

Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики, фізики та методик їх навчання

Заєць Марії Олександрівни

**Система підготовки учнів до
зовнішнього незалежного оцінювання з математики**

Спеціальність: 014 Середня освіта (Математика)

Галузь знань: 01 Освіта/Педагогіка

Кваліфікаційна робота
на здобуття освітнього ступеню магістра

Науковий керівник

_____ М.Г. Друшляк,
доктор педагогічних наук,
доцент кафедри математики, фізики
та методик їх навчання

« _____ » _____ 2021 року

Виконавець

_____ М.О. Заєць
« _____ » _____ 2021 року

Суми 2021

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1. ПРОБЛЕМА ОЦІНЮВАННЯ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ УЧНІВ З МАТЕМАТИКИ.....	6
1.1. Оцінювання навчальних досягнень як педагогічна проблема.....	6
1.2. Зовнішнє незалежне оцінювання як спосіб оцінювання навчальних досягнень учнів	13
1.3. Психологічні засади підготовки учнів до зовнішнього незалежного оцінювання.....	20
РОЗДІЛ 2. ПІДГОТОВКА ДО ЗОВНІШНЬОГО НЕЗАЛЕЖНОГО ОЦІНЮВАННЯ З МАТЕМАТИКИ.....	29
2.1. Типи завдань ЗНО з математики	29
2.2. Зміст підготовки до ЗНО з математики	43
2.3. Шляхи підготовки до ЗНО з математики	78
ВИСНОВКИ.....	87
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	889

ВСТУП

Сьогодні шлях вступу до закладу вищої освіти в повній мірі залежить від результатів складання зовнішнього незалежного оцінювання. Тому якість підготовки має велике значення для всіх випускників закладів загальної середньої освіти, а з 2022 року також для учнів та студентів професійно-технічних і вищих закладів освіти, які у 2022 році здобувають повну загальну середню освіту, оскільки обов'язково складають ДПА у формі ЗНО.

Підготовка і складання зовнішнього незалежного оцінювання є однією із потенційно стресогенних ситуацій для учнів. Особливо ситуація загострюється з 2020 року, коли підготовка і проходження тестування були ускладнені необхідністю дотримання низки карантинних обмежень у зв'язку з пандемією Covid-19. Випускники змушені були готуватися до ЗНО дистанційно, у зовсім нових, незвичних для них умовах.

Система підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання повинна бути добре продуманою, особливо дана проблема актуалізується останнім часом, коли ЗНО з математики стало обов'язковим. Нами виявлено достатню кількість методичних матеріалів з різноманітних порад, курсів на відкритих освітніх платформах проблеми підготовки до ЗНО з математики, але всі ці засоби повинні спрацьовувати у системі, щоб це буде якісна та цілеспрямована підготовка. Тому тема «Система підготовки учнів до зовнішнього незалежного оцінювання з математики» на часі.

Об'єкт дослідження: процес навчання математики учнів основної та старшої школи.

Предмет дослідження: система підготовки учнів до зовнішнього незалежного оцінювання з математики.

Мета дослідження: обґрунтувати та розробити систему підготовки учнів до зовнішнього незалежного оцінювання з математики.

Завдання дослідження:

1) опрацювати науково-методичну та психолого-педагогічну літературу з теми дослідження;

2) з'ясувати та уточнити сутнісні характеристики базових понять з теми дослідження;

3) обґрунтувати психологічні засади підготовки учнів до зовнішнього незалежного оцінювання;

4) проаналізувати типи завдань ЗНО з математики;

5) описати зміст підготовки до ЗНО з математики;

6) обґрунтувати шляхи підготовки до ЗНО з математики.

Методи дослідження. Для реалізації поставлених завдань було використано наступні методи:

- *теоретичні*: вивчення, аналіз і узагальнення психолого-педагогічної й методичної літератури з предмету дослідження для визначення поняттєво-категорійного апарату дослідження; опис основних класифікаційних ознак тестових завдань;

- *емпіричні*: цілеспрямоване спостереження за освітнім процесом; вивчення й узагальнення педагогічного досвіду для обґрунтування цілей і напрямів тестового контролю учнів на уроках математики.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків та списку використаних джерел.

У вступі розглянуто актуальність роботи, визначено об'єкт, предмет, мету та завдання дослідження.

У першому розділі «Проблема оцінювання навчальних досягнень учнів з математики» дано означення ключових понять «оцінювання», «навчальні досягнення школярів», «якість»; описано функції оцінювання навчальних досягнень та основні форми оцінювання навчальних досягнень; розглянуто методичні особливості оцінювання навчальних досягнень учнів основної та старшої школи; розглянуто та проаналізовано такий вид оцінювання навчальних досягнень як зовнішнє незалежне оцінювання (ЗНО); описано історію становлення ЗНО; проаналізовано напрямки психологічної підготовки школярів до зовнішнього незалежного оцінювання з детальними рекомендаціями кожному із учасників такого процесу.

У другому розділі «Підготовка до зовнішнього незалежного оцінювання з математики» проаналізовано типи завдань ЗНО з математики з прикладами, пояснено сутність поняття «статистична складність» завдання ЗНО; описано методичні особливості кожної змістової лінії шкільного курсу математики та створено пам'ятки для вчителів у межах кожної змістової лінії, які можна використовувати при підготовці до ЗНО; виокремлено шляхи підготовки до ЗНО, розроблено факультатив з розв'язування задач ЗНО з математики, зроблено порівняльний аналіз курсів з підготовки до ЗНО на відкритих освітніх ресурсах, акцентовано увагу на феномені репетиторства при підготовці до ЗНО.

Апробація результатів дослідження. За темою роботи опубліковано тези доповідей на Звітній студентській науково-практичній конференції фізико-математичного факультету (28-29 квітня 2021 р., м. Суми) [11] та стаття у збірнику студентських наукових робіт [8], тези на II Всеукраїнській науково-методичній інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу – ІТМ*плюс-2021 Форум молодих дослідників» (12 листопада 2021 р., м. Суми) [9], тези на Міжнародній науково-практичній конференції «Наукова діяльність як шлях формування професійних компетентностей майбутнього фахівця» (9 грудня 2021 р., м. Суми) [10].

Загальний обсяг роботи 91 сторінка друкованого тексту. Список використаних джерел включає 25 одиниць. Текст містить 40 рисунків та 3 таблиці.

Робота буде корисною студентам педагогічних спеціальностей та вчителям математики закладів загальної середньої освіти.

РОЗДІЛ 1.

ПРОБЛЕМА ОЦІНЮВАННЯ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ УЧНІВ З МАТЕМАТИКИ

1.1. Оцінювання навчальних досягнень як педагогічна проблема

Поступове вдосконалення загальної середньої освіти спрямоване на переорієнтацію самого процесу навчання на розвиток особистості школяра, на його навчання самостійно оволодівати новими знаннями, на формування мотиваційних, соціальних та функціональних компетентностей. Сучасна молода людина має бути об'єктивною, інформованою, критично і творчо мислити, більш мотивованою до самонавчання та саморозвитку.

Компетентнісна освіта орієнтована на практичні результати, досвід особистісної діяльності, вироблення ставлень, що і зумовлює принципові зміни в організації навчання, яке в свою чергу стає спрямованим на розвиток конкретних цінностей та життєво-необхідних знань і вмінь. У контексті цього змінюються підходи до оцінювання результатів навчання учнів як складової освітнього процесу. Тому оцінювання має ґрунтуватися на позитивному принципі, яке передбачає врахування рівня досягнень учнів, а не його невдачі.

Визначення рівня навчальних досягнень є особливо важливим, зважаючи на те, що навчальна діяльність повинна не просто надати людині певні знання, уміння та навички, а й сформувати її компетентність, яка базується на знаннях, здібностях, досвіді, цінностях, які були набуті саме завдяки навчанню. Компетентісний підхід до освіти вбачає вміння на основі здобутих знань вирішувати поставлені завдання та проблеми, які виникають під час різних життєвих ситуацій.

На сьогодні в освіті використовують різні підходи до оцінювання. Серед яких є такі, якими користувалися кілька десятиків років, є й такі, які містять інноваційні підходи. Змінилася і сама мета оцінювання. Вона вийшла за рамки оцінювання успішності навчання учня в оволодінні професійними компетенціями та навичками і стала інструментом навчання. Сам же процес

оцінювання учня й надалі базується на надійних та достовірних методах. Саме тому зростає потреба в точному та чесному оцінюванні. Тому розробляються способи документації і забезпечення достовірних показників оцінювання, які відповідають сьгоднішнім вимогам.

На основі аналізу освітньої практики і її нормативного забезпечення, можна зробити висновки про традиційну нерозривність таких понять як «оцінювання», «перевірка» і «контроль». Зокрема, у рекомендаціях Міністерства освіти і науки України щодо контролю й оцінювання навчальних досягнень учнів (2014 рік) зазначено: «...Перевірка й оцінювання передбачає систематичне й об'єктивне визначення рівня навчальних досягнень учнів відповідно до програмових вимог. ... Результати контрольно-оцінної діяльності мають виховне значення. Об'єктивно і методично правильно організований контроль розкриває невикористані резерви, можливості дитини, стимулює учнів до систематичної наполегливої праці, зумовлює формування важливих якостей особистості: відповідальності, здатності до подолання труднощів, самостійності» [6].

Натомість оновлене трактування процедури оцінювання в рекомендаціях МОН України передбачає суб'єкт-об'єктний характер взаємодії: «Структурними компонентами контролю навчальних досягнень учнів є перевірка та оцінювання результатів навчальної діяльності. ... Оцінювання – процес встановлення рівня навчальних досягнень учня/учениці в оволодінні змістом предмета відповідно до вимог чинних навчальних програм. Його результатом є педагогічна оцінка, яка відображається в оцінювальних судженнях і висновках учителя/вчительки вербально, або в балах. Виставлення балів обов'язково супроводжується оцінювальними судженнями» [7].

На сьогодні дуже важливими є дослідження європейського досвіду оцінювання навчальних досягнень, особливо для розробників освітньої політики та педагогів-практиків, які були проведені І.Є. Булах [3] та О. І. Локшиною [14]. Теоретичні підходи щодо практики оцінювання

навчальних досягнень було розкрито групою авторів Б. Ю. Бович, Н. З. Софій та О. І. Щербак [25], зарубіжними науковцями Н.Е. Гронлунд [5], М.А. Пінською [16], І.С. Фішман і Г.Б. Голуб [21] та ін.

Основи педагогічного оцінювання розкрито у доробку Т. М. Канівець [13].

Класичним визначенням у наукових колах зарубіжжя вважають визначення, яке запропонував К.Е. Бібі. Він трактує «оцінювання» як «систематичне збирання і тлумачення фактів, за якими йде наступний етап – судження про їх цінність і відповідне планування подальших дій» [1].

Виділяють оцінювання результатів навчання та оцінювання для навчання. Оцінювання результатів навчання – це сумативне оцінювання, а оцінювання для навчання – формувальне оцінювання.

О.І. Локшина на основі аналізів тлумачень зарубіжними вченими Ф. Перрену, Б. Коуві та Б. Беллом, П. Блеком, поняття «формувальне оцінювання» сформулювала наступним чином. «Формувальне оцінювання розуміється як інтерактивне оцінювання учнівського прогресу, що дає змогу вчителям визначати потреби учнів, адаптуючи до них процес навчання» [14].

У 1998 році П. Блек та Д. Уільям проаналізувавши 21 дослідження і майже 580 статей та різних розділів книг про вплив формувального оцінювання на досягнення учнів, з'ясували, що «інновації, спрямовані на впровадження практики формативного оцінювання, ведуть до істотних результатів навчання». Самі результати дослідження були опубліковані у праці «Чорний ящик: що там усередині? Оцінювання знань учнів як засіб підвищення ефективності навчально-виховного процесу» [2].

Однак більшість публікацій з оцінювання зводиться до розгляду методів сумативного (підсумкового) оцінювання, наприклад, тестового. Більшість авторів дають рекомендації щодо підготовки, проведення та аналізу результатів тестового вимірювання навчальних досягнень. Педагогічна практика потребує методичного супроводу та ресурсної

підтримки, тобто учителів шкіл необхідно забезпечити належними ресурсами й технологіями для застосування оцінювання в освітньому процесі.

У даному дослідженні ми будемо дотримуватися наступного тлумачення поняття «оцінювання». *Оцінювання – це процес встановлення рівня навчальних досягнень учня в оволодінні змістом предмета, уміннями та навичками відповідно до вимог навчальних програм.*

Об'єктом оцінювання навчальних досягнень дітей є знання, вміння та навички, творча діяльність, досвід емоційно-ціннісного ставлення до оточуючої дійсності.

Наведемо основні функції оцінювання навчальних досягнень.

Контролююча – передбачає визначення рівня досягнень окремих учнів, виявлення рівня готовності до засвоєння нового матеріалу. Це дає змогу вчителю планувати та викладати навчальний матеріал, відповідно до вимог.

Навчальна – зумовлює організацію оцінювання навчальних досягнень учнів, коли здійснення оцінювання сприяє вивченню, повторенню, уточненню, поглибленню знань, їх вдосконаленню та систематизації.

Діагностико-коригувальна – передбачає з'ясування причини труднощів, які виникають в учнів в процесі навчання, та виявлення прогалин у знаннях та вміннях для внесення коректив, спрямованих на їх усунення.

Стимулювально-мотиваційна – визначає таку організацію оцінювання навчальних досягнень, коли оцінювання стимулює бажання поліпшувати свої результати, сприяє змагальності учнів, розвиває відповідальність, формує позитивні аспекти навчання.

Виховна – полягає у формуванні вміння зосереджено і відповідально працювати, сприяє розвитку працелюбності і активності, у вмінні застосовувати прийоми контролю і самоконтролю.

При оцінювання навчальних досягнень школярів мають враховуватися такі чинники:

– ступінь сформованості навчальних та предметних умінь та навичок;

- характеристика відповіді учнів – лаконічність, повнота, цілісність, логічність, правильність, обґрунтованість;
- рівень володіння мисленнєвими операціями, вміннями аналізувати, порівнювати, синтезувати, абстрагувати, узагальнювати, класифікувати, робити висновки;
- якість, глибина, гнучкість, осмисленність, системність, міцність знань;
- досвід творчої діяльності, вміння виявляти та розв'язувати проблеми, формулювати гіпотези.

В педагогічній літературі досить часто вживається таке поняття, як «навчальні досягнення учнів». У тлумачному словнику української мови досягнення – це позитивний результат роботи, успіх. Отже можна вважати, що *навчальні досягнення школярів – це позитивні результати роботи школярів, які вони отримали в процесі навчання*. Мається на увазі, що не будь-які результати навчання, а саме ті, які мають певну якість, певний рівень, тобто відповідають певним вимогам чи стандартам якості освіти.

«Якість», в свою чергу, трактується як наявність істотних ознак, властивостей, які відрізняють один предмет чи явище від інших. Інтерпретацією загального поняття «якість» є складова з огляду на багатозначність та міждисциплінарність. Вона розглядається як філософська та економічна категорія. З філософського погляду, якість – об'єктивна, істотна, невідокремлювальна від буття внутрішня визначеність, цілісність явищ та предметів, завдяки яким вони є саме цими, а не іншими об'єктами. Сучасне філософське розуміння якості системи – це визначеність, притаманна їй реальному існуванню за тих чи інших умов, які характеризуються зв'язками з навколишнім середовищем на певному етапі розвитку. Саме це тлумачення обґрунтовує важливість узгоджувати внутрішню структуру системи освіти, концептуальні засади її діяльності з зовнішніми соціальними чинниками.

З економічної точки зору трактування якості – це якість продукції, що визначається його споживчою вартістю через фізичні властивості. Тому можемо розглядати заклад освіти як організацію, яка надає споживачам освітні послуги і саме з економічних позицій природно аналізувати якість і підвищення якості освітніх послуг та освіти. Міжнародна організація стандартизації прийняла таке означення якості: якість – це сукупність характеристик об'єкта, які описують його здатність задовольняти встановлені та передбачувані потреби.

Ми розумітимемо *якість* з позицій економічного підходу, *як не лише результат діяльності, а можливість досягнення результатів у вигляді внутрішнього потенціалу, зовнішніх умов та процесу формування деяких характеристик* [22].

«Оцінка» в українській мові має значення символу, формального кількісного вираження результату процесу оцінювання. Сам процес отримання кількісної оцінки з того чи іншого виду діяльності традиційно називають вимірюванням.

Оцінка – це визначення ступеня засвоєння знань, умінь, навичок. Оцінювання навчальних досягнень школярів – це процес спостереження за навчальною та пізнавальною діяльністю учнів, також процес опису, збирання, реєстрації інформації про учнів з метою покращення якості освіти. Оцінка навчальних досягнень учнів – результат самого процесу оцінювання, якісна інформація зворотного зв'язку.

Основна мета оцінювання навчальних досягнень учнів – це визначення ступеня відповідності результатів, отриманих у процесі навчання. Або іншими словами – це встановлення відповідності певним стандартам якості освіти у сфері навчальної діяльності. Виділяють три основних форми оцінювання навчальних досягнень: діагностичне, формуюче, підсумкове.

Діагностичне оцінювання має бути спрямоване на визначення рівня освітньої компетентності школярів з певної проблематики. Потрібно напередодні вивчення нової теми, яка ґрунтується на раніше вивченому

матеріалі, з'ясувати рівень розумових знань, актуалізувати їх. Метою діагностичного оцінювання є отримання даних про стадію навчання, на якій перебувають учні відносно цілей навчальної діяльності. На основі отриманих результатів вчитель зможе визначити наступні етапи навчання, надати допомогу учням в процесі навчання [22].

Формулююче оцінювання – це процес спостереження за навчанням учнів. Воно є неформальним, адже найчастіше відбувається без виставлення оцінок. Базується на встановлених критеріях оцінювання та передбачає зворотний зв'язок вчителя з учнями. Метою даного оцінювання є корегування діяльності вчителя та учнів в процесі навчання. Основними задачами є: сприяння виникненню навчальної мотивації, підвищення навчальної самостійності, індивідуалізація освітнього процесу. Таке оцінювання надає вчителю можливість стежити за процесом просування учнів до їх цілей навчання та допомагає коригувати освітній процес на ранніх етапах. А учням, в свою чергу, дає змогу усвідомити свою відповідальність за навчання та за свою освіту [22].

Підсумкове оцінювання призначене для визначення рівня підготовки учнів на завершальному етапі певного періоду навчання. Проводиться за результатами виконання певних видів робіт, а саме: контрольні, лабораторні, презентації, тести, ессе, проекти та інші. Оцінки, які виставлені за ці види роботи, є основними під час визначення підсумкової якісної оцінки. Підсумкове оцінювання має на меті оцінити якість навчання, константувати рівень засвоєння знань і сформованості вмінь. Забезпечує підбиття підсумків набутих знань та навичок. Основною функцією є інформування учнів та батьків про рівень виконання роботи учнем [22].

Зовнішнє незалежне оцінювання (ЗНО) можна розглядати і як вид підсумкового оцінювання (воно дозволяє визначити рівень підготовки учнів) і як вид діагностичного оцінювання (використовується для ранжування рівня початкових досягнень учнів під час їх вступу до закладів вищої освіти).

1.2. Зовнішнє незалежне оцінювання як спосіб оцінювання навчальних досягнень учнів

Зовнішнє незалежне оцінювання (ЗНО) – іспити для суб'єктів навчання для вступу до закладів вищої освіти (ЗВО) в Україні. Це комплекс організаційних процедур, спрямований на визначення рівня навчальних досягнень випускників закладів загальної середньої освіти (ЗЗСО) при їхньому вступі до ЗВО.

Метою ЗНО є підвищення рівня освіти населення України та забезпечення реалізації конституційних прав громадян на рівний доступ до якісної освіти, здійснення контролю за дотриманням Державного стандарту базової і повної середньої освіти й аналізу стану системи освіти, прогнозування її розвитку [19]. За результатами ЗНО виставляються оцінки як результат державної підсумкової атестації, а також зараховуються як результат вступних іспитів до ЗВО.

Щоб досягти високих результатів, і вчителю, і учню потрібно розуміти принципи проведення тестування, чітко та ясно усвідомлювати свої права та обов'язки, вміти користуватися знайденими матеріалами, які зможуть допомогти у складанні ЗНО.

Система ЗНО в Україні створювалася та вдосконалювалася протягом багатьох років і основним її завданням є забезпечення рівних умов доступу до вищої освіти. ЗНО дозволяє об'єктивно оцінити рівень навчальних досягнень дітей. Крім того, це неабияк полегшує процедуру вступу до ЗВО.

Вперше про таку необхідність тестування випускників української школи заговорили у 1993 році. Але реальне становлення ЗНО розпочалося лише у 2002 році. Спочатку студенти перших курсів деяких ЗВО почали проходити тестування, а в наступних роках – деякі випускники шкіл з різних сіл і міст України. За декілька років зросла кількість закладів освіти, які стали враховувати результати тестування під час вступу до них. І вже у 2008 році ЗНО стало обов'язковим для всіх осіб, які мали намір вступити до ЗВО.

Зауважимо, що для деяких спеціальностей також необхідно пройти обов'язкові творчі конкурси.

На думку О. В. Школьного [22], основними причинами введення ЗНО в Україні є:

1) прагнення врахувати і реалізувати в Україні світовий досвід вступної кампанії, оскільки в світі практично немає країн, які б не використовували при вступі до ЗВО результати національних стандартизованих тестувань;

2) наявність високого рівня корупції на місцевому рівні під час вступу до закладів вищої освіти України;

3) зниження рівня фахової підготовки випускників закладів загальної середньої освіти з різних дисциплін, не зважаючи на традиційно стабільні офіційні статистичні дані, почало проявлятися під час навчання у ЗВО і вже не могло задовольнити потреби цих закладів освіти;

4) необхідність підняття в українському суспільстві престижу освіти в цілому [22].

