Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Лиман Ф.М., Одінцова О.О. Структурні властивості раціональних чисел – важлива складова математичних знань вчителів математики. Фізико-математична освіта. 2018. Випуск 2(16). С. 72-78.

Lyman F., Odintsova O. The Structure Properties Of Rational Numbers Are Important Component Of Mathematical Knowledge Of Mathematics Teachers. Physical and Mathematical Education. 2018. Issue 2(16). P. 72-78.

УДК 378.147:51

Ф.М. Лиман, О.О. Одінцова
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Україна
mathematicsspu@gmail.com
DOI 10.31110/2413-1571-2018-016-2-014

СТРУКТУРНІ ВЛАСТИВОСТІ РАЦІОНАЛЬНИХ ЧИСЕЛ – ВАЖЛИВА СКЛАДОВА МАТЕМАТИЧНИХ ЗНАНЬ ВЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

Анотація. *У статті досліджуються деякі властивості поля (Q; +, ·; 0, 1) раціональних чисел, його підкілець та підгруп адитивної групи (Q; +; 0) і мультиплікативної групи (Q \ {0}; ·; 1) цього поля.*

Одним із основних підкілець поля раціональних чисел є кільце цілих чисел. Стимулом його розширення до мінімального числового поля, яким є поле раціональних чисел, є проблема розв'язності рівняння ах = b з цілими коефіцієнтами. Умова мінімальності поля, де назване рівняння має розв'язок при а ≠ 0, дає відповідь на питання про зображення довільного раціонального числа часткою двох цілих чисел.

Отже, множина раціональних чисел Q = Z ∪ Q \ Z, де Z– множина цілих чисел, а Q \ Z– множина дробових чисел. Загальновідомим є однозначне подання будь-якого раціонального числа q ≠ 0 нескоротним дробом. Проте, однозначних записів ненульових раціональних чисел існує нескінченна кількість. Наприклад, цікавим і корисним у багатьох задачах є однозначне подання раціонального числа q > 0 у вигляді: $q = p^n \frac{a}{b}$*, де р – просте натуральне число, n ∈ Z, а і b – натуральні числа, причому (a,b) = (a, p) = (b, p) = 1. Для q< 0 відповідно матимемо:* $q = -p^n \frac{a}{b}$ *.*

Стосовно кілець раціональних чисел, розглянуто питання їх дискретності та щільності. Доведено, зокрема, що щільним буде кожне підкільце поля раціональних чисел, яке містить дробове число.

При дослідженні властивостей числових полів, яких не має поле раціональних чисел, продемонстровано доведення його неповноти без використання ірраціональних чисел.

При розгляді адитивних і мультиплікативних груп раціональних чисел запропоновано одне з можливих доведень того, що група автоморфізмів групи (Q; +; 0) ізоморфна групі (Q \ {0}; ·; 1), а група автоморфізмів підгруп групи (Q; +; 0) ізоморфна підгрупам групи (Q \ {0}; ·; 1). Цей факт проілюстровано на прикладі групи (Z ; + ; 0) цілих чисел та групи (Q_p*; +; 0) р-ових дробів для довільного простого числа р.*

Знання цих фактів допоможе вчителю математики поглибити та осучаснити знання учнів про систему раціональних чисел.

Ключові слова: *група, кільце, автоморфізм, раціональне число, дріб, дробове число, дискретність, щільність.*

Постановка проблеми та аналіз сучасних досліджень. Сподівання багатьох вчених – математиків XIX століття про те, що результати їх досліджень через століття будуть вивчати в школах, не справдились. Видатний німецький математик і педагог Ф.Клейн (1849 - 1925) доклав багато зусиль для обґрунтування ідей модернізації шкільної математичної освіти. В роботі [1] він досить критично оцінив ситуацію з викладанням математики, дійшовши висновку, що не існує інших предметів шкільної освіти, при навчанні яких панувала би така ж рутина, як при навчанні математики. Курс елементарної математики, що вивчався і вивчається вшколі, був досить давно сформований. Час від часу в цьому курсі одні задачі замінюються на інші (це носить назву осучаснення текстів задач), виключаються одні теми, вводяться інші, але загалом це мало впливає на сам шкільний курс математики. На думку Ф.Клейна та продовжувача його ідей, голландського математика і популяризатора цієї науки, Г.Фройденталя (1905-1990) абсолютно неприпустимою є ситуація, коли школа залишається сторонньою до всього того, що складає зміст сучасної математики [2, 3].

З того часу майже нічого не змінилося при вивченні класичних розділів сучасної математики. Через це ми вважаємо, що кроком уперед у навчанні елементарної математики було б дослідження питань елементарної математики з позицій сучасної вищої математики, в якій домінують структурні підходи, з якими, в свою чергу, обов'язково повинен бути ознайомлений вчитель математики сучасної школи.

