necessity of studying numerical mathematics contents will be shown on some concrete examples.

Key words: *numerical mathematics, mathematics teaching, importance of numerical mathematics, approximate number, «numerical aspects».*

Делич М. Місце і роль обчислювальної математики у викладанні.

Дуже важлива, але дуже рідко присутній в навчальних програмах з математики, зв'язок між математикою і повсякденним практичними завданнями, наближені розв'язування абстрактних математичних задач, - так звана обчислювальна математика. Якщо діти повинні розуміти кількісну сторону реального світу правильно, вони повинні вивчити зміст обчислювальної математики. У даній статті обговорюється положення обчислювальної математики в навчанні, її значення і мета навчання, запропоновано включити в зміст навчальних програм з математики. Необхідність вивчення чисельного змісту математики буде показана на деяких конкретних прикладах.

Ключові слова: *обчислення у математиці, навчання математики, важливість обчислень у математиці, наближені числа, «числові аспекти».*

УДК 371.315.6:51

Н. В. Кульчицька, Р. І. Собкович
ДВНЗ «Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника»

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ В РІЗНИХ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧАХ

У статті розглянуто приклади застосування методів векторної алгебри при розв'язуванні різних математичних задач (відшукання найбільших та найменших значень, оцінка виразів, доведення нерівностей, розв'язування рівнянь та нерівностей, нерівності у геометричних фігурах), використання векторів у яких є досить ефективним, хоча не завжди очевидним. Запропоновані ідеї не нові та неоднаразово висвітлювались науково-методичній літературі. Наш педагогічний досвід показує, що пошук розв'язку математичної задачі із застосуванням різних методів, порівняння їх між собою, аналіз ефективності та раціональності шляху розв'язання, демонстрація несподіваних прийомів дозволяє покращити фахову методичну підготовку студентів. Автори використовують запропонований матеріал при викладанні математичних дисциплін за вибором для студентів старших курсів, які планують у майбутньому працювати в освіті.

***Ключові слова*:** *векторна алгебра, нестандартні методи розв'язування рівнянь та нерівностей, оцінка виразу, фахова методична підготовка студентів.*

Постановка проблеми. Наш багаторічний досвід викладацької роботи показує, що час від часу доцільно повертатись до загально відомих математичних істин з тим, щоб ще раз підкреслити їх ефективність: можливо під дещо іншим, ніж раніше, кутом зору, можливо в деяких нових поєднаннях та в нових сферах.

Ідея застосування векторів при розв'язуванні математичних задач добре відома. Її досліджували та розвивали Бевз Г. П., Бурда М. І., Гельфанд І. М., Горнштейн П. І., Готман Е. Г., Кадубовська О. Л., Кушнір І. А., Лейфура В. М., Мерзляк А. Г., Нелін Є. П., Радченко В. М., Сарана О. А., Самойленко М. О., Слєпкань З. І., Тарасенкова Н. А., Федак І. В., Ясінський В. А. та багато інших науковців. Можливості застосування векторного методу багаторазово висвітлювалась в різних публікаціях, здебільшого стосовно пошуку розв'язків геометричних задач. Але він чудово працює також при розв'язуванні алгебраїчних рівнянь та доведенні нерівностей.

Мета статті: ознайомити із цікавими застосуваннями векторного методу дослідження математичних задач, які, як правило, розв'язуються традиційними (здебільшого алгебраїчними) методами.

Виклад основного матеріалу.

Насамперед нагадаємо наступні означення та міркування.

Нехай задані два геометричні вектори у вигляді напрямлених відрізків або своїми координатами $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$. Обчислимо число $\vec{a}\cdot\vec{b}$ одним із двох способів $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ (α – кут між векторами), тобто скалярний добуток цих векторів.

Очевидна нерівність $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$, або у координатному вигляді

$$|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|\le\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\ .$$

Знак рівності виконується за умови колінеарності векторів, зокрема тоді, коли $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$.

Нехай виконується векторна рівність $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$. Переходячи до довжин векторів, отримуємо, що $|\vec{c}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$ (нерівність трикутника).