З 2019 року випускники, які здобувають повну загальну середню освіту, мають пройти ДПА у формі ЗНО з двох предметів: української мови і математики, або історії України на вибір. А з 2021 року планується два рівня ЗНО з математики (стандарту і профільний).

Більш ніж за 10 років ЗНО в Україні неодноразово змінювалося, а саме:

- змінювалися способи організації та терміни проведення самого тестування;

- варіювалась кількість навчальних предметів;

- декілька раз варіювалась кількість предметів, які можна обрати не більше п'яти);

- не раз змінювались правила проходження тестування мовами національних меншин.

Опишемо коротко історію виникнення ЗНО та основні етапи його впровадження в освіту.

1993 рік. В Україні вперше здійснено спробу запровадити тестування випускників закладів загальної середньої освіти, але через ряд чинників вона виявилася невдалою.

2002 рік. Центр тестових технологій Міжнародного фонду «Відродження» спільно з Міністерством освіти та науки України провели 200 тестувань, у яких взяли участь студенти перших курсів ЗВО, метою якого була апробація тестових завдань та розробка технології адміністрування тестів.

2003 рік. Центр тестових технологій Міжнародного фонду «Відродження» спільно з Міністерством освіти та науки України провели тестування з математики та історії у 670 школах України. У чотирьох ЗВО почали зараховувати результати тестування як вступні випробовування. А за бажанням учнів закладів загальної середньої освіти результати тестування почали зараховувати як ДПА.

2004 рік. Центр тестових технологій Міжнародного фонду «Відродження» спільно з Міністерством освіти та науки України провели тестування 4485 випускників шкіл міст Києва, Донецька, Львова, Харкова, Одеси з математики, української мови, історії та економіки. У 31 закладі вищої освіти було прийнято рішення про зарахування результатів тестування як вступних випробувань. В цей же рік Кабінет міністрів України прийняв постанову, якою передбачалося в 2006 році провести випробування ЗНО навчальних досягнень випускників закладів освіти, а з 2007-2008 років запровадити ЗНО навчальних досягнень випускників, які бажають вступити до ЗВО.

2005 рік. Президент В. Ющенко Указом доручив Міністерству освіти та науки України впродовж наступних років здійснити перехід від проведення вступних випробувань до закладів вищої освіти шляхом ЗНО. За постановою Кабінету Міністрів було створено Український центр оцінювання якості освіти та встановлено, щоб ЗНО навчальних досягнень випускників закладів

освіти які бажають вступити до ЗВО стало державною підсумковою атестацією та вступним випробуванням до ЗВО.

2006 рік. Вперше у державному бюджеті України були виділені кошти на запровадження ЗНО та моніторингу якості освіти. Розпочинає свою діяльність Український центр оцінювання якості освіти. Створюються регіональні центри оцінювання якості освіти, їх вже налічують вісім. Проводиться тестування 41818 випускників навчальних закладів. Для цього залучається 6300 інструкторів та 700 екзаменаторів.

2007 рік. Всі ЗВО зараховують результати ЗНО, яке проводиться у формі тестування з української мови, математики, історії України та всесвітньої історії.

2008 рік. Проходження ЗНО є обов'язковою умовою вступу до ЗВО. Збільшується кількість предметів, які можна обрати для тестування.

2009 рік. ЗВО оголосили перелік сертифікатів ЗНО необхідних для вступу на певні напрямки. Скоротили до восьми кількість предметів, з яких можливе тестування, додали іноземні мови, можливість обирати не три, а до п'яти предметів. Тестування з української мови та літератури є обов'язковим для всіх випускників. Підготовчі курси при ЗВО не надають права на позаконкурсний вступ.

2010 рік. З цього року результати ЗНО вже не зараховують як результати ДПА. Тому сесію ЗНО проводять після проведення ДПА. Вперше ЗНО проводиться лише українською мовою. Кожен випускник школи обов'язково повинен пройти тестування з української мови та літератури та на вибір з математики чи історії. Саме з цього часу екзаменатори перевіряють лише творчу частину тестів, а решта тестів перевіряється машинним способом.

2011 рік. Результати тестування зараховують як вступні випробування до ЗВО. ЗНО з української мови та літератури є обов'язковим для всіх абітурієнтів. Можливе тестування з таких предметів: українська мова та література, історія України, математика, біологія, географія, фізика, хімія,

російська мова, одна з іноземних мов. Вперше проводиться пробне ЗНО з двох предметів.

2012 рік. До предметів додається всесвітня історія. Максимальна кількість предметів, які можна здати, знизилась до чотирьох. Обов'язковою залишається українська мова та література, інші предмети напряму залежать від обраної спеціальності.

2013 рік. Перелік предметів для складання ЗНО доповнюється зарубіжною літературою.

2015 рік. Для вступу до ЗВО абітурієнти подають сертифікати лише 2015 року. Кожен має право скласти тести не більш ніж з чотирьох предметів. Два рівні складності сертифікаційної роботи – базового та поглибленого. Для випускників закладів загальної середньої освіти результати ЗНО з української мови та літератури зараховуються як результати ДПА. З кожного предмету встановлюється «порогів бал» - кількість тестових балів, які можна набрати мінімально для вступу до ЗВО.

2017 рік. Міністерство освіти та науки розробило оптимальні умови для задачі ЗНО учнів з особливими потребами. За ДПА зараховують тестування з трьох предметів: перший обов'язковий з української мови та літератури, другий за вибором між математикою і історією України, третій за вибором предметів з яких проводиться ЗНО.

2018 рік. Список предметів, з яких можна скласти ЗНО, включено 11 предметів. Російська мова виключається.

2020 рік. Через пандемію коронавірусу терміни проходження ЗНО переносяться, забороняється проведення пробного ЗНО. Результати ЗНО з трьох навчальних предметів – української мови та літератури, математики або історії України та одного з предметів – будуть зараховані, як результати ДПА. Під час вступу до ЗВО приймаються сертифікати ЗНО за 2017-2020 роки з усіх предметів, крім іноземних мов (дійсні лише сертифікати 2018-2020 років). Скасування обов'язкового проходження ЗНО для випускників,

які не вступатимуть до ЗВО, а діти з тимчасово окупованих територій можуть вступати до ЗВО взагалі без складання ЗНО.

2021 рік. Кожен учасник має право пройти тестування не більше ніж з 5 навчальних предметів. Змінено ЗНО з української мови та літератури. Тестування складатиметься з двох рівнів: українська мова, українська мова та література. Також змінено ЗНО з математики. Тест матиме два рівні: стандарту та поглиблений (рис.1).



Рис.1. ЗНО з математики у 2022 році

На сьогодні випускникам шкіл та учням закладів професійно-технічної та вищої освіти, які здобувають повну загальну середню освіту потрібно пройти тестування з чотирьох предметів і саме вони будуть зараховані як оцінки за державну підсумкову атестацію

Першим обов'язковим предметом є українська мова або українська мова і література. Другим обов'язковим предметом є математика (рівень стандарту або поглиблений рівень). Третій за вибором – історія України або іноземна мова. Четвертий – будь-який предмет, який учасник ще не обрав з

переліку тих, які винесені на ЗНО, а саме біологія, географія, фізика, хімія, іноземні мови.

Головними результатами ЗНО для учнів є кількісна оцінка за тестування, яка може сягати від 100 до 200 балів. Результати тестування з певних навчальних предметів можуть визначатись за двома шкалами:

- рейтинговою 100-200 балів (для учасників, які подолали поріг «склав-не склав»);
- критеріальною 1-12 балів для учасників, які завершують здобуття повної загальної середньої освіти і обрали цей предмет для проходження ДПА у формі ЗНО).

Критеріальна оцінка є сталою, на неї не впливає пороговий бал. А рейтингова залежить від загальної успішності всіх учасників ЗНО з цього предмету.

У якості висновку до даного підрозділу визначимо переваги (рис.2) та недоліки (рис.3) ЗНО як способу оцінювання навчальних досягнень учнів.

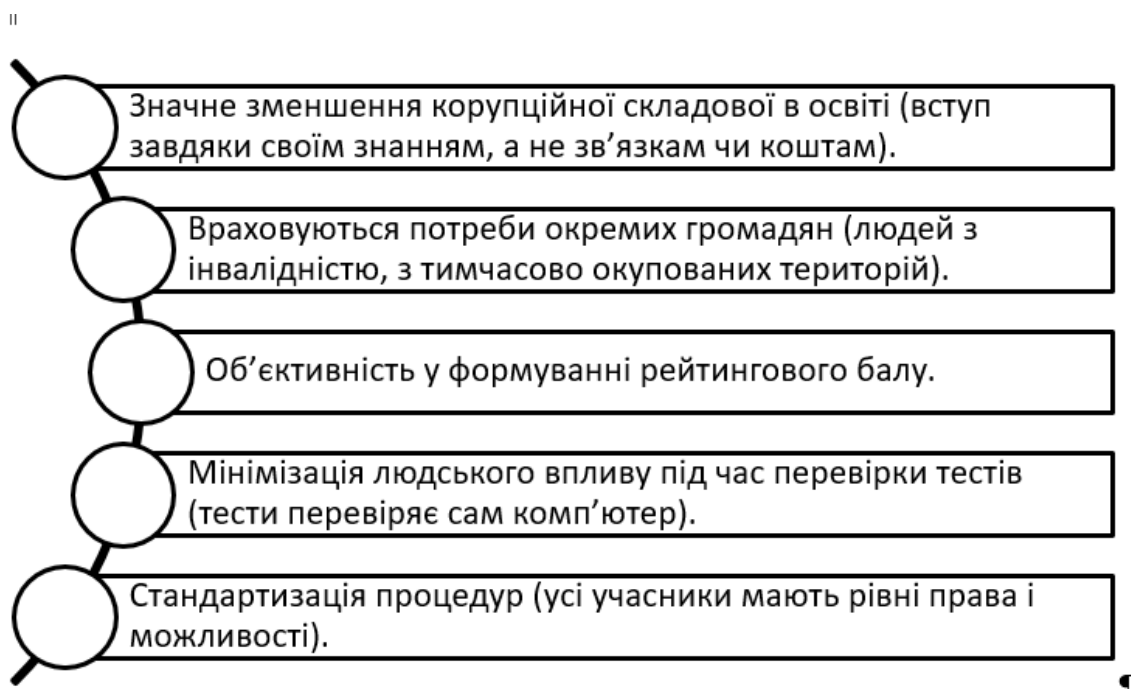


Рис.2. Переваги ЗНО як способу оцінювання навчальних досягнень учнів

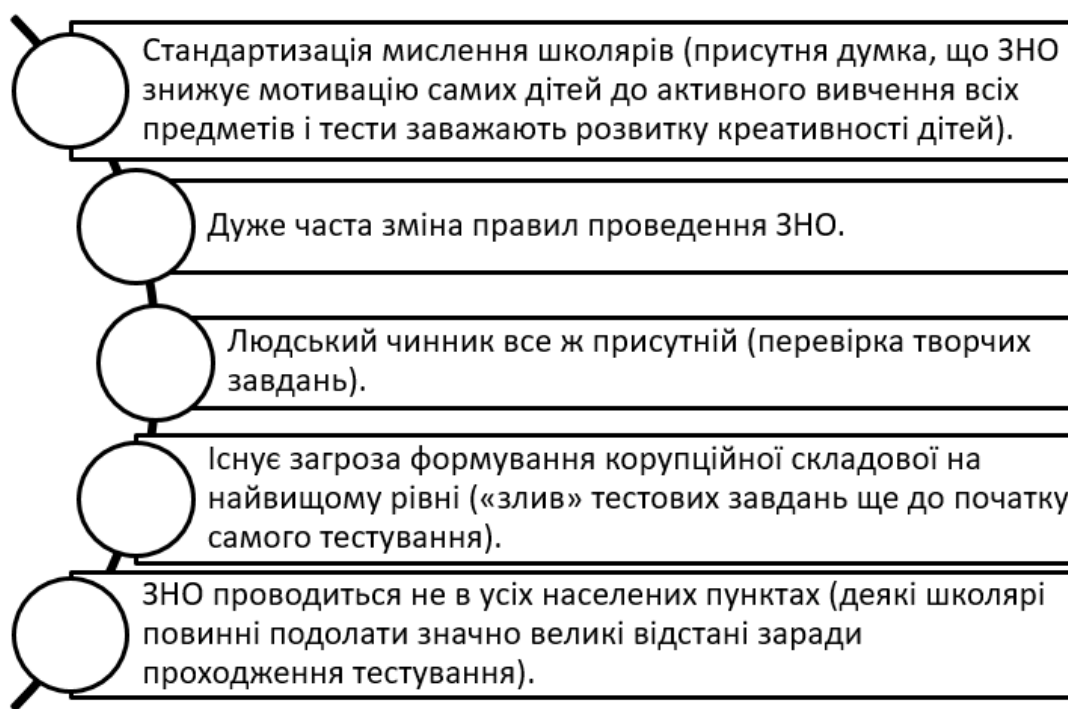


Рис.3. Недоліки ЗНО як способу оцінювання навчальних досягнень учнів

1.3. Психологічні засади підготовки учнів до зовнішнього незалежного оцінювання

Зовнішнє незалежне оцінювання радикально відрізняється від звичної учням форми перевірки знань, а тому проблема психологічної підготовки учнів до здачі ЗНО є актуальною в наш час. Будь-який іспит – це завжди випробування, яке пов’язане з переживаннями, навіть, добре підготовлених випускників, що в свою чергу веде до стресу. А складання ЗНО – це стресова ситуація, яка вимагає від випускників мобілізації всіх психічних почуттів, швидкої реакції для пошуку правильної відповіді на запитання у тестах. Це значно потужніше джерело стресу, бо проходить у незнайомому місці, серед незнайомих людей, до того ж члени екзаменаційних комісій також незнайомі. Отже, якщо говорити про психологічні труднощі в плані підготовки учнів до ЗНО, то вони пов’язані з рівнем розвитку таких пізнавальних процесів, як пам’ять, увага, логічне мислення, вміння реалізовувати свої пізнавальні здібності.

Значну роль у забезпеченні успішного складанні ЗНО відіграє загальний психофізичний стан учня. Він багато в чому залежить від настрою, впевненості у своїх знаннях та можливостях, уміння управляти своїм емоційним станом.

Саме тому є важливим психологічний супровід випускників при підготовці до ЗНО. Він полягає в тому, щоб понизити або й зняти рівень напруги і тривожності, забезпечити впевненість у своїх силах та виробити навички, які допоможуть справитися з стресом у складних життєвих ситуаціях.

Метою психологічної підготовки є вироблення психологічних якостей, умінь і навичок учнів, які забезпечать ефективність підготовки до проходження ЗНО та дозволять кожному учню комфортно почуватися під час проходження кожного наступного іспиту ЗНО. А це, в свою чергу, сприятиме розумовій роботі, концентрації уваги, розвитку пам'яті, умінню мобілізувати себе у складних ситуаціях, вільно володіти своїми емоціями.

З метою зняття напруження пропонуємо дотримуватися наступних *рекомендацій при підготовці до ЗНО*.

- Спланувати свою підготовку, розподілити свій час за темами.
- Розпочати слід з більш складних завдань.
- Після кожних 45 хвилин занять робити невеликі перерви, мінімум 10 хвилин.
- Не намагатися запам'ятати весь підручник, усі формули. Навчальний матеріал краще структурувати у вигляді таблиць, схем, малюнків.
- Найкраще запам'ятовується інформація, яка викладена на початку та в кінці тексту. Тому слід напружувати свої пізнавальні здібності під час запам'ятовування саме при вивченні середини.
- Слід повторювати раніше вивчений матеріал.
- Готуючись до ЗНО не думайте, що не впораєтесь. Навпаки, будьте впевнені в своєму успіху.

- Намагайтеся виконати якомога більше тестів з тренувальною метою.
- В цей час не слід відмовлятися від улюблених справ чи занять спортом. Можна їх поєднати або чергувати один за одним.
- Раціональне харчування забезпечить баланс необхідних інгредієнтів і відновить енергетичні витрати.
- Нормальний та здоровий сон, відпочинок.
- Підтримка батьків та вчителів, власна мотивація.

Отже, психологічну підготовку до ЗНО можна розділити за трьома напрямками (рис.4).

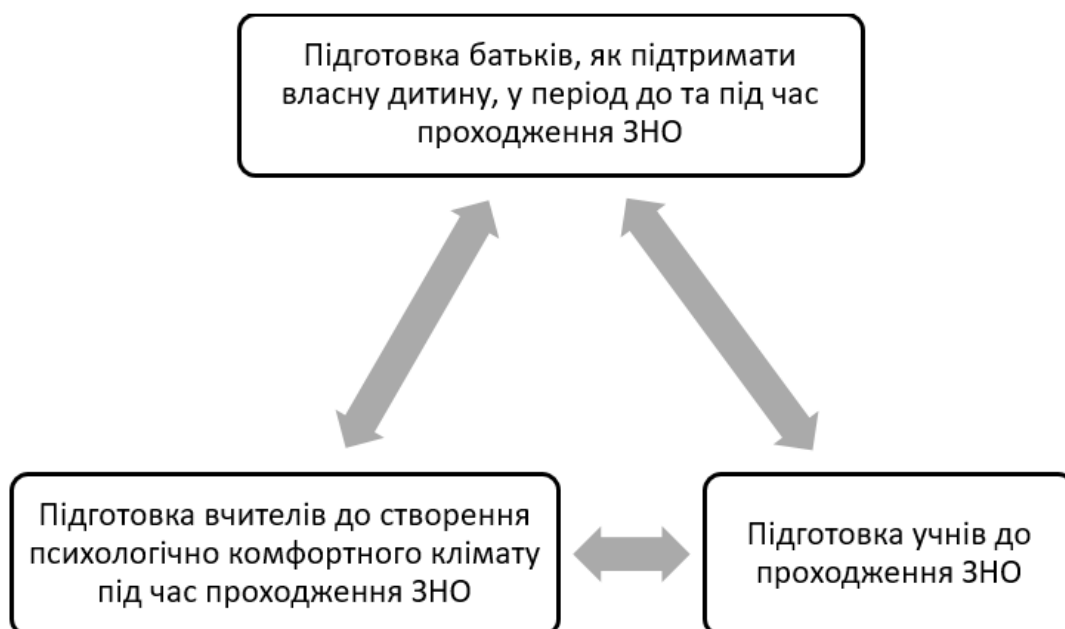


Рис.4. Напрями підготовки до ЗНО

Підготовка батьків, як підтримати власну дитину, у період до та під час проходження ЗНО. При підготовці до ЗНО важливою є роль учителя, а підтримка батьків взагалі є одним з важливих чинників успіху. Підтримка повинна ґрунтуватися на вірі в природні здібності дитини, її можливості подолати життєві труднощі. Батьки повинні мати мужність, щоб продемонструвати свою віру в свою дитину та показати своє задоволення від досягнень або прикладених зусиль дитини. Існують спеціальні слова, які зможуть підтримати дитину, наприклад: «Ти це знаєш дуже добре», «Ми

впевнені, що ти зможеш, що ти знаєш» тощо. Підтримувати можна і за допомогою дотиків, поглядів, спільних дій.

Взагалі, психологічна підтримка є однією з найважливіших чинників, які визначають успішність випускника під час складання ЗНО. Справжня підтримка, ґрунтується на підкресленні здібностей, на позитивних сторін дитини. Вона заснована на вірі у природну здатність дитини долати життєві труднощі з підтримкою тих, хто є не чужим для учня. Саме дорослі мають нагоду показати дитині своє захоплення, задоволення, свою радість та гордість щодо її досягнень чи зусиль. Водночас потрібно навчити дитину справлятися з різними поставленими перед нею завданнями, створити установку «Ти зможеш, ти сильний, ми віримо в тебе». Батькам необхідно мати мужність та бажання, щоб забути минулі невдачі і помилки своєї дитини; пам'ятати минулі успіхи і нагадувати їх. Можна підтримувати і за допомогою дотиків, посмішок, сумісними діями.

Сформулюємо психологічні підказки батькам (рис.5).

