Now Playing.

8. Учитель задає запитання (паралельно питання висвічується на екрані та у мобільному телефоні вчителя), його можна обрати з мобільного телефону, тобто вчитель не повинен весь час знаходитися біля комп'ютера, все управління ведеться з телефону.

Учні, обравши відповідь, піднімають картки відповідними сторонами догори. За допомогою мобільного додатку вчитель сканує відповіді учнів у режимі реального часу і результати зберігаються у базі даних. Учень може змінити свою відповідь, зараховуватиметься тільки та, яка була у момент сканування.

Результати доступні як у мобільному додатку, так і на сайті (на екрані) для миттєвого оголошення і опрацювання (Scoresheet) (рис.7.5).

Вчитель може також роздрукувати результати тестування як для всього класу (Reports) (рис.7.6), так і для кожного окремого учня для проведення роботи над помилками (Students Reports або попередньо натиснувши на прізвищі учня) (рис.7.7). Таблицю з результатами можна експортувати у файл MS Exel (Export Data to CSV).

Комбінаторика 15 min ago • 85%						
Name ^	Total	Комбінація, що складається з	Якщо деякий елемент A з певної	Чи правда, що розміщеннями	Скільки різних двозначних	Чи правда що: формула перестановки
Class Average	• 85%	75%	100%	100%	50%	100%
Влад	• 80%	B	B	A	C	B
Віка	• 100%	A	B	A	C	B
Катя	-	-	-	-	-	-
Сергій	-	-	-	-	-	-
Ярослав	• 80%	A	B	A	B	B
Ігорь	• 80%	A	B	A	A	B

Рис.7.5.

10-A

Played Wednesday 20 November 8:22 AM

STUDENT OVERVIEW

A-Z HIGH-LOW							
Кирноз	80%	Медведєв	60%	Гаррибас	Abs.	Сікорський	Abs.
Рева	80%	Цюх	60%	Диченко	Abs.	Тарасюк	Abs.
Шумейко	80%	Джуманазаров	40%	Колот	Abs.	Трофімов	Abs.
Щепотін	80%	Ішмурадова	20%	Криво	Abs.	Червяков	Abs.
Яценко	80%	Какаджанов	0%	Курбаназаров	Abs.	Чунту	Abs.
Захарченко	60%	Менлісва	0%	Мухамметніязов	Abs.	Шимко	Abs.
Засць	60%	Нуррідінов	0%	Ніцета	Abs.		
Лесик	60%	Банганов	Abs.	Савельєва	Abs.		

Рис.7.6.

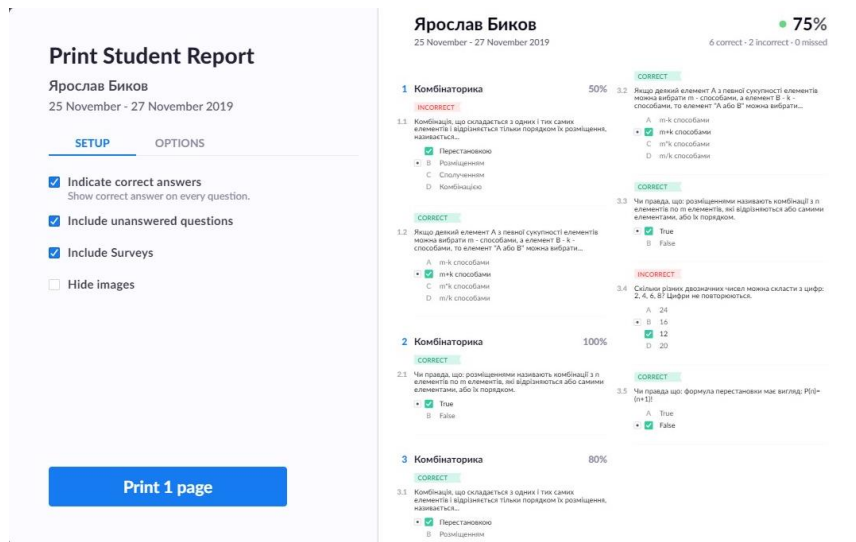


Рис.7.7.

Серед недоліків програми Plickers саме з позицій використання на уроках математики можна виділити:

- неможливість вставки формул у текст запитання чи відповідей (лише у вигляді рисунків у текст запитання);
- лише два типи запитань – одиночний вибір (максимум варіантів відповідей 4) та встановлення істинності чи хибності твердження;
- один тест може містити максимум п'ять запитань, отже, вчителю потрібно буде створити декілька тестів і провести їх один за одним. При цьому результати надаються як для окремого тесту, так і для проведеної серії тестів.