Оскільки $\vec{c}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$, то з останньої нерівності випливає, що

$$\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+(a_3+b_3)^2}\le\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\ .$$

Рівність в одержаному співвідношенні досягається при умові однакової напрямленості векторів, тобто якщо $\vec{a}=t\vec{b},\ t>0$.

В обох випадках кількість координат векторів може бути вибрана довільно, що дозволяє отримати більш загальні, ніж наведені вище співвідношення:

$$|a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n|\le\sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+...+b_n^2}\ ,$$

$$\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+...+(a_n+b_n)^2}\le\sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+...+b_n^2}.$$

Наведемо приклади застосування подібних співвідношень при розв'язуванні окремих задач, використання векторів у яких є досить ефективним, хоча не завжди очевидним та вважається нестандартним прийомом.

1. *Відшукання найбільших та найменших значень. Оцінки виразів.*

***Задача* 1.** Знайти найбільше значення функції

$$f(x)=\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}-3x^2+12x.$$

Розв'язання. Спочатку знайдемо найбільше значення функції $g(x)=\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}$ Для цього розглянемо вектори $\vec{a}=(1;\ 1)$ та $\vec{b}=\left(\sqrt{x+2};\ \ \sqrt{6-x}\ \right)$. Очевидно, що вираз, яким задано $g(x)$, являє собою скалярний добуток введених векторів і не перевищує добутку їх довжин, тобто виконується співвідношення

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}=\vec{a}\cdot\vec{b}\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{x+2+6-x}=4.$$

Знак рівності можливий тільки у випадку пропорційності координат векторів, тобто тоді і тільки тоді, коли $\sqrt{x+2}=\sqrt{6-x}\Rightarrow x=2$. Крім цього зауважимо, що $-3x^2+12x=-3(x^2-4x)=-3(x-2)^2+12$, тобто даний вираз приймає найбільше значення 12 у тій же точці $x=2$, що і попередній. Отже, $f_{макс.}=f(2)=4+12=16$.

***Задача* 2.** Знайти найбільше значення функції $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{17-3x}$.

Розв'язання. Розглянемо вектори $\vec{a}=(1,\ 1,\ 1)$ та $\vec{b}=\left(\sqrt{x+1},\ \sqrt{2x-3},\ \sqrt{17-3x}\ \right)$. Очевидно, що вираз, яким задана функція, являє собою скалярний добуток цих векторів і не перевищує добутку їх довжин, тобто виконується співвідношення

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{17-3x}=\vec{a}\cdot\vec{b}\leq|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|=\sqrt{1+1+1}\cdot\sqrt{x+1+2x-3+17-3x}=$$

$$=\sqrt{3}\cdot\sqrt{15}=3\sqrt{5}\,.$$

Знак рівності можливий тільки у випадку пропорційності координат векторів, тобто тоді і тільки тоді, коли $\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-3}=\sqrt{17-3x}$. Оскільки система даних рівнянь сумісна і має розв'язок $x=4$, то $f_{макс.}=f(4)=3\sqrt{5}$.

Задача **3.** Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x;\ y)=2x+y$ на еліпсі $4x^2+9y^2=9$.

Розв'язання. Введемо в розгляд вектори $\vec{a}=(2x;\ 3y)$ та $\vec{b}=\left(1;\ \dfrac{1}{3}\right)$. Саме такий вибір координат векторів пояснюється тим, що для оцінки виразу $2x+y$ їх потрібно вибрати так, щоб модуль одного з них дорівнював $\sqrt{4x^2+9y^2}$, а їхній скалярний добуток був $2x+y$. Тепер маємо

$$|2x+y|\leq\sqrt{4x^2+9y^2}\cdot\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=3\cdot\sqrt{\frac{10}{9}}=\sqrt{10}\,.$$

Отже, $-\cdot\sqrt{10}\leq 2x+y\leq\sqrt{10}$.