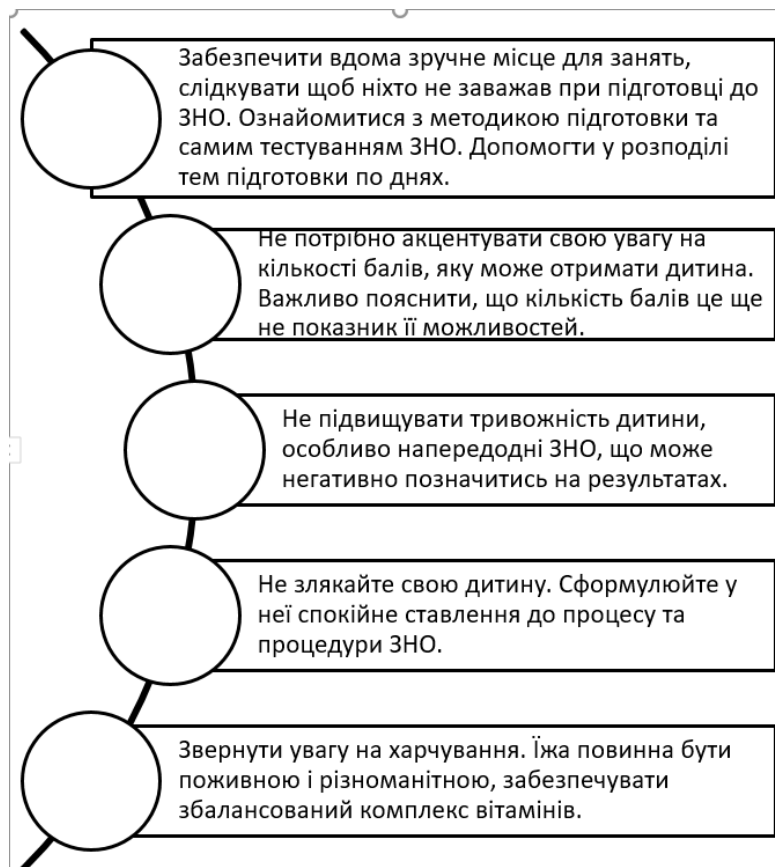


Рис.5. Психологічні підказки батькам, діти яких готуються до ЗНО

Підготовка учнів до проходження ЗНО. ЗНО потребує високого рівня працездатності протягом всієї підготовки до нього. Саме тому є висока ймовірність зниження рівня якості роботи. Виникає відчуття втоми, з'являється напруга та різке погіршення апетиту. З метою запобігання втоми, необхідно робити перерви в зайняттях, переключати увагу на щось інше, використовувати методи психологічного розвантаження. Доцільно проводити фізкультпаузи, дихальні вправи, вправи для очей. Вправи для очей в основному складаються з рухів очима «вправо-вліво», «вгору-вниз», переведення погляду з близьких предметів на дальні і навпаки, кругові рухи.

Дуже важливо навчити дитину використовувати різноманітні допоміжні засоби для саморегуляції діяльності, а саме: складання списку необхідних справ, використання годинника для контролю часу, використання прийомів тайм-менеджменту (оптимальної організації часу для виконання поточних задач) тощо.

Необхідно розвивати у дитини навички самостійного оцінювання власної роботи. Було б корисно запитувати у неї, що саме їй сподобалось у роботі чи що б вона хотіла змінити. Якщо дитині важко дати відповідь на запитання, можна запропонувати йому оцінити роботу за такими критеріями як правильність відповіді, швидкість виконання поставленого завдання. Не варто поспішати пропонувати готову відповідь чи розв'язок, а краще спочатку поцікавитися її власною думкою.

Важливо розвивати в учнів таку функцію як контроль, навички самоперевірки. Потрібно, щоб дитина після кожного завершення роботи самостійно перевіряла результати виконаних завдань, знаходила помилки. Основний принцип, якого потрібно дотримуватися: зробив – перевір, якщо залишився час – перевір ще раз. Необхідно витворити відчуття важливого та позитивного ставлення до ЗНО.

Сформулюємо психологічні підказки випускникам, майбутнім учасникам ЗНО (рис.6).

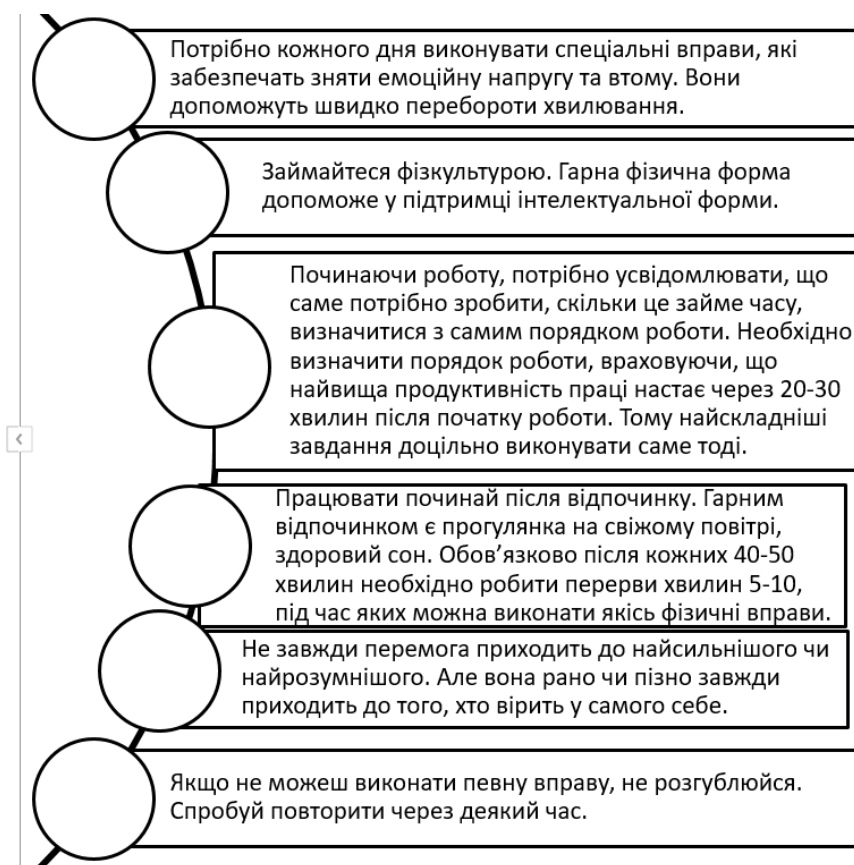


Рис.6. Психологічні підказки випускникам, майбутнім учасникам ЗНО

Підготовка вчителів до створення психологічно комфортного клімату під час проходження ЗНО. Випускники під час підготовки до ЗНО завжди шукають і сподіваються на психологічну підтримку вчителя, яка проявляється у вербальних позитивних оцінках чи позитивних підкріпленнях у ситуації тривоги і хвилювання. Причини можуть бути різними. Це сумніви у міцності та повноті своїх знань, у власних здібностях, вміння аналізувати, логічному мисленні, можливості пам'яті та уваги. Стрес у незвичній ситуації, стрес через відповідальність перед вчителями, батьками, школою посилює їх хвилювання та додає тривоги. Потрібно допомогти учням відчувати себе впевнено, щоб вони вірили у свої знання та силу.

Для цього потрібно сформулювати програму успішного проходження ЗНО. Порекомендувати учням прийти пробне тестування або самим створити ситуацію незалежного тестування під час освітнього процесу. Це зможе адаптувати психічну сферу учнів до самої процедури тестування.

Щоб подолати стресовий стан під час підготовки чи складання ЗНО, варто використовувати наступні вправи.

«Рейтинг справ». Учні самостійно складають список справ, які вони роблять протягом дня, розподіляють їх за важливістю у порядку спадання. Потім роблять записи на стікерах про три перші справи, прикріплюють їх на видне місце. А мета вчителя: необхідність підвести групу до висновку, що в житті багато справ, та не варто витратити свій час на дрібниці, які оточують нас. Краще визначити свої пріоритети й настирно йти до поставленої мети. До цієї вправи корисно приєднати таку пораду: скласти свій календар, в якому потрібно буде проставити за датою коли і що потрібно вивчити чи повторити. Прикріпити список біля свого робочого місця та відмічати вивчений матеріал. Якщо не вкладаєтесь у створений графік, то можна ущільнити вивчений чи повторювальний матеріал.

«Опонент». Необхідно заздалегідь приготувати чисті аркуші паперу та ручки чи олівці. Потім учні розділяють аркуш на дві половини. На одній потрібно написати позитивні моменти ЗНО, на іншій – негативні. Наступним кроком є обговорення негативних моментів. Їх потрібно перетворити на позитивні або нейтральні. Метою цієї вправи є формування в учнів позитивного настрою під час підготовки та проходження ЗНО та знаходження переваг самого ЗНО. Учні самостійно повинні прийти до необхідних висновків, а педагог лише направляє та керує міркуваннями дітей.

«Робочий експеримент». Для цього потрібно відтворити реальну ситуацію ЗНО. Учні за 15 хвилин відповідають на 5 завдань, бажано у тестовій формі, а потім пишуть міні-твір на тему «Мої рецепти успіху». У творі мають бути відповіді на такі питання: чи складні були завдання? як ви справилися із завданнями? Що заважало? Чи помітно тих, хто хотів списати?

«Я переживаю стрес коли...». Необхідно по колу продовжити речення «Я переживаю стрес, коли...» Мета цієї вправи – привернути увагу учнів до

свого внутрішнього стану та з'ясувати головні причини стресорів випускників.

Рекомендації учням від вчителя щодо процедури проходження ЗНО.

– Стежте за часом! Оскільки на виконання тесту ЗНО з математики (33 завдання) відводиться 180 хвилин, треба витратити на виконання тренувального тесту не більше 2,5 години.

– Перш ніж виконувати завдання, уважно прочитайте його умову, чітко усвідомте, що потрібно знайти. Якщо в завданні вимагається знайти суму (добуток, кількість тощо) коренів рівняння, або кількість (суму, добуток тощо) цілих (натуральних) розв'язків нерівності, або найменший (найбільший) розв'язок, то доцільно цю умову виділити в будь-який зручний для вас спосіб (підкреслити, обвести). Отже, з метою запобігання прикрих помилок, перш ніж записати відповідь, ще раз перевірте за виділеною вами в умові вимогою, що потрібно було знайти.

– Починаючи виконувати завдання, спробуйте спрогнозувати ймовірну відповідь.

– Не лякайтеся, якщо формулювання завдання вам незнайоме. Спробуйте пригадати відповідні означення або теоретичні факти (безперечно їх треба знати).

– Пам'ятайте, що рисунок до геометричної задачі і може стати вашим помічником в її розв'язуванні або, навпаки, заведе вас «у глухий кут». Тому рисунок до задачі потрібно виконувати акуратно та уважно. Використовуйте клітинки Вашого зошита.

– Прикладну задачу вдумливо перечитайте кілька разів. Перед тим, як визначати правильну відповідь, перевірте інші альтернативи.

– За рік до тестування потрібно забути про калькулятор та лінійку. Активно використовуйте для обчислень формули скороченого множення. Пам'ятайте, що відповіді до завдань 25-30 необхідно записувати лише десятковим дробом. Перевіряйте отриманий результат.

– Не панікуйте! Не робіть того, чого не просять!

– Якщо після виконання тесту залишиться час, поверніться до невиконаних завдань.

– Залиште час на заповнення бланків відповідей і на їх перевірку. Якщо Ви помітили, що припустилися помилки, виправіть її, як описано у бланках.

Підготовка та проходження зовнішнього незалежного оцінювання пов'язане зі стресовими ситуаціями, тому організація психологічного супроводу такого процесу є актуальною проблемою. Психологічну підготовку до ЗНО можна розділити за трьома взаємопов'язаними напрямками: підготовка батьків, як підтримати власну дитину, у період до та під час проходження ЗНО; підготовка вчителів до створення психологічно комфортного клімату під час проходження ЗНО; підготовка учнів до проходження ЗНО.

РОЗДІЛ 2. ПІДГОТОВКА ДО ЗОВНІШНЬОГО НЕЗАЛЕЖНОГО ОЦІНЮВАННЯ З МАТЕМАТИКИ

2.1. Типи завдань ЗНО з математики

З 2021 року учні всіх закладів освіти здаватимуть ЗНО з математики двох рівнів: рівень стандарту та профільний рівень. Учні, які вивчали математику на рівні стандарту будуть проходити тестування рівня стандарт і результат виконання завдань №№1-26, №30, №31 буде зарахований як результат державної підсумкової атестації за освітній рівень повної загальної середньої освіти. В свою чергу, учні, які вивчали математику на профільному рівні будуть проходити тестування профільного рівня, а результат виконання всіх завдань буде зарахований як результат державної підсумкової атестації за освітній рівень повної загальної середньої освіти, і в той же час буде використовуватися під час прийому до закладів вищої освіти [12].

На сьогодні сертифікаційна робота ЗНО з математики складається із завдань наступних чотирьох форм.

1. Завдання з вибором однієї правильної відповіді (№№ 1-16 в обох рівнях) (рис.7).

Такі завдання складаються з умови та чотирьох або п'яти варіантів відповіді. Серед наведених варіантів необхідно обрати правильний. За правильне виконання такого завдання учасник отримує 1 бал. У випадку неправильної відповіді або взагалі її відсутності, учасник не отримає жодного балу.

2. На рисунку зображено графік залежності шляху S (у км), пройденого групою туристів, від часу t (у год). Яке з наведених тверджень є правильним?
- А Зупинка тривала 4 години.
 - Б До зупинки туристи пройшли 20 км.
 - В Після зупинки туристи пройшли більшу відстань, ніж до зупинки.
 - Г Туристи зробили зупинку через 4 години після початку руху.

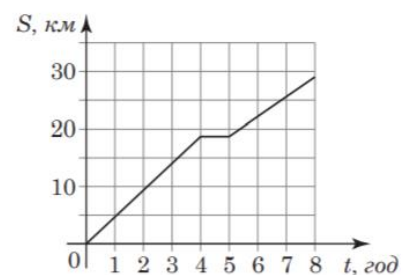


Рис.7. Зразок завдання з вибором однієї правильної відповіді

Завдання з вибором однієї правильної відповіді є чи не одним з найбільш популярним при проведенні тестувань різних видів. Основна причина є те, що саме ці тести легко перевіряються комп'ютерним способом, що дозволить уникнути впливу суб'єктивного людського фактору, який характерний при перевірці письмових завдань із розгорнутою відповіддю. Завдання з вибором однієї правильної відповіді мають бути простими. Їх розв'язання повинно містити лише виконання 1-3 логічних кроки. Головним завданням цього виду тесту є перевірка учасників розуміння самої суті математичних понять на елементарному рівні, уміння виконувати найпростіші та стандартні технічні вправи. Кожне таке завдання перевіряє знання лише одного з понять або вміння учасником виконувати якусь одну операцію. Саме за результатом виконання таких завдань вчитель може з впевненістю визначити, чи засвоїв учень ті чи інші поняття, чи вміє він розв'язувати вправи того чи іншого типу, чи можливо, потребує допомоги зі сторони вчителя. Проте завжди з кожного правила часом існують винятки. Іноді до тесту потрібно включити більш складніші завдання. Наприклад, більше ніж на 1-3 логічні кроки, які не можна сформулювати у вигляді завдання з короткою відповіддю чи завдання з повним поясненням. Саме тоді можна застосовувати завдання з варіантами відповідей. Їх можна сформулювати у формі завдання з варіантами відповіді. Саме тоді формулюють задачі теоретичного змісту, основна задача яких полягає на встановлення істинності декількох тверджень. В цей же час важливо формулювати завдання з вибором однієї правильної відповіді, щоб це завдання перш за все перевіряло знання чи уміння учасників, які стосуються матеріалів лише з однієї конкретної теми. В протилежному випадку із загального результату тесту дуже важко зрозуміти, який саме матеріал учасник засвоїв повністю, а який зовсім не засвоїв чи засвоїв частково [12].

2. Завдання на встановлення відповідності (№№ 17-20 в обох рівнях) (рис.8).

Для кожного такого виду завдання наведено два стовпчики з певною інформацією. Завдання полягає в утворенні «логічних пар» між інформацією в першому стовпчику завдання (позначена цифрами 1-3) та інформацією в другому стовпчику (позначена буквами А-Д). При виконанні цього завдання учасник має визначити «логічні пари», тобто встановити відповідність інформації між довільно розташованою інформацією в поданих стовпчиках. Кожна така «логічна пара», за умови правильної відповідності, оцінюється в 1 бал. Максимально за правильне виконання завдання можна набрати 3 бали. За надання неправильної відповіді або її відсутності, учасник отримує 0 балів [12].

17. Установіть відповідність між початком речення (1–3) і його закінченням (А – Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

Початок речення

- 1 Графік функції $y = -x^3$
- 2 Графік функції $y = \sqrt{x}$
- 3 Графік функції $y = \cos x$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

Закінчення речення

- А розміщено лише в першій і другій координатних чвертях.
- Б має з графіком рівняння $x^2 + y^2 = 9$ лише одну спільну точку.
- В симетричний відносно осі y .
- Г симетричний відносно початку координат.
- Д не має спільних точок із графіком рівняння $x = 0$.

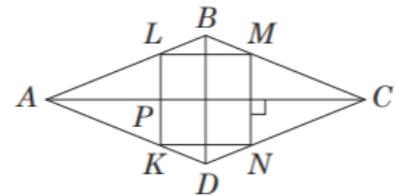
Рис.8. Зразок завдання на встановлення відповідності

Завдання на встановлення відповідності або як ще можна озвучити завдання на встановлення логічних зв'язків, завдання на достатність даних, завдання на відповідність між двома множинами об'єктів, завдання на знаходження правильної послідовності дій лише віднедавна почали з'являтися в стандартизованих оцінюваннях, саме тому великого досвіду в їх використанні та розробці ще не накопичено. Однак певні загальні рекомендації щодо методики розробки та методики навчання розв'язуванню таких завдань вже сформулювати можна.

3. Завдання відкритої форми з короткою відповіддю (№№ 21-26 для рівня стандарту, №№ 21-29 для профільного рівня) (рис.9).

Такі завдання містять умову задачі та питання, відповіді на які необхідно записати від руки у бланку відповідей. Розв'язання учасників у чернетці не беруть до уваги і не перевіряють. Кожне таке завдання оцінюється в 2 бали. А завдання під номерами 21 – 24 складаються з двох підпунктів, кожен з яких оцінюється в 1 бал, і таким чином можна набрати від 0 до 2 балів [12].

22. У ромб $ABCD$ вписано квадрат $KLMN$, сторона KL якого перетинає діагональ AC в точці P (див. рисунок). $AL = 10$ см, $AP = 8$ см.



1. Обчисліть довжину сторони квадрата $KLMN$ (у см).
2. Обчисліть довжину діагоналі BD ромба $ABCD$ (у см).

Рис.9. Зразок завдання відкритої форми з короткою відповіддю

Завдання відкритої форми з короткою відповіддю є найбільш наближеними до традиційних завдань із повним поясненням. Процес розв'язання таких завдань є невідомим для вчителя, проте відповідь до завдання учасник вже не обирає із запропонованих варіантів, а знаходить сам, це значно зменшує можливість отримання відповіді без демонстрації потрібних учителю знань, умінь і навичок. Такі завдання можуть містити значно більшу кількість логічних кроків, ніж завдання з вибором однієї правильної відповіді. Однак завдання з короткою відповіддю мають бути стандартними, алгоритм яких розв'язування має бути відомим учням. І чим більшою є кількість логічних кроків розв'язання такого виду завдання, тим більш стандартним має воно бути. Якщо ж завдання має елементи нетрадиційності, наприклад, містить незвичне формулювання, то розв'язання

такого завдання не має містити занадто громіздких технічних операцій. Наприклад, складні перетворення виразів зі змінними під час розв'язування різного виду рівнянь чи нерівностей.

4. Завдання відкритої форми з розгорнутою відповіддю (№№27-28 для рівня стандарту, №№30-34 для профільного рівня) (рис.10).

Такі завдання передбачають повне пояснення завдання, наведення всіх етапів розв'язання, посилання на математичні факти, можливі ілюстрації (рисунок, графіки, таблиці). Відповідно від повноти та правильності розв'язання такого завдання можна отримати такі бали:

- від 0 до 6 балів за завдання 27 рівня стандарту (30 завдання профільного рівня);
- від 0 до 4 балів за завдання 28 рівня стандарту (31 завдання профільного рівня);
- від 0 до 2 балів за завдання 32 профільного рівня;
- від 0 до 3 балів за завдання 33 профільного рівня;
- від 0 до 6 балів за завдання 34 профільного рівня.

Це означає, що за завдання відкритої форми у рівні стандарту є можливість отримати 10 балів, що в свою чергу становить 20% балів за весь тест. А в профільному рівні можна отримати 21 бал з 67 можливих, що становить більше 30% всіх балів за тест.

Детально критерії оцінювання завдань відкритої форми з розгорнутою відповіддю сертифікаційної роботи з математики зовнішнього незалежного оцінювання, наприклад, 2022 року можна знайти за посиланням <https://testportal.gov.ua/evaluationmath/>.

30. Задано функцію $y = 2x + 8$.

1. Для наведених у таблиці значень аргументу x і значень функції y визначте відповідні їм значення y та x .

x	y
0	
	0
9	

2. Запишіть координати точки M перетину графіка заданої функції з віссю x .
3. Знайдіть загальний вигляд первісних функції $f(x) = 2x + 8$.
4. Знайдіть первісну $F(x)$ функції f , графік якої проходить через точку M .
5. Побудуйте графік функції F .
6. Визначте область значень функції $G(x) = 3 \cdot F(x) + 1$.

Рис.10. Завдання відкритої форми з розгорнутою відповіддю

Завдання відкритої форми з розгорнутою відповіддю є найбільш звичними для учнів та вчителів, оскільки є традиційними для навчального процесу в українських школах протягом останніх років. Проте створення і розв'язування такого роду завдань з повним поясненням, мають свою специфіку. Вони входять окремими завданнями чи цілим блоком до великого стандартизованого тесту. Однією з головних проблем при розробці такого завдання з розгорнутою відповіддю, що входять до стандартизованого тесту є обмеження можливих способів його розв'язання. Найважливішим етапом під час тестування є адекватна оцінка рівня знань і умінь учнів. Саме тому вони мають перебувати приблизно в рівних умовах. Для завдання з повним поясненням принцип рівності умов проявляється в тому, щоб учень, який розв'язав задачу одним способом, був оцінений з тих самих позицій, що і учень, який розв'язав задачу іншим способом. Очевидно, маємо певне протиріччя: з одного боку хочемо перевірити знання і вміння учня розв'язувати різного роду складності завдання, логічність і поступовість міркування, обґрунтованість розв'язання, при цьому проявляючи творчі здібності, але і з тим самим маємо наміри обмежити учня в його творчості. Та насправді протиріччя тут немає. Тому правильним виходом з даної ситуації є включення до тестів лише тих завдань з повним поясненням, які в своєму

розв'язанні передбачають саме обмежену кількість приблизно рівноцінних способів розв'язування. Так якщо один зі способів розв'язання завдання містить 5 логічних кроків, а інший, наприклад – 8 логічних кроків, то таких завдань краще уникати, адже в таких ситуаціях просто неможливо правильно й адекватно оцінити знання і вміння учасників тестування [12].