Мета статті. Проаналізувати основні структурні властивості раціональних чисел з позицій сучасної математики, знання яких допоможе вчителю осучаснити знання своїх учнів.

Методи досліджень. Загально алгебраїчні методи з використанням основних фактів теорії впорядкованих алгебраїчних структур та результатів аналізу навчально-методичної і математичної літератури щодо структурних властивостей числових систем.

Виклад основного матеріалу.

Структурні властивості раціональних чисел.

У кільці (Z; +, $\cdot$; 0, 1) цілих чисел не завжди є розв'язки рівняння $ax = b$.

Виникає задача розширення кільця (системи) цілих чисел до такої мінімально можливої системи, де б цей недолік усувався. В такій системі повинні необмежено виконуватися операції додавання і множення її елементів, що задовольняли б 5 законів: асоціативний (додавання і множення), комутативний (додавання і множення), дистрибутивний (множення відносно додавання). Крім цього алгебраїчними операціями також повинні бути віднімання та ділення елементів у підмножині ненульових елементів. Усе це разом визначає систему (Q; +, $\cdot$; 0, 1) раціональних чисел, яка є мінімальним числовим полем.

Для спрощення записів у подальшому будемо називати систему за множиною-носієм: кільце Z, поле Q, тощо.

Принциповим є питання про зображення раціональних чисел за допомогою цілих чисел. Відповідь на нього дає загальновідома теорема

Теорема 1. *Будь-яке раціональне число є часткою 2-х цілих чисел:*

$$\forall q \in Q \quad \exists a \in Z \quad \exists b \in Z \setminus \{0\} \quad (q = \frac{a}{b}).$$

Доведення. Розглянемо множину $M = \{ q = \frac{a}{b} \mid a \in Z \wedge b \in Z \setminus \{0\} \}$ та покажемо, що $M = Q$.

Справді, для $\forall a \in Z \quad (a = \frac{a}{1})$, тому $a \in M$ і $Z \subset M$.

Якщо

$$q_1 = \frac{a_1}{b_1} \in M, q_2 = \frac{a_2}{b_2} \in M,$$

то за властивостями операцій у полі маємо:

$$q_1 \pm q_2 = \frac{a_1 b_2 \pm a_2 b_1}{b_1 b_2} \in M, \quad q_1 q_2 = \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} \in M, \quad \frac{q_1}{q_2} = \frac{a_1 b_2}{a_2 b_1} \in M \text{ при } q_2 \neq 0.$$

Отже, (M; +, $\cdot$) – поле.

У зв'язку з мінімальністю поля Q отримаємо, що $M = Q$ і теорему доведено.

Більш формалізоване доведення теореми 1 з посиланнями на аксіоматичне означення системи раціональних чисел можна знайти в [4, теорема 6.1; 5, теорема 5.9].

Наслідок 1. *Нехай* $q = \frac{a}{b}$ – довільне раціональне число. При цьому

$$q = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc,$$

де $a, b, c, d \in Z$ і $b \neq 0, d \neq 0$.

Доведення. Перепишемо рівність $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ наступним чином $ab^{-1} = cd^{-1}$ та домножимо ліву і праву частини на bd. *Одержимо* $ad = bc$.

Якщо ж тепер отриману рівність домножити на $b^{-1}d^{-1}$, то будемо мати $ab^{-1} = cd^{-1}$, що і слід було довести.

З наслідку 1 випливає, що кожне раціональне число неоднозначно подається часткою двох цілих чисел (дробом):

$$\frac{a}{b} = \frac{am_1}{bm_1} = \frac{am_2}{bm_2} = \ldots, \text{ де } m_i \in Z \setminus \{0\}, i = 1, 2, \ldots, k, \ldots$$

Множина раціональних чисел $Q = Z \cup Q \backslash Z$, де, як і раніше, Z – множина цілих чисел, а $Q \backslash Z$ – множина дробових раціональних чисел. Тоді якщо $q \in Z$, то запис $\frac{q}{1}$ – однозначне подання цілого числа дробом. Якщо ж $q \in Q \backslash Z$, то запис $q = \frac{a}{b}$ буде однозначним поданням дробового числа дробом тоді, коли сам дріб буде нескоротним, тобто $b \neq 1$ і НСД(a,b) = 1, причому a і b – натуральні числа, коли число q– число додатне, і a – від'ємне ціле число, а b – натуральне число, коли q – число від'ємне.

Цікавим і корисним у багатьох задачах є однозначне подання раціонального числа $q \neq 0$ у вигляді

$$q = p^n \frac{a}{b},$$

де p – просте натуральне число, $n \in Z$, $a, b \in Z$, $(a,b) = (a, p) = 1$, а дріб $\frac{a}{b}$ задовольняє умови попереднього абзацу.