Ті значення змінних, при яких досягаються найбільше та найменше значення можна знайти, використовуючи умову колінеарності векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ і рівність $4x^2+9y^2=9$, тобто розв'язавши систему $\begin{cases}4x^2+9y^2=9,\\ \quad 2x=9y.\end{cases}$ Дістаємо два розв'язки $\left(\dfrac{\pm 9}{2\sqrt{10}};\ \dfrac{\pm 1}{\sqrt{10}}\right)$, при яких заданий вираз досягає екстремальних значень.

Задача **4.** Знайти найбільше та найменше значення виразу $2x+y-z$, які досягаються на множині точок еліпсоїда $x^2+3y^2+z^2=2$.

Розв'язання. Введемо в розгляд вектори $\vec{a}=\left(x,\ y\sqrt{3},\ z\right)$ та $\vec{b}=\left(2,\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ -1\right)$. Як і у попередньому випадку, вибір координат векторів здійснюється так, щоб при оцінці виразу $2x+y-z$ модуль одного з векторів дорівнював $\sqrt{x^2+3y^2+z^2}=\sqrt{2}$, а їхній скалярний добуток був $2x+y-z$. Тепер маємо

$$|2x+y-z|\leq\sqrt{x^2+3y^2+z^2}\cdot\sqrt{2^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+(-1)^2}=4\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\,.$$

Отже, $-4\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}}\leq 2x+y-z\leq 4\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Значення змінних, при яких досягаються найбільше та найменше значення знайдемо, використовуючи умову колінеарності векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ і рівність $x^2+3y^2+z^2=2$, тобто розв'язавши систему $\begin{cases}x^2+3y^2+z^2=2,\\ \quad \dfrac{x}{2}=3y=-z.\end{cases}$

Отримуємо два розв'язки $\left(\frac{\pm 6}{\sqrt{24}}, \frac{\pm 1}{\sqrt{24}}, \frac{\mp 3}{\sqrt{24}}\right)$, при яких заданий вираз досягає екстремальних значень.

***Задача* 5.** Довести, що нерівність $\sqrt{a+1}+\sqrt{2a-3}+\sqrt{50-3a}<12$ виконується при всіх значеннях a, для яких визначена її ліва частина.

Доведення. Розглянемо вектори $\vec{x}=(1,\ 1,\ 1)$ та $\vec{y}=\left(\sqrt{a+1},\ \sqrt{2a-3},\ \sqrt{50-3a}\right)$. Очевидно, що ліва частина нерівності являє собою скалярний добуток цих векторів і не перевищує добутку їх довжин, тобто виконується співвідношення $\sqrt{a+1}+\sqrt{2a-3}+\sqrt{50-3a}\le\sqrt{1+1+1}\cdot\sqrt{a+1+2a-3+50-3a}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{48}=12.$ Знак рівності можливий тільки у випадку пропорційності координат векторів, тобто тоді і тільки тоді, коли $\sqrt{a+1}=\sqrt{2a-3}=\sqrt{50-3a}$. Оскільки система цих рівнянь несумісна, то нерівність строга.

2. *Доведення нерівностей.*

***Задача* 6.** Довести нерівність $abc^2+cab^2+bca^2\le a^4+b^4+c^4$.

Доведення. Розглянемо вектори $\vec{x}=(ac,\ cb,\ ab)$ та $\vec{y}=(bc,\ ab,\ ac)$. Тоді $abc^2+cab^2+bca^2=\vec{x}\cdot\vec{y}\le|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|=a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2$.

Тепер введемо в розгляд нові вектори $\vec{m}=\left(c^2,\ b^2,\ a^2\right)$ та $\vec{n}=\left(a^2,\ c^2,\ b^2\right)$. Дістаємо $a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2=\vec{m}\cdot\vec{n}\le|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|=a^4+b^4+c^4$, що завершує доведення. Рівність виконується при умові $a=b=c$.

***Задача* 7.** Довести, що для довільних невід'ємних чисел $a,\ b,\ c$, таких, що $a+b+c=3$ виконується нерівність $\left(a^2+b+c\right)\!\left(1+b+c\right)\ge 9$.