Розглянувши та дослідивши результати ЗНО з математики за останні п'ять років (Статистика, 2017-2021) [20], їх основні показники можна представити у вигляді таблиці (таблиця 1).

Таблиця 1

Показники ЗНО з математики по Україні

Роки	2017р	2018р	2019р	2020р	2021р
Кількість зареєстрованих	113133 (53,87%)	112023 (53,87%)	160782	186204 (49,1%)	291789 (74,95%)
Фактична явка %	98,85	99,27	94,5	81,79	83,9
К-сть учнів, які набрали 200 балів	110	91	95	142	137
% учнів, що не подолали поріг	14,09	15,02	18,17	12,71	31,3
Середній бал за шкалою 100-200 балів	142,88	143,55	145,68	138,4	137,9
Середній бал за 12-ти бальною шкалою	6,8	6,6	6,4	6,3	5,3

З таблиці 1 видно, що більше половини всіх учнів, які були зареєстровані на складання ЗНО обрали тестування саме з математики (з 2021 року ЗНО з математики є обов'язковим). Також слід відмітити, що явка учнів на тестування є досить високою, але з кожним наступним роком можна побачити меншу активність. Водночас можна помітити стрімкий зріст кількості учнів, які не подолали бар'єрний поріг, тобто не набрали мінімальну кількість балів за тест. В свою чергу, середній бал за роботу також значно погіршився. Та все ж є і приємні дані. Ми бачимо, що з кожним

роком збільшується кількість учнів, які набирають максимально можливу кількість балів, а саме 200 балів. І, навіть є такі, які набрали 200 балів з декількох дисциплін.

Проаналізувавши сертифікаційні роботи ЗНО з математики 2017-2021 років основних та додаткових сесій, використовуючи дані Українського центру оцінювання якості освіти (офіційні звіти 2017-2021 років, які можна знайти за посиланням <https://testportal.gov.ua/ofzvit/>) і досвід Харківського регіонального центру оцінювання якості освіти, ми:

- дослідили динаміку змін якості та кількості завдань;
- проаналізували завдання ЗНО та психометричні таблиці результатів ЗНО;
- класифікували завдання за формою, обсягом, складністю, темами, класами в яких вивчаються;
- зробили узагальнення й отримали висновки.

На підставі зробленого аналізу ми дійшли висновків які розмістили у нижче поданих таблицях 2 та 3.

Таблиця 2

Кількість завдань ЗНО за формою

Форма завдання	Вибір однієї правильної відповіді	Встановлення відповідності	Відкрита форма з короткою відповіддю	Відкрита форма з розгорнутою відповіддю
2017, основна	19	5	6	3
2017, додаткова	20	4	6	3
2018, основна	20	4	6	3
2018, додаткова	20	4	6	3
2019, основна	20	4	6	3
2019, додаткова	20	4	6	3
2020, основна	20	4	8	3
2020, додаткова	20	4	8	3
2021, основна	16	4	9	5
2021, додаткова	16	4	9	5

У таблиці 3 наведемо знання та вміння, які перевіряються в завданнях ЗНО. При цьому використаємо розподіл задач за формою.

Таблиця 3

**Завдання ЗНО за формою та знання і вміння, що ними
перевіряються**

№	Форма завдання	Знання і вміння, що перевіряються
1	Алгебраїчні тестові завдання з вибором однієї правильної відповіді	Розуміння і аналіз інформації, поданої у вигляді таблиць, графіків, діаграм, малюнків та в тестовій формі. Вміння використовувати знання про відношення і пропорції, ознаки подільності, середнє значення величини.
2	Геометричні тестові завдання з вибором однієї правильної відповіді	Аналіз малюнків, креслень, діаграм. Знання властивостей геометричних фігур таких, як коло, круг, трикутник, чотирикутник. Знання та вміння використовувати формули для знаходження лінійних розмірів фігур, їх площ, об'ємів.
3	Завдання на встановлення відповідності	Вміння аналізувати текстову інформацію і розв'язувати задачі алгебраїчним способом.
4	Структуровані завдання з короткою відповіддю	Вміння розв'язувати задачі на відсотки, складати відношення та пропорції.
5	Неструктуровані завдання з короткою відповіддю	Вміння складати та розв'язувати лінійні та квадратні рівняння, нерівності, системи рівнянь та нерівностей. Вміння аналізувати отриману відповідь. Знання ймовірності випадкової події та використання правил та формул комбінаторики.

Аналіз статистичних показників завдань ЗНО відкритої форми з розгорнутою відповіддю [18] показав, що у багатьох учасників недостатньо розвинена просторова уява; значна частина учасників погано володіє апаратом математичного аналізу, припускає багато помилок під час визначення похідної та первісної функції, знаходження проміжків їх монотонності.

Сертифікаційні роботи останніх років містили довідкові матеріали основних формул з алгебри і початків аналізу та геометрії (рис.11). Використовуючи подані формули та вмівши їх правильно застосовувати можна було б виконати всі завдання тесту.

ДОВІДКОВІ МАТЕРІАЛИ										
Таблиця квадратів від 10 до 49										
Десятки	Одиниці									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ	
Формули скороченого множення $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	Квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ $D = b^2 - 4ac$ – дискримінант $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$, якщо $D > 0$ $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$, якщо $D = 0$ $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
Модуль числа $ a = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geq 0, \\ -a, & \text{якщо } a < 0 \end{cases}$	
Степені $a^1 = a, a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ разів}}$ для $a \in R, n \in N, n \geq 2$ $a^0 = 1$, де $a \neq 0$ $\sqrt{a^2} = a $ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ для $a \neq 0, n \in N$ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, a > 0, m \in Z, n \in N, n \geq 2$ $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ $(ab)^x = a^x \cdot b^x$ $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$	Логарифми $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, k \neq 0$ $a^{\log_a b} = b$ $\log_a a = 1$ $\log_a 1 = 0$ $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$ $\log_a b = \frac{1}{k} \cdot \log_a b$

Рис.11. Фрагмент довідкових матеріалів сертифікаційної роботи

Саме тому для подальшого вдосконалення сертифікаційної роботи з математики, потрібно збільшити частки завдань, зміст яких пов'язаний із життєвими ситуаціями; завдання, ілюстровані графіками, таблицями, діаграмами; включення стереометричних і планіметричних задач із практичним змістом.

Кожне завдання ЗНО з математики має власну статистичну складність. *Статистичною складністю* тестового завдання називають відношення учасників тестування, які отримали правильну відповідь на це завдання, до загальної кількості учасників тестування. До проведення тестування визначити статистичну складність окремого завдання неможливо, але при створенні тесту природно передбачати, який відсоток учасників тестування отримає правильну відповідь на те чи інше завдання. Такий рівень складності називають *авторським* або *експертним*.

Складність тестового завдання (P-value) – показник успішності виконання цього завдання учасниками тестування. Визначають як відношення (у відсотках) кількості балів, набраних усіма учасниками за виконання цього завдання, до максимальної кількості балів, яку вони могли б отримати за його виконання. У таблиці наведено інтервали значень складності і характеристику тестового завдання (рис.12) та розподіл тестових завдань з математики за складністю (рис.13) [15].

Інтервал значення P-value	Характеристика завдання
> 80 %	дуже легке
60 – 79 %	легке
40 – 59 %	оптимальне
21 – 39 %	складне
≤ 20 %	дуже складне

Рис.12. Інтервали значень складності та характеристика тестового завдання

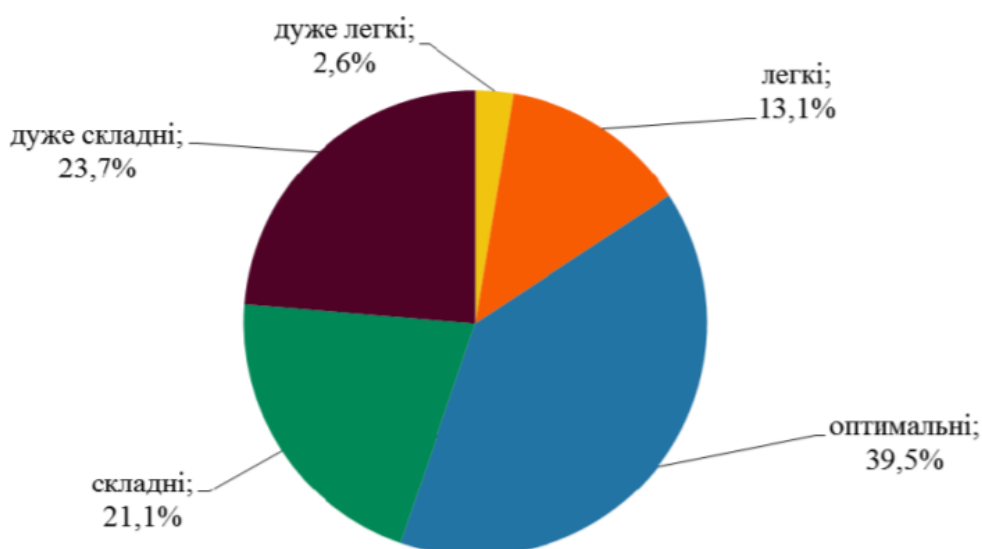


Рис.13. Розподіл тестових завдань з математики за складністю

Розподільна здатність (дискримінативність) тестового завдання (D-index) – здатність тестового завдання відділяти учасників тестування з різним рівнем навчальних досягнень. Дискримінативність завдання визначають як різницю складності завдання для сильної та слабкої (добре і погано підготовленої) груп учасників тестування. У таблиці наведено інтервали значень розподільної здатності і характеристику дискримінативності тестового завдання (рис.14) та розподіл тестових завдань з математики за роздільною здатністю (рис.15) [15].

Інтервал значення D-index	Характеристика дискримінативності завдання
41 – 100 %	дуже хороша
31 – 40 %	хороша
21 – 30 %	середня
≤ 20 %	низька

Рис.14. Інтервали значень розподільної здатності і характеристика дискримінативності тестового завдання (2020 р.)

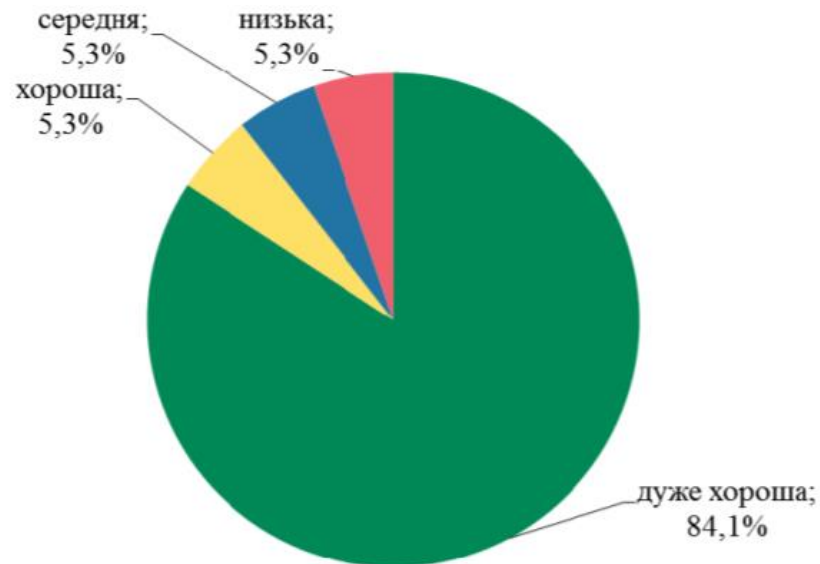


Рис.15. Розподіл тестових завдань з математики за роздільною здатністю (2020 р.)

Кореляція тестового завдання (Correlation) – зв’язок між результатами виконання певного завдання тесту учасником тестування та загальним балом, отриманим ним за весь тест. Обчислюється у вигляді коефіцієнта: R_{it} (Item-Test Correlation) – зв’язок між результатом виконання певного завдання тесту учасником тестування та загальним балом, отриманим ним за весь тест, ураховуючи бал за виконання цього завдання; R_{ir} (Item-Rest Correlation) – зв’язок між результатом виконання певного завдання тесту учасником тестування та загальним балом, отриманим ним за весь тест, не враховуючи бал за виконання цього завдання. Що сильніший зв’язок, то вищим є коефіцієнт кореляції, і тим більшою є розподільна здатність завдання. Значення коефіцієнта кореляції належить інтервалу $[-1;1]$, тобто варіюється від 0 (випадковий зв’язок) до 1 (абсолютний лінійний зв’язок) або -1 (абсолютний негативний лінійний зв’язок).

Наведемо психометричні характеристики окремих завдань сертифікаційної роботи з математики за 2020 рік, взяті з Офіційного звіту про проведення в 2020 році зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання, здобутих на основі повної загальної середньої освіти (рис.16, 17).

1. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} =$

А	Б	В	Г	Д
-9	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	9

Ключ	Відповіді учасників (%)					Не виконали завдання (%)	Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rit)
	А	Б	В	Г	Д				
Д	5,3	17,4	8,4	10,0	58,8	0,1	58,8	85,0	0,6

Рис.16. Психометричні характеристики завдання 1 сертифікаційної роботи з математики (2020 р.)

22. Установіть відповідність між виразом (1–3) та тотожно рівним йому виразом (А – Д), якщо a – довільне від'ємне число.

Вираз

1 a^0

2 $|a| + a$

3 $a \log_2 2^a$

Тотожно рівний вираз

А 0

Б $2a$

В a^2

Г 1

Д $-2a$

Ключ	Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів				Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rit)
	0	1	2	3			
ГАВ	24,4	21,8	37,0	16,8	48,8	63,5	0,7

Рис.17. Психометричні характеристики завдання 1 сертифікаційної роботи з математики (2020 р.)

Сертифікаційна робота ЗНО з математики містить різні типи завдань. Це завдання з вибором однієї правильної відповіді з кількох запропонованих альтернатив, завдання на встановлення відповідності, завдання відкритої форми з короткою та розгорнутою відповіддю (повним поясненням). Для впровадження якісної системи підготовки до розв'язування задач ЗНО з математики вчителю, який готує учнів до стандартизованих оцінювань, необхідно знати загальні вимоги щодо забезпечення якості завдань, враховувати предметну специфіку цих тестових завдань як завдань з

математики, знати методичні особливості підготовки до розв'язування кожного типу завдань

2.2. Зміст підготовки до ЗНО з математики

Підготовка до зовнішнього незалежного оцінювання з математики повинна проходити відповідно до змістових ліній шкільного курсу математики: «Числа і вирази», «Функції та їх графіки», «Рівняння та їх системи», «Нерівності та їх системи», «Текстові задачі», «Елементи математичного аналізу», «Планіметрія», «Стереометрія», «Вектори і координати» та «Елементи комбінаторики і стохастики».

З них у предметі «алгебра» розглядається шість змістових ліній, які всі ввійшли у стандарт. В свою чергу у предметі «геометрія» виокремлюють п'ять змістових ліній: геометричні фігури, геометричні величини, геометричні побудови, геометричні перетворення та координати і вектори.

Змістова лінія «Числа і вирази» (рис. 18). Дана змістова лінія починає розвиватися ще в початковій школі, проходить увесь початковий курс математики і є так званим «стрижнем», навколо якого вибудовуються всі інші змістові лінії шкільного курсу математики. Протягом всього курсу навчання удосконалюються обчислювальні навички як при вивченні алгебри, так і геометрії. Відбувається поступове розширення відомих числових множин – вводяться поняття натурального, цілого, раціонального, ірраціонального та дійсного числа. Поступово ускладнюється за структурою та за компонентами (дробові, додатні і від'ємні числа). Впроваджуються буквенні вирази, формули, обчислення за формулами, відношення та пропорції, квадрат і куб числа, розширюється коло задач на пряму та обернені пропорційні залежності. Запроваджуються поняття раціонального виразу, многочлена, многочлена та зведення їх до стандартного вигляду, степеня з натуральним показником, тотожно рівних виразів, тотожності. Вивчатися формули скороченого множення. У курсі алгебри та початків аналізу у 10-11 класі вивчаються тригонометричні, ірраціональні вирази, які

пов'язані з коренем n -го степеня, показникові та логарифмічні вирази. В 11 класі можливе вивчення комплексних чисел. Практика свідчить, що в разі невисокого рівня сформованості обчислювальної культури учнів, в 11 класі багато хто з них допускає помилки при обчисленні похідних та інтегралів, при розв'язанні геометричних задач на обчислення.

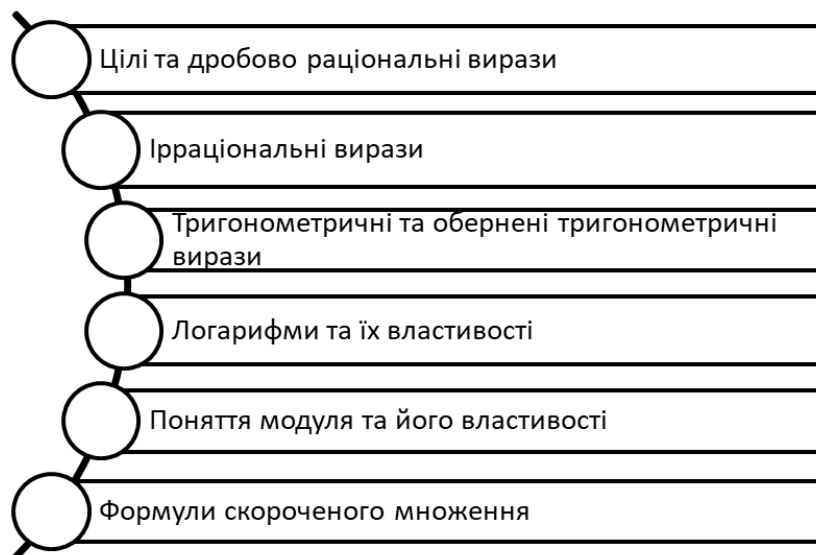


Рис.19. Темі змістової лінії «Числа і вирази»

Надамо пам'ятку для вчителів, на які моменти потрібно звернути увагу при підготовці учнів до ЗНО з математики в межах змістової лінії «Числа і вирази» (рис.20) [23] .

7

Пам'ятка "Числа і вирази"

Акцентувати увагу на різниці множин цілих та натуральних чисел, оскільки доволі часто учні плутають їх і, наприклад, відносять число нуль до натуральних. У завданнях із короткою відповіддю на розв'язування нерівностей часто вимагається знайти суму чи добуток усіх натуральних чи цілих її розв'язків. У випадку, якщо учень погано розрізняє числові множини, це може призвести до неправильної відповіді навіть у випадку, коли сама нерівність розв'язана правильно.

Варто засвоювати ОСНОВНІ логарифмічні формули – властивості суми та різниці логарифмів, логарифма степеня та властивість про перехід до нової основи. Майже всі інші логарифмічні формули є наслідками вищезгаданих.

Варто акцентувати увагу при вивченні обернених тригонометричних функцій, що будь-який «аркус» – це кут, причому в багатьох випадках він або гострий, або ж його можна звести до гострого. Тому корисними при розв'язуванні завдань на перетворення «аркусів» є використання прямокутних трикутників.

Варто засвоювати ОСНОВНІ тригонометричні формули – формули, що пов'язують тригонометричні функції одного кута, формули суми аргументів та формули зведення.

Розуміння суті поняття тригонометричних функцій довільного кута на одиничному колі – важливо! Найпростіші властивості (парність, періодичність, значення для кутів 0, 90, 180, 270, 360 градусів тощо) при розумінні суті поняття тригонометричних функцій не потребують механічного зазубрювання.

Формули скороченого множення є важливими при розв'язуванні, рівнянь та нерівностей, дослідженні функції на монотонність та екстремуми тощо.

7

Рис.20. Пам'ятка «Числа і вирази»

Наведемо приклади завдань даної змістової лінії шкільного курсу математики.

12. Скоротіть дріб $\frac{a^2 - b^2}{a^2 - ab}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{a+b}{a}$	$\frac{a-b}{a}$	$\frac{b}{a}$	b	$\frac{a+b}{b}$

Ключ	Відповіді учасників (%)					Не виконали завдання (%)	Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rit)
	А	Б	В	Г	Д				
А	59,0	12,8	16,1	3,1	8,6	0,4	59,0	74,8	0,6

Розв'язання

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 - ab} = \frac{(a-b)(a+b)}{a(a-b)} = \frac{a+b}{a}$$

Правильна відповідь: варіант А.

22. До кожного початку речення (1–4) доберіть його закінчення (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження, якщо $a = -3$.