Основними шляхами використання програми Plickers на уроках є фронтальне опитування наприкінці чи на початку уроку, проведення тестування, самостійних робіт.

Лабораторна робота № 14-15 (тренувальна)
Організація контролю із використанням платформи
та мобільного додатку Plickers

Мета: навчитися використовувати платформу та мобільний додаток Plickers для організації контролю знань учнів.

Обладнання. Комп'ютер, Інтернет, платформа та мобільний додаток Plickers.

Теоретичні питання.

1. Тестовий контроль знань.
2. Налаштування платформи та мобільного додатку Plickers.

Практичні завдання

Для студентів своєї групи, які виступають у ролі учнів, провести опитування із використанням мобільного додатку Plickers.

В-т	Завдання
1	Опитування наприкінці уроку «Синус, косинус, тангенс кута. Радіанне вимірювання кутів» (10 клас).
2	Опитування на початку уроку «Найбільше і найменше значення функції на проміжку» (10 клас).
3	Тест за результатами вивчення теми «Елементи комбінаторики. Комбінаторні правила суми та добутку» (11 клас).
4	Опитування наприкінці уроку «Властивості та графік логарифмічної функції» (11 клас).
5	Опитування на початку уроку «Обчислення площ плоских фігур. Застосування інтеграла до розв'язування прикладних задач» (11 клас).

7.4. Створення відео на базі інтерактивних моделей за допомогою програми CamStudio

В процесі створення QR-кодів для шифрування навчального відео можна використовувати одну з можливих програм для запису екранної та звукової активності і створення стандартних відеофайлів AVI – програму *CamStudio* (рис.7.7). Її головною перевагою серед програм такого типу є безкоштовність та простота у користуванні.



Рис.7.7.

Алгоритм роботи з програмою CamStudio

1. У вкладці *Region* (Область) виставити розмір екрану. Зазвичай обирають *Full Screen* (Повний екран) – повнометражну зйомку, при якій відбувається захоплення всього екрану. Але іноді потрібно зробити файл відео меншого обсягу, тоді застосовують зйомку *Region* (Довільний вибір), при якому знімається тільки область, виділена мишкою.
2. У вікні налаштувань *Options* (Опції) потрібно вибрати потрібні опції зйомки. Дана опція містить наступні команди:

- опції відео – налаштування відео, зокрема, якість тощо;
- опції курсора – захвати/показати курсор, встановити підсвічування;
- запис без звуку;
- запис аудіо з мікрофона;
- опції аудіо: определение устройства аудио захвата, установки для микрофона;
- захват екрану за курсором;
- швидкість перевіщення за курсором;
- опції програми: тривалість запису, директорія для тимчасового збереження відео тощо;
- опції запису в SWF – налаштування захвату екрана у форматі Flash;
- мова.

3. Для того, щоб почати запис з екрана монітора, потрібно натиснути кнопку *Record* (червоний кружечок). При цьому можна проводити будь-які операції на комп'ютері. Якщо необхідно призупинити запис, потрібно натиснути *Pause*. Після закінчення запису потрібно натиснути *Stop*, при цьому з'явиться вікно, в якому потрібно вибрати папку для збереження файлу.

4. У вкладці *Інструменти* можна додавати різні графічні об'єкти на екран, відео анотації, організувати конвертацію з *.avi формату у *.swf.

5. У вкладці *Ефекти* до відео можна додати надпис, водяний знак, лічильник часу, а також налаштувати дані ефекти.

Лабораторна робота № 16 (тренувальна)

Створення навчального відео за допомогою програми *CamStudio*

Мета: навчитися використовувати програму *CamStudio* для створення відео при вивченні шкільного курсу алгебри.

Обладнання. Комп'ютер, програми для створення та зчитування QR-кодів, *CamStudio*.

Практичні завдання

1. Створити відео на базі інтерактивного аплету до відповідного варіанта лабораторної роботи №13.
2. Закодувати створене відео у QR-код.

Лабораторна робота № 17 (залікова)

Використання QR-кодів при вивченні алгебри та початків аналізу

Мета: навчитися використовувати програми для створення та зчитування QR-кодів, платформу та мобільний додаток *Plickers*, програму *CamStudio* при вивченні алгебри і початків аналізу.