Доведення. Введемо в розгляд вектори $\vec{u}=\left(a,\ \sqrt{b},\ \sqrt{c}\right)$, $\vec{v}=\left(1,\ \sqrt{b},\ \sqrt{c}\right)$. Оскільки $|\vec{u}|=\sqrt{a^2+b+c}$, $|\vec{v}|=\sqrt{1+b+c}$ і $\vec{u}\cdot\vec{v}=a+b+c$, то, використовуючи нерівність $\vec{u}^2\cdot\vec{v}^2\ge(\vec{u}\cdot\vec{v})^2$, отримуємо

$$\left(a^2+b+c\right)\!\left(1+b+c\right)\ge(a+b+c)^2=3^2=9.$$

Рівність буде виконуватися при умові, коли $\frac{a}{1}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}}$, тобто при $a=1$ та довільних невід'ємних $b,\ c$ таких, що $b+c=2$.

***Задача* 8.** Довести, що при $a_i>0,\ i=2,\ 3,...,\ n$ виконується нерівність

$$(a_1+a_2+...+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right)\ge n^2.$$

Доведення. Тепер у розгляд доцільно ввести вектори $\vec{u}=\left(\sqrt{a_1},\ \sqrt{a_2},...,\ \sqrt{a_n}\right)$ та $\vec{v}=\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}},\ \frac{1}{\sqrt{a_2}},...,\ \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)$.

Використавши нерівність $|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\ge|\vec{u}\cdot\vec{v}|$, отримуємо

$$|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|=\sqrt{a_1+a_2+...+a_n}\cdot\sqrt{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}\ge$$

$$\ge\sqrt{a_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\sqrt{a_2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_2}}+...+\sqrt{a_n}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_n}}=n,$$

звідки випливає нерівність, яку ми доводимо.

***Задача* 9.** Довести, що для довільних $a_i > 0,\ i = 2,\ 3,\ldots,\ n$ виконується нерівність

$$\left(a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3\right)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \ge (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 .$$

Розв'язання. Введемо в розгляд вектори $\vec{r} = \left(\sqrt{a_1^3},\ \sqrt{a_2^3},\ldots,\ \sqrt{a_n^3}\right)$ та $\vec{s} = \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}},\ \frac{1}{\sqrt{a_2}},\ldots,\ \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)$. Тепер, використовуючи нерівність $\vec{r}^{\,2} \cdot \vec{s}^{\,2} \ge (\vec{r} \cdot \vec{s})^2$, отримуємо співвідношення, що доводиться.

***Задача* 10.** Довести, що для довільних $a \ne 0,\ b \ne 0,\ c \ne 0$ виконується нерівність

$$(a^{2016} + b^{2016} + c^{2016})\left(\frac{1}{a^{2014}} + \frac{1}{b^{2014}} + \frac{1}{c^{2014}}\right) \ge (a + b + c)^2 .$$

Доведення. Введемо в розгляд вектори $\vec{u} = \left(a^{1008},\ b^{1008},\ c^{1008}\right)$ та $\vec{v} = \left(\frac{1}{a^{1007}},\ \frac{1}{b^{1007}},\ \frac{1}{c^{1007}}\right)$. Використовуючи нерівність для скалярного добутку у виді $\vec{u}^{\,2} \cdot \vec{v}^{\,2} \ge (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$, отримуємо потрібне співвідношення.

***Задача* 11.** Довести, що якщо числа $a,\ b,\ c$ задовольняють умову $a + b + c = 1$, то виконується нерівність $\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1} \le \sqrt{15}$.

Доведення. Розглянемо вектори $\vec{x} = (1,\ 1,\ 1)$ та $\vec{y} = \left(\sqrt{2a+1},\ \sqrt{2b+1},\ \sqrt{2c+1}\right)$. Оскільки ліва частина нерівності являє собою скалярний добуток цих векторів і не перевищує добутку їх довжин, то виконується співвідношення

$$\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1} \le$$
$$\le \sqrt{1+1+1} \cdot \sqrt{2a+1+2b+1+2c+1} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2(a+b+c)+3} = \sqrt{15} .$$

Знак рівності виконується при $a = b = c = \frac{1}{3}$.