Початок речення

Закінчення речення

- | | | | |
|---|---------------------------------|---|--------------|
| 1 | Значення виразу a^0 | А | більше за 1. |
| 2 | Значення виразу a^2 | Б | дорівнює 1. |
| 3 | Значення виразу $\frac{ a }{a}$ | В | дорівнює 0. |
| 4 | Значення виразу $\sqrt[3]{a}$ | Г | дорівнює -1. |
| | | Д | менше за -1. |

Ключ	Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів					Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rit)
	0	1	2	3	4			
БАГД	10,2	16,2	18,3	15,0	40,2	64,7	69,3	0,7

Розв'язання

- $a^0 = (-3)^0 = 1;$
- $a^2 = (-3)^2 = 9;$
- $\frac{|a|}{a} = \frac{|-3|}{-3} = -1;$
- $\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{-3} = -\sqrt[3]{3} \leq -1.$

Правильні відповіді: 1-Б, 2-А, 3-Г, 4-Д.

Аналіз результатів ЗНО показав, що в завданнях з розділу «Числа і вирази» одними із складнішими були завдання на знання та застосування тригонометричних тотожностей. Також велика кількість учасників не знають формул скороченого множення.

Змістова лінія «Рівняння та їх системи» (рис.21). Перше уявлення про рівняння учні отримують у початковій школі. Саме тоді вони розв'язують рівняння на основі залежностей результатів арифметичних дій від компонентів. Поступово лінія рівнянь розширюється. Учні знайомляться з властивістю рівняння щодо можливості додавання до обох його частин однакового виразу, наслідок – можливість переносити вирази з однієї частини рівняння в іншу з протилежним знаком. Розширюється множина рівнянь і види задач, які розв'язують за допомогою рівнянь. Учні починають розв'язувати рівняння, використовуючи основні тотожні перетворення цілих і дробових виразів. Вводиться поняття системи лінійних рівнянь з двома невідомими та три способи їх розв'язування: спосіб підстановки, спосіб додавання, графічний спосіб. Вивчають квадратні рівняння та способи їх розв'язання, дробово-раціональні рівняння. У 10-11 класах курс алгебри та початків аналізу передбачає знайомлення учнів з тригонометричними, ірраціональними, показниковими, логарифмічними рівняннями; їх системи та способами їх розв'язування.

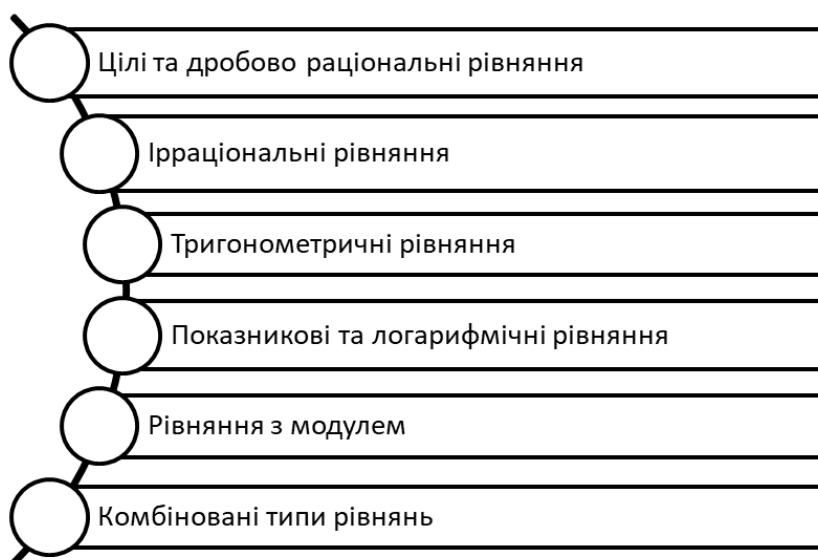


Рис.21. Темы змістової лінії «Рівняння та їх системи»

Надамо пам'ятку для вчителів, на які моменти потрібно звернути увагу при підготовці учнів до ЗНО з математики в межах змістової лінії «Рівняння та їх системи» (рис.22) [23].

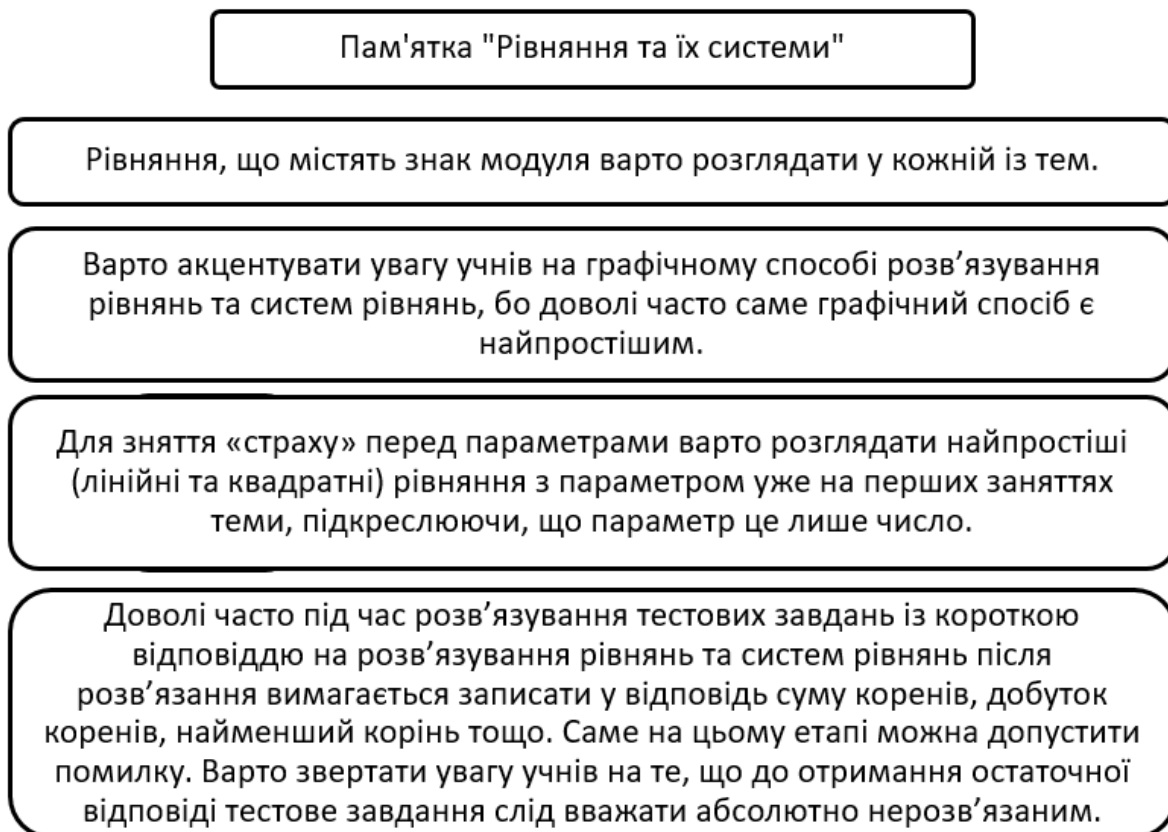


Рис. 22. Пам'ятка "Рівняння та їх системи"

Наведемо приклади завдань даної змістової лінії шкільного курсу математики.

5. Яке з наведених чисел є коренем рівняння $\log_4(x - 1) = 3$?

А	Б	В	Г	Д
4	13	63	65	82

Ключ	Відповіді учасників (%)					Не виконали завдання (%)	Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rit)
	А	Б	В	Г	Д				
Г	17,7	15,5	10,7	47,9	7,8	0,4	47,9	86,3	0,7

Розв'язання

$$\log_4(x - 1) = 3, 4^3 = x - 1, x - 1 = 64, x = 65.$$

Правильна відповідь: варіант Г.

33. Розв'яжіть рівняння $\frac{\sqrt{x^2 + (4a - 4)x + 4a^2} - 2\sqrt{2a}}{5 \cdot 5^{2x} - 5^{a+x} - 5^{a-1} + 5^x} = 0$ залежно від значень параметра a .

Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів							Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rit)
0	1	2	3	4	5	6			
94,25	4,47	0,56	0,39	0,17	0,05	0,11	1,39	5,08	0,42

Розв'язання:

$$\frac{\sqrt{x^2 + (4a - 4)x + 4a^2} - 2\sqrt{2a}}{5 \cdot 5^{2x} - 5^{a+x} - 5^{a-1} + 5^x} = 0;$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + (4a - 4)x + 4a^2} - 2\sqrt{2a} = 0, \\ 5 \cdot 5^{2x} - 5^{a+x} - 5^{a-1} + 5^x \neq 0 \end{cases}$$

$$1) 5 \cdot 5^{2x} - 5^{a+x} - 5^{a-1} + 5^x = 0;$$

$$5 \cdot 5^{2x} - 5^a \cdot 5^x - 5^a \cdot 5^{-1} + 5^x = 0;$$

$$5 \cdot 5^{2x} + 5^x(1 - 5^a) - \frac{1}{5}5^a = 0;$$

$$D = (1 - 5^a)^2 + 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{5}5^a = 1 - 2 \cdot 5^a + 5^{2a} + 4 \cdot 5^a = 1 + 2 \cdot 5^a +$$

$$5^{2a} = (5^a + 1)^2, \sqrt{D} = 5^a + 1;$$

$$a) 5^x = \frac{-(1-5^a)+5^a+1}{2 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 5^a}{10} = \frac{5^a}{5} = 5^{a-1};$$

оскільки $5 > 1$, то $x \neq a - 1$;

$$б) 5^x = \frac{-(1-5^a)-5^a-1}{2 \cdot 5} = \frac{-2}{10} = -\frac{1}{5} < 0, \text{ то } x \in R.$$

$$2) \sqrt{x^2 + (4a - 4)x + 4a^2} - 2\sqrt{2a} = 0;$$

$$\sqrt{x^2 + (4a - 4)x + 4a^2} = 2\sqrt{2a};$$

$$\begin{cases} x^2 + (4a - 4)x + 4a^2 = 4 \cdot 2a \\ x^2 + (4a - 4)x + 4a^2 \geq 0 \quad ; \\ 2a \geq 0 \end{cases}$$

$$a) x^2 + (4a - 4)x + 4a^2 - 8a = 0;$$

$$D_1 = (2a - 2)^2 - (4a^2 - 8a) = 4a^2 - 8a + 4 - 4a^2 + 8a = 4, \sqrt{D_1} = 2;$$

$$x_1 = -2a + 2 + 2 = -2a + 4;$$

$$x_2 = -2a + 2 - 2 = -2a.$$

Перевіримо чи задовільняють отримані корені дане рівняння:

$$b) x^2 + (4a - 4)x + 4a^2 \geq 0;$$

$$x_1: (4 - 2a)^2 + (4a - 4) \cdot (4 - 2a) + 4a^2 = 16 - 16a + 4a^2 + 24a - 8a^2 - 16 + 4a^2 = 8a;$$

$$8a \geq 0, a \geq 0.$$

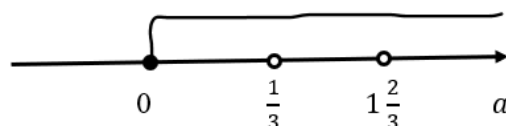
$$x_2: (-2a)^2 + (4a - 4) \cdot (-2a) + 4a^2 = 4a^2 - 8a^2 + 8a + 4a^2 = 8a;$$

$$8a \geq 0, a \geq 0.$$

Отже, обидва корені задовільняють рівняння. Але ще потрібно врахувати, що $x \neq a - 1$.

$$x_1: -2a + 4 \neq a - 1, 3a \neq 5, a \neq \frac{5}{3} \neq 1\frac{2}{3}.$$

$$x_2: -2a \neq a - 1, 3a \neq 1, a \neq \frac{1}{3}.$$



$$a = \frac{1}{3}, x_2 = 4 - 2a = 4 - \frac{2}{3} = 3\frac{1}{3};$$

$$a = 1\frac{2}{3}, \text{ то } x = -2a = -2 \cdot \frac{5}{3} = -\frac{10}{3} = -3\frac{1}{3}.$$

Відповідь: якщо $a \in (-\infty; 0)$, то $x \in R$;

якщо $a \in [0; \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; 1\frac{2}{3}) \cup (1\frac{2}{3}; +\infty)$, то $x_1 = -2a + 4$; $x_2 = -2a$;

якщо $a = \frac{1}{3}$, то $x = 3\frac{1}{3}$;

якщо $a = 1\frac{2}{3}$, то $x = -3\frac{1}{3}$.

Аналіз результатів ЗНО показав, що в завданнях з розділу «Рівняння та їх системи» значна частина учнів з острахом відносяться до рівнянь з параметрами, тому лише одиниці беруться за розв'язання такого типу завдання. Значних помилок допускають у розв'язаннях з модулем.

Змістова лінія «Нерівності та їх системи» (рис.23). Перше уявлення про нерівності й знаки «>», «<» учні дотримують у початковій школі. Поступово лінія нерівностей розширюється. Розширюються і способи розв'язування самих нерівностей, зокрема пропонується метод інтервалів, графічний спосіб.

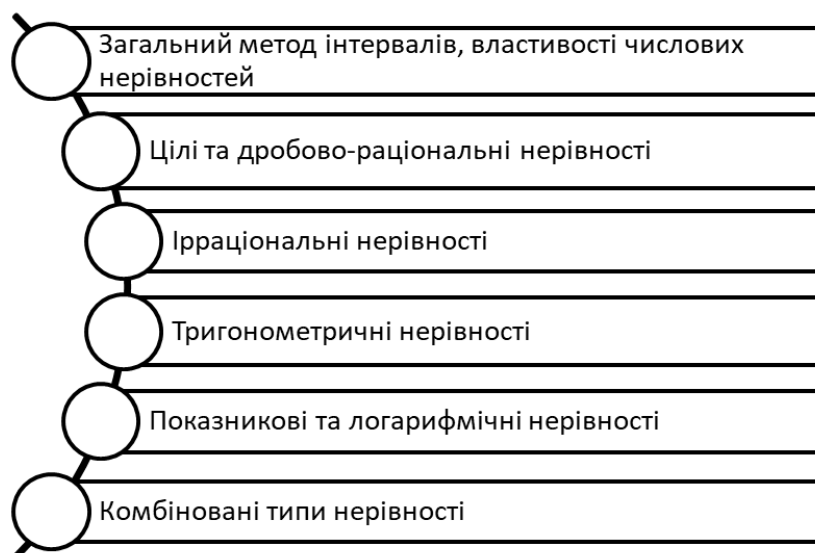


Рис.23. Теми змістової лінії «Нерівності та їх системи»

Надамо пам'ятку для вчителів, на які моменти потрібно звернути увагу при підготовці учнів до ЗНО з математики в межах змістової лінії «Рівняння та їх системи» (рис.24) [23].

Наведемо приклади завдань даної змістової лінії шкільного курсу математики.

18. Розв'яжіть нерівність $2^x + 2^{x+3} \geq 144$.

А	Б	В	Г	Д
$[34,5; +\infty)$	$[4; +\infty)$	$(-\infty; 4]$	$(-\infty; 4,5]$	$[4,5; +\infty)$

Ключ	Відповіді учасників (%)					Не виконали завдання (%)	Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rit)
	А	Б	В	Г	Д				
Б	9,0	56,8	11,6	6,8	14,9	0,9	56,8	53,2	0,4

Розв'язання

$$2^x + 2^{x+3} \geq 144$$

$$2^x + 2^x \cdot 2^3 \geq 144$$

$$2^x(1 + 8) \geq 144$$

$$2^x \geq 16$$

$$2^x \geq 2^4$$

Оскільки $2 > 1$, то $x \geq 4$ або $x \in [4; +\infty)$.

Правильна відповідь варіант: Б.

Пам'ятка "Нерівності та їх системи"

Варто звернути увагу учнів, що рівняння та нерівності – принципово різні математичні об'єкти. Наприклад, рівняння $\sin 3x=0$ не має коренів, а нерівність $\sin 3x \leq 0$ має безліч розв'язків тощо.

Важливо акцентувати увагу на акуратному означенні розв'язку нерівності та системи нерівностей. Важливо розглянути різні види числових проміжків.

Для нерівностей існує універсальний метод, який дозволяє розв'язання будь-якої з них звести до розв'язання рівняння – загальний метод інтервалів.

Загальний метод інтервалів є універсальним для розв'язування будь-якої нерівності, але користуватися ним при розв'язуванні найпростіших нерівностей незручно і недоцільно. Тому, розглянувши загальний метод інтервалів на початку теми, слід переходити до розгляду специфічних для кожного типу нерівностей методів розв'язання.

Не варто під час повторення курсу математики оминати підтему «Властивості числових нерівностей».

При розв'язуванні цілих (крім лінійних), квадратичних, дробових раціональних, ірраціональних, показникових, логарифмічних та комбінованих нерівностей варто показати, що всі вони, фактично, розв'язуються за допомогою одного й того самого загального методу інтервалів, але для кожного з цих типів рівнянь даний метод може зазнавати певних спрощень. Крім того, окремі найпростіші підтипи наведених типів нерівностей мають альтернативні способи розв'язування, які не використовують метод інтервалів.

Під час розв'язування нерівностей із модулем слід звернути увагу не лише на аналітичний спосіб, а й на спосіб, який ґрунтується на використанні геометричного означення модуля.

Рис. 24. Пам'ятка " Нерівності та їх системи"

33. Задано систему нерівностей
$$\begin{cases} \frac{x+1}{x-2} \geq 0, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin^2(\pi a) + \cos(2\pi a) + x} > a, \end{cases}$$
 де x – змінна, a – стала.

1. Розв'яжіть першу нерівність цієї системи.
2. Визначте множину розв'язків другої нерівності системи залежно від значень a .
3. Визначте всі розв'язки системи залежно від значень a .

Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів							Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rit)
0	1	2	3	4	5	6			
84,3	11,7	3,2	0,3	0,2	0,1	0,2	3,6	12,3	0,6

Розв'язання

1). $\frac{x+1}{x-2} \geq 0;$

$$\begin{cases} (x+1)(x-2) \geq 0, \\ x \neq 2 \end{cases};$$



$$x \in (-\infty; -1] \cup (2; +\infty) \quad (1)$$

2). $\left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin^2(\pi a) + \cos(2\pi a) + x} > a;$

$$2\sin^2(\pi a) + \cos(\pi a) + x = 1 - \cos(2\pi a) + \cos(2\pi a) + x = x+1;$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} > a.$$

Очевидно, що при $a \leq 0$ отримана нерівність виконується для всіх $x \in R$.

Розглянемо випадок коли $a > 0$:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} a};$$

$$x+1 < \log_{\frac{1}{2}} a;$$

$$x < \log_{\frac{1}{2}} a - 1;$$

$$x < \log_{\frac{1}{2}} a - 1;$$

$$x < -\log_2 a - 1, \text{ тобто } x \in (-\infty; -\log_2 a - 1).$$

Отже, якщо $a \leq 0$, то $x \in R$; якщо $a > 0$, то $x \in (-\infty; -\log_2 a - 1)$. (2)

3). Для визначення розв'язків системи необхідно врахувати (1) і (2).

а) $a \leq 0$:

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -1] \cup (2; +\infty) \\ x \in R \end{cases}$$

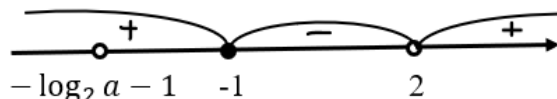
$$x \in (-\infty; -1] \cup (2; +\infty).$$

$$\text{б) } -\log_2 a - 1 \leq -1;$$

$$-\log_2 a \leq 0;$$

$$\log_2 a \geq 0;$$

$$a \geq 1;$$



$$x \in (-\infty; -\log_2 a - 1).$$

$$\text{в) } -\log_2 a - 1 > 2$$

$$-\log_2 a > 3$$

$$\log_2 a < -3$$

$$a < \frac{1}{8}$$



$$x \in (-\infty; -1] \cup (2; -\log_2 a - 1).$$

$$\text{г) } \frac{1}{8} \leq a < 1: -1 < -\log_2 a - 1 \leq 2, \text{ тоді } x \in (-\infty; -1].$$

У підсумку маємо:

Якщо $a \in (-\infty; 0]$, то $x \in (-\infty; -1] \cup (2; +\infty)$;

якщо $a \in (0; \frac{1}{8})$, то $x \in (-\infty; -1] \cup (2; -\log_2 a - 1)$;

якщо $a \in [\frac{1}{8}; 1)$, то $x \in (-\infty; -1]$;

якщо $a \in [1; +\infty)$, то $x \in (-\infty; -\log_2 a - 1)$.

Аналіз результатів ЗНО показав, що в завданнях з розділу «Нерівності та їх системи» аналогічно до попередньої теми, учні бояться завдань з параметрами. Проблеми виникають і при роботі з модулями та тригонометричними функціями.

Змістова лінія «Функції та їх графіки» (рис.25). З 1 класу здійснюється пропедевтика вивчення такого поняття як функція. Проте термін «функція» на цьому етапі ще не застосовується. Вона реалізується у зв'язку з вивченням залежностей результатів арифметичних дій від їх компонентів, обчисленням значень буквених виразів за даним значенням однієї з букв, розв'язуванням текстових задач за допомогою рівнянь, введенням координатної площини та побудови графіків залежності між величинами. Поступово вводиться поняття функції, області визначення і значень, способи завдання функцій, їх графіки і властивості. Починають розглядати окремі види функцій: лінійну, квадратичну. Арифметична та геометрична прогресії також належать до теми «Функції». Вивчають тригонометричні функції, степеневу, показникову та логарифмічну функцію. Розширюються відомості про функції (зростаючі, спадні, парні, непарні, періодичні).