Обладнання. Комп'ютер, Інтернет, програми для створення та зчитування QR-кодів, платформа та мобільний додаток *Plickers*, програма

CamStudio.

Практичні завдання

Розробити фрагмент робочого зошита для учнів з відповідної теми із використанням QR-кодів (різні форми використання).

Рекомендація:

– ознайомитися з прикладами використання QR-кодів у підручнику з інформатики для 9 класу авторів Н. В. Морзе, О. В. Барна, В. П. Вембер, який можна завантажити з сайту Міністерства освіти і науки України за посиланням

<https://drive.google.com/file/d/0B3m2TqBM0APKb2ISQ1ZBRUp3UXM/view> [46];

– ознайомитися з матеріалом підручника «Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл. : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти» (автори А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін., 2019) з тем «Комплексні числа» та «Многочлени». Підручник можна завантажити за посиланням <http://shkola.in.ua/1078-algebra-11-klas-merzliak-2019-pohlyblene.html>.

В-т	Завдання
1	Тема «Властивості та графік логарифмічної функції» (11 клас).
2	Тема «Найбільше і найменше значення функції на проміжку» (10 клас).
3	Тема «Обчислення площ плоских фігур. Застосування інтеграла до розв'язування прикладних задач» (11 клас).
4	Тема «Синус, косинус, тангенс кута. Радіанне вимірювання кутів» (10 клас).
5	Тема «Елементи комбінаторики. Комбінаторні правила суми та добутку» (11 клас).

Лабораторна робота №18-19 (залікова).

Урок математики з комп'ютерною підтримкою

Обладнання. Комп'ютер, програми *Gran1*, *ЖГ*, *МК*, *GeoGebra*, *MyTest*, програми для створення та зчитування QR-кодів, платформу та мобільний додаток *Plickers*, програму *CamStudio*.

Теоретичні питання.

1. Урок математики, його структура.
2. Плани і конспекти уроків.
3. Можливість використання комп'ютера на уроках математики.

Методичні рекомендації щодо проведення уроків з комп'ютерною підтримкою

1. Необхідно розробити детальний план уроку, сформулювати

питання, завдання, роздатковий матеріал до комп'ютерних демонстрацій, моделей, наприклад, бланки, куди учні будуть вносити відповіді та результати роботи.

2. Спочатку бажано використовувати програми динамічної математики в демонстраційному варіанті.

3. Основну частину уроку необхідно відводити на самостійну роботу учнів за комп'ютером. Учні можуть працювати індивідуально, у парах або почергово.

4. Передбачити для учнів, які швидше справилися із основними завданнями, можливість розв'язування творчих завдань на основі ПДМ з організацією комп'ютерних експериментів.

5. Комп'ютерні уроки без підведення підсумків менш ефективні, тому наприкінці уроку варто передбачити певний звіт з обговоренням одержаних результатів.

6. На уроках варто виділяти учням певний час на опанування нових інструментів. Це зекономить час на наступних уроках.

7. В ході проведення уроку в комп'ютерному класі недопустимою є фронтальна робота з учнями, які працюють за комп'ютером. Не потрібно намагатися синхронізувати роботу учнів, постійно перериваючи їхні, повідомляючи, що їм потрібно робити далі. Необхідно, щоб в кожного учня був план роботи або інструкція виконання певного завдання або алгоритм побудови. На вдало підготовленому уроці учні виконують власне завдання в індивідуальному темпі.

8. Не потрібно зловживати комп'ютерною підтримкою, оскільки після роботи з програмою вчитель повинен переконатися, що учні зрозуміли матеріал, що вони сприймають вивчене і без комп'ютера. Занадто часте проведення уроків з комп'ютером може негативно вплинути на якість математичної підготовки.

9. На перших уроках бажана присутність, хоча б протягом перших 10-15 хвилин, вчителя інформатики або колеги, який знайомий зі специфікою організації роботи в комп'ютерному класі.

Особливості дидактичної структури уроків з комп'ютерною підтримкою

Основними дидактичними частинами уроку з комп'ютерною підтримкою є: організаційна частина; активізація зон актуального і найближчого розвитку; вивчення нового матеріалу; закріплення матеріалу – повторення і застосування; контроль засвоєння; корекція; узагальнення; домашнє завдання. Всі дидактичні частини уроку можуть бути комп'ютеризовані повністю або частково.

