Abstract. Mashchenko G. Functions in economic models. *The article reviews the application of mathematical methods in the study of economic processes, in particular when analyzing and predicting of consumer behavior and demand.*

Keywords: *mathematical methods, economic-mathematical model, consumer behavior, of consumer behaviour, demand.*

Володимир Чавдар
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, м. Суми
Науковий керівник – Т.Д. Лукашова

ТРАНСЦЕНДЕНТНІ ЧИСЛА

Постановка проблеми. До поняття чисел тієї чи іншої природи, до їх використання в науці і практичній діяльності людство прийшло поступово у процесі свого історичного розвитку. Введення нових чисел, їх вивчення і використання відбувалось поступово. Наприклад, сучасні уявлення про комплексні числа були сформовані у XVIII-XIX століттях. Що стосується повного розуміння природи чисел, то воно взагалі було досягнуто лише в другій половині XIX століття – значно пізніше, ніж числа певної числової системи почали використовуватись на практиці. Проблеми, що стосувалися теорії трансцендентних чисел, вперше були сформульовані Л. Ейлером, який висловив гіпотезу, що існують числа, які не є коренями многочленів з раціональними коефіцієнтами. Він сформулював задачу доведення трансцендентності ірраціональних значень логарифмічної функції та увів термін «трансцендентні числа». У наш час теорія трансцендентних чисел вважається одним із найскладніших розділів математики.

Аналіз актуальних досліджень. Витоки теорії алгебраїчних і трансцендентних чисел беруть свій початок з праць Л. Ейлера. У подальшому над цією проблематикою працювали провідні математики того часу. Фундаментальні результати було отримано Ж. Ліувіллем, Ліндеманом, Ермітом та Кантором. Робота з даної теми була актуальною протягом 100-та років, підтвердженням цього факту є те що у 1900 р. на Паризькому міжнародному математичному конгресі один з найвидатніших німецьких математиків Д. Гільберт (1862-1943) вказав на 23 найважчі математичні проблеми, розв’язання яких істотно сприяло б подальшому розвитку математики. Серед цих проблем була проблема (під №7) про арифметичну природу чисел виду α^{β}, де α – алгебраїчне число, відмінне від 0 і 1, а β – алгебраїчне число, не нижче від другого степеня, тобто ірраціональне алгебраїчне число.

Повністю розв'язати сьому проблему Гільберта вдалося московському математику О. Гельфонду. Метод, створений ним, дозволив довести і багато інших теорем, а знайдене Беккером посилення, викликало значний прорив у теорії чисел.

Мета статті. У статті розглянуто основні властивості алгебраїчних і трансцендентних чисел; наведено доведення трансцендентності конкретних дійсних чисел; досліджено арифметичну природу чисел e та π.

Виклад основного матеріалу.

Якщо говорити про трансцендентні числа, потрібно починати з визначення алгебраїчних чисел. Комплексне (або дійсне) число α називається *алгебраїчним*, якщо воно є коренем деякого многочлена з раціональними (цілими) коефіцієнтами. Будь-яке неалгебраїчне число називається *трансцендентним*. Інакше кажучи, комплексне число α називається трансцендентним, якщо воно не є коренем жодного алгебраїчного рівняння степеня $n \geq 1$ з раціональними коефіцієнтами. З цього означення випливає, що дійсне трансцендентне число повинно бути ірраціональним. Обернене твердження неправильне. Наприклад, $\sqrt{7}$ –ірраціональне число, але воно, є алгебраїчним. У 1844 році французький математик Жозеф Ліувілль (1809-1882) уперше довів факт існування трансцендентних чисел.

Алгебраїчні та трансцендентні числа мають цілий ряд властивостей, зокрема, *сума, різниця, добуток і частка алгебраїчних чисел є числа алгебраїчні.*

Приклад 1. Доведемо, що число $\sqrt[3]{3-\sqrt[4]{5+2\sqrt{11}}}$ є алгебраїчним.

Справді, числа 5 і $2\sqrt{11}$алгебраїчні за означенням алгебраїчного числа. Число $\alpha=5+2\sqrt{11}$ алгебраїчне за властивістю. Число $\beta = \sqrt[4]{\alpha}$ алгебраїчне, бо є коренем многочлена ($x^3-\alpha$) з алгебраїчними коефіцієнтами. Число $\gamma =3-\beta$ алгебраїчне за властивістю. Число $\sqrt[3]{\gamma}$ алгебраїчне, бо є коренем многочлена $x^3 - \gamma$ з алгебраїчними коефіцієнтами.

Зазначимо, що сума, різниця, добуток і частка трансцендентних чисел у загальному випадку може й не бути трансцендентним числом. Отже, трансцендентні числа, на відміну від алгебраїчних, поля не утворюють. У той же час, *сума, різниця, добуток і частка двох чисел, одне з яких алгебраїчне, а друге – трансцендентне, є трансцендентним числом.*

Через 20-25 років після досліджень Ліувілля німецький математик Георг Кантор (1845-1918) дав просте і оригінальне доведення існування трансцендентних чисел, яке ґрунтується зовсім на інших принципах. Він показав, що множина всіх дійсних алгебраїчних чисел є зчисленною, а множина дійсних чисел незчисленна. З цього випливає, що множина дійсних неалгебраїчних, тобто трансцендентних чисел, незчисленна.

Слід зазначити, що доведення Кантора не дає можливості побудувати будь-яке конкретне трансцендентне число. З цього погляду доведення існування трансцендентних чисел Ліувілля є ефективнішим.

Значний внесок у розвиток теорії трансцендентних чисел зробив Карл Луї Фердинанд Ліндеман де Корель, який довів наступне твердження.

Теорема 1. *Якщо* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ *є різні між собою алгебраїчні числа, а*

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$$

є довільні алгебраїчні числа, які не дорівнюють нулю одночасно, то рівність

$$\beta_1 e^{\alpha_1} + \beta_2 e^{\alpha_2} + \dots + \beta_n e^{\alpha_n} = 0 \tag{1.9}$$

неможлива.

З теореми Ліндемана, випливають і такі твердження:

1) e^{α}- *трансцендентне для всякого алгебраїчного* $\alpha \neq 0$

2) *натуральний логарифм всякого дійсного алгебраїчного числа (крім 1) є трансцендентним числом*

3) *довільне, відмінне від 1 число, що має раціональний натуральний логарифм, – трансцендентне*

4) $sin\,\alpha$, $cos\,\alpha$, $tg\,\alpha$ *є трансцендентними при дійсному алгебраїчному* $\alpha \neq 0$ $[2, 211]$.

Приклад 2. Довести трансцендентність $\sin \alpha$ у випадку дійсного алгебраїчного $\alpha \neq 0$.

Припустимо супротивне, нехай $\sin a = \beta$ – алгебраїчне число. Через те що

$$\sin a = \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}$$

то

$$\frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i} = \beta$$

звідки $\left(e^{ia}\right)^2 - 2i\beta e^{ia} - 1 = 0$, тобто e^{ia} є коренем квадратного рівняння

$$x^2 - 2i\beta x - 1 = 0$$

з алгебраїчними коефіцієнтами і тому за властивістю алгебраїчних чисел e^{ia} має бути алгебраїчним. Але це неможливо, бо ia – алгебраїчне число, відмінне від нуля.

Найбільш знаменитими трансцендентними числами є e i π. Числа e i є одними з найбільш вживаних констант сучасної математики. Число π дорівнює відношенню довжини кола до його діаметра та не залежить від розмірів кола. Першим відомим наближенням числа π було ціле число 3: математики Стародавнього Вавілону вважали, що довжина кола приблизно втричі довша за його діаметр. У Стародавньму Єгипті знайшли більш точніше відношення. Наприклад, у папірусі (1650 р. до н.е.) для числа π наводиться значення $\left(\frac{16}{9}\right)^2$ яке у десятковому наближенні дає 3,16. Архімед обчислював наближення значення π, використовуючи значення периметрів правильних вписаних та описаних у коло многокутників (від 6-ти до 96-кутника). Тим самим він встановив, що $3\frac{10}{71} \le \pi \le 3\frac{1}{7}$. З точністю до двох знаків після коми це означає, що $\pi \approx 3{,}14$. Більш точне значення $\pi \approx 3\frac{17}{20} \approx 3{,}14166$ знайшов видатний римський астроном Клавдій Птолемей [7, 196]. У Індії та Китаї використовувались інші наближення числа π: $\pi = \sqrt{10}$ та $\pi \approx \frac{355}{133} \approx 3{,}1415927$. Голландський математик та обчислювач Людольф ван Цейлен (1540-1610) продовжуючи роботу по обчисленню нових десяткових знаків π, подвоюючи за методом Архімеда число сторін вписаних та описаних многокутників, дійшов до 32512254720-кутника і обчислив 20 точних десяткових знаків числа π. Пізніше він покращив свій попередній результат і знайшов 32 точних десяткових знаки для числа π. Це було значне досягнення і на його честь число π було названо «числом Людольфа». Лише в 1706 році в «Огляді досягнень математики» англійський математик. У. Джонс вперше використав літеру π. Останні відомі дані 13,3 трильйони знаків після коми станом на 2014 рік.

Що до ірраціональності чисел e i π. Вона була відомою порівняно давно. Для числа e відповідне доведення досить просте.

Теорема 2. *Число е – ірраціональне.*

Доведення. Припустимо, що число e – раціональне. Тоді $e = \frac{a}{b}$, звідки число $b!\,e$ – ціле, але

$$b!\,e = b! + \frac{b!}{1!} + \frac{b!}{2!} + \cdots + \frac{b!}{b!} +$$
$$+ \frac{b!}{(b+1)!} + \frac{b!}{(b+2)!} + \cdots$$

У правій частині всі доданки першого рядка – цілі числа, а так як і ліва частина є числом цілим (в силу нашого припущення), цілим повинна бути і сума доданків другого рядка, тобто величина.

$$\alpha = \frac{1}{(b+1)} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \frac{1}{(b+1)(b+2)(b+3)} + \cdots$$

але ця сума додатна і в той же час, очевидно, менша за 1

$$\frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^3} + \cdots = \frac{1}{b} \leq 1$$

а з цього слідує, $0 < \alpha < 1$, і α не може бути цілим числом, що і доводить ірраціональність числа e. Теорему доведено $[6, 122]$.

Доведення ірраціональності числа π значно складніше. Вперше ірраціональність числа π довів Ламберт у 1761 році. Доведення спиралося на розклад числа $\frac{\pi}{4}$ у ланцюговий дріб. Оскільки цей дріб виявився нескінченним, то число $\frac{\pi}{4}$, а отже, і π буде ірраціональним. Пізніше доведення було уточнено Лежандром. Доведення Ламберта і Лежандра можна знайти у книзі академіка С.Н. Бернштайна «Про квадратуру круга» ($[1, 73]$).

У даній статті подано доведення ірраціональності числа π, яке запропонував американський математик Нівен у 1947 році.

Теорема 3. *Число π – ірраціональне.*

Доведення. Припустимо супротивне, тобто, що π – раціональне. Тоді $\pi = \frac{a}{b}$, де a *і* b – цілі. Розглянемо многочлени

$$f(x) = \frac{b^n x^n (\pi - x)^n}{n!} = \frac{b^n (a - bx)^n}{n!}$$

$$F(x) = f(x) - f^{II}(x) + f^{IV}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x)$$

Оскільки x входить у чисельник многочлена $f(x)$ з показниками від n до $2n$, то $f(x)$ можна записати в такому вигляді:

$$f(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=n}^{2n} a_{i-n} x^i$$

звідки видно, що

$$f(0) = f'(0) = \cdots f^{(n-1)}(0) = 0$$

і що в похідній $f^{(k)}(x)$, $n \leq k \leq 2n$ при $x = 0$ зберігається лише доданок, утворений членом многочлена $f(x)$, який містить x^k. Тому

$$f^k(0) = \frac{k!}{n!} a_{k-n}$$

Отже, для $0 \leq j \leq 2n$, $f^j(0)$ – ціле число, оскільки, очевидно, що a_{j-n} – цілі числа. Але з першої рівності дістанемо.

$$f(\pi - x) = f\left(\frac{a}{b} - x\right) = \frac{\left(\frac{a}{b} - x\right)^n \left[a - b\left(\frac{a}{b} - x\right)\right]^n}{n!} = f(x)$$

Отже, при будь-якому j, $f^{(i)}(x) = f^{(i)}(\pi - x)$ і $f^{(j)}(\pi) = f^{(i)}(0)$ – також ціле число. Тому $F(0)$ і $F(\pi)$ – цілі числа.

Ураховуючи тепер, що з

$$\frac{d}{dx}(F'(x)\sin(x) - F(x)\cos(x)) = F''(x)\sin(x) + F(x)\sin(x) = f(x)\sin(x)$$

випливає

$$I = \int_0^\pi f(x)\sin(x)\,dx = [F'(x)\sin(x) - F(x)\cos(x)]_0^\pi = F(\pi) + F(0)$$

приходимо до висновку: I – число ціле, притому додатне, бо в інтервалі $(0, \pi)$ підінтегральна функція додатна. Але для $0 < x < \pi$ з першої рівності матимемо

$$f(x)\sin(x) < \frac{\pi^n \alpha^n}{n!}$$

Остання нерівність показує, що для досить великих n підінтегральна функція, а разом з тим і сам інтеграл можуть стати як завгодно малими. Ця суперечність і доводить ірраціональність числа π $[6, 124]$.

У 1873 р. французькому математику Ерміту вдалося довести трансцендентність числа e. У 1882 р. Ліндеман, користуючись методом Ерміта, довів трансцендентність числа π. Цим самим було доведено неможливість розв'язання славнозвісної проблеми квадратури круга (тобто неможливість побудувати за допомогою циркуля і лінійки, квадрата, рівновеликого за площею кругу з радіусом, що дорівнює одиниці, або, що те саме, – відрізка завдовжки π). Взагалі, Ліндеман довів більш загальне твердження, з якого відразу ж випливає трансцендентність числа π.

Список використаних джерел

1. Бернштейн С.Н. О квадратуре круга. / С.Н. Бернштейн – Москва-Ленинград, 1936. – 239 с.
2. Бородін О.І. Теорія чисел / О.І.Бородін. – К.: Вища школа, 1970. – 275 с.
3. Гельфонд А.О. Трансцендентные и алгебраические числа / А.О. Гельфонд М., 1952. – 223 с.
4. Дринфельд Г.И. Трансцендентность числа e и π / Г.И.Дринфельд – Харьков, 1952. – 79 с.
5. Лиман Ф.М. Елементи теорії груп, кілець і полів: Навчальний посібник / Ф.М. Лиман, Т.Д. Лукашова – Суми: МакДен, 2013. – 208 с.
6. Шидловский А.Б. Диофантовы приближения и трансцендентные числа / А.Б. Шидловский – М., 1982 – 264 с.
7. Энциклопедия для детей. Математика / Глав.ред. М.Д. Аксенова. – Т. 11. – М.: Аванта+, 2002. – 688 с.

Анотація. Чавдар В.М. Трансцендентні числа. *Стаття присвячена трансцендентним числам. У ній проаналізовано наукову літературу з теми дослідження, систематизовано властивості алгебраїчних та трансцендентних чисел, описані способи побудови трансцендентних чисел, доведено трансцендентність окремих дійсних (комплексних чисел). Також наводяться основні теореми за даної теми.*

У даній статті всі дані наводяться в хронологічному порядку, що наочно демонструє весь розвиток теорії трансцендентних чисел. Розглянуто знамениті класичні сталі: е, π та співвідношення, що з ними пов'язані. Також наводяться найбільш відомі досягнення науковців пов'язані з цими числами. Розглянуто найбільш відомі доведення їх ірраціональності та трансцендентності.

Стаття може бути корисною учням, що цікавляться математикою, студентам фізико-математичного факультету для підготовки до занять та вчителям математики з метою самоосвіти.

Ключові слова: *трансцендентні числа, число* е, *число* π.

Аннотация. Чавдар В.М. Трансцендентные числа. *Статья посвящена трансцендентным числам. В ней проанализирована научная литература по теме исследования, систематизированы свойства алгебраических и трансцендентных чисел, описаны способы построения трансцендентных чисел, доказано* *трансцендентность отдельных действительных (комплексных чисел). Также в статью включены основные теоремы по данной теме.*

В данной статье все данные приводятся в хронологическом порядке, наглядно демонстрируя все развитие теории трансцендентных чисел. Рассмотрены знаменитые классические постоянные: е, π и соотношения, что с ними связанные. Также приводятся наиболее известные достижения ученых связанные с этими числами. Рассмотрены наиболее известные доказательства их иррациональности и трансцендентности.

Статья может быть полезна ученикам, что интересуются математикой, студентам физико-математического факультета для подготовки к занятиям и учителям математики с целью самообразования.

Ключевые слова: *трансцендентные числа, число е, число π.*

Abstract. Chavdar V.M. Transtsendentn number. *In this article describes about transcendental numbers. We analyzed the scientific literature on the subject of research, systematically properties of algebraic and transcendental numbers, describes methods of constructing transcendental numbers proved the transcendence of individual real (complex numbers). The article also introduced the basic theorems on the subject. In this article, all data are presented in chronological order, demonstrating the entire development of the theory of transcendental numbers. Posted a few examples. Considered famous classical constants: e, π and the relations connected with them. It also provides best-known achievements of scientists associated with these numbers. Considered the most famous proof of their irrationality and transcendence.*

The article can be useful for students that are interested in mathematics, students of physics and mathematics to prepare for classes and teachers of mathematics for the purpose of self-education.

Keywords: *transcendental number, the number e, the number π*