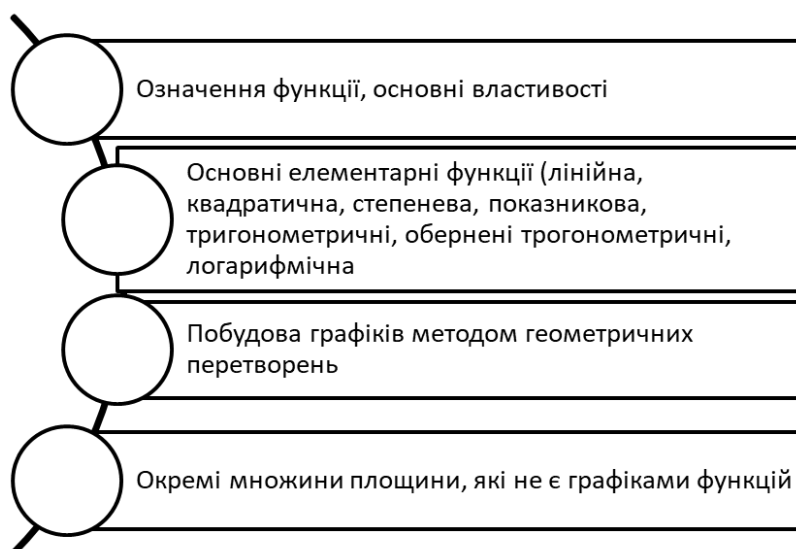


Рис.25. Теми змістової лінії «Функції та їх графіки»

Надамо пам'ятку для вчителів, на які моменти потрібно звернути увагу при підготовці учнів до ЗНО з математики в межах змістової лінії «Функції та їх графіки» (рис.26) [23].

Пам'ятка «Функції та їх графіки»	☒
При вивченні основних властивостей функцій слід дуже акуратно формулювати означення. У тестах ЗНО з математики останніх років зустрічається досить багато завдань теоретичного характеру, суть розв'язання яких зводиться до розуміння чи нерозуміння учасниками тестування «тонких моментів».	☒
Варто звернути увагу учнів на геометричний зміст параметрів лінійної ($y=kx+b$) та квадратичної ($y=ax^2 + bx + c$) функцій, оскільки окремі тестові завдання по суті зводяться до перевірки розуміння цього геометричного змісту. Особливу увагу слід звернути на геометричний зміст кутового коефіцієнта лінійної функції, який буде далі використовуватися при вивченні теми «Похідна».	☒
Не варто розглядати з учнями всі можливі класи значень параметра n загальної степеневі функції $y = x^n$. Досить обмежитися такими випадками: а) $n \in \mathbb{N}$; б) $-n \in \mathbb{N}$; в) $\frac{1}{n} \in \mathbb{N}$.	☒
Перед вивченням логарифмічної та обернених тригонометричних функцій слід приділити увагу загальному означенню оберненої функції та правилу її знаходження. Методичний прийом із перевертанням і поворотом аркуша на кут $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ для демонстрації графіка оберненої функції дозволяє вчителю зробити емоційний акцент на суттєвій властивості графіка оберненої функції – симетричності із графіком початкової функції відносно прямої $y=x$.	☒
Оскільки показникова функція є монотонною на $(-\infty; +\infty)$, то вона має на цьому проміжку єдину обернену функцію – логарифмічну. Для тригонометричних функцій це не так, тому побудова графіків функцій «аркусів» є складнішою, ніж побудова логарифмічної функції. Тому природно спочатку вивчати показникову та логарифмічну функції, а вже потім – тригонометричні та обернені тригонометричні.	☒
Перед вивченням побудови графіків методом геометричних перетворень слід приділити час коректним означенням самих геометричних перетворень (паралельного перенесення, симетрії, «стиску» та «розтягу» вздовж осей координат).	☒
Під час вивчення окремих множин площини, що не є графіками функцій, особливу увагу слід приділити колу та його рівнянню.	☒

Рис. 26. Пам'ятка «Функції та їх графіки»

Наведемо приклади завдань даної змістової лінії шкільного курсу математики.

21. До кожного початку речення (1–4) доберіть його закінчення (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

<i>Початок речення</i>	<i>Закінчення речення</i>
1 Пряма $y = 4,5x$	А є паралельною прямою $y = 2x$.
2 Пряма $y = -4$	Б не має спільних точок з графіком функції $y = x^2 - 1$.
3 Пряма $y = 2x + 4$	В перетинає графік функції $y = 3^x$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$.
4 Пряма $y = x$	Г є паралельною осі y .
	Д є бісектрисою I і III координатних чвертей.

Ключ	Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів					Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rit)
	0	1	2	3	4			
ВБАД	19,6	25,3	17,3	12,4	25,4	49,7	69,1	0,7

Розв'язання

2). Пряма $y = -4$ проходить через точку $(0; -4)$ паралельно до осі ox . Тому вона не перетинає параболу $y = x^2 - 1$, вітки якої напрямлені вгору та має вершину у точці з координатами $(0; -1)$.

3). У прямої $y = 2x + 4$ та $y = 2x$ однакові коефіцієнти біля x , а тому вони є паралельними.

4). Пряма $y = x$ є бісектрисою першої та третьої координатних чвертей.

1). Для прямої $y = 4,5x$ при $x = 2$ $y = 9$ і для функції $y = 3^x$ при $x = 2$ $y = 9$. Отже, графіки цих функцій перетинаються в точці з абсцисою $x = 2$.

Правильні відповіді: 1-В, 2-Б, 3-А, 4-Д.

31. Задано функції $f(x) = \frac{2}{x}$ і $g(x) = 5 - 8x$.

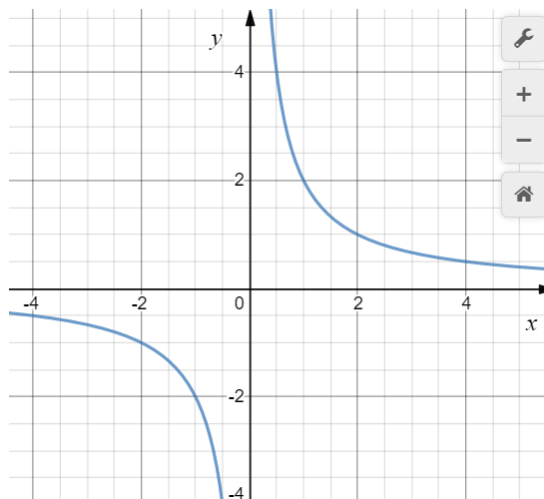
- Побудуйте графік функції f .
- Побудуйте графік функції g .
- Знайдіть похідну функції f .
- До графіка функції f проведено дотичні, паралельні графіку функції g . Визначте абсциси точок дотику.

Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів					Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rit)
0	1	2	3	4			
64,9	9,9	13,4	8,9	3,0	18,8	56,3	0,8

Розв'язання

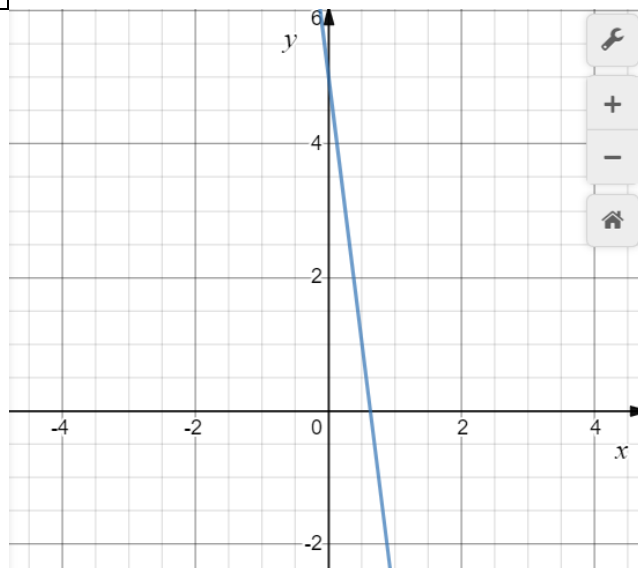
1). $f(x) = \frac{2}{x}$

x	-4	-2	-1	1	2	4
f(x)	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$



2). $g(x) = 5 - 8x$

x	0	5
g(x)	1	-3



3). $f'(x) = \left(\frac{2}{x}\right)' = (2x^{-1})' = 2 \cdot (-1) \cdot x^{-2} = -2x^{-2}$.

4). Кутовий коефіцієнт прямої $g(x)$ дорівнює -8 . Тому кутовий коефіцієнт шуканої дотичної також має дорівнювати -8 , скільки за умовою вони паралельні.

Отже, $f'(x_0) = -8$, де x_0 – шукана точка.

$$\text{Маємо } f'(x) = -2x^{-2}$$

$$-2x^{-2} = -8$$

$$x^{-2} = 4$$

$$\frac{1}{x^2} = 4$$

$$\frac{1}{x^2} - 4 = 0$$

$$\frac{1 - 4x^2}{x^2} = 0$$

$$\begin{cases} 1 - 4x^2 = 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \rightarrow 4x^2 = 1, x^2 = \frac{1}{4}, x = \pm \frac{1}{2}.$$

$$\text{Відповідь: } x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}.$$

На основі аналізу результатів ЗНО можна дійти до висновків, що значна частина учасників не мала сформованих базових умінь та навичок з теми «Функції. Властивості функцій». Це призвело до труднощів під час виконання таких дій: установлення відповідності між наведеними рівняннями прямих та їхніми властивостями; знаходження області визначення функції; розв'язування завдання з короткою відповіддю, у якому йшлося про арифметичну чи геометричну прогресію.

Змістова лінія «Текстові задачі» (рис.27). Дана тема не є змістовою лінією шкільного курсу математики, однак ми вважаємо, що її також необхідно виокремити, оскільки розв'язування саме текстових задач пов'язане з таким поняттям як математична модель та способи її побудови. З задачами учні починають знайомитися з самого початку навчання математики і продовжують вдосконалювати свої знання протягом всього курсу математики.

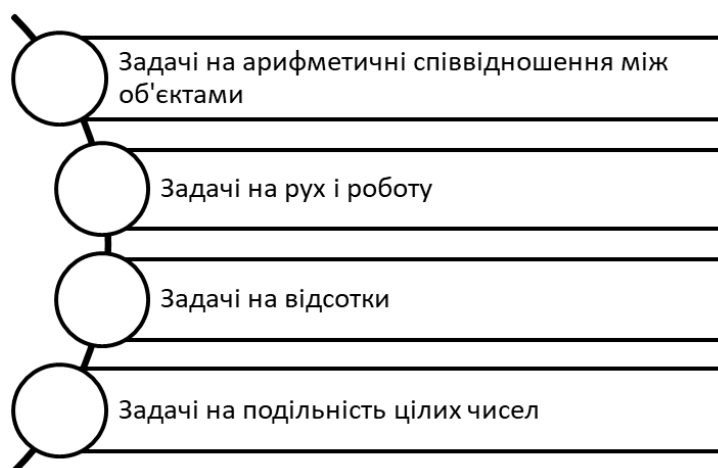


Рис.26. Теми змістової лінії «Текстові задачі»

Надамо пам'ятку для вчителів, на які моменти потрібно звернути увагу при підготовці учнів до ЗНО з математики в межах змістової лінії «Текстові задачі» (рис.27) [23].

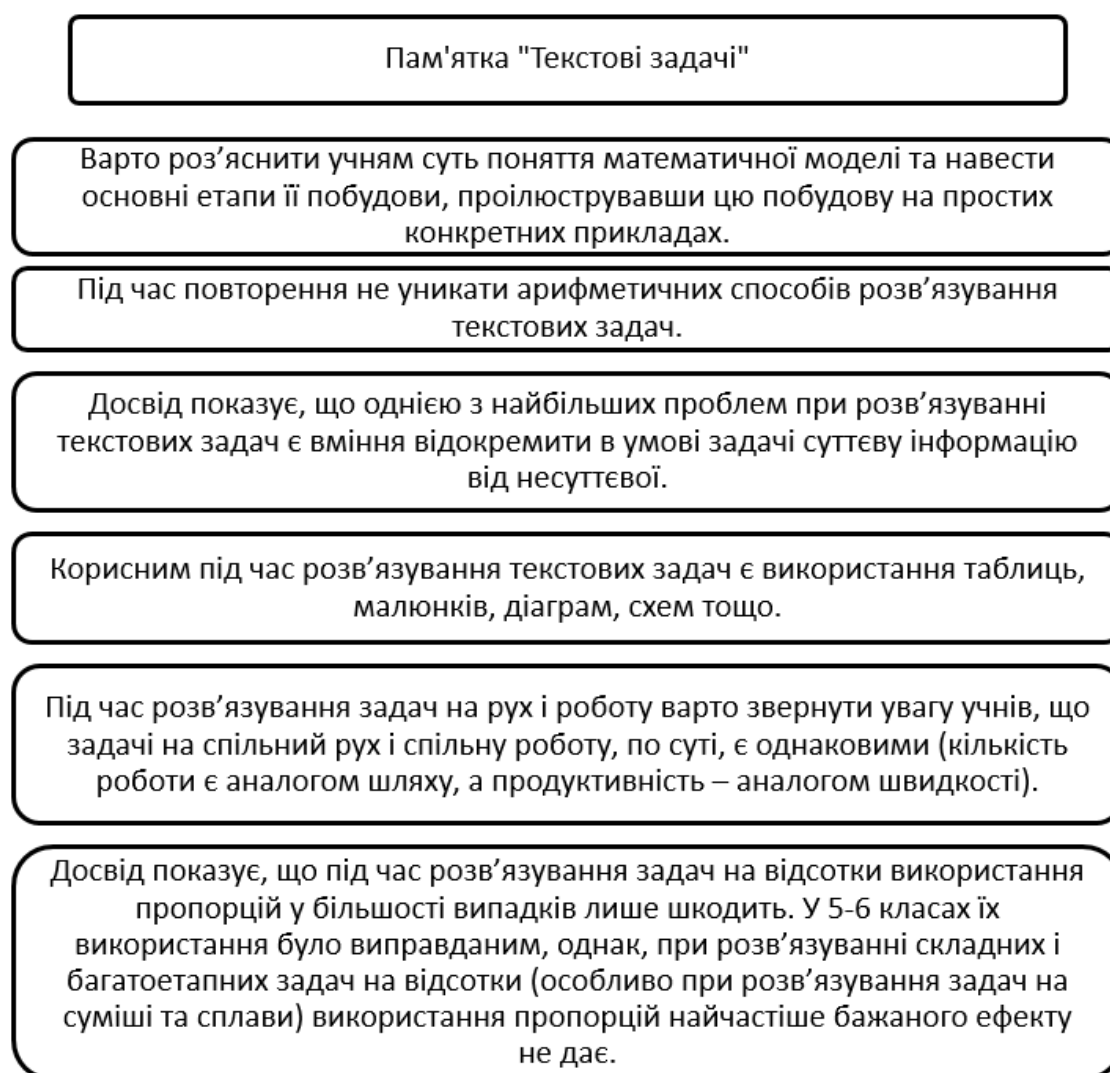


Рис. 27. Пам'ятка «Текстові задачі»

Наведемо приклади завдань даної змістової лінії шкільного курсу математики.

12. Учень з понеділка до п'ятниці записував час (у хвиликах), який він витрачав на дорогу до школи та зі школи (див. таблицю).

Дорога \ Дні	понеділок	вівторок	середа	четвер	п'ятниця
до школи	19	20	21	17	23
зі школи	28	22	20	25	30

На скільки хвилин у середньому дорога зі школи триваліша за дорогу до школи?

А	Б	В	Г	Д
2	3	4	5	6

Ключ	Відповіді учасників (%)					Не виконали завдання (%)	Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rit)
	А	Б	В	Г	Д				
Г	3,1	5,7	6,0	78,8	6,1	0,3	78,8	43,6	0,3

Розв'язання

- $19+20+21+17+23=100$ (хв) – учень витратив на дорогу до школи.
- $28+22+20+25+30=125$ (хв) – учень витратив на дорогу зі школи.
- $125-100=25$ (хв) – різниця між часом, який витрачено на дорогу зі школи і до школи.
- $25:5=5$

Відповідь: на 5 хвилин у середньому дорога зі школи триваліша за дорогу до школи.

Правильна відповідь: варіант Г.

28. Маршрутний автобус, рухаючись зі сталою швидкістю, подолав відстань від міста А до міста В за 5 год, а на зворотний шлях витратив на 30 хв менше. Визначте швидкість (у км/год) автобуса на маршруті від А до В, якщо вона на 8 км/год менша за швидкість на маршруті від В до А. Уважайте, що довжини маршрутів від А до В та від В до А, якими рухався маршрутний автобус, рівні.

Ключ	Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів		Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rit)
	0	2			
72	79,1	20,9	20,9	62,3	0,6

Розв'язання

Нехай x км/год швидкість автобуса від міста А до В, тоді $(x+8)$ км/год його швидкість у зворотному напрямку. Складемо таблицю руху автобуса.

Напрямок руху	Відстань (км)	Швидкість (км/год)	Час (год)
Від А до В	$5x$	x	5
Від В до А	$4,5(x+8)$	$x+8$	4,5

Оскільки відстань між містами є сталою, то маємо рівняння:

$$5x=4,5(x+8)$$

$$5x=4,5x+36$$

$$5x-4,5x=36$$

$$0,5x=36$$

$$x=72$$

Відповідь: 72 км/год швидкість автобуса на маршруті від А до В.

На основі аналізу результатів ЗНО можна дійти висновків, що завдання не були занадто важкими для учнів, але спостерігалось невміння правильно складати рівняння до задач, незнання основних формул на рух.

Змістова лінія «Елементи математичного аналізу» (рис. 28). З елементами математичного аналізу учні знайомляться в старшій школі і тут значну роль відіграє такий фактор як математичний профіль класу. Діти, які навчалися у фізико-математичних класах чи в класах з поглибленим вивченням математики, мають значно ширші знання, аніж учні, які навчалися в звичайних класах. Діти мають лише поверхневі знання і мало вміють застосовувати їх на практиці.

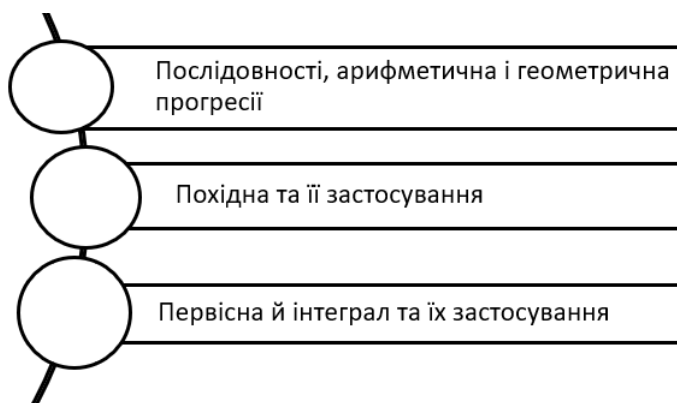


Рис.28. Теми змістової лінії «Елементи математичного аналізу»

У тесті ЗНО з математики останні роки популярними є завдання саме на розуміння суті поняття похідної, зокрема, механічного та геометричного змісту похідної. Тому незалежно від способу подачі теоретичного матеріалу замінювати «сутнісний» підхід «формальним» не варто. Під час вивчення похідної можна виділити два підходи до її вивчення – так звані «формальний» та «сутнісний» підходи. З позицій «формального» підходу похідна – це своєрідний оператор (штрих), який перетворює функції за певними «аксіомами» (таблиця похідних, правила диференціювання), а з позицій «сутнісного» підходу похідна є границею відношення приросту функції до приросту аргументу за умови прямування до нуля останнього. «Формальний» підхід дозволяє розв'язувати більшість завдань технічного характеру (обчислення похідних, знаходження проміжків монотонності та екстремумів функцій тощо), але не дає можливості обґрунтувати «аксіоми» дії оператора (штриха) на функції та алгоритми його використання до вивчення властивостей функцій. Для учнів з невисоким рівнем підготовки спочатку розглянути «формальний» підхід до сприйняття поняття похідної, а потім «сутнісний», а для «сильних» учнів починати з «сутнісного» підходу, завершуючи «формальним» [23].

Надамо пам'ятку для вчителів, на які моменти потрібно звернути увагу при підготовці учнів до ЗНО з математики в межах змістової лінії «Елементи математичного аналізу» (рис.29) [23].

Пам'ятка "Елементи математичного аналізу"

Під час вивчення арифметичної та геометричної прогресій варто звернути увагу на ознаки цих прогресій, які дозволяють їх «упізнавати».

Оскільки далеко не всі випускники знайомі з поняттям невизначеного інтеграла як множини всіх первісних даної функції, то при повторенні цієї теми можливі термінологічні непорозуміння. Тому варто дати означення невизначеного інтеграла і показати еквівалентність способу запису властивостей первісних у вигляді властивостей невизначеного інтеграла.

Для значної частини учнів означення визначеного інтеграла як границі інтегральної суми є складним. Тому при розгляді цього поняття можна обмежитись його спрощеним розумінням як числа, що обчислюється за формулою Ньютона-Лейбніца.

У тестах ЗНО з математики досить популярними є завдання на використання геометричного змісту визначеного інтеграла, зокрема, на обчислення окремих інтегралів через площу криволінійної трапеції. Внаслідок цього в частини учнів формується хибне уявлення про те, що визначений інтеграл завжди є додатним числом.

Рис. 29. Пам'ятка «Елементи математичного аналізу»

Наведемо приклади завдань даної змістової лінії шкільного курсу математики.

19. Укажіть похідну функції $f(x) = x(x^3 + 1)$.