Організаційна частина має на меті ознайомити учнів з особливостями організації і проведення уроку з комп'ютерною

підтримкою і послідовністю виконання завдань (наприклад, роздати запитання чи індивідуальні завдання, зазначити час їх виконання, описати форму звітності, за потреби розбити учнів на групи для роботи за комп'ютером тощо).

Активізація зон актуального і найближчого розвитку частіше відбувається у вигляді бесіди з учнями. Питання до неї доцільно візуалізувати на слайдах у вигляді невеликого відеоряду з використанням когнітивної графіки (креслень-ілюстрацій, анімацій, відеофрагментів, інтерактивних моделей, які можуть бути взяті з попередніх уроків).

Вивчення нового матеріалу відбувається через координацію і виважену організацію комп'ютерного експерименту. Первинне ознайомлення з новим матеріалом може відбуватися як фронтально, так і індивідуально. На великому екрані доцільно:

- демонструвати зразки розв'язання або оформлення завдання, етапи доведення теореми, портрети математиків з розповіддю про їх відкриття;
- проводити самоперевірку домашньої роботи;
- наводити контрприклад для посилення акцентів чи зосередження уваги на окремих фактах чи властивостях.

Закріплення. Використання комп'ютера дозволяє впровадити диференціацію навчання для урахування індивідуальних особливостей засвоєння математичного матеріалу (гендерні відмінності, темп засвоєння, психологічні особливості, рівень підготовленості, домінуючі канали сприйняття, тип мислення тощо) через власні освітні траєкторії, реалізацію яких забезпечує комп'ютер.

При цьому структура уроку стає нелінійною. Кожен учень чи кожна група працюють за власним темпом.

Повторення. Урок з комп'ютерною підтримкою передбачає організацію повторення у різних форматах: текст, звук, зображення. Це може бути репродуктивне тестування, експериментальні задачі, проблемні ситуації, розвиваючі ігри тощо.

Загалом, при узагальнюючому повторенні для систематизації знань використовуються графічні моделі, а для досягнення гарантованих результатів навчання – програми-тренажери.

На етапі повторення доцільно:

- використовувати раніше підготовлені фрагменти слайдів презентації, перегрупувавши їх з метою проведення порівняння або аналізу і представити учням;
- показати відеофрагменти застосування об'єктів побуту чи природи, математичні моделі яких вже досліджувалися учнями;
- підготувати схеми, таблиці, діаграми;

- передбачити невеликі звіти учнів про домашні експерименти, захист мініпроекта з пройденої теми з використанням слайдів презентації.

Контроль знань з використанням комп'ютера має істотні переваги: враховується різна швидкість роботи учнів, завдання диференціюються за ступенем складності; підвищується об'єктивність оцінки; учень бачить детальну картину власних прогалів у знаннях; оцінка може ставитися (причому швидко) не тільки після закінчення роботи, але і після кожного питання.

Домашнє завдання, виконане на комп'ютері, можливе у наступних форматах: індивідуальні завдання на зовнішньому носії, моделі, створені в ПДМ, реферат або рецензія на реферат, розміщений у мережі Інтернет, електронна презентація, результати виконаного комп'ютерного тесту тощо.

Таке домашнє завдання може бути індивідуальним, груповим, орієнтованим на різні групи учнів. При цьому необхідно вказувати:

- обов'язковий мінімум для виконання і передбачати «простір» для ініціативних учнів;
- часові рамки виконання роботи;
- кількість джерел інформації;
- програму реалізації завдання;
- обсяг звітнього документа (кількість сторінок, слайдів, динамічних креслень);
- додаткове завдання;
- місце розміщення виконаної роботи.

Практичне завдання

Скласти розширений конспект факультативного заняття з алгебри та початків аналізу з комп'ютерною підтримкою. Результати подати в електронному вигляді (електронною поштою на вказану викладачем адресу) і роздрукованому вигляді (кольоровий конспект із усіма слайдами і скріншотами).