3. *Розв'язування рівнянь та нерівностей.*

***Задача* 12.** Розв'язати рівняння $2\sqrt{x-1} + 5x = \sqrt{(x^2+4)(x+24)}$.

Розв'язання. Введемо в розгляд вектори $\vec{a} = (2,\ x)$ і $\vec{b} = \left(\sqrt{x-1},\ 5\right)$ та оцінимо ліву частину рівняння:

$$2\sqrt{x-1} + 5x = \vec{a} \cdot \vec{b} \le |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| = \sqrt{(x^2+4)(x+24)} .$$

Оскільки рівність виконується тільки при умові колінеарності векторів, то корені потрібно шукати серед розв'язків рівняння $\frac{\sqrt{x-1}}{2} = \frac{5}{x}$. Перетворивши його до виду $x\sqrt{x-1} = 10$, отримуємо рівняння $x^3 - x^2 - 100 = 0$ з єдиним дійсним коренем $x = 5$. Знайдене значення є шуканим розв'язком.

***Задача* 13.** Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 2y + 21} = \sqrt{x^2 + 10} + \sqrt{y^2 + 5}$.

Розв'язання. Перетворимо рівняння наступним чином:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (1+y)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{x^2 + 1^2 + 3^2} + \sqrt{2^2 + y^2 + 1^2} .$$

Тепер введемо в розгляд вектори $\vec{a} = (x,\ 1,\ 3)$ і $\vec{b} = (-2,\ y,\ 1)$. Тоді перетворене рівняння можна записати у вигляді $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = |\vec{a}| + \left|\vec{b}\right|$. Оскільки рівність виконується тільки при умові колінеарності векторів, то розв'язки потрібно шукати з умови $\frac{x}{-2} = \frac{1}{y} = \frac{3}{1}$. Шуканий розв'язок: $x = -6,\ y = \frac{1}{3}$.

***Задача* 14.** Розв'язати рівняння $\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}=3x^2-12x+16$.

Розв'язання. Як встановлено у прикладі 1, ліва частина рівняння приймає найбільше значення 4 у точці $x=2$. Права частина $3x^2-12x+16=3(x-2)^2+4$ у цій же точці приймає таке ж, але мінімальне значення. Очевидно, що рівність виконується в єдиній точці $x=2$.

***Задача* 15.** Розв'язати нерівність $\sin x\cdot\sin y\cdot\sin z+\cos x\cdot\cos y\cdot\cos z\le 1$.

Розв'язання. Рівність одиниці модуля вектора $\vec{a}=(\sin x,\ \cos x)$ може бути підказкою для вибору координат векторів. Отже, нехай $\vec{a}=(\sin x,\ \cos x)$, $\vec{b}=(\sin y\cdot\sin z,\ \cos y\cdot\cos z)$. Тоді дістаємо

$$\sin x\cdot\sin y\cdot\sin z+\cos x\cdot\cos y\cdot\cos z=\vec{a}\cdot\vec{b}\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=$$

$$=\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x}\cdot\sqrt{\sin^2 y\cdot\sin^2 z+\cos^2 y\cdot\cos^2 z}\le\sqrt{\sin^2 y\cdot 1+\cos^2 y\cdot 1}=1.$$

Отже, нерівність виконується при довільних наборах змінних. Знак рівності отримуємо, наприклад, при $x=y=z=0$.

4. *Нерівності у геометричних фігурах.*

***Задача* 16.** Довести нерівність $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$, де $A+B+C=\pi$.

Доведення. Нехай $A,\ B,\ C$ – кути трикутника ABC. Виберемо на його сторонах одиничні вектори $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ та $\vec{e}_3$ так, як показано на рисунку 1. Із очевидного співвідношення $(\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3)^2\ge 0$ дістаємо

$$3+2(\vec{e}_1\vec{e}_2+\vec{e}_1\vec{e}_3+\vec{e}_2\vec{e}_3)=3+2(\cos(\pi-A)+\cos(\pi-B)+\cos(\pi-C))=$$
$$=3-2(\cos A+\cos B+\cos C)\ge 0,$$

звідки випливає нерівність, яку ми доводимо. Знак рівності виконується для рівностороннього трикутника.

***Задача* 17.** Довести, що якщо $A+B+C=\pi$, то виконується нерівність $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C\ge-\frac{3}{2}$.

Доведення. Нехай коло з центром у точці O та радіусом R описане навколо трикутника з кутами $A,\ B,\ C$ (рис. 2). Тоді $\angle COB=2A,\ \angle COA=2B,\ \angle AOB=2C$. Із очевидного співвідношення $\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)^2\ge 0$ отримуємо $3R^2+2R^2(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)\ge 0$, звідки випливає нерівність, яку ми доводимо. Знак рівності виконується для рівностороннього трикутника.

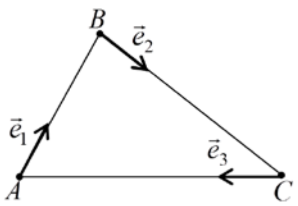

Рис. 1

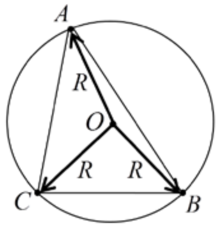

Рис. 2

Висновки. Запропонований у статті матеріал допоможе студентам досконаліше володіти методами розв'язування математичних задач та здобути якісну фахову освіту, а також буде корисним вчителям, які прагнуть урізноманітнити уроки з математики, покращити навчально-пошукову діяльність школярів та надати їм можливість розширити кругозір та набути нових знань.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Вишенський В. А., Перестюк М. О., Самойленко А. М. Збірник задач з математики. – К.: Либідь, 1993.
2. Горнштейн П. И., Полонский В. Б., Якир М. С. Задачи с параметрами. – К.: Євро індекс Лтд, 1995.
3. Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С. Неожиданный шаг или сто тринадцать красивых задач. – К.: Агрофирма ”Александрия”, 1993.
4. Сарана О. А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч. – К.: Видавництво А.С.К., 2004.
5. Собкович Р. І., Кульчицька Н. В. Основні методи доведення нерівностей. – Івано-Франківськ: ОІППО, 2014.
6. Федак І. В. Методи розв’язування олімпіадних завдань з математики і не тільки їх. – Чернівці.: Зелена Буковина, 2002.

Кульчицкая Н. В., Собкович Р. И. Применение методов векторной алгебры в различных математических задачах.

В статье рассмотрены примеры применения методов векторной алгебры при решении различных математических задач (отыскание наибольших и наименьших значений, оценка выражений, доказательство неравенств, решение уравнений и неравенств, неравенства в геометрических фигурах), использование векторов в которых достаточно эффективно, хотя не всегда очевидно. Предложенные идеи не новы и неоднократно рассматривались в научно-методической литературе. Наш педагогический опыт показывает, что поиск решения математической задачи с использованием различных методов, сравнение их между собой, анализ эффективности и рациональности нахождения решения, демонстрация неожиданных приёмов позволяет улучшить профессиональную методическую подготовку студентов. Авторы статьи используют рассматриваемый материал при преподавании математических дисциплин за выбором для студентов старших курсов, которые планируют в будущей работать в образовании.

Ключевые слова: *векторная алгебра, нестандартные методы решения уравнений и неравенств, оценка выражения, профессиональная методическая подготовка студентов.*

Kulchytska N., Sobkovych R. Application methods of vector algebra in different mathematical tasks.

The article considers examples of application of vector algebra in solving various mathematical tasks (finding the largest and smallest values, evaluation of expressions proving inequalities, solving equations and inequalities, inequalities in geometric figures), the use of vectors which are very effective, but not always obvious. The proposed idea is not new and is often considered the scientific and methodical literature. Our teaching experience shows that the search for solving mathematical problem using different methods, comparing them with other, analysing rationality and efficiency by solving, demonstration of unexpected techniques allows students to improve their professional methodical training. The authors use these materials in teaching mathematical disciplines of choice for senior students who plan to work in the future in education.

Key words: *vector algebra, unconventional methods for solving equations and inequalities, evaluation of expression, professional methodical preparation of students.*