А	Б	В	Г	Д
$f'(x) = 4x^3 + 1$	$f'(x) = 4x^3$	$f'(x) = 3x^2$	$f'(x) = 3x^2 + 1$	$f'(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^2}{2}$

Ключ	Відповіді учасників (%)					Не виконали завдання (%)	Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rit)
	А	Б	В	Г	Д				
А	47,0	12,4	20,6	15,2	4,3	0,5	47,0	70,5	0,6

Розв'язання

$$f'(x) = f'(x(x^3 + 1)) = 1 \cdot (x^3 + 1) + x \cdot 3x^2 = x^3 + 1 + 3x^3 = 4x^3 + 1$$

Правильна відповідь: варіант А.

18. На рисунку зображено графіки функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$. Укажіть формулу для обчислення площі зафарбованої фігури.

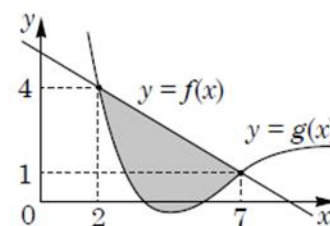
А $S = \int_1^4 (f(x) - g(x)) dx$

Б $S = \int_1^4 (g(x) - f(x)) dx$

В $S = \int_2^7 (f(x) + g(x)) dx$

Г $S = \int_2^7 (f(x) - g(x)) dx$

Д $S = \int_2^7 (g(x) - f(x)) dx$



Ключ	Відповіді учасників (%)					Не виконали завдання (%)	Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rit)
	А	Б	В	Г	Д				
Г	11,3	7,2	24,1	44,1	12,8	0,4	44,1	69,0	0,5

Розв'язання

Оскільки функції перетинаються при $x=2$ і $x=7$, то межі інтегрування будуть від 2 до 7. На проміжку від 2 до 7 функція $f(x)$ є верхньою, а функція $g(x)$ є нижньою. Отже, маємо:

$$S = \int_2^7 (f(x) - g(x)) dx$$

Правильна відповідь: варіант Г.

На основі аналізу результатів ЗНО можна дійти до висновків, що досить часто учні допускали помилки саме в обчисленнях. І завдання на знаходження похідних для учнів було значно легшим, ніж знаходження первісних. Багато хто не вміє застосовувати формули для знаходження площ чи об'ємів за допомогою інтегралів, не вміють «читати» графіки, не вміють знаходити межі інтегрування.

Змістові лінії «Планіметрія» і «Стереометрія» (рис.30). Пропедевтика вивчення геометрії проводиться ще в початкових класах. Уже тоді розглядаються такі фігури як відрізок, ламана, коло, круг, квадрат, прямокутник, трикутник. Учні навчаються розрізняти їхні основні елементи: вершини, сторони, кути; вимірювати довжину, знаходити периметр, площу.

Наприкінці початкової школи вводяться поняття про такі геометричні тіла як: куб, паралелепіпед, піраміда, призма, конус, куля, циліндр. Вивчають коло та його побудову за допомогою циркуля, радіус, діаметр кола. Поступово розширюються уявлення про геометричні фігури. На наочному рівні розглядаються геометричні тіла як: куб, прямокутний паралелепіпед, піраміда, призма, конус, куля, циліндр. Відбувається систематичне вивчення фігур на площині, в просторі. Також учні продовжують вивчати геометричні величини такі як периметр, площа, об'єм. У курсі планіметрії вивчають таку тему як «Геометричні побудови», де учні вивчають п'ять основних побудов за допомогою циркуля і лінійки. У 10-11 класах починають зображувати просторові фігури на площині, користуючись властивостями паралельної проєкції, вивчають так звані уявні побудови. Вивчають геометричні перетворення: всі види рухів, гомотетією та подібність.

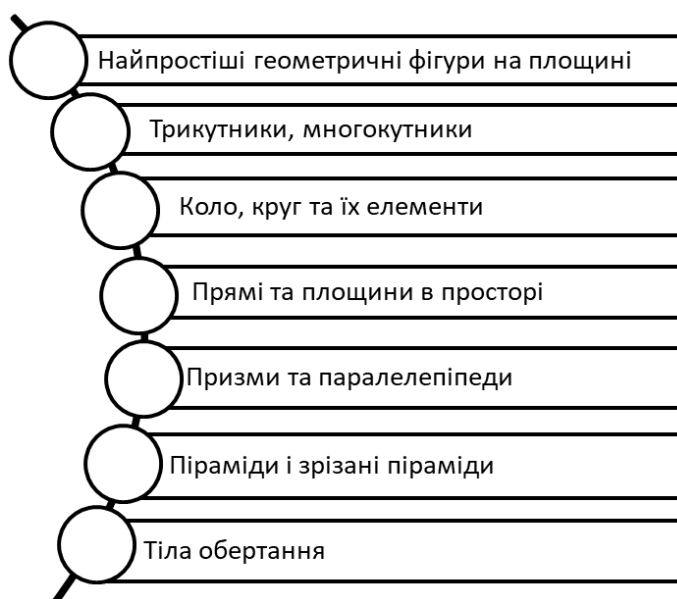


Рис.30. Темі змістових ліній «Планіметрія» і «Стереометрія»

Надамо пам'ятку для вчителів, на які моменти потрібно звернути увагу при підготовці учнів до ЗНО з математики в межах змістових ліній «Планіметрія» і «Стереометрія» (рис.31, 32) [23].

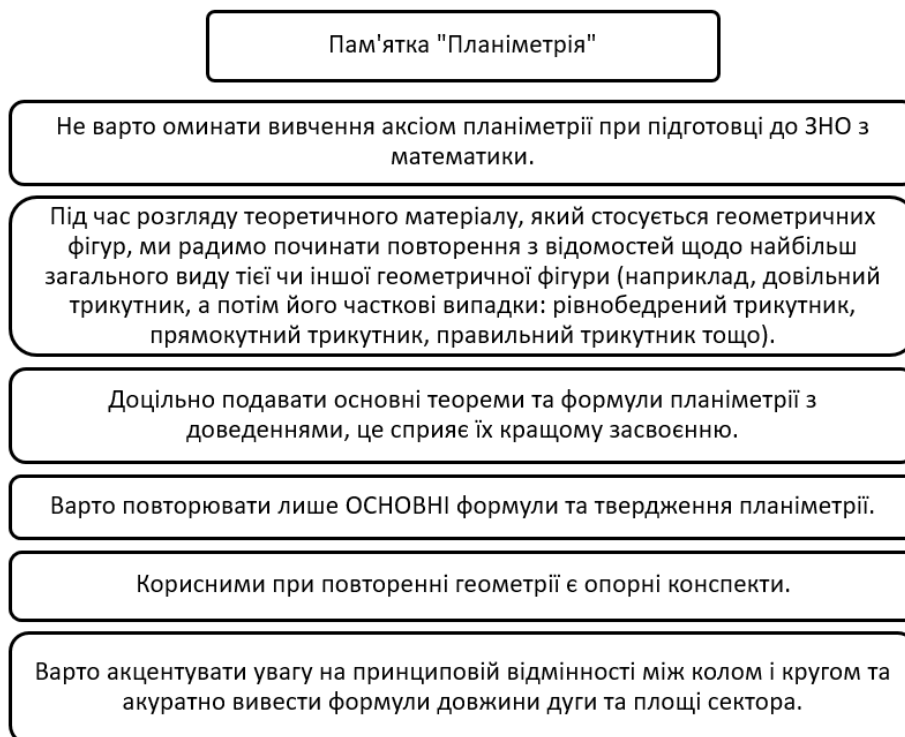


Рис. 31. Пам'ятка «Планіметрія»

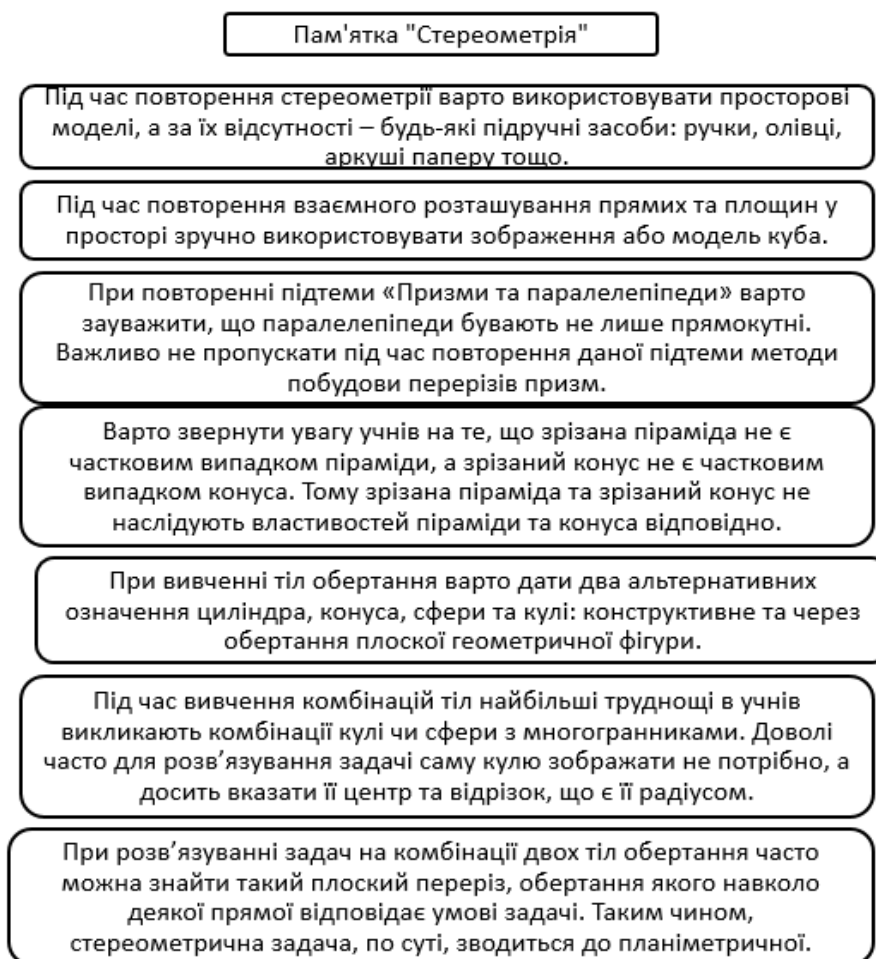


Рис. 32. Пам'ятка «Стереометрія»

Наведемо приклади завдань даної змістової лінії шкільного курсу математики.

26. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) відстані від середини медіани BM до катетів AC і BC дорівнюють 5 см і 6 см відповідно.



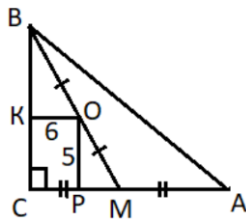
1. Визначте довжину катета AC (у см).

Ключ	Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів		Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rit)
	0	1			
24	77,1	22,9	22,9	66,1	0,7

2. Визначте радіус (у см) кола, описаного навколо трикутника ABC .

Ключ	Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів		Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rit)
	0	1			
13	85,1	14,9	14,9	49,3	0,6

Розв'язання



1) Оскільки відрізок OK перпендикулярний до катета BC , то він є паралельним до катета AC . Точка O – середина відрізка BM . Отже, KO – середня лінія трикутника $BСM$. А це значить, що $AC=2KO=2\cdot 6=12$ см. Так як BM – медіана, то $MA=MC=12$ см, а $AC=MA+MC=12+12=24$ см.

2) Аналогічно PO – середня лінія трикутника $BСM$. Отже, $BC=2PO=2\cdot 5=10$ см.

З прямокутного трикутника ABC за теоремою Піфагора $AB^2 = BC^2 + AC^2 = 10^2 + 24^2 = 100 + 576 = 676$, $AB = 26$ см.

В прямокутному трикутнику радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює половині гіпотенузи. Отже, $R=26:2=13$ см.

Відповідь: 1) довжина катета $AC=24$ см, 2) радіус кола $R=13$ см.

23. Циліндр і конус мають рівні об'єми та рівні радіуси основ. Площа основи циліндра дорівнює $25\pi \text{ см}^2$, а його об'єм – $100\pi \text{ см}^3$. До кожного початку речення (1–4) доберіть його закінчення (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

<i>Початок речення</i>	<i>Закінчення речення</i>
1 Висота циліндра дорівнює	А 4 см.
2 Висота конуса дорівнює	Б 5 см.
3 Радіус основи циліндра дорівнює	В 8 см.
4 Твірна конуса дорівнює	Г 12 см.
	Д 13 см.

Ключ	Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів					Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rit)
	0	1	2	3	4			
АГБД	20,1	21,6	14,5	7,4	36,3	54,5	79,6	0,8

Розв'язання

$$1) V_{\text{кон}} = V_{\text{ц}} = 100\pi \text{ см}^3.$$

$$S_{\text{осн.ц}} = \pi R^2 \text{ см}^2$$

$$\pi R^2 = 25\pi$$

$$R^2 = 25$$

$$R = 5$$

Отже, 5 см радіус конуса і циліндра.

$$V_{\text{ц}} = \pi R^2 H$$

$$\pi R^2 H = 100\pi$$

$$R^2 H = 100$$

$$25H = 100$$

$$H = 100 \div 25 = 4.$$

Висота циліндра рівна 4 см.

$$2) V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

$$\frac{1}{3} \pi R^2 H = 100\pi$$

$$R^2 H = 300$$

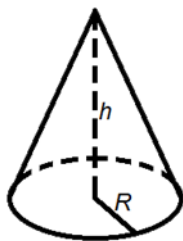
$$25H = 300$$

$$H = 300 \div 25 = 12.$$

Висота конуса рівна 12 см.

3) $R=5$ см – радіус основи циліндра.

4)



$$l^2 = R^2 + H^2$$

$$l^2 = 25 + 144 = 169$$

$$l = 13$$

Твірна конуса рівна 13 см.

Правильні відповіді: 1-А, 2-Г, 3-Б, 4-Д.

На основі аналізу результатів ЗНО можна дійти висновків, що значна частина учасників не мала сформованих базових умінь та навичок з теми «Планіметрія», «Стереометрія». Велика кількість учнів не знає основних формул, погано володіє вивченим матеріалом, має погано розвитку просторову уяву. Найбільше труднощів викликають завдання на комбінації геометричних фігур.

Змістова лінія «Вектори і координати» (рис.33). Ці теми передбачено вивчати в декілька етапів. В старших класах учні вперше знайомляться з прямокутною системою координат на площині. Вчать знаходити точки за їх координатами на координатній прямій та на координатній площині. Вивчають відповідні формули довжини відрізка, координати середини відрізка. Трохи пізніше знайомляться з векторами й операціями над ними.

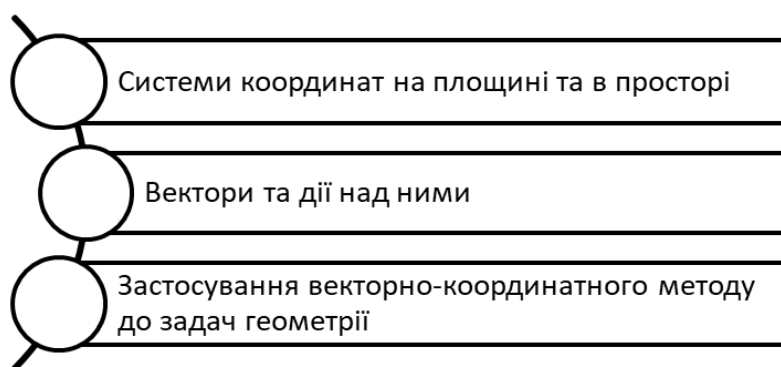


Рис.33. Теми змістової лінії «Вектори і координати»

Надамо пам'ятку для вчителів, на які моменти потрібно звернути увагу при підготовці учнів до ЗНО з математики в межах змістової лінії «Вектори і координати» (рис.34) [23].

Пам'ятка "Вектори і координати"

Починати вивчення теми варто з векторів та лінійних операцій над ними, далі розглянути геометричний зміст координат вектора і точки, а лише потім переходити до вивчення систем координат.

Завдання на побудову точок у просторовій системі координат, на знаходження їх проєкцій на координатні осі та площини, на знаходження точок, симетричних даній точці відносно координатних осей і площин є складними. Розгляд аналітичного задання цих симетрій та проєкцій на координатні площини та осі значно спрощує розв'язання подібних завдань.

Природним є повторення основних геометричних перетворень площини та простору: паралельного перенесення, симетрій відносно точки, прямої та площини, гомотетії тощо. Особливо варто звернути увагу на аналітичне задання паралельного перенесення.

Варто при повторенні розглядати вектори і координати на площині та в просторі паралельно.

Рис. 34. Пам'ятка «Вектори і координати»

Наведемо приклади завдань даної змістової лінії шкільного курсу математики.

30. У прямокутній системі координат на площині задано колінеарні вектори \overrightarrow{AB} та $\vec{a}(3; -5)$. Визначте абсцису точки B , якщо $A(-4; 1)$, а точка B лежить на прямій $y = 3$.

Ключ	Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів		Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rit)
	0	2			
-5.2	89,0	11,0	11,0	39,3	0,6

Розв'язання

Нехай $B(x; 3)$, оскільки точка B лежить на прямій $y = 3$.

$$\overrightarrow{AB} = (x - (-4); 3 - 1) = (x + 4; 2)$$

Вектори \overrightarrow{AB} і \vec{a} колінеарні, а це значить, що їх відповідні координати пропорційні.

$$\frac{x + 4}{3} = \frac{2}{-5}$$

$$-5(x + 4) = 3 \cdot 2$$

$$-5x - 20 = 6$$

$$-5x = 26$$

$$x = -\frac{26}{5} = -5,2$$

Відповідь: абсциса точки В дорівнює -5,2.

30. У прямокутній системі координат на площині xOy задано прямокутний трикутник ACB ($\angle C = 90^\circ$). Коло з центром у точці A , задане рівнянням $(x + 3)^2 + y^2 - 4y = 21$, проходить через вершину C . Сторона AC паралельна осі y , довжина сторони BC втричі більша за довжину сторони AC . Визначте координати вершини $B(x_B; y_B)$, якщо вона лежить у першій координатній чверті. У відповідь запишіть суму $x_B + y_B$.

Ключ	Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів		Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rit)
	0	2			
19	95,0	5,0	5,0	17,6	0,4

Розв'язання

Щоб визначити координати центра $A(x_a; y_a)$ кола та його радіус R , зведемо задане рівняння кола до канонічного виду:

$$(x + 3)^2 + y^2 - 4y = 21$$

$$(x + 3)^2 + y^2 - 2 \cdot 2 \cdot y - 2^2 = 21$$

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$$

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$$

З кінцевої формули маємо коло з центром у точці $A(-3; 2)$ і радіусом $R=5$. AC паралельна осі Oy (за умовою), звідси абсциса точки C дорівнює абсцисі точки A , тобто $x_c = -3$.

Обчислимо ординату точки C з умови, що $\angle C=90^\circ$, тобто $AC \perp BC$ і точка $B(x_b; y_b)$ лежить у першій координатній чверті (за умовою), тобто BC паралельна осі Ox , тоді $|y_c - y_a| = R$, $y_c - 2 = 5$, $y_c = 5 + 2 = 7$. Координати точки $C(-3; 7)$.

Так як сторона BC паралельна осі Ox , то ордината точки B дорівнює ординаті точки C , тобто $y_b = 7$. Обчислимо абсцису точки B з умови, що $BC = 3 \cdot AC$, тобто $BC = 3R = 3 \cdot 5 = 15$ точка $B(x_b; y_b)$ лежить у першій координатній чверті, тоді $|x_b - x_c| = 15$, $x_b - (-3) = 15$, $x_b = 15 + (-3) = 12$.

Отже, отримали точку $B(12;7)$, де $x_b+y_b=12+7=19$.

Відповідь: сума координат вершини В дорівнює 19.

Аналіз результатів ЗНО показав, що значна частина учасників не мала сформованих базових умінь та навичок з теми «Координати і вектори». Це призвело до труднощів під час виконання майже всіх типів завдань.

Змістова лінія «Елементи комбінаторики і стохастики» (рис. 35). Дана змістова лінія складається з трьох складових: теорія ймовірностей, комбінаторика, статистика. Ці види взаємопов'язані між собою і спрямовані на навчання в учнів аналізу даних. Під час вивчення комбінаторики вводяться поняття розміщення, розміщення з повторенням, перестановки, комбінації. Вивчення доречно починати з перебору варіантів, розв'язування задач за допомогою комбінаторних правил множення і додавання. Вивчення головних комбінаторних схем у навчальній літературі проводиться або мовою множин, або мовою вибірок. Ознайомлення з основними поняттями ймовірнісно-статистичної лінії необхідне для пізнання оточуючого світу і створення однієї з науково обґрунтованих картин цього світу. Будь-який розділ математики позитивно впливає на розумовий розвиток учнів, оскільки прищеплює їм навички логічного мислення. Це стосується і викладання ймовірнісно-статистичної лінії, але дана тема грає дещо більшу роль і виходить за межі звичайного. Учень пізнає, як застосовувати прийоми логічного мислення в тих випадках, коли необхідно мати справу з невизначеністю.