В-т	Теми занять
1	«Обернені тригонометричні функції, їх графіки і властивості. Побудова графіків функцій, аналітичні вирази яких містять символи обернених тригонометричних функцій» (10 клас)
2	«Графічні прийоми розв'язування завдань з параметрами» (11 клас)
3	«Розв'язування геометричних задач на екстремум» (10 клас)
4	«Лінійні нерівності з двома змінними та задачі лінійного програмування» (10 клас)
5	«ГМТ алгебраїчних виразів на координатній площині» (10 клас)

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ballagas R., Rohs M., Sheridan J., Borchers J. BYOD: Bring Your Own Device // UbiComp 2004 Workshop on Ubiquitous Display Environments. Nottingham, UK, September 2004.
2. Drushlyak M.G. Computer Tools “Trace” and “Locus” in Dynamic Mathematics Software / M.G. Drushlyak // European Journal of Contemporary Education. – 2014. – V.10 (4). – P. 204-214.
3. *GeoGebra*. Матеріали. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.geogebraTube.org/search/results/uid/UmY4n1dqEN8AACLq-40AAACy5266389f9b430>.
4. Hohenwarter M. Ways of Linking Geometry and Algebra: the Case of GeoGebra / M. Hohenwarter, K. Jones // Proceedings of the British Society for research into Learning Mathematics. – 2007. – 27, 3. – P.126-131.
5. Jones K. Learning Geometrical Concepts using Dynamic Geometry Software / K.Jones // Mathematics Education Research. – 2001. – P.50-58.
6. Nguyen D.N. The Development of the Proving Process Within a Dynamic Geometry Environment / D.N. Nguyen // European Researcher. – 2012. – 32, 10-2. – P. 1731-1744.
7. Özen D. Investigating Pre-service Mathematics Teachers’ Geometric Problem Solving Process in Dynamic Geometry Environment / D. Özen, N. Köse // Turkish Online Journal of Qualitative Inquiry. – 2013. – 4(3). – P. 61-74.
8. Semenikhina E.V. Computer Mathematical Tools: Practical Experience of Learning to Use Them / E.V. Semenikhina, M.G. Drushlyak // European Journal of Contemporary Education. – 2014. – V.9 (3). – P. 175-183.
9. Semenikhina E.V. The necessity to Reform the Mathematics Education in the Ukraine / E.V. Semenikhina, M.G. Drushlyak // Journal of Research in Innovative Teaching. – 2015. – 8. – P.51-62.
10. Semenikhina O. The Study of Dynamic Mathematics Software: Startistical Analysis of its Number for the Demand of the Modern Math Teacher/ O. Semenikhina, M. Drushlyak // European Journal of Contemporary Education. – 2015. – V. (). – P. .
11. Semenikhina O.V. Organization of Experimental Computing in Geogebra 5.0 in Solving Problems of Probability Theory / O.V. Semenikhina, M.G. Drushlyak // European Journal of Contemporary Education. – 2015. – V. 11(1). – P. 82-90.
12. Алгебра: Підручник для 10 класу з поглибленим вивченням математики [Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С.] – Х.: Гімназія, 2010. – 415с.
13. Алгебра: Підручник для 11 класу з поглибленим вивченням математики: у 2 ч. [Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С.] – Х.: Гімназія, 2011. – Ч.1. – 256с.

14. Алгебра: Підручник для 11 класу з поглибленим вивченням математики: у 2 ч. [Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С.] – Х.: Гімназія, 2011. – Ч.2. – 272с.

15. Алексеева Т. В. “Технологии byod в образовании” // V international scientific conference. Prague. – 2015. – С.177.

16. Бевз Г. П. Алгебра 9 клас / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова. – Київ: Освіта, 2017. – 271 с.

17. Биков В.Ю. Суспільство знань і освіта 4.0 // Освіта для майбутнього у світлі викликів XXI століття (польська, EDUKACJA W KONTEKŚCIE ZMIAN CYWILIZACYJNYCH). – Bydgoszcz : Wydawnictwo Uniwersytetu Kazimierza Wielkiego, 2017. – С. 30-45.

18. Бібліотека комп'ютерних моделей. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://sites.google.com/site/biblkompmo/geogebra-onlajn>.

19. Булычев В. А. Случайный эксперимент и его реализация в среде «1С: Математический конструктор 6.0» / В. А. Булычев // Информатика и образование. – 2014. – № 3. – С. 45-47.

20. Горошко Ю. Розв'язування задач з параметрами за допомогою програми Gran1 / Ю. Горошко, Є. Вінниченко // Математика в школі. – 2008. – №7-8. – С. 45-48.

21. Горошко Ю.В. Проблеми створення педагогічного програмного забезпечення / Ю.В. Горошко, А.В. Пеньков // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. – Збірник 16. – Режим доступу до журналу: <http://www.ii.npu.edu.ua/2009-11-27-11-40-37/84--16>.

22. Горошко Ю.В. Розв'язування задач з математичної статистики з використанням програми Gran1 // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. – Збірник 7. – Режим доступу до журналу: <http://www.ii.npu.edu.ua/2009-11-27-11-40-37/75--7>.

23. Долматова Н. В. “Использование личных мобильных устройств в образовательном процессе”, на Всероссийской научно-методической конференции “Современный урок в условиях внедрения ФГОС: опыт, проблемы, перспективы”, Оренбург, 2016, с. 82-86

24. Дубровский В. Учимся работать с «Математическим конструктором» / В. Дубровский // Математика. – 2009. – №13. – С. 2-48.

25. Дубровский В.Н. 1С: Математический конструктор – новая программа динамической геометрии / В.Н. Дубровский, Н.А. Лебедева, О.А. Белайчук // Компьютерные инструменты в образовании. – 2007. – №3. – С. 47-56.

26. Дубровский В.Н. Динамическая геометрия в школе. Занятие 1 / В.Н. Дубровский, С.Н. Поздняков // Компьютерные инструменты в школе. – 2008. – №.1. – С. 21-31.

27. Дубровский В.Н. Динамическая геометрия в школе. Занятие 4.

Измерения и вычисления / В.Н. Дубровский, С.Н. Поздняков // Компьютерные инструменты в школе. – 2008. – №.4. – С. 9-16.

28. Дубровский В.Н. Динамическая геометрия в школе. Занятие 5. Работа с графиками функций средствами динамической геометрии / В.Н. Дубровский, С.Н. Поздняков // Компьютерные инструменты в школе. – 2008. – №.5. – С. 32-45.

29. Дубровский В. Динамическая геометрия с «Математическим конструктором». Эпизоды 1-13 / В. Дубровский // Математика, 2011-2012. – (№10/2011), (№11/2011), (№12/2011), (№13/2011), (№14/2011), (№15/2011), (№16/2011), (№1/2012), (№2/2012), (№3/2012), (№4/2012), (№5/2012), (№6/2012)

30. Жалдак М.І. Елементи стохастички з комп'ютерною підтримкою. Посібник для вчителів / М.І. Жалдак, Г.Ю. Михалін. – К.: РНУ "ДІНІТ", 2004. – 125с.

31. Жалдак М.І. Комп'ютер на уроках математики: Посібник для вчителів / М.І. Жалдак. – К.: Техніка, 1997. – 304 с..

32. Жалдак М.І. Математика з комп'ютером. Посібник для вчителів / М.І. Жалдак, Ю. В. Горошко, Є. Ф. Вінниченко. – К.: РНУ "ДІНІТ", 2004. – 252с.

33. Зеленьак О.П. Тестовые задания №34 и С5 / О. П. Зеленьак // Математика в школах України. – 2013. – №23-24. – С.30-33.

34. Зильберман М. А. “Использование мобильных технологий (технологии BYOD) в образовательном процессе“ / М. А. Зильберман. [Электронный ресурс]. Доступно: <http://didaktika.org/2014/p/ispolzovanie-mobilnyh-tehnologij-v-obrazovatelnom-processe/>. Дата звернення: Лип.20,2018

35. Зильберман М.А. Использование мобильных технологий (технологии BYOD) в образовательном процессе // Дидактика XXI века: инновационные аспекты использования ИКТ в образовании: Материалы международной научно-практической заочной конференции (Самара, 19 мая, 2014г.): Материалы конференции. – С.60-64.

36. Інститут *GeoGebra*, Харків, Україна. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://kafinfo.org.ua/geogebra>.

37. Інститут *Geogebra*, Чернігів, Україна. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://sites.google.com/site/geogebrachernigiv>.

38. Компетентность, инициатива, творчество. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://aleshko.ucoz.kz/load/interaktivnye_stereochertezhi_v_srede_quotzhivaja_matematikaquot/24-1-2 .

39. Корольський В. В. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики. Навчальний посібник / В. В. Корольський,

Т. Г. Крамаренко, С. О. Семеріков, С. В. Шокалюк. – Кривий Ріг: Книжкове видавництво Киреєвського, 2009. – 234 с.

40. Ларин С. В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики: учебное пособие / С. В. Ларин. – Ростов-на-Дону: Легион, 2015. – 179 с.

41. Лиходеева Г.В. Дослідницький підхід у навчанні учнів елементів стохастичності з використанням інформаційних технологій / Г.В. Лиходеева // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. – Збірник 13. – Режим доступу до журналу: <http://www.ii.npu.edu.ua/2009-11-27-11-40-37/48--13>.

42. Лопух П. С. Человек и мир: учеб. пособие для 5-го кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения / П. С. Лопух, О. В. Сарычева, Л. В. Шкель. – Минск: Народная асвета, 2016 – 143с.

43. Матухин П.Г. “Табличная организация образовательного контента как основа BYOD комплекса поддержки и контроля обучения иностранных студентов физике и русскому языку физики на базе облачного ресурса MS ONEDRIVE” / П.Г. Матухин, О.А. Грачева, С.Л. Эльсгольц, Е. В. Певницкая. [Электронный ресурс]. Доступно: <http://inforino2016.mpei.ru/transfer2pub>. Дата звернення: Лип.20,2018

44. Мерзляк А.Г. Алгебра: Підручник для 8 класу з поглибленим вивченням математики / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2008. – 368с.

45. Мерзляк А.Г. Алгебра: Підручник для 9 класу з поглибленим вивченням математики / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2009. – 380с.

46. Морзе Н. В. Информатика: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / Н. В. Морзе, О. В. Барна, В. П. Вембер. – К.: УОВЦ «Оріон», 2017. – 208 с.

47. Обучение математике с использованием возможностей GeoGebra / [М.В. Шабанова, О.Л. Безумова, Е.Н. Ерилова и др.] – М.: Изд-во Перо, 2013. – 128 с.

48. Остапенко Р.И. “Преподавание дисциплин информационного цикла с помощью BYOD” // Перспективы Науки и Образования. – 2017. – 5 (29). – С. 66-73.

49. Попов Д. QR-коды – в школьном учебнике / Д.Попов // Компьютерные инструменты в школе. – 2018. – № 1. – С. 25-30.

50. Раков С.А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: Монографія / С.А. Раков. – Х.:Факт, 2005. – 360 с.

51. Ракута В.М. Система динамічної математики GeoGebra як інноваційний засіб для вивчення математики / В.М. Ракута // Інформаційні технології і засоби навчання. – 2012. – Т.30, №4. – Режим доступу: <http://journal.iitta.gov.ua/index.php/itlt/article/view/700/524#.VcSZJDxbxE>.

52. Семеніхіна Е.В. Розв'язування задач шкільного курсу статистики у середовищах GRAN1 і GeoGebra: порівняльний аналіз / О.В. Семеніхіна, М.Г. Друшляк // Фізико-математична освіта. – 2015. – № 1(4). – С. 21-30.

53. Семеніхіна О.В. Визначення доцільності системи вправ спецкурсу з вивчення засобів комп'ютерної візуалізації математичних знань для формування фахової компетентності вчителя математики / О.В. Семеніхіна, М.Г. Друшляк, І.В. Шищенко // Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology. – 2015. – III(36), 74. – С. 60-63.

54. Семеніхіна О.В. Використання GeoGebra Exam у професійній підготовці майбутніх учителів математики, фізики, інформатики / О.В. Семеніхіна, М.Г. Друшляк // Фізико-математична освіта. – 2018. – Вип. 1(15). – С.290-293.

55. Семеніхіна О.В. Використання програми GeoGebra в дослідженні функціональних залежностей (на прикладі розв'язування задач на екстремум) / О.В. Семеніхіна, М.Г. Друшляк // Комп'ютер в школі і сім'ї. – 2015. – № 6. – С. 17-24.

56. Семеніхіна О.В. Візуалізація експериментальних випробувань на основі випадкових подій у середовищі GeoGebra 5.0 / О.В. Семеніхіна, М.Г. Друшляк // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 3. Фізика і математика у вищій і середній школі. – 2014. – № 14. – С. 94-103.

57. Семеніхіна О.В. Інтерактивні аплети як засоби комп'ютерної візуалізації математичних знань та особливості їх розробки у GeoGebra / О.В. Семеніхіна, М.Г. Друшляк, Д.С.Безуглий // Комп'ютер в школі і сім'ї. – 2016. – № . – С.17-23.

58. Семеніхіна О.В. Комп'ютерні інструменти програм динамічної математики та методичні проблеми їх використання / О.В. Семеніхіна, М.Г. Друшляк // Інформаційні технології і засоби навчання. – 2014. – Т. 42. – № 4. – С. 109-117.

59. Семеніхіна О.В. Обґрунтування доцільності використання програм динамічної математики як засобів візуалізації математичних знань / О.В. Семеніхіна, М.Г. Друшляк // Фізико-математична освіта. – 2015. – Вип. 3(6). – С. 65-73.

60. Семеніхіна О.В. Про інструменти контролю в ІГС Математичний конструктор / О.В. Семеніхіна, М.Г. Друшляк // Науковий вісник Мелітопільського державного педагогічного університету. Серія: Педагогіка. – 2014. – Вип.13 (2). – С. 189-195.

61. Семеніхіна О.В. Про формування умінь раціонально обрати програму динамічної математики: результати педагогічних досліджень / О.В. Семеніхіна, М.Г. Друшляк // Комп'ютер в школі і сім'ї. – 2015. – № 4. – С. 24-30.

62. Семеніхіна О.В. Програм динамічної математики: кількісний аналіз

в контексті підготовки вчителя математики / О.В. Семеніхіна, М.Г. Друшляк // Інформаційні технології і засоби навчання. – 2015. – Т. 48. – № 4. – С. 35-46.

63. Семеніхіна О.В. Програми динамічної математики у контексті набуття емпіричного досвіду і формування знань (на прикладі розв'язування задач з параметрами) / О.В. Семеніхіна, М.Г. Друшляк // Інформатика та інформаційні технології в навчальних закладах. – 2014. – № 6. – С. 67-74.

64. Семеніхіна О.В. Програми динамічної математики у контексті роботи сучасного вчителя: результати педагогічного експерименту / О.В. Семеніхіна, М.Г. Друшляк // Інформаційні технології в освіті. – 2015. – Issue 22. – С. 109-119.

65. Семеніхіна О.В. Створення власних комп'ютерних інструментів в середовищах динамічної математики / О.В. Семеніхіна, М.Г. Друшляк // Інформатика та інформаційні технології в навчальних закладах. – 2014. – № 5(53). – С. 60-69.

66. Семеніхіна О.В. Технологія напрацювання умінь використовувати комп'ютерний математичний інструментарій у системі підготовки учителя математики / О.В. Семеніхіна, М.Г. Друшляк // Педагогічні науки. – 2015. – № 6(50). – С. 298-305.

67. Семеніхіна О.В. Типові помилки, які виникають при використанні програм динамічної математики / О.В. Семеніхіна, М.Г. Друшляк // Інформатика та інформаційні технології в навчальних закладах. – 2015. – № 6. – С. 48-61.

68. Семеніхіна О.В. Формування умінь використовувати комп'ютерний інструментарій у майбутнього вчителя математики // Інновації у вищій освіті – комунікація та співпраця у сучасному університетському середовищі за допомогою специфічних цифрових інструментів: [Міжнародна колективна монографія] за заг. ред. д.пед.н., проф. Наказного М. О. / О.В. Семеніхіна, М.Г. Друшляк. – Дніпродзержинськ : ДДТУ, 2015. – 376 с. – С. 138-149.

69. Тележинская Е. Л. “Мобильное образование – инструмент современного педагога” / Е. Л. Тележинская, О. Б. Дударева // Научное обеспечение системы повышения квалификации кадров,. – 2016. – №2 (27). – С.88-94.

70. Триус Ю.В. Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математичних дисциплін у вищих навчальних закладах / Ю. В. Триус // Дис... д-ра пед. наук : 13.00.02 / Національний педагогічний ун-т ім. М.П. Драгоманова. – К., 2005. – 649 с.

71. Хохенватор М. Введение в *GeoGebra* / М. Хохенватор / Перевод Т.С. Рябова. – 2012. – 153с.

72. Храповицкий И.С. Живая геометрия. Интерактивные пособия. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://janka-x.livejournal.com>

73. Храповицкий И.С. Эвристический полигон / И.С. Храповицкий // Компьютерные инструменты в образовании. – 2003. – №1. – С. 15-26.

Офіційні сайти програм динамічної математики:

<http://www.cabri.com>

<http://www.dynamicgeometry.com>

<http://www.geogebra.org>

<http://www.cinderella.de>

<http://geonext.uni-bayreuth.de>

<http://obr.1c.ru/mathkit>

http://dg.osenkov.com/index_ru.html

<http://math.exeter.edu/rparris/winggeom.html>

<http://geocentral.net/geometria/ru>

<http://www.raumgeometrie.de/drupal/en>

<http://plickers.com>