Наприклад, нехай *p* = 3. Тоді $\frac{8}{21} = 3^{-1} \cdot \frac{8}{7}$, а $-\frac{15}{19} = 3^{1} \cdot \frac{-5}{19}$. Якщо ж *p* = 2, то для тих же чисел маємо $\frac{8}{21} = 2^{3} \cdot \frac{1}{21}$, $-\frac{15}{19} = 2^{0} \cdot \frac{-15}{19}$.

Для алгебраїчних систем (одна з яких – поле раціональних чисел) важливим є питання про можливість і єдиність уведення строгого лінійного порядку. Впорядкована алгебраїчна система є складним математичним об'єктом, який одночасно наділений алгебраїчною структурою (групи, кільця, поля, тощо) і структурою впорядкованої множини, які між собою певним чином узгоджуються.

Нагадаємо, що відношення ω, задане на непорожній множині *A*, називається відношенням строгого лінійного порядку, якщо виконуються умови :

1) антирефлексивність: $\forall a \in A \quad (a\overline{\omega}a)$
2) асиметричність: $\forall a,b \in A \quad (a\omega b \Rightarrow b\overline{\omega}a)$
3) транзитиність: $\forall a,b,c \in A \quad (a\omega b \wedge b\omega c \Rightarrow a\omega c)$
4) зв'язність: $\forall a,b \in A \quad (a\omega b \vee \quad b\omega a \quad \vee a = b)$.

Щодо впорядкування поля раціональних чисел має місце наступна теорема.

Теорема 2 [4, теорема 6.2; 5, теорема 5.11]. *Поле раціональних чисел можна лінійно і строго впорядкувати єдиним способом. Цей порядок є архімедовим і є продовженням порядку в кільці цілих чисел.*

Строгий лінійний порядок визначається вибором множини Q^+ додатних елементів множини *Q* так: $Q^+ = \{ \frac{a}{b} \wedge ab \in N \}$. Виявляється, що інакше вибрати множину Q^+ не можна.

Такий порядок дає можливість зображувати раціональні числана числовій прямій. При цьому число $x_2 \in Q$ більше за число $x_1 \in Q$ (запис $x_2 > x_1$), якщо x_2 зображено точкою, яка знаходиться правіше за точку, що зображує число x_1.

Архімедовість порядку означає наступне: $\forall a \in Q^+ \quad \forall b \in Q^+ \quad \exists n \in N \quad (nb > a)$.

Усі строго впорядковані кільця (зокрема поля) поділяються на два класи у відповідності з наступним означенням.

Означення 1. *Нехай (К; +, ·; >; 0) – строго лінійно впорядковане кільце, a, b, c* $\in$ *K і a > b > c. Елемент а – називається сусіднім зліва до елемента b, а елемент c – сусіднім справа до елемента b, якщо в К не існує таких елементів x і y, які задовольняють відповідно умови a > x > b і b > y > c.*

Означення 2. *Строго лінійно впорядковане кільце (К; +, ·; >; 0) називається дискретним відносно порядку « > », якщо кожен його елемент має лівий і правий сусідні елементи, і щільним, якщо* $\forall a,b \in K \quad (a \neq b \Rightarrow \quad \exists c \in K \quad (a > c > b \vee b > c > a))$.

Прикладом дискретного кільця є кільце *(Z; +, ·; >; 0)* цілих чисел відносно порядку *« > »* . Прикладом щільного кільця є поле *(Q; +, ·; >; 0)*. Справді, якщо *x,y* $\in$ *Q*, *x* $\neq$ *y* і *x* > *y*, то $x > \frac{x+y}{2} > y$, що забезпечує щільність для *Q*.

При дослідженні строго лінійно впорядкованих кілець на дискретність і щільність можна використовувати критерій дискретності та критерій щільності кільця.

Теорема 3 (критерій дискретності кільця) [4, теорема 4.18; 5, теорема 4.24]. *Строго лінійно впорядковане кільце (К; + , · ,>; 0) дискретне тоді і тільки тоді, коли множина K^+ його додатних елементів містить найменший елемент.*

Теорема 4 (критерій щільності кільця) [4, теорема 4.18; 5, теорема 4.24]. *Строго лінійне впорядковане кільце (К; + , · , >; 0) щільне тоді і тільки тоді, коли множина K^+ його додатних елементів не містить найменшого елемента.*

Природно виникає питання про існування щільних кілець, ширших кільця цілих чисел, але вужчих поля раціональних чисел, відносно того ж порядку « > ». Позитивну відповідь дає наступна теорема.