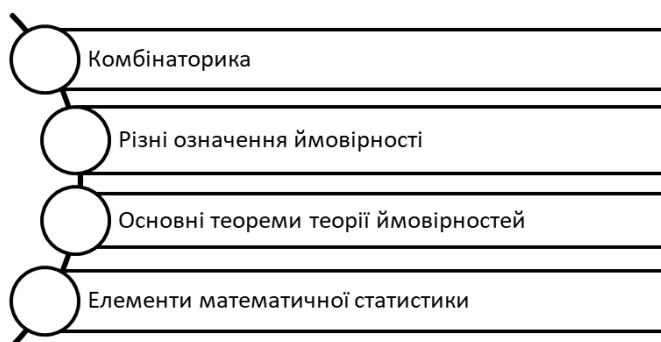


Рис.35. Темы змістової лінії «Елементи комбінаторики і стохастики»

Надамо пам'ятку для вчителів, на які моменти потрібно звернути увагу при підготовці учнів до ЗНО з математики в межах змістової лінії «Елементи комбінаторики і стохастики» (рис.36) [23].

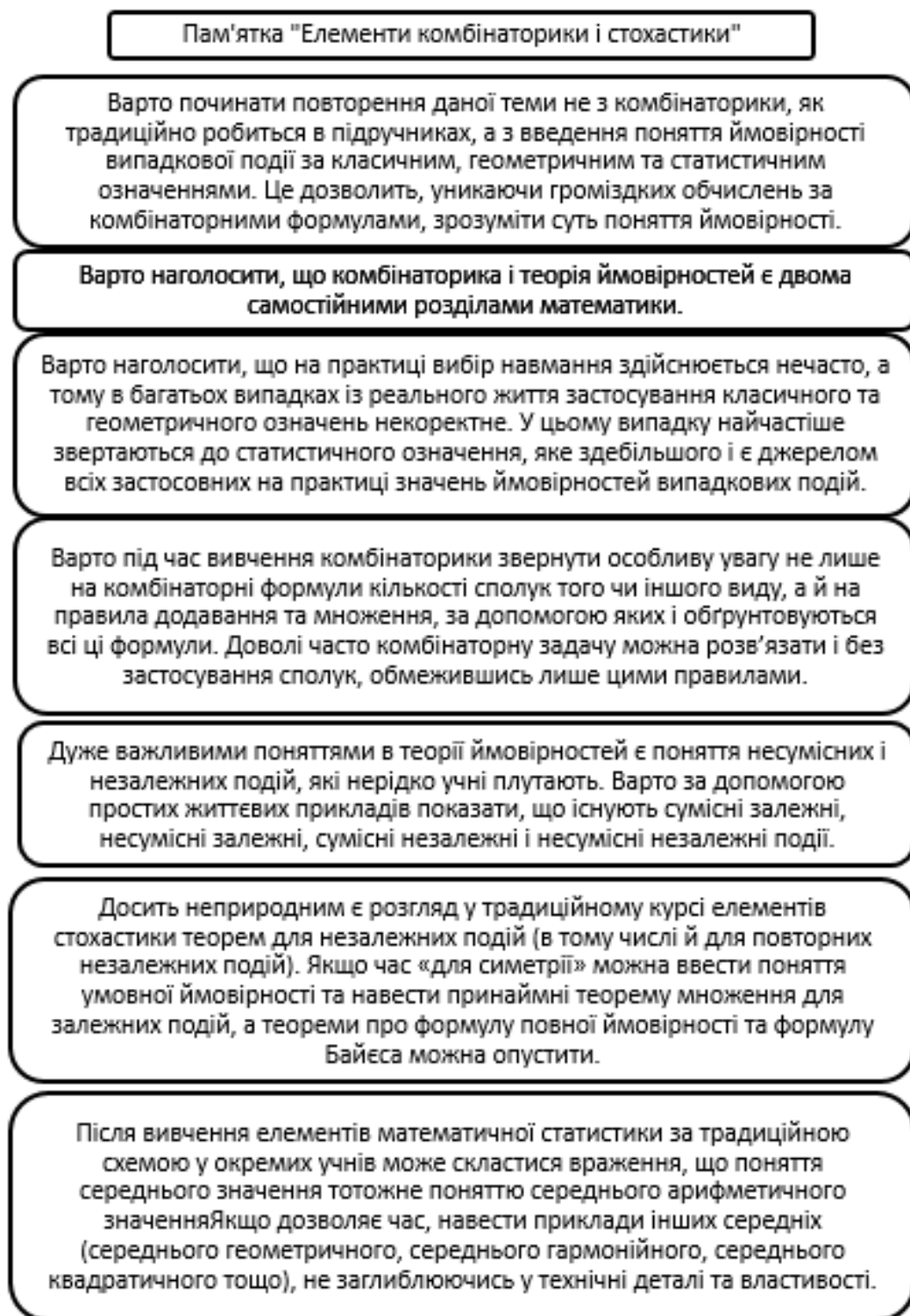


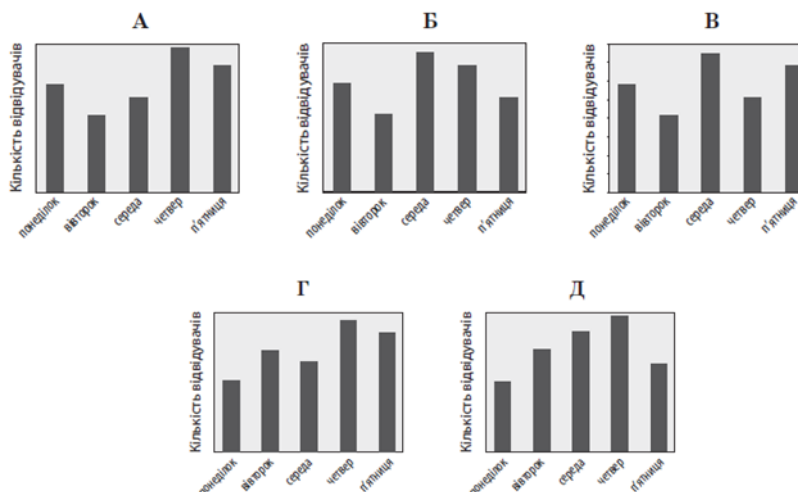
Рис. 36. Пам'ятка «Елементи комбінаторики і стохастики»

Наведемо приклади завдань даної змістової лінії шкільного курсу математики.

4. У таблиці наведено дані про кількість глядачів, які відвідали кінотеатр протягом п'яти днів тижня.

День тижня	понеділок	вівторок	середа	четвер	п'ятниця
Кількість відвідувачів	82	116	102	140	130

На діаграмах немає шкали (градаций) кількості глядачів. Визначте, на якій діаграмі правильно відображено дані, наведені в таблиці.



Ключ	Відповіді учасників (%)					Не виконали завдання (%)	Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rit)
	А	Б	В	Г	Д				
Г	0,7	0,4	0,5	97,1	1,2	0,1	97,1	8,7	0,2

Розв'язання

За даними таблиці можемо помітити, що правильною відповіддю є варіант Г.

29. У фінал пісенного конкурсу вийшло 4 солісти та 3 гурти. Порядковий номер виступу фіналістів визначають жеребкуванням. Скільки всього є варіантів послідовностей виступів фіналістів, якщо спочатку виступатимуть гурти, а після них – солісти?

Уважайте, що кожен фіналіст виступатиме у фіналі лише один раз.

Ключ	Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів		Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rit)
	0	2			
144	86,1	13,9	13,9	41,5	0,5

Розв'язання:

Оскільки варіантів виступів гуртів $P_3=3!=1\cdot2\cdot3=6$, а варіантів виступів солістів $P_4=4!=1\cdot2\cdot3\cdot4=24$, то варіантів виступів спочатку гуртів, а потім солістів $6\cdot24=144$.

Відповідь: 144 варіантів виступів фіналістів.

У завданнях ЗНО майже немає завдань з комбінаторики, а з елементів статистики та теорії ймовірності взагалі немає. У школі вивчаються ці теми, але вчителі не роблять акценту на цих завданнях. Тому учні на елементарні та базові задачі не можуть дати правильної відповіді.

Нами розглянуто особливості всіх змістових ліній математики, які проілюстровано завданнями ЗНО різних років. У завданнях сертифікаційних робіт ЗНО відображено майже весь зміст шкільного курсу математики, але, чомусь вчителі іноді мало приділяють увагу деяким темам, не акцентують увагу на аналізі завдань ЗНО минулих років. Саме тому досить часто учні допускають помилки, які є незначними або типовими.

Досвід показує, що інколи учасники ЗНО для досягнення максимального результату шукають «слабкі місця» у тестових завданнях. Результат тестування для учасників ЗНО все частіше стає важливішим, ніж наявність у них глибоких знань з тих чи інших предметів. Саме тому постає така проблема, як вгадування відповідей до тестових завдань.

Під вгадуванням розуміємо такий спосіб отримання відповіді до тестового завдання, який не збігається з авторським задумом стосовно цього завдання [24]. При цьому воно дає змогу учням отримати правильну відповідь на тестові завдання, фактично не маючи тих знань, на які спрямоване те чи інше завдання тесту.

Під прийомом чи методом угадування слід розуміти такі прийоми, які з гарантією дозволяють отримати результати, а не зменшити кількість варіантів правильної відповіді. Тому виділимо основні прийоми вгадування тестових завдань за [24] (рис.37).

Приєм перший «Перебирай!»	<ul style="list-style-type: none"> Суть цього прийому полягає у застосуванні прямого перебору для отримання правильної відповіді.
Приєм другий «Від загального до часткового!».	<ul style="list-style-type: none"> У тестових завданнях формулюють завдання таким чином, що розгляд часткових чи вироджених випадків призводить до суттєвого спрощення задачі.
Приєм третій «Зайва інформація!»	<ul style="list-style-type: none"> Тестові завдання в умові завдання можуть містити інформацію, яка дозволить отримати відповідь в обхід матеріалу, який потрібно перевірити в даному завданні.
Приєм четвертий «Оцінюй!»	<ul style="list-style-type: none"> Отримати відповідь до тестового завдання можна шляхом оцінки чи отриманням наближеного значення виразу.
Приєм п'ятий «Рисуй!»	<ul style="list-style-type: none"> Достатньо зробити рисунок чи схему, і можна без виконання певних операцій, отримати результат.
Приєм шостий «Підставляй!»	<ul style="list-style-type: none"> Для цього слід проявити увагу і спостережливість.

Рис.37. Прийоми вгадування тестових завдань

Проілюструємо використання зазначених прийомів угадування при отриманні правильної відповіді.

Приклад 1. Знайти найменше ціле число, що є розв'язком нерівності

$$\frac{(x+1)^2|x-3|}{x-2} \geq 0.$$

А	Б	В	С	Д
2	1	-1	3	4

Розв'язання. Використаємо прийом «Перебирай!». Серед запропонованих варіантів відповідей найменшим є число -1 з альтернативи

В. Підставимо це значення в ліву частину нерівності $\frac{(-1+1)^2|-1-3|}{-1-2} \geq 0$ і отримаємо правильну числову нерівність $0 \geq 0$.

Приклад 2. Спростіть вираз $\frac{x^2+x-xy-y}{x^2+x} : \frac{x^2-x-xy+y}{xy+y}$.

Розв'язання. Використаємо прийом «Від загального до часткового!». Оскільки це сформульовано як завдання з короткою відповіддю, то воно передбачає однозначну відповідність, яка не залежить від значень змінних x та y . Тому покладемо (для зручності) $x=0$ та $y=1$. Отримаємо: $-1:(-1)=1$. Отже, правильною відповіддю є число 1.

Приклад 3. Вказати розв'язок рівняння $\frac{x}{12} + \frac{x}{20} + \frac{x}{30} + \frac{x}{42} = -4$.

А	Б	В	Г	Д
-210	-21	1	3	42

Розв'язання. Використаємо прийом «Оцінюй!» Оскільки всі знаменники дробів у лівій частині рівняння є додатними, а сума цих дробів є від'ємною, то $x < 0$. Отже, правильною може бути лише відповідь **А** або **Б**. Нехай $x = -210$. Тоді $\frac{-210}{12} = -17,5 < -4$. Очевидно, що підставляти $x = -210$ у інші доданки не потрібно і правильна відповідь **Б**.

На нашу думку, проблема вгадування при розв'язуванні завдань ЗНО з математики на сьогодні є досить актуальною. Вчителям, які готують учнів до ЗНО необхідно знати основні прийоми вгадування, аналізувати власні спостереження і пропагувати такі методи. А авторам і розробникам тестів слід уважно ставитися до такої проблеми, після створення тестового завдання потрібно перевіряти його на можливість угадування.

2.3. Шляхи підготовки до ЗНО з математики

Підготовка до зовнішнього незалежного оцінювання може відбуватися декількома шляхами: введення повторювально-систематизуючого курсу чи факультативу з математики (формальна освіта); проходження курсів з

підготовки до ЗНО на відкритих освітніх платформах (неформальна освіта); робота з репетиторами (інформальна освіта).

Програма факультативу з підготовки до ЗНО з математики

Факультатив – це одна з форм диференційованого навчання з математики, основною метою якого є розширення та поглиблення знань школярів, всебічний розвиток їхніх математичних здібностей, зацікавленість предметом математика.

На нашу думку, підготовку до розв’язування задач ЗНО з математики доцільно організувати у формі саме факультативу в 10-11 класах.

Таблиця 4

Зміст факультативу з підготовки до ЗНО з математики

№	Тема	Години
10 клас		
1	Звичайні дроби. Десяткові дроби. Дії з дробами.	3
2	Подільність чисел. Відношення і пропорції.	1
3	Раціональні числа та дії над ними.	2
4	Рівняння. Системи рівнянь.	2
5	Цілі вирази. Розкладання многочленів на множники.	2
6	Квадратні корені. Дійсні числа. Квадратні рівняння.	3
7	Функції.	2
8	Нерівності.	2
9	Квадратична функція.	2
10	Числові послідовності.	2
11	Елементи прикладної математики.	1
12	Найпростіші геометричні фігури та їхні властивості.	2
13	Трикутник.	1
14	Геометричні побудови.	2
15	Чотирикутники.	3
16	Теорема Піфагора	2
17	Подібність фігур.	2
18	Розв’язування трикутників.	1
19	Многокутники.	1
11 клас		
1	Тригонометричні функції.	3
2	Тригонометричні рівняння і нерівності.	3
3	Степенева функція.	3
4	Показникова і логарифмічна функції	3
5	Похідна та її застосування.	4

6	Інтеграл та його застосування.	3
7	Елементи комбінаторики. Початки теорії ймовірності.	1
8	Площі фігур.	3
9	Вступ до стереометрії. Паралельність прямих і площин.	2
10	Перпендикулярність прямих і площин.	2
11	Декартові координати на площині та в просторі. Перетворення фігур. Вектори.	4
12	Многогранники. Тіла обертання.	3

В основному, на факультатив виділяється 1 година на тиждень, в загальному випадку це 34-35 годин на рік.

Як бачимо, в основі факультативу зміст програми, який базується на програмі Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України із зовнішнього незалежного оцінювання. Курс розрахований на 2 роки і охоплює всю програму основного курсу вивчення математики. Але це лише факультатив, який цілеспрямовано напружений на підготовку учнів до ЗНО, який забезпечує систематизацію і вдосконалення знань та вмінь учнів. Може скластися враження, що на деякі теми виділено мало годин, але такий курс розрахований на учнів, які мають гарні знання, а у рамках факультативу можуть вдосконалити свої знання, знайти нові методи, відчутти «особливості» кожної змістової лінії шкільного курсу математики.

*Проходження курсів з підготовки до ЗНО на відкритих освітніх
платформах (неформальна освіта)*

В умовах сьогодення, коли інформаційні технології стають більш доступними, цифрові освітні ресурси стають важливою складовою освітнього процесу. Відповідно до визначення ЮНЕСКО, відкриті освітні ресурси – це освітні, навчальні чи наукові ресурси, розміщені у вільному доступі або розповсюджені під ліцензією, яка дозволяє їх вільне використання або переробку. Іншими словами, відкриті освітні ресурси – це навчальні або наукові ресурси, які є вільно доступними, відкритими для всіх користувачів. До них відносять електронні підручники, навчальні відео- та аудіоматеріали, презентації, тести, тренажери, а також інші електронні навчальні засоби.

Користувачі представлені різними цільовими групами: учні, студенти, вчителі, викладачі. Відкриті освітні ресурси можуть бути цікавими також тим, хто здобуває освіту неформально або дистанційно.

У контексті підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання зазначимо, що з кожним роком в Україні з'являється все більше і більше онлайн-платформ, які допомагають абітурієнтам підготуватися до такого виду випробування, оскільки на сьогодні затребуваною стає швидка та якісна підготовка абітурієнтів до складання ДПА у формі ЗНО, що особливо актуалізується в умовах пандемії COVID-19 та карантинних обмежень.

Нами проаналізовано низку відкритих освітніх ресурсів, які мають за мету підготувати суб'єктів навчання до ЗНО. Кожен такий курс розбивається на розділи, які необхідно опанувати за певний час. Для визначення рівня оволодіння матеріалом передбачено тестування, після виконання якого надаються правильні відповіді на всі завдання і розраховується результат у тестових балах. Розглянемо більш детально найбільш популярні відкриті освітні ресурси підготовки до тестування, зосереджуючись лише на безкоштовних. Зауважимо, що всі проаналізовані курси доступні з комп'ютера, планшета та мобільного телефона.

EdEra – освітня українська платформа, яка створює безкоштовні онлайн-курси та навчальний контент для широкої аудиторії з різних тем. На даній платформі пропонується онлайн-курс «*Математика. Просто*». Курс розрахований на 6 тижнів, кожен з яких складається з 2-4 лекцій, великої кількості теоретичних, тестових і домашніх завдань. Кожен тиждень розрахований орієнтовно на 5 годин занять. Учням викладають як теорію, так і методику розв'язування задач і рівнянь, і саме цьому приділяється найбільше часу. Лекції проходять у відеоформаті, що є зручним для здобувачів освіти. Під час навчання надаються інтерактивні конспекти, підручники, у самих матеріалах повідомляються лайфхаки для запам'ятовування теоретичного матеріалу. Крім тестових завдань на курсі передбачено також проміжні модулі, тести та фінальний іспит. Успішно

пройшовши даний курс та всі його іспити, можна отримати сертифікат (рис.38).

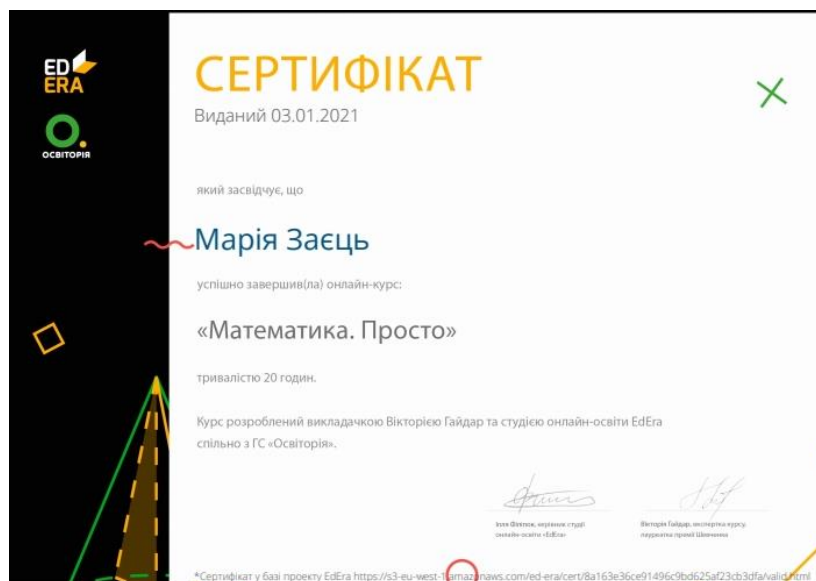


Рис. 38. Сертифікат проходження онлайн-курсу «Математика. Просто»

Prometheus – одна з найбільших освітніх онлайн-платформ України, яка допомагає учням підготуватися до здачі тестів ЗНО. Даний ресурс містить відразу два онлайн-курси для підготовки до ЗНО з математики: «Математика. Підготовка до ЗНО» та «Підготовка до ЗНО з математики: лайфхаки від Могилянки».

Курс «Математика. Підготовка до ЗНО» розраховано на 9 тижнів і складається з 19 тем від «Алгебра. Початок аналізу» до «Геометрія. Планіметрія. Стереометрія». У курсі містяться теоретичні відеоуроки по 5-15 хвилин та наочні приклади розв’язування задач різної складності. Після кожної лекції є тестові завдання для закріплення вивченого матеріалу.

При підготовці розглянуті всі розділи математики, які входять до програми ЗНО, розібрано всі типи задач та методи їх розв’язування. Також на курсі розміщено допоміжні відео, які містять корисні рекомендації для підготовки до ЗНО. При виникненні будь-яких запитань, є можливість обговорити їх на форумі з викладачем або з іншими слухачами курсу.

iLearn – проєкт від громадської спілки «Освіторія», містить курс «Математика», який складається з 25 тем. Кожна тема містить відео тривалістю від 25 хвилин і більше, у якому подається теорія та розв’язання задач. Додатково до кожної теми йдуть матеріали для самостійного опрацювання, у яких детально пояснюються формули, підтеми. Після завершення курсу обов’язково потрібно пройти тест. Програма охоплює всі теми, які виносяться на ЗНО. Від «Основні алгебраїчні вирази» до «Елементи комбінаторики, елементи математичної статистики». Додатково на сайті можна ознайомитись з методами розв’язування задач.

Приєднатися до навчання можна на будь-якому етапі. Для учнів є форум для обговорення необхідних питань.

«Освіта-онлайн» – громадський проєкт, що передбачає можливість дистанційної освіти для школярів у форматі масових відкритих онлайн-курсів і допомагає підготуватися до ЗНО та ДПА.

Курс з математики містить 29 уроків, кожен з яких містить кілька відео по 8-12 хвилин, детальні конспекