Подкопаєва – Режим доступу до ресурсу: http://osvita.ua/school/lessons_summary/edu_technology/27669/.

Анотація. Рудик В. В. Особливості методики вивчення статистичних функцій в MS Excel у основних класах.

У статті пояснюється важливість вивчення Microsoft Excel у школі. Розглянуто сутність поняття «статистика»; основні статистичні функції СРЗНАЧ(), МЕДИАНА(), МОДА(), МАКС(), МИН(), СУММПРОИЗВ(), СУММКВ(); охарактеризовані інструменти «Описательная статистика», «Гистограмма», «Ранг», «Персентиль».

Ключові слова: *комп'ютерна електронна система, MS Excel, статистика, СРЗНАЧ(), МЕДИАНА(), МОДА(), МАКС(), МИН(), СУММПРОИЗВ(), СУММКВ(),ДИСП(), ДИСПР(), СТАНДОТКЛОН(), СТАНДОТКЛОНП(), СУММСУММКВ(), СУММКВРАЗН(), «Описательная статистика», «Гистограмма», «Ранг», «Персентиль».*

Summary. Rudyk VV Features of the method of studying statistical functions in MS Excel in the main classes.

The article explains the importance of studying Microsoft Excel at school. The essence of the concept of "statistics" is considered; The main statistical functions of the FRONT (), MEDIANA (), MODE (), MAX (), MIN (), SIMULATION (), SUMMCH (); Characterized by Descriptive Statistics, Histogram, Rank, Persentiel.

Keywords: *computer electronic system, MS Excel, stylistics, (), MEDIANA (), MODE (), MAX (), MIN (), SIMPROIDISM (), SYMMKV (), DISP (), DISP (), STANDOTCCLONE (), STANDOTCLONP (), SUMMMUMMKV (), SUMMERTOWN (), Descriptive Statistics, Histogram, Rank, Persentiel.*

Старовойтова Наталія
Магістрантка, спеціальності «Середня освіта (Математика)»
natysikmaus@gmail.com
Науковий керівник – Ю.В. Хворостіна

ДІОФАНТОВІ РІВНЯННЯ У ВСЕУКРАЇНСЬКИХ УЧНІВСЬКИХ ОЛІМПІАДАХ З МАТЕМАТИКИ

Традиційно основним завданням шкільного курсу алгебри є навчити учнів розв'язувати рівняння та задачі, що зводяться до розв'язування рівнянь. Недаремно впродовж багатьох років алгебру розглядали як науку про рівняння і способи їх розв'язування. Крім цього, слід зазначити, що значна кількість задач шкільного курсу геометрії теж розв'язується алгебраїчним способом, тобто за допомогою рівнянь. Отже, без уміння розв'язувати рівняння різного типу та різного ступеня складності не можна оволодіти шкільною програмою з математики.

Поступово вид і способи розв'язування рівнянь ускладнюються. Упродовж вивчення алгебри учні опановують уміння розв'язувати квадратні, ірраціональні, логарифмічні, тригонометричні, показникові рівняння, а також їх системи, але, на жаль, усі ці рівняння відносяться до так званих визначених, тобто рівнянь з однією змінною або (якщо це система) систем, де кількість змінних дорівнює кількості рівнянь. Загальноприйнята шкільна програма з математики зовсім «забула» про існування не визначених рівнянь (рівнянь, які мають кілька змінних або систем, де кількість змінних більша, ніж кількість рівнянь). Такі рівняння зустрічаються фактично лише на математичних олімпіадах. Виникає риторичне питання: якщо учень не знайомий навіть з основами теорії невизначених рівнянь, як же він буде їх розв'язувати?

Проглянувши Всеукраїнські олімпіади з математики з 2013 по 2019 роки (7-11 класи), можна побачити лише декілька задач на тему Діофантових рівнянь.

Таблиця 1

Кількість завдань, що містять Діофантові рівняння по рокам та класам

Навчальні роки	7 клас	8 клас	9 клас	10 клас	11 клас
2018-2019	1	-	-	-	-
2017-2018	-	-	1	1	1
2016-2017	-	1	-	-	-
2015-2016	-	1	-	-	-
2014-2015	-	-	-	-	-
2013-2014	-	-	2	1	-

З таблиці ми бачимо, що Діофантовим рівнянням приділяється мало уваги.

Наведено приклади завдань, що містять Діофантові рівняння, у Всеукраїнських учнівських олімпіадах з математики.

Приклад 1. (2013-2014 навчальний рік, 9 клас)

Розв’яжіть у натуральних числах *x, y, z* систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x^2 = 4y^2 + 3z^2 + 2 \\ 13x = 4y + 3z + 29. \end{cases}$$

Розв’язання.

З першого рівняння системи маємо, що $x > max\{y, z\}$ та *z* парне. Якщо *x*– парне, то у другому рівнянні отримаємо суперечність. Таким чином x – непарне. З другого рівняння також маємо таку оцінку: $13x < 4x + 3x + 29 \Rightarrow 6x < 29$. З усього наголошеного *x*<5, тобто можливі значення *x=1* (що суперечить умові максимальності *x*) та *x=3*. З останнього простим перебором знаходимо єдиний розв’язок: (3,1,2).

Відповідь: (3,1,2)

Приклад 2. (2013-2014 навчальний рік, 9 клас)

Знайдіть усі такі натуральні *n*, для яких числа $12n - 119$ та $75n - 539$ є точними квадратами натуральних чисел.

Розв’язання.

Позначимо $a^2 = 12n - 119$ та $b^2 = 75n - 539$. Тепер звільнимось від змінної *n*: $\frac{a^2+119}{12} = \frac{b^2+539}{75}$ або $25(a^2 + 119) = 4(b^2 + 539)$.

Далі перепишемо цю рівність таким чином:

$4b^2 - 25a^2 = 819$ або $(2b - 5a)(2b + 5a) = 3^2 \cdot 7 \cdot 13$.

Залишається перебрати варіанти, з урахуванням того, що $2b - 5a < 2b + 5a$.

$\begin{cases} 2b - 5a = 1, \\ 2b + 5a = 819, \end{cases} \Rightarrow 10a = 818$ -цілих розв’язків немає.

$\begin{cases} 2b - 5a = 3, \\ 2b + 5a = 273, \end{cases} \Rightarrow 10a = 270 \Rightarrow \begin{cases} a = 27, \\ b = 69, \end{cases} \Rightarrow n = \frac{a^2+119}{12} = \frac{848}{12}$ -не ціле число.

$\begin{cases} 2b - 5a = 7, \Rightarrow 10a = 110 \Rightarrow \\ 2b + 5a = 117, \end{cases} \begin{cases} a = 11, \Rightarrow \\ b = 31, \end{cases} n = \frac{a^2+119}{12} = 20$ -перша відповідь.

$\begin{cases} 2b - 5a = 9, \Rightarrow 10a = 82 \\ 2b + 5a = 91, \end{cases}$ -цілих розв'язків немає.

$\begin{cases} 2b - 5a = 13, \\ 2b + 5a = 63, \end{cases} \Rightarrow 10a = 50 \Rightarrow \begin{cases} a = 5, \\ b = 19, \end{cases} \Rightarrow n = \frac{a^2+119}{12} = 12$ –друга відповідь.

$\begin{cases} 2b - 5a = 21, \\ 2b + 5a = 39, \end{cases} \Rightarrow 10a = 18$ –цілих розв'язків немає.

Відповідь: *n*=20, *n*=12.

Приклад 3. (2015-2016 навчальний рік, 8 клас)

Знайдіть принаймні одну пару натуральних чисел *(x, y)*, що задовольняє рівність:

$$\frac{1}{2}(x^2 - y^3) = 2016.$$

Розв'язання.

Перепишемо умови задачі таким чином:

$x^2 - y^3 = 2 \cdot 2016 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7 = 2^6 \cdot (64 - 1) = 2^{12} - 2^6.$

Неважко побачити як шукані розв'язки легко знаходяться.

Відповідь: *x*=64; *y*=4.

Приклад 4. (2016-2017 навчальний рік, 8 клас)

Знайдіть усі пари цілих чисел (*a*, *b*), які задовольняють умову:

$$a^2 + b^2 = a + b + ab$$

Розв'язання.

Перепишемо рівність таким чином:

$$2a^2 + 2b^2 - 2a - 2b - 2ab = 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2 = 2$$

Сума квадратів трьох цілих чисел дорівнює 2. Розглянемо можливі випадки.

Випадок 1. $a - b = 0; |a - 1| = |b - 1| = 1$. Тоді зрозуміло, що розв'язками є такі пари чисел (*a*, *b*): (2; 2) та (0; 0).

Випадок 2. $a - 1 = 0;\ |a - b| = |b - 1| = 1$. Розв'язками є такі пари чисел (*a*, *b*): (1; 2) та (1; 0).

Випадок 3. $b - 1 = 0;\ |a - b| = |a - 1| = 1$. Розв'язками є такі пари чисел (a, b): (2; 1) та (0; 1).

Відповідь: (*a*, *b*): (2; 2), (0; 0), (1; 2), (1; 0), (2; 1) та (0; 1).

Приклад 5. (2017-2018 навчальний рік, 9 клас)

Для яких цілих чисел *a*, *b*, різної парності існують такі не цілі числа *x*, *y*, що числа x+y та *ax*+*by* є цілими?

Розв'язання.

Оскільки $ax + by = a(x + y) + (b - a)y$. Звідси випливає, що число (*b*-*a*)*y* – ціле.

Якщо $|a - b| = 1$, то *y* має бути цілим – суперечність.

Для $|a - b| > 1$ можемо вибрати $y = \frac{1}{b-a}$ та $x = -y$. Тоді $x + y = 0, (b - a)y$ – ціле, звідси й $ax + by$ буде цілим.

Відповідь: для чисел $|a - b| \neq 1$.

Приклад 6. (2017-2018 навчальний рік, 10 клас)

Три попарно різних натуральних числа *a*, *b*, *c* мають добуток 80 . Якому найменшому простому числу може дорівнювати їхня сума?

Розв'язання.

Зрозуміла, що їхня сума більше 2, тому простим число, яким може бути їхня сума, є непарне число. Оскільки усі три числа не можуть бути непарними, бо мають добутком 80, то там два парних числа і одне непарне. Непарних дільників у числа $80 = 2^4 \cdot 5$ рівно два – 1 та 5 . Розглянемо ці випадки.

c=1, далі можливі такі варіанти:

a=2, b=40, *a*+*b*+*c*=43– просте. *a*=4, *b*=20, *a*+*b*+*c*=25– не просте.

a=8, b=10, a+b+c=19– просте, що менше від 43 .

c=5, тут такі варіанти:

a=2, b=8, a+b+c=15– не просте.

Відповідь: 19.

Приклад 7. (2017-2018 навчальний рік, 11 клас)

Три попарно різних натуральних числа a, b, c мають добуток 320 . Якому найменшому простому числу може дорівнювати їхня сума?

Розв'язання.

Зрозуміла, що їхня сума більше 2 , тому простим число, яким може бути їхня сума, є непарне число. Оскільки усі три числа не можуть бути непарними, бо мають добутком 320 , то там два парних числа і одне непарне. Непарних дільників у числа $320 = 2^6 \cdot 5$рівно два – 1 та 5 .

Розглянемо ці випадки.

c=1, далі можливі такі варіанти:

$a = 2, b = 160, a + b + c = 163$ – просте. $a = 4, b = 80, a + b + c = 85$ – не просте.

$a = 8, b = 40, a + b + c = 49$ – не просте.

$a = 16, b = 20, a + b + c = 37$ – просте, що менше від 163 .

$a = 32, b = 10, a + b + c = 43 > 37. a = 64 > 37 \Rightarrow a + b + c > 37.$

c=5, тут такі варіанти:

$a = 2, b = 32, a + b + c = 33$ – не просте. $a = 4, b = 16, a + b + c = 25$ – не просте.

Відповідь: 37.

Приклад 8. (2018-2019 навчальний рік, 7 клас)

Знайдіть усі пари натуральних чисел (a, b), що задовольняють рівності:

$$ab^3 + a^3 + b + 1 = 2019$$

Розв'язання.

З умов задачі зрозуміло, що обидві невідомі – парні, бо інакше маємо рівність парного та непарного чисел. Позначимо через $a = 2n$ та $\mathrm{b} = 2\mathrm{k} \Rightarrow$

$$2n \cdot 8k^3 + 8n^3 + 2k = 2018 \text{ або } 8nk^3 + 4n^3 + k = 1009$$

Далі можна зрозуміти, що k обов'язково має бути непарним, і зараз доволі просто все розв'язати простим невеликим перебором. $nk^3 \leq \frac{1009}{8}$ або $k^3 \leq 125.$

Таким чином залишається рівно три варіанти.

$k = 5 \Rightarrow 1000n + 4n^3 = 1004 \Rightarrow n = 1$ задовольняє умову. При більших n ліва частина стає більшою за 1004.

$k = 3 \Rightarrow 64n + 4n^3 = 1006 \Rightarrow$ розв'язків немає, бо ліва частина ділиться на 4, а права – ні.

$k = 1 \Rightarrow 8n + 4n^3 = 1008 \Rightarrow 2n + n^3 = 252 \Rightarrow n = 2m \Rightarrow 4m + 8m^3 = 252 \Rightarrow$ $m + 2m^3 = 63$. Залишається розібрати три випадки по m, оскільки з останньої рівності очевидно, що $m \leq 3, m = 1, m = 2$ та $m = 3$ умови не задовольняє.

Тому шукана пара єдина, $k = 5$ та $n = 1 \Rightarrow b = 10$ та $\mathrm{a} = 2$.

Відповідь: *a=2, b=10.*

Список використаних джерел

1. Збірники Всеукраїнських олімпіад з математики – [Електрон. ресурс] – Режим доступу: http://www.reshetylivka-osvita.edu.poltava.ua/olimpiadi_zahodi_konkursi/
2. Чемерис М. І. Діофантові рівняння та методи їх розв'язування / М. І. Чемерис // Шкільний світ. – 2013. – №19(703). – С. 8-10

Анотація. Старовойтова Н. Діофантові рівняння у Всеукраїнських учнівських олімпіадах з математики. *У статті проаналізовано завдання Всеукраїнських учнівських олімпіад з математики за період з 2013 по 2019 навчальні роки для учнів 7-11 класів на наявність у них Діофантових рівнянь. Ми побачили, що таких задач мало. Напевно через те, що в шкільній програмі не приділяється взагалі увага цій темі, а рівняння у цілих числах розглядаються лише на математичних гуртках та факультативах. Також у статті наведено приклади завдань, що містять рівняння у цілих числах, та способи їх розв'язання.*

Ключові слова: *Діофантові рівняння, рівняння в цілих числах, Всеукраїнські олімпіади з математики.*

Abstract. Starovoitova N. Diophantine equations in the All-Ukrainian pupil Olympiads in mathematics. *The article analyzes the tasks of the All-Ukrainian student Olympiads in mathematics for the period from 2013 to 2019 academic years for students of grades 7-11 for the presence of Diophantine equations. We have seen that there are few such tasks. Probably because the school program does not pay attention to this topic at all, and the equations in integers are considered only in math groups and electives. Also in the article are examples of problems that contain equations in integers, and the ways to solve them.*

Keywords: *Diophantine equations, equations in integers, All-Ukrainian Olympiads in mathematics.*

Стеценко Каріна
Магістрантка, спеціальності «Середня освіта (Математика)»
Karina829@ukr.net
Науковий керівник – Ю.В. Хворостіна

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ЗОБРАЖЕНЬ ЧИСЕЛ ЗНАКОДОДАТНИМИ ТА ЗНАКОЗМІННИМИ РЯДАМИ ЛЮРОТА

У 1883 році німецький математик Я. Люрот знайшов розклад дійсного числа $x \in (0;1]$ у знакододатний ряд виду:

$$x = \frac{1}{d_1+1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{d_1(d_1+1)\dots d_{n-1}(d_{n-1}+1)(d_n+1)} + \dots, \qquad d_n \in \mathbb{N},$$

який тепер називається знакододатним рядом Люрота. У 1990 році С. Калпазідоу, А. Кнопфмахер, Дж. Кнопфмахер запропонували знакозмінний аналог розкладів Люрота. Вони довели, що довільне дійсне число $x \in (0;1]$ можна подати у вигляді скінченної суми або нескінченного знакозмінного ряду:

$$x = \frac{1}{a_1} + \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^{n-1}}{a_1(a_1+1)\dots a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n}, \quad a_n \in \mathbb{N},$$

причому кожне ірраціональне число має єдине нескінченне і неперіодичне представлення, а кожне раціональне число або скінченне, або періодичне.

Теорема 1. Кожне число $x \in (0;1]$ єдиним чином розкладається в ряд Люрота, тобто для числа x існує єдина послідовність натуральних чисел (d_n), $d_n = d_n(x)$, така, що