

ДОСЛІДЖЕННЯ ТРАЄКТОРІЇ РУХУ СНАРЯДА, ВИПУЩЕНОГО ПІД КРИТИЧНИМ КУТОМ ДО ГОРИЗОНТУ

Валерій ЗДЕЩИЦ

Криворізький державний педагогічний університет, Україна
valeriy.zdeschits@kdpu.edu.ua,
<https://orcid.org/0000-0002-2404-8979>

Анастасія ЗДЕЩИЦ ✉

Науково-дослідний гірничорудний інститут КНУ, Україна
a.v.zdeschchys@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-5092-6918>

Микола СЛЮСАРЕНКО

Криворізький державний педагогічний університет, Україна
nick_slusarenko@yahoo.com,
<https://orcid.org/0000-0003-0288-5482>

STUDY OF THE TRAJECTORY OF THE PROJECTILE FIRED AT A CRITICAL ANGLE TO THE HORIZON

Valeriy ZDESHCHYTS

Kryvyi Rih State Pedagogical University, Ukraine
valeriy.zdeschits@kdpu.edu.ua,
<https://orcid.org/0000-0002-2404-8979>

Anastasiia ZDESHCHYTS ✉

Mining Research Institute of KNU, Ukraine
a.v.zdeschchys@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-5092-6918>

Mykola SLYUSARENKO

Kryvyi Rih State Pedagogical University, Ukraine
nick_slusarenko@yahoo.com,
<https://orcid.org/0000-0003-0288-5482>

АНОТАЦІЯ

Робота присвячена дослідженню законів руху тіла, випущеного з початковою швидкістю під кутом до горизонту. До цього класу задач відноситься, наприклад, постріл з гармати снарядом.

Формулювання проблеми. Якщо випустити снаряд вертикально, то він спочатку віддаляється, а потім наближається до місця пострілу. Якщо випустити снаряд горизонтально, то він постійно віддаляється. Отже, повинен існувати критичний кут, який розділяє ці два режими польоту снаряду.

Матеріали і методи. Поставлена мета: теоретичне визначення залежності радіальної відстані снаряда від часу, координати x та експериментальне доведення справедливості виявлених закономірностей – вирішувалася за допомогою установки у вигляді пружинної та магнітної гармати зі снарядом-кулькою. Кут пострілу регулювався в межах 0-90° та реєструвався інклінометром у складі мобільного застосування Rhyrhox з точністю до десятих градуса. За допомогою інклінометра також горизонтально виставлялася лінійка. Для реєстрації траєкторії кульки один смартфон використовувався у режимі slow motion, а інший як мілісекундомір.

Результати. Теоретично обґрунтовано наявність трьох типів траєкторій польоту снаряда, випущеного під кутом α до горизонту. Виявлено феномен знаходження снаряду тричі в різний час на тій самій відстані від точки пострілу. Показано, що для кутів запуску, що перевищують теоретично та експериментально визначений критичний кут 70,53°, снаряд спочатку відходить від початку координат, потім рухається назад до нього, а потім знову віддаляється.

Висновки. Розглянуто цікаве явище, пов'язане з рухом снаряда. Показано, що для кутів запуску, які перевищують теоретично та експериментально визначений критичний кут 70,53°, снаряд спочатку відходить від початку координат, потім рухається назад до нього, а потім знову віддаляється, поводячись всупереч здоровому глузду, який каже нам, що снаряд повинен лише віддалятися від місця пострілу. Наявність трьох типів траєкторій польоту снаряда, випущеного під кутом α до горизонту та виявлення феномену знаходження снаряду тричі в різний час на тій самій відстані від точки пострілу є несподіваним результатом для студентів, які вивчають механіку.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: траєкторія руху; критичний кут; пружина; магнітна гармата; радіальна відстань.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Здещиц В., Здещиц А., Слюсаренко М. Дослідження траєкторії руху снаряда, випущеного під критичним кутом до горизонту. *Фізико-математична освіта*, 2025, Том 40, № 1, С. 27-33. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i1-04>.

ABSTRACT

The work is devoted to studying the laws of motion of a body released with an initial velocity at an angle to the horizon. This class of tasks includes, for example, shooting a projectile from a cannon.

Formulation of the problem. If the projectile is fired vertically, it first moves away and then approaches the place of the shot. If you release the projectile horizontally, it will constantly move away. Therefore, a critical angle must separate these two modes of projectile flight.

Materials and methods. The goal: theoretical determination of the dependence of the radial distance of the projectile on time, x -coordinates, and experimental proof of the validity of the discovered laws - was solved using an installation in the form of a spring and magnetic cannon with a ball projectile. The angle of the shot was adjusted within 0-90° and registered with an inclinometer as part of the Rhyphox mobile application with an accuracy of tenths of a degree. With the help of an inclinometer, a ruler was also displayed horizontally. One smartphone was used in slow-motion mode to record the ball's trajectory, and the other was used as a millisecond timer.

Results. The presence of three types of flight trajectories of a projectile fired at an angle α to the horizon is theoretically substantiated. The phenomenon of finding the projectile three times at different times at the same distance from the point of the shot was revealed. It is shown that for launch angles exceeding the theoretically and experimentally determined critical angle of 70.53°, the projectile first moves away from the origin then moves back to it, and then moves away again.

Conclusion. An interesting phenomenon related to projectile motion is considered. It is shown that for launch angles more significant than the theoretically and experimentally determined critical angle of 70.53°, the projectile first moves away from the origin then moves back toward it, and then moves away again, in defiance of common sense, which tells us that a projectile should only move away from the point of the shot. The presence of three types of flight trajectories of a projectile fired at an angle α to the horizon and the discovery of the phenomenon of finding the projectile three times at different times at the same distance from the shot point is an unexpected result for students studying mechanics.

KEYWORDS: motion trajectory; critical angle; spring; magnetic cannon; radial distance.

FOR CITATION: Zdeschchys, V., Zdeschchys, A., & Slyusarenko, M. (2025). Study of the trajectory of the projectile fired at a critical angle to the horizon. *Physical and Mathematical Education*, 40(1), 27-33. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i1-04>.

ВСТУП

Постановка проблеми. Одна із задач класичної механіки, яка часто розв'язується в школах та вищих навчальних закладах, пов'язана з матеріальною точкою, яка знаходиться на початку декартових координат, а потім випускається під кутом α до горизонтальної осі x зі швидкістю v_0 . Обговорення подібних задач продовжується в наукових журналах і досі (Mungan, 2017; Minkin, 2024).

Якщо кут $\alpha = 90^\circ$, то снаряд почне підніматися вгору, тобто, віддалятися, а через час $t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$, коли досягне максимальної висоти, почне падати, тобто, наблизитися до місця випуску. Це – один режим польоту.

Якщо кут α буде невеликий, то снаряд буде тільки віддалятися. Наблизитися до місця випуску він не буде. Це – інший режим польоту.

Таким чином, повинен існувати критичний кут $\alpha_{кр}$, при якому відбувається перехід від одного режиму польоту до іншого. Це і є проблема, яку потрібно вирішити і яка детально не висвітлена в підручниках.

Отже, проста на перший погляд задача стає багатогранною та багаторівневою зі зростаючою складністю її розв'язання. Експериментальне доведення справедливості результатів теоретичного розв'язання подібних задач, наприклад, в рамках шкільного фізичного експерименту, також є проблемою. Виконання шкільних фізичних експериментів стає неможливим через відсутність методичних рекомендацій до них. Тому поєднання теоретичних викладок, розробка лабораторної установки та рекомендацій щодо вимірювання кута вильоту снаряда та траєкторії його польоту і є тим напрямком, якому присвячена ця робота

Аналіз актуальних досліджень. Багато років тому, Уокер (Walker, 1995) працював над цікавим явищем, пов'язаним з рухом снаряда. Він показав, що для кутів запуску, що перевищують визначений критичний кут, снаряд відходить від початку координат, рухається назад до нього, а потім знову віддаляється, ідучи всупереч нашому здоровому глузду, що снаряд повинен лише віддалятися від місця пострілу.

Окрім визначення критичного кута, Уокер також проаналізував цікаву геометричну властивість деяких точок на траєкторії снарядів, пов'язаних з критичним кутом, а саме, зворотнім еліпсом. Він визначається як геометричне місце точок (x, y) , для яких $dr/dt = 0$, де r – радіальна відстань снаряду від місця пострілу. Уокер показав, що цим точкам відповідає еліпс з центром при $x = 0$ та $y = y_{\max}/2$, і що фізичний зміст цього еліпса полягає в тому, що снаряди, які рухаються за траєкторіями, що перетинають еліпс, рухаючись до землі ($dy/dt < 0$) також рухаються до початку координат ($dr/dt < 0$). Це означає, що для цих снарядів кут запуску більший за критичний.

Уокер також продемонстрував, що геометричне місце точок, що відповідає умові $dr/dt = 0$, збігається з геометричним місцем точок, що відповідає умові $dy/dt = 0$ (максимальна висота), факт, який він заявив як "досить несподіваний" оскільки ці дві вимоги відповідають дуже різним умовам. Його робота була виконана з урахуванням руху снаряда без опору повітря. Коли враховується опір повітря, ця властивість вже не задовольняється. Це доведено в роботі (Ribeiro & Sousa, 2021), у якій досліджувалося, чи відбувається «прихід і відхід» снаряду за наявності лінійної сили опору повітря і чи є якісь зміни у значенні критичного кута, та як це пов'язано з коефіцієнтом опору повітря. За законом Стокса, (Landau & Lifshitz, 2013), сила в'язкого тертя дорівнює: $F = 6\pi\eta Rv$, де R – сфера радіуса R , яка рухається у повітрі з динамічною в'язкістю повітря $\eta = 1,86 \times 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$ (Lide, 2006).

Як було з'ясовано, критичний кут для явища вже не є унікальним: зі збільшенням коефіцієнта опору повітря – зменшується значення критичного кута за законом:

$$\alpha_{кр}(\Gamma) = \arcsin\left(\frac{2}{9}\sqrt{\frac{40}{9}\Gamma^2 + 18} - \frac{5}{27}\Gamma\right), \quad (1)$$

де $\Gamma = \frac{6\pi\eta Rv_0}{mg}$ – безрозмірний коефіцієнт опору повітря.

Також було продемонстровано, що коли враховується опір повітря, збіг між точками зворотнього еліпсу і точками, що визначають максимальну висоту снарядів, вже не існує.

Всі ці відомості дають можливість правильно провести підготовку експеримента, під час якого студенти дистанційно можуть досліджувати явище «приходу та відходу» снаряду, випущеного під кутом до горизонту. Так, для тенісного м'яча масою 60 г безрозмірний коефіцієнт опору повітря $\Gamma_T = 1,5 \times 10^{-4}$, баскетбольного м'яча масою 620 г коефіцієнт $\Gamma_T = 2,1 \times 10^{-5}$. Тобто, баскетбольний м'яч, як снаряд, не буде хорошим вибором, оскільки опір повітря не матиме великого впливу на траєкторію, якщо початкова швидкість мала.

Мета статті. Визначення залежності радіальної відстані від точки пуску до снаряда від часу, горизонтальної координати та експериментальне доведення справедливості виявлених закономірностей.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Залежність координат x та y від часу польоту t , як відомо з кінематики, виглядає так:

$$x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad (2)$$

$$y(t) = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \quad (3)$$

Отже, час руху визначається рівнянням:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}. \quad (4)$$

Якщо підставити цей час в рівняння (3), то отримаємо рівняння руху снаряду:

$$y(x) = (tg\alpha) \cdot x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}\right) \cdot x^2. \quad (5)$$

Для отримання траєкторії руху можна використати таблиці Excel. Для визначеності візьмемо $v_0 = 10 \text{ м/с}$, а прискорення вільного падіння $g = 10 \text{ м/с}^2$. Опором повітря знехтуємо. У цьому випадку, з рівняння (3) отримаємо, що координата $y = 0$ (час падіння) досягається через:

$$t_{\text{пад}} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

Для кута, наприклад, $\alpha = 75^\circ$ час падіння $t_{\text{пад}} = 1,93$ с, а для $\alpha = 60^\circ$ $t_{\text{пад}} = 1,732$ с. Відповідна траєкторія руху снаряду, випущеного під цими кутами наведена на рис. 1. Еліпс, відображений у вигляді штрихової лінії, проходить через точки 1 максимуму траєкторії.

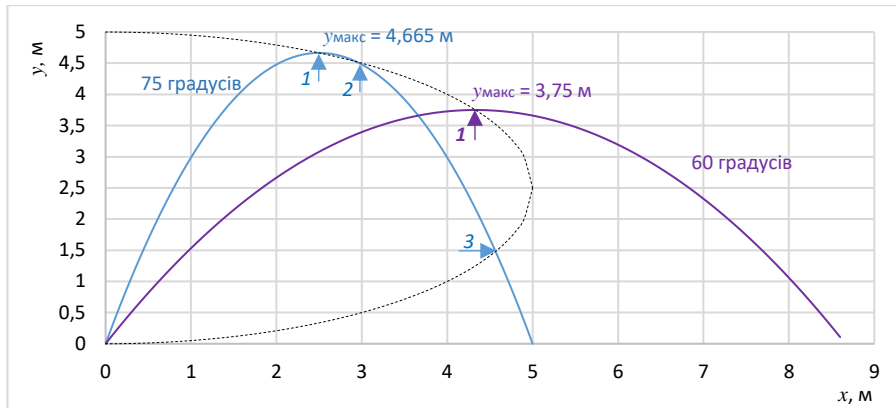


Рис. 1. Графіки залежності координати y від x для снаряду, випущеного під кутом $\alpha = 75^\circ$ та $\alpha = 60^\circ$.
Джерело: розраховано авторами.

Залежність максимальної висоти $y_{\text{макс}}$ від кута випуску снаряда:

$$y_{\text{макс}} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

Якщо почати вимірювати радіальну відстань r від початку координат до снаряду, випущеного під кутом $\alpha = 60^\circ$, то виявиться, що вона постійно зростає поки снаряд не впаде (табл. 1).

Таблиця 1. Величина радіальної відстані r до снаряда, випущеного під кутом $\alpha = 60^\circ$

x , м	0	1	2	3	4	5	6	7	8
r , м	0	1,83	3,33	4,53	5,47	6,20	6,80	7,38	8,07

Джерело: результати досліджень авторів.

А ось, якщо почати вимірювати радіальну відстань r від початку координат до снаряда, випущеного під кутом, наприклад, $\alpha = 75^\circ$, то виявиться, що вона спочатку зростає, потім зменшується, потім знову зростає поки снаряд не впаде (табл. 2). Результати вимірювання радіальної відстані відображені на графіках рис. 2.

Таблиця 2. Величина радіальної відстані до снаряда, випущеного під кутом $\alpha = 75^\circ$

x , м	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
r , м	0	1,75	3,15	4,2	4,9	5,3	5,39	5,25	4,99	4,8	5,0

Джерело: результати досліджень авторів.

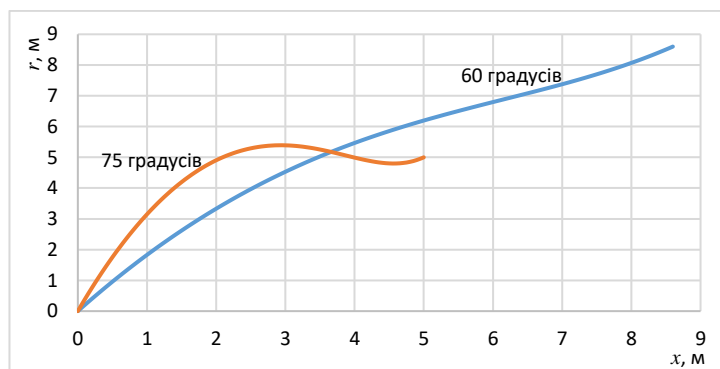


Рис. 2. Графіки залежності радіальної відстані r від координати снаряда x , випущеного під кутом $\alpha = 75^\circ$ та $\alpha = 60^\circ$.
Джерело: розраховано авторами.

Графіки закінчуються при різних x -координатах тому, що x -координата приземлення дорівнює:

$$x = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} \tag{6}$$

і для кута запуску $\alpha = 60^\circ$ максимальна відстань $x_{\text{макс}} = 8,65$ м, а для $\alpha = 75^\circ$ – максимальна відстань $x_{\text{макс}} = 5,0$ м.

Виходячи з графіків можна зробити висновок, що існує третій режим польоту, існує властивість, що відображається снарядом з кутом запуску $\alpha = 75^\circ$, якою не володіє снаряд, що має кут запуску $\alpha = 60^\circ$. Виявляється, що

снаряд з кутом запуску $\alpha = 75^\circ$ під час свого руху знаходиться на одній і тій же відстані 5 метрів три рази: коли координата $x_1 = 2,1$ м, $x_2 = 4,0$ м і $x_3 = 5,0$ м.

Цей результат для багатьох людей, є несподіваним, має витончену фізичну природу. Це явище ніяк не відображено у шкільних підручниках фізики (Засекіна & Засекін, 2017; Гельфгат, 2018).

З рівнянь (2) та (3) можна також отримати залежність радіальної відстані r до снаряду від часу польоту t :

$$r(t) = \sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2} = t \cdot \sqrt{v_0^2 - v_0 \sin \alpha \cdot gt + \frac{g^2 t^2}{4}}. \quad (7)$$

Графіки залежності r від часу польоту снаряда t для різних кутів випуску α наведені на рис. 3.

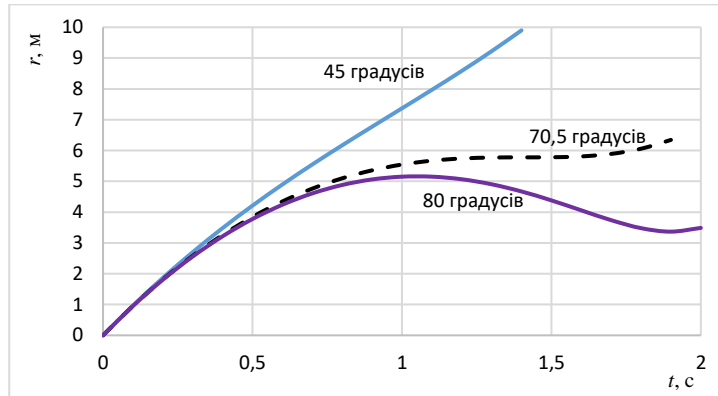


Рис. 3. Графіки залежності радіальної відстані r від часу польоту t снаряда, випущеного під кутом $\alpha = 80^\circ$, $\alpha = 45^\circ$ та критичного $\alpha_{кр} = 70,5^\circ$.

Джерело: розраховано авторами.

Виходячи з графіків можна зробити висновок, що снаряд з кутом запуску $\alpha = 80^\circ$ під час свого руху знаходиться на одній і тій же відстані 3,487 м три рази: у момент часу $t_1 = 0,45$ с, $x_2 = 1,8$ с і $t_3 = 2$ с. Як видно, графіки залежності r від часу t показують таку саму поведінку як і $r = f(x)$. Ці графіки також підтверджують, що існує третій режим польоту. Виникає питання: при якому критичному куті відбувається зміна режимів? Школяр може розв'язати це питання за допомогою таблиць Excel, дослідивши траєкторії польоту снарядів в межах кутів $\alpha = 0-90^\circ$. Такі дослідження дозволять визначити критичний кут $\alpha_{кр} = 70,5$ (див. рис. 3 штрихова лінія).

Більш досвідчені студенти можуть використати техніку диференціювання для визначення $\alpha_{кр}$. Як відомо, перша похідна дорівнює нулю в точці перегину функції $r = f(t)$:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{v_0^2 - (v_0 \sin \alpha)gt + \frac{1}{4}g^2 t^2} + \frac{1}{2}t \frac{-(v_0 \sin \alpha)g + \frac{1}{2}g^2 t}{\sqrt{v_0^2 - (v_0 \sin \alpha)gt + \frac{1}{4}g^2 t^2}} = 0. \quad (8)$$

Час такої події дорівнює:

$$t = \frac{3v_0}{2g} \left(\sin \alpha \pm \sqrt{\sin^2 \alpha - \frac{8}{9}} \right). \quad (9)$$

Для малих кутів розв'язок є уявним, тобто снаряд постійно віддаляється від початку координат. Дійсні розв'язки починаються під кутом, де квадратний корінь дорівнює нулю, тобто, коли

$$\sin^2 \alpha_{кр} = \frac{8}{9}. \quad (10)$$

З цього виразу критичний кут дорівнює:

$$\alpha_{кр} = \arcsin \frac{2\sqrt{2}}{3} = 70,52878^\circ, \quad (11)$$

а час, при якому відбувається перегин функції $r = f(t)$ для цього кута, $t_{кр} = \frac{v_0}{g} \sqrt{2}$. Якщо взяти $v_0 = 10$ м/с, а прискорення вільного падіння $g = 10$ м/с², тоді $t_{кр} = \sqrt{2}$ с.

Для кутів, більших $\alpha_{кр}$ існує два розв'язки, коли радіальна швидкість дорівнює нулю і після цього змінює знак.

Задасмося питанням: яке геометричне місце точок, для яких швидкість $\frac{dr}{dt} = 0$? Щоб знайти цю криву використаємо часові рівняння (9). Після підстановки часу t в рівняння руху отримаємо таке співвідношення:

$$\left(y - \frac{v_0^2}{4g} \right)^2 + \frac{1}{4}x^2 = \left(\frac{v_0^2}{4g} \right)^2$$

Це рівняння еліпсу з координатами центрів $x = 0$ і

$$y = \frac{v_0^2}{4g} = \frac{1}{2} \left(\frac{v_0^2}{2g} \right) = \frac{1}{2} y_{\max}.$$

Еліпс простягається від $y = 0$ до $y = \frac{v_0^2}{2g} = y_{\max}$ і від $x = -v_0^2/2g$ до $x = +v_0^2/2g$. Половинка еліпса показана штриховою кривою на рис. 1. Фізичний сенс еліпса полягає в тому, що всі снаряди, які рухаються до землі ($\frac{dy}{dt} < 0$) в межах еліпса, також рухаються до початку координат ($\frac{dr}{dt} < 0$). З цієї причини ми називаємо криву еліпсом повернення.

Зверніть увагу, що зворотний еліпс також є *геометричним місцем точок максимальної висоти*, як це можна побачити на рис. 1. Те, що ці два геометричні місця точок збігаються, є досить несподіваним. Еліпс повернення є геометричним місцем точок, для яких $\frac{dr}{dt} = 0$, а також геометричним місцем точок, для яких $\frac{dy}{dt} = 0$.

Усі снаряди перетинають еліпс повернення на максимальній висоті, але снаряди з $\alpha > \alpha_{кр}$ перетинають його ще двічі, як показано на рис. 1.

Теоретичне значення цього унікального кута дорівнює точно (Walker, 1995):

$$\alpha_{кр} = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) = 70,5288,$$

що є чудовим підтвердженням результатів розрахунків за допомогою таблиць Excel.

Важливо, що критичний кут не залежить від швидкості v_0 .

Для кутів запуску більше $70,5288^\circ$ радіальна відстань r спочатку збільшується, потім зменшується і знову збільшується.

У роботі (Ribeiro & Sousa, 1995) доводиться, що опір повітря руху снаряду може вплинути на цей результат: наявність ефекту наближення траєкторії снаряду до точки його випускання.

Висновки теоретичного розгляду є такими:

1. Існує три типи траєкторії польоту снаряда, випущеного під кутом α до горизонту:
 - I. Відстань між точкою пострілу і снарядом з часом тільки збільшується, коли кут випускання $\alpha < 70,5^\circ$;
 - II. Коли $\alpha > 70,5^\circ$, відстань між точкою пострілу і снарядом з часом спочатку збільшується, потім зменшується (снаряд рухається назад до пушки), і знову збільшується, тобто, снаряд тричі в різний час знаходиться на тій самій відстані від точки запуску;

- III. Існує третій режим польоту під критичним кутом пострілу $\alpha_{кр} = 70,53^\circ$, який є межею двох перших типів траєкторій.

2. Значення критичного кута $\alpha_{кр} = 70,5^\circ$ не залежить від початкової швидкості снаряду.

3. Наявність трьох типів траєкторій польоту снаряда, випущеного під кутом α до горизонту, не відображено в шкільних підручниках.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Робота носить теоретичний та прикладний характер. Спочатку теоретично розглянуті всі можливі варіанти руху матеріальної точки (снаряду), випущеної під кутом до горизонту. На основі цих розглядів визначено рівень складності отримання розв'язку такого рода завдань для школярів та студентів бакалаврського рівня. Після цього визначено критичний кут та оптимальний варіант постановки дослідів та експериментальної перевірки результатів теоретичного розгляду. Технологія отримання високоточних експериментальних результатів на дослідних приладах була відпрацьована та перевірена студентами групи ФІ, ФМ-24 Криворізького державного педагогічного університету. У якості цифрової вимірювальної лабораторії використовувалися смартфони студентів, оснащені застосунками Stopwatch, Physics Toolbox Sensor Suite та Phyrhox. Опція slow motion дозволяла реєструвати рух тіл за допомогою деяких смартфонів зі швидкістю 960 кадрів в секунду. Секундомір застосунка Stopwatch вимірював час з точністю 1 мс.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для експериментального підтвердження висновків, зроблених раніше, були проведені досліди на установках, які зображені на рис. 5 та рис. 6.



Рис. 5. Вигляд експериментальної установки на базі пружинної гармати.

Джерело: авторське фото.

Джерелом енергії снаряда (кульки) є пружина. Гармата може виставлятися під потрібним кутом до горизонту. Кут нахилу пружинної гармати – кут випускання кульки – встановлювався за допомогою інклінометра мобільного застосунку Phyrhox з точністю до десятих градуса. За допомогою віска задавалася вертикаль.

Маса сталевий кульки діаметром 20 мм дорівнювала 11,85 грама, початкова швидкість снаряду $v_0 = 3,25$ м/с. Тобто безрозмірний коефіцієнт опору повітря, $\Gamma = \frac{6\pi\eta R v_0}{mg} = \frac{6\pi \cdot 1,86 \times 10^{-5} \cdot 10^{-2} \cdot 3,25}{1,18 \cdot 10^{-2} \cdot 9,8} \cong 1 \cdot 10^{-4}$, що дозволяє вважати, що вплив опору повітря на результати вимірювань мінімальний і, згідно рівнянню (1), очікуваний критичний кут повинен дорівнювати $\alpha_{кр}(\Gamma) = 70,53^\circ$.

Реєстрація траєкторії руху кульки відбувалася за допомогою уповільненої відеозйомки камерою смартфона у режимі 240 кадрів за секунду. Час польоту кульки визначався за допомогою електронного секундоміра Stopwatch з мікросекундною точністю (рис. 5, 6).

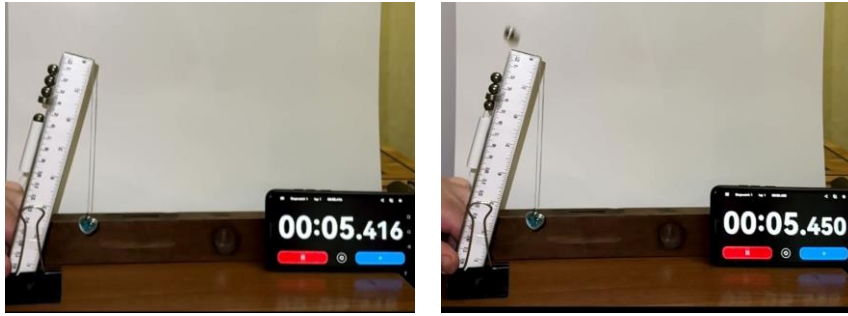


Рис. 6. Фото магнітної гармати в а) пусковому стані, б) після пострілу.

Джерело: авторське фото.

Принцип роботи магнітної гармати полягає, як і у колихавки Ньютона, в передаванні імпульсу від нижньої кульки до крайньої верхньої. Роль притягальної сили для нижньої кульки виконує циліндровий постійний магніт такого ж діаметра, як у кульок (Здещиц, 2016). Кульки та циліндровий магніт розміщуються на двох лінійках, які грають роль направляючого жолоба.

Результати вимірювання радіальної відстані r до кульки в залежності від часу польоту t наведено на рис. 7 та рис. 8. Відстані вимірювалися безпосередньо на екрані смартфона лінійкою з врахуванням коефіцієнту масштабування. Як видно з рис. 7 та рис. 8 експериментальні графіки за формою повторюють теоретичні, що вказує на правильність розглянутої теоретичної моделі.

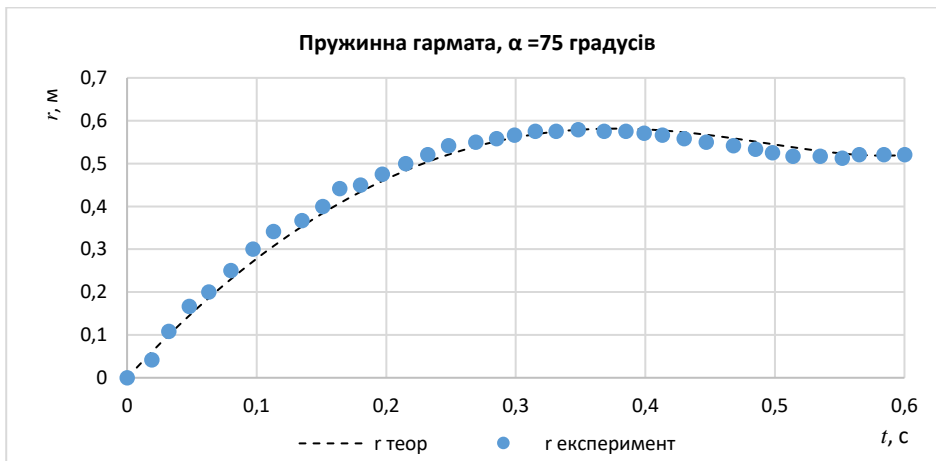


Рис. 7. Експериментальний та теоретичний графіки залежності радіальної відстані r від часу t для $\alpha = 75^\circ$.
Постріл пружинної гармати зі швидкістю $u_0 = 3,25$ м/с.

Джерело: виконано авторами.

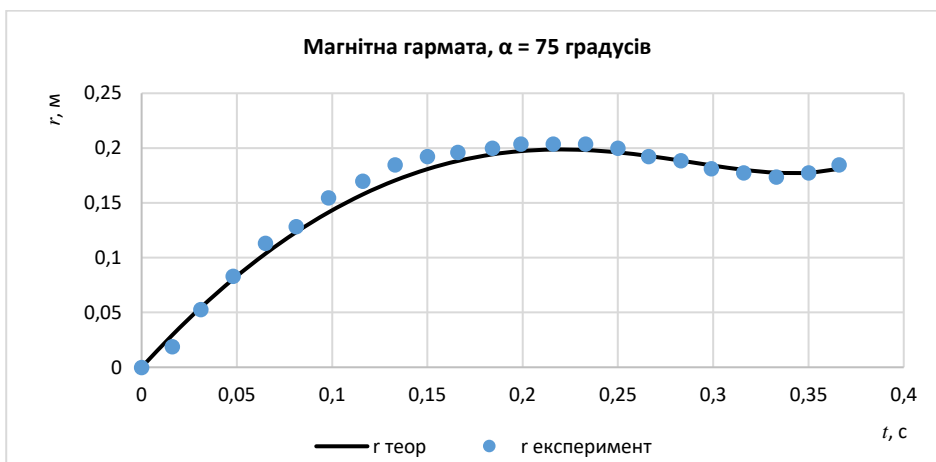


Рис. 8. Експериментальний та теоретичний графіки залежності радіальної відстані r від часу t для $\alpha = 75^\circ$.
Постріл магнітної гармати зі швидкістю $u_0 = 1,9$ м/с.

Джерело: виконано авторами.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

1. Розроблена методика та пристрій для вимірювання радіальної відстані кульки під час її польоту після пострілу під кутом до горизонту.

2. Розглянуто цікаве явище, пов'язане з рухом снаряда. Показано, що для кутів запуску, які перевищують теоретично та експериментально визначений критичний кут $70,53^\circ$, снаряд спочатку відходить від початку координат, потім рухається назад до нього, а потім знову віддаляється, поводячись всупереч здоровому глузду, який каже нам, що снаряд повинен лише віддалятися від місця пострілу.

Виявлення феномену знаходження снаряду тричі в різний час на тій самій відстані від точки пострілу є несподіваним результатом для школярів та студентів, які вивчають механіку.

Для виконання подібних досліджень потрібно мати стабільну траєкторію руху кульки. Ідея використання неодимового магніту для розгона кульок по направляючим, реалізована в роботі, дозволяє не тільки покращити результати експериментів, а і проводити такі запуски студентами під час дистанційного навчання. Крім цього інтригуючим є зйомка потоку води під кутом близько 75° .

Перспективним напрямком також може бути експерименти з паперовою кулькою, довготривалою повітряною бульбашкою, вплив опору повітря на яку значно більший, ніж на металеву кульку. Як продовження цієї роботи було б цікаво розглянути ситуації, такі як квадратична залежність опору повітря від швидкості, наявність вітру тощо.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. (2013). *Fluid Mechanics*, 6, 66.
2. Lide, D. R. (2006). CRC Handbook of Chemistry and Physics. *J. Am. Chem. Soc.*, 128, 16. <https://doi.org/10.1021/ja0556070>.
3. Minkin, L. (2024). Comment "Optimizing the launch of a projectile to hit a target". *Phys. Teach.*, 62, 627. <https://doi.org/10.1119/5.0209215>.
4. Mungan, C. E. (2017). Optimizing the launch of a projectile to hit a target. *Phys. Teach.*, 55, 528–529. <https://doi.org/10.1119/1.5011825>.
5. Ribeiro, W., & de Sousa, J. (2021). Projectile Motion: The "Coming and Going" Phenomenon. *The Physics Teacher*, 59, 168-171. <https://doi.org/10.1119/10.0003656>.
6. Walker, J. S. (1995). Projectiles: Are they coming or going. *The Physics Teacher*, 33, 282–284. <https://doi.org/10.1119/1.2344221>.
7. Гельфгат, І. М. (2018). *Фізика (профільний рівень, за навчальною програмою авторського колективу під керівництвом Локтева В. М.): підруч. для 10 кл. закл. загальн. серед. освіти*. Харків: Вид-во «Ранок».
8. Засекіна, Т. М., & Засекін, Д. О. (2018). *Фізика (профільний рівень): підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти*. К.: УОБЦ «Оріон».
9. Здешич, В. М. (2016). Магнітний прискорювач для проведення науково-дослідних робіт з фізиками-магістрами. *Наукові записки. Серія «Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти»*, 9(II), 126-134. URL: <https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/NZ-PMFMTO/article/viewFile/948/928>.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. (2013). *Fluid Mechanics*, 6, 66.
2. Lide, D. R. (2006). CRC Handbook of Chemistry and Physics. *J. Am. Chem. Soc.*, 128, 16. <https://doi.org/10.1021/ja0556070>.
3. Minkin, L. (2024). Comment "Optimizing the launch of a projectile to hit a target". *Phys. Teach.*, 62, 627. <https://doi.org/10.1119/5.0209215>.
4. Mungan, C. E. (2017). Optimizing the launch of a projectile to hit a target. *Phys. Teach.*, 55, 528–529. <https://doi.org/10.1119/1.5011825>.
5. Ribeiro, W., & de Sousa, J. (2021). Projectile Motion: The "Coming and Going" Phenomenon. *The Physics Teacher*, 59, 168-171. <https://doi.org/10.1119/10.0003656>.
6. Walker, J. S. (1995). Projectiles: Are they coming or going. *The Physics Teacher*, 33, 282–284. <https://doi.org/10.1119/1.2344221>.
7. Gelfgat, I. M. (2018). *Fizyka (profilnyi riven, za navchalnoiu prohramoiu avtorskoho kolektyvu pid kerivnytstvom Lokteva V. M.): pidruch. dla 10 kl. zakl. zahal. sered. osvity [Physics (profile level, according to the curriculum of the author's team under the leadership of Loktev V. M.): textbook for 10th grade of general secondary education]*. Kharkiv: Publishing house "Ranok". (in Ukrainian).
8. Zasekina, T. M., & Zasekin, D. O. (2018). *Fizyka (profilnyi riven): pidruch. dla 10 kl. zakladiv zahalnoi serednoi osvity [Physics (profile level): textbook for 10th grade of general secondary education]*. K.: UOVC "Orion". (in Ukrainian).
9. Zdeschych, V. M. (2016). Mahnitnyi pryskoryuvach dla provedennia naukovo-doslidnykh robot z fizykamy-mahistryamy [Magnetic accelerator for conducting research work with master's degree physicists]. *Naukovi zapysky. Seriiia «Problemy metodyky fizyko-matematychnoi i tekhnolohichnoi osvity» – Scientific notes. Series "Problems of methodology of physical, mathematical and technological education"*, 9(II), 126-134. URL: <https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/NZ-PMFMTO/article/viewFile/948/928>. (in Ukrainian).

Матеріал надійшов до редакції 10.11.2024р.