Теорема 5. *Будь-яке строго лінійно впорядковане підкільце (К; + , · , >; 0) поля раціональних чисел, яке містить додатне дробове число а , є щільним.*

<u>*Доведення.*</u> Нехай дробове число $a \in K$ і $a > 1$. Тоді $a^2 > a$. За аксіомою Архімеда

$$\exists m \in N (ma > a^2).$$

Розглянемо підмножину *L* множини натуральних чисел *N*

$$L = \{ l \mid \quad l \cdot a \leq a^2, \quad l \in N \}.$$

$L \neq \varnothing$, бо $1 \in L$, $L \neq N$, бо $m \notin L$. Отже, множина *L* обмежена зверху і тому має найбільший елемент *k*.

Тоді $ka \leq a^2$, $(k+1)a > a^2$. Тобто $(k+1)a > a^2 \geq ka$, але $ka \neq a^2$, бо $a \notin N$. Тому $a > a^2 - ka > 0$.

Позначимо $a^2 - ka = b \in K$. Тоді $a > b$, $a - b = c \in K$ і одне з чисел *b* або *c* не більше за $\frac{1}{2}$ *a*. Позначимо це число *d*.

Тим самим доведено, що поряд з елементом $a \in K$ і $a \neq 1$ до *K* належить додатне число $d \leq \frac{1}{2}a$.

Продовживши міркування для *d*, через скінченне число кроків одержимо число $x \in K$ і $0 < x < 1$.

Отже, підкільце (*K; + , · , >;* 0), що містить дробові числа, містить число *x* таке, що $0 < x < 1$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0.$$

Це означає, що для будь-якого додатного числа $y \in K$ знайдеться таке число $x^t \in K$, що $x^t < y$. Отже, за критерієм щільності (теорема 4) кільце ($K; +, \cdot, >; 0$) є щільним.

Теорему доведено.

Наприклад, щільним буде будь-яке кільце p-ових чисел ($Q_p; +, \cdot, >; 0$), де

$$Q_p = \{\frac{a}{p^n} \mid a \in Z, n \in Z, p - \textit{просте} \quad \textit{число}\}.$$

У лінійно впорядкованих полях розглядають різні послідовності. Серед них окремо виділяють *фундаментальні* та *збіжні* послідовності.

Означення 3. *Послідовність (a_n) строго лінійно впорядкованого поля A= (A; +, ·; >; 0,1) називається фундаментальною, якщо виконується умова*

$$\forall \varepsilon \in A^+ \quad \exists n_0 \in N \quad \forall m \in N \, \forall n \in N \quad (m > n_0 \wedge n > n_0 \Rightarrow \quad | a_n - a_m | < \varepsilon).$$

Означення 4. *Послідовність (a_n) строго лінійно впорядкованого поля A= (A; +, ·; >; 0,1) називається збіжною в полі A, якщо виконується умова*

$$\exists a \in A \quad \forall \varepsilon \in A^+ \quad \exists n_0 \in N \, \forall n \in N \quad (n > n_0 \Rightarrow \quad | a - a_n | < \varepsilon).$$

При цьому елемент a називається границею послідовності (a_n).

Цей факт записується наступним чином

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Використовуючи властивості абсолютної величини елемента, досить легко показати, що кожна збіжна послідовність є фундаментальною в даному полі. Проте обернене твердження не завжди має місце. Цей факт приводить до поняття повного поля.

Означення 5. *Строго лінійно впорядковане поле називається повним, якщо кожна його фундаментальна послідовність є збіжною у цьому ж полі.*

Незважаючи на щільність поля раціональних чисел, воно не є повним. Це одна із суттєвих властивостей системи раціональних чисел. Її слід встановити, не виходячи за межі поля раціональних чисел.

Теорема 6. *Поле (Q; + , · , >; 0, 1) раціональних чисел – не повне.*

<u>*Доведення*</u>. Для доведення теореми достатньо вказати послідовність раціональних чисел, яка буде фундаментальною, але не матиме раціональної границі. Покажемо, що такою є послідовність (a_n), де

$$a_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

Дослідимо спочатку цю послідовність на фундаментальність, розглядаючи різницю $a_{n+k} - a_n$. Маємо:

$$a_{n+k} - a_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+2)(n+3)\cdot\ldots\cdot(n+k)}\right) <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^{k-1}}\right) = \frac{1}{n(n+1)!}\left(n + 1 - \frac{1}{(n+1)^{k-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{n \cdot n!} - \frac{1}{n \cdot (n+1)^{k-1}(n+1)!} < \frac{1}{n \cdot n!}$$

Число $\frac{1}{n \cdot n!}$ при належному виборі n може стати меншим будь-якого додатного раціонального числа ε. Для цього достатньо взяти $n > \frac{1}{\varepsilon}$, що завжди можливо в полі раціональних чисел. Отже, нерівності

$$0 < a_{n+k} - a_n < \frac{1}{n \cdot n!}$$

свідчать про фундаментальність послідовності (a_n).

Доведемо тепер, що послідовність (a_n) не має раціональної границі. Припустимо протилежне. Нехай

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{c}{d}, \; c, d \in N, d \neq 0, (c, d) = 1.$$

Додамо в нерівностях $0 < a_{n+k} - a_n < \frac{1}{n \cdot n!}$ до всіх частин a_n. Одержимо

$$a_n < a_{n+k} < a_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Останні нерівності виконуються для будь-яких чисел $n, k \in N$. Зокрема, і для $n+1$, тобто

$$a_{n+1} < a_{n+1+k} < a_{n+1} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!}.$$

Дослідимо тепер послідовність (b_n), де $b_n = a_n + \frac{1}{n \cdot n!}$ щодо характеру її монотонності. Маємо:

$$b_{n+1} - b_n = a_{n+1} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!} - a_n - \frac{1}{n \cdot n!} = \frac{-1}{n\cdot(n+1)^2 \cdot n!} < 0 .$$

Отже, послідовність (b_n) – спадна. Оскільки

$$a_n < a_{n+1} < a_{n+1+k} < a_{n+1} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!} < a_n + \frac{1}{n\cdot n!} ,$$

то, перейшовши в цих нерівностях до границі при фіксованому n і $k \to \infty$, отримаємо:

$$a_n < a_{n+1} \le \frac{c}{d} \le a_{n+1} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!} < a_n + \frac{1}{n\cdot n!} .$$

Звідси $a_n < \frac{c}{d} < a_n + \frac{1}{n\cdot n!}$.

Покладемо $n = d$, одержимо $a_d < \frac{c}{d} < a_d + \frac{1}{d\cdot d!}$. Після множення останніх нерівностей на число $d\cdot d!$, будемо мати

$$a_d \cdot d \cdot d! < c \cdot d! < a_d \cdot d \cdot d! + 1$$

Але натуральні числа $a_d \cdot d \cdot d!$ і $a_d \cdot d \cdot d! + 1$ є сусідніми та між ними не може бути жодного натурального числа. Тому останні нерівності є суперечливими і теорему доведено.

Про групи поля раціональних чисел

Поле раціональних чисел структурно утворене двома абелевими групами: адитивною групою (Q; +; 0) і мультиплікативною групою ($Q \setminus \{0\}$; $\cdot$; 1), які між собою пов’язані дистрибутивним законом множення відносно додавання

$$\forall a, b \in Q \quad (a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c).$$

Кожна з названих груп містить нескінченну кількість підгруп, які мають цікаві властивості, що тісно пов’язані з властивостями раціональних чисел.

Означення 6. *Підгрупа H групи (G; $*$; e) називається суттєвою, якщо $H \cap B \ne E$, де B– довільна підгрупа групи G, а $E = \langle e \rangle$ – підгрупа, що складається лише з нейтрального елемента.*

В подальшому підгрупу E будемо називати нульовою, коли вихідна група G– адитивна, і одиничною, коли вихідна група G – мультиплікативна.

Теорема 7. *У групі* (Q; +; 0) *будь-яка ненульова підгрупа – суттєва.*

Доведення. Нехай $H \ne E$ і $B \ne E$ – дві ненульові підгрупи адитивної групи (Q; +; 0). Нехай $h\in H$ і $h \ne 0$, $b\in B$ і $b \ne 0$.

Тоді $h = \frac{a}{b}$, $b = \frac{c}{d}$ де $a, b, c, d \in Z$. Звідси $\frac{a}{b}\cdot bc = ac \in H$ і $\frac{c}{d}\cdot ad = ac \in B$. Отже $H \cap B \ne E$, і підгрупа H – суттєва.

Терему доведено.

Зауваження. Група ($Q \setminus \{0\}$; $\cdot$; 1) містить нескінченно багато несуттєвих підгруп. Наприклад, такою підгрупою буде підгрупа $\langle p \rangle = \{ p^n \mid n\in Z$, p – просте число$\}$, оскільки $\langle p \rangle \cap \langle q \rangle = E$, де $\langle q \rangle = \{ q^n \mid n\in Z$, q– просте число$\}$.

Означення 7. *Абелева група (A; $*$; e) називається локально циклічною, якщо будь-яка скінченна множина її елементів належить до циклічної підгрупи групи A. Циклічною підгрупою називається підгрупа, породжена одним елементом.*

Отже, циклічна група $\langle a \rangle$ складається з цілих кратних елемента a в адитивній групі та з цілих степенів елемента a в мультиплікативній групі.

Теорема 8. *Група* (Q; +; 0) *– локально циклічна, а група* ($Q \setminus \{0\}$; $\cdot$; 1) *– не локально циклічна.*

Доведення. Нехай $M = \{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, ..., \frac{a_n}{b_n}\}$ – довільна скінченна множина раціональних чисел і нехай b– спільний знаменник цих чисел. Тоді кожне з них є цілим кратним числа $\frac{1}{b}$, тобто $M \subset \langle \frac{1}{b} \rangle$ і група (Q; +; 0) – локально циклічна.

Група ($Q \setminus \{0\}$; $\cdot$; 1) – не локально циклічна. Справді, наприклад, числа 2 і 3 не є степенями одного і того ж раціонального числа. Припустимо, що це не так. Тоді

$$2 = \left(\frac{a}{b}\right)^m, \quad 3 = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

І можна вважати дріб $\frac{a}{b}$ нескоротним. Звідси $2b^m = a^m$, $3b^n = a^n$. З цих рівностей випливає, що a і b діляться націло на 2 і на 3, що неможливо для нескоротного дробу. Отже, група ($Q \setminus \{0\}$; $\cdot$; 1) не локально циклічна.

Теорему доведено. Зауважимо, що існують інші доведення теореми 8.

Означення 9. *Абелева група A називається подільною або повною, якщо*

$$\forall n \in N \quad \forall a \in A \quad \exists x \in A \quad (nx = a)$$

коли A– адитивна група і

$$\forall n \in N \quad \forall a \in A \quad \exists x \in A \quad (x^n = a)$$

коли A– мультиплікативна група.

На приклад, група (Q; +; 0) – подільна, а група ($Q \setminus \{0\}$; $\cdot$; 1) – неподільна. Справді, подільність групи (Q; +; 0) випливає з того, що

$$\forall n \in N \quad \forall a \in Q \quad (\frac{a}{n} \in Q),$$

а неподільність ($Q \setminus \{ 0 \}$; $\cdot$; 1) – з того, що, наприклад, рівняння $x^2 = p$, де p – просте натуральне число, не має розв’язків у множині $Q \setminus \{ 0 \}$.

Групу (Q; +; 0) можна мислити як об’єднання зростаючої послідовності циклічних підгруп

$$\langle 1 \rangle < \langle \frac{1}{2!} \rangle < \langle \frac{1}{3!} \rangle < \ldots < \langle \frac{1}{n!} \rangle < \ldots$$

Група ($Q \setminus \{ 0 \}$; $\cdot$; 1) містить елемент -1 порядку 2, бо $(-1)^2 = 1$, який породжує циклічну підгрупу <–1> = { 1; –1} порядку 2. Всі інші її неодиничні підгрупи нескінченні, оскільки для числа $a \notin \{1; -1\}$, $a^n \neq 1$ для $\forall n \in Z \setminus \{0\}$.

Ця група містить нескінченну кількість підгруп, що мають одиничний перетин. Наприклад, якщо p_1, p_2 – різні прості числа, то $< p_1 > \cap < p_2 > = < 1 >$. Тоді говорять, що такі групи утворюють прямий добуток $< p_1 > \times < p_2 >$, елементи якого записуються у вигляді $p_1^m p_2^n$, де $m \in Z, n \in Z$.

Автоморфізми групи (Q; +; 0) та її підгруп

У теорії алгебраїчних систем будь-яке ізоморфне відображення системи на себе називається її автоморфізмом. Добре відомо, що множина всіх автоморфізмів даної алгебраїчної системи утворює групу відносно їх композиції (послідовного виконання цих автоморфізмів). Зокрема, для адитивних груп маємо наступне означення.

Означення 10. *Автоморфізмом групи (G; +; 0) називається таке взаємно однозначне відображення φ множини G на себе, яке задовольняє умову*

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

для будь-яких елементів x і y групи G.

Групу всіх автоморфізмів групи G позначимо $AutG$. Відшукання групи $AutG$, як правило, супроводжується значними труднощами. Це пов’язано з тим, що на групу $AutG$ властивості групи G не переносяться. Підтвердженням цього є автоморфізми групи (Q; +; 0) та її підгруп. Однією з фундаментальних властивостей раціональних чисел є зв’язок між групами (Q; +; 0) та ($Q \setminus \{ 0 \}$; $\cdot$; 1), який характеризує наступна теорема.

Теорема 9. *Група ($Q \setminus \{ 0 \}$; $\cdot$; 1) є групою автоморфізмів групи (Q; +; 0).*

Доведення. Відображення $\varphi(x) = ax$, де $a \in Q \setminus \{ 0 \}$, є взаємно однозначним відображенням множини Q на себе. Оскільки

$$\varphi(x + y) = a(x + y) = ax + ay = \varphi(x) + \varphi(y),$$

то φ – ізоморфізм групи (Q; +; 0).

Покажемо, що інших автоморфізмів групи (Q; +; 0) не існує. Нехай ψ – довільний автоморфізм (Q; +; 0) і нехай $\psi(1) = t$. Покажемо, що $\psi(x) = tx$ для $\forall x \in Q$. Справді, оскільки $\psi(0) = 0$, то

$$0 = \psi(0) = \psi(-1 + 1) = \psi(-1) + \psi(1) = \psi(-1) + t.$$

Звідси, $\psi(-1) = -t = (-1)t$.

Нехай $x \in N$. Тоді $\psi(x) = \psi(\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{x \ \text{доданків}}) = x\psi(1) = xt.$

Нехай $x \in Z \setminus (N \cup \{0\})$. Тоді $\psi(x) = \psi(\underbrace{(-1) + (-1) + \ldots + (-1)}_{|x| \ \text{доданків}}) = |x|\, \psi(-1) = |x|\, t.$

Нехай $x = \frac{m}{n}$, де $m \in Z$, $n \in N$. Тоді

$$mt = \psi(m) = \psi(n\frac{m}{n}) = \psi(\underbrace{\frac{m}{n} + \frac{m}{n} + \ldots + \frac{m}{n}}_{n \ \text{доданків}}) = n\psi(\frac{m}{n}). \text{ Звідси } \psi(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n} t.$$

Отже, ψ визначається множенням чисел із множини Q на певне раціональне відмінне від нуля число.

Теорему доведено. Інше доведення теореми 9 можна знайти, на приклад, в [7, лема 2.1].

Таким методом можна досліджувати групи автоморфізмів підгруп групи (Q; +; 0). У теорії груп відомо [6, 121, теорема 1], що в подільній групі G кожний автоморфізм суттєвої підгрупи H продовжується до автоморфізму всієї групи G. Це означає, що групи автоморфізмів підгруп групи (Q; +; 0) є підгрупами групи ($Q \setminus \{ 0 \}$; $\cdot$; 1).

Найцікавішими серед підгруп групи (Q; +; 0) є циклічні підгрупи, зокрема, підгрупа (Z; +; 0) цілих чисел та адитивні підгрупи кільця p –ових дробів (Q_p; +, $\cdot$; 0), де

$$Q_p = \{\frac{a}{p^n} \mid a \in Z, n \in Z, p - \text{просте} \quad \text{число}\}.$$

Адитивну групу цього кільця можна одержати як об’єднання нескінченного ланцюга адитивних циклічних груп

$$\langle 1 \rangle < \langle \frac{1}{p} \rangle < \langle \frac{1}{p^2} \rangle < \ldots < \langle \frac{1}{p^n} \rangle < \ldots$$

Загальновідомою є інформація про групу автоморфізмів адитивної групи (Z; +; 0) цілих чисел. Подаємо її теоремою з коротким доведенням.

Теорема 10. *Група автоморфізмів групи (Z; +; 0) є циклічною групою порядку 2.*

Доведення. Нехай φ – довільний автоморфізм групи (Z; +; 0) і нехай $\varphi(1) = t$. Тоді по аналогії з теоремою 9, маємо, що $\varphi(x) = tx$ для $\forall x \in Z$. Якщо $\varphi(y) = 1$, то $ty = 1$ і ціле число t є дільником 1. Тому $t \in \{ 1; -1\}$ і маємо автоморфізми $\varphi(x) = x$ та $\varphi(x) = -x$. Отже, $Aut(Z; +; 0) = < -1 >$.

Теорему доведено.

Теорема 11. *$AutQ_p = \langle -1 \rangle \times \langle p \rangle$, де $\langle p \rangle$ – мультиплікативна група, породжена простим числом p.*

Доведення. Нехай φ – довільний автоморфізм групи (Q_p; +; 0) і нехай $\varphi(1) = t$. Тоді легко показати, що $\varphi(x) = tx$ для $\forall x \in Q_p$. З'ясуємо, яким може бути число *t*. Якщо $\varphi(y) = 1$, то $ty = 1$. Отже *p* – ове число *t* є дільником 1, тобто оборотним елементом кільця (Q_p; +, ·; 0). Множина таких елементів Q_p^* кільця (Q_p; +, ·; 0) утворює мультиплікативну групу (Q_p^*; · ; 1).

Нехай $t > 0$ і $t \in Q_p^*$. Тоді $t = \dfrac{a}{p^k}$, $(a, p) = 1$, $a > 0$. Оскільки $t^{-1} = \dfrac{p^k}{a} \in Q_p^*$, то $a = 1$, а $t = \dfrac{1}{p^k} \in \langle p \rangle$.

Якщо $t < 0$, то $t \in \langle -1 \rangle \times \langle p \rangle$. Отже, $AutQ_p = \langle -1 \rangle \times \langle p \rangle$.

Теорему доведено.

Такий підхід до знаходження групи $AutQ_p$ дозволяє узагальнити результат теореми 11 на випадок адитивної групи

$Q_n = \{x \mid x = \dfrac{a}{n}, \quad де \quad a \in Z, n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_m^{s_m}, s_i \in Z, i = 1 \div m, \quad p_i - різні \quad прості \quad числа, \quad m \geq 1\}$, а саме

$$AutQ_n = \langle -1 \rangle \times \langle p_1 \rangle \times \langle p_2 \rangle \times \dots \times \langle p_m \rangle.$$

Висновки. Знання розглянутих у роботі структурних властивостей раціональних чисел буде корисним кожному творчому викладачу математики, їх учням і студентам при встановленні реальних зв'язків класичної елементарної математики з сучасною вищою математикою.

Список використаних джерел

1. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. Ч.1.: Арифметика. Алгебра. Анализ. Москва-Ленинград, 1933. 469 с.
2. Фройденталь Г. Математика как педагогическая задача. Ч. 1. Москва: Просвещение, 1982. 208 с.
3. Фройденталь Г. Математика как педагогическая задача. Ч. 2. М.: Просвещение, 1983. 190 с.
4. Вивальнюк Л.М., Григоренко В.К., Левіщенко С.С. Числові системи. Київ: Вища школа, 1988. 272 с.
5. Лиман Ф.М. Числові системи. Суми: МакДен, 2010. 192 с.
6. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т.1. Москва: Мир, 1974. 336 с.
7. Черников С.Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М.: Наука, 1980. 384 с.

References

1. Klein F. Elementary mathematics from higher point of view. Part 1. Arithmetic. Algebra. Analysis. Moscow, 1933, 469 p. (in Russian).
2. Freudenthal H. Mathematics as a pedagogical problem. PROSVESHCHENIE: Moscow, 1982. 208p. (in Russian).
3. Freudenthal H. Mathematics as a pedagogical problem. PROSVESHCHENIE: Moscow, 1983. 190p.(in Russian).
4. Vyval'nyuk L.M., Grygorenko V.K., Levishchenko S.S. Numerical systems. VYSHCHA SHCOLA: Kyiv, 1988. 272 p. (in Ukrainian).
5. Lyman F.M. Numericalsystems. MAKDEN: Sumy, 2010. 192 p.(in Ukrainian).
6. Fuchs L. Infinite abelian groups. P.1. MIR: Moscow, 1974. 336 p.(in Russian).
7. Chernikov S.N. Groups with given properties by system of subgroups. NAUKA: Moscow, 1980. 384 p. (in Russian).

THE STRUCTURE PROPERTIES OF RATIONAL NUMBERS ARE IMPORTANT COMPONENT OF MATHEMATICAL KNOWLEDGE OF MATHEMATICS TEACHERS

Fedir Lyman, Oksana Odintsova
Makarenko Sumy State Pedagogical University, Ukraine

Abstract. *There are investigated some structure properties of field (Q; +, ·; 0, 1) rational numbers, some properties of its subfields, some properties of subgroups of additive group (Q; +; 0) and multiplicative group (Q \ {0}; ·; 1) of this field in this article.*

One of the basic subrings of rational numbers field is integer numbers ring. The stimulus to its extension to minimal numeral field (which are rational numbers field) is the problem of equation's ax = b with integer coefficients soluble. When such equation has a solution with a ≠ 0, the minimal field condition gives an answer about representation any rational number as a quotient of two integer numbers.

Thus, the rational numbers set Q = Z ∪Q \ Z when Z – the integer numbers set and Q \ Z– the fraction numbers set. The uniquely representation any rational number q ≠ 0 as a two integer numbers quotient is commonly known. But uniquely representations any rational number exist infinitely a lot. For example, it's interesting and useful for many problems next uniquely representation any rational number: if q > 0 then $q = p^n \dfrac{a}{b}$ *when p – prime number, n ∈Z, a and b are natural numbers being (a, b) = (a, p) = (b,p) = 1; if q < 0 then* $q = -p^n \dfrac{a}{b}$.

On subject of rings of rational numbers field it's consider the issues about their discreteness and density. It's proved, in particular, that every some ring of rational numbers field is density when fractional number belongs to it.

When we investigated the properties of numeral fields which rational numbers field don't have,it's showed the incompleteness of this field. It's proved this fact without using the irrational numbers.

It's suggested the one of possible proof that the group of automorphisms of group (Q; +; 0) is isomorphic to group (Q \ {0}; ·; 1), when we consider the additive and multiplicative groups of rational numbers field. It's proved that the group of automorphisms of group's (Q; +; 0) subgroups is isomorphic to subgroups of group (Q\ {0}; ·; 1) too. The last fact is illustrated by an example of group (Z ; + ; 0) integer numbers and an example of group (Q_p; +; 0) p- adic numbers for any prime number p.

The teachers of Mathematics may make the knowledge of their students more deepen and more modern with all these facts.

Key words: *group, ring, field, automorphism, ration number, fraction, fraction number, discreteness, density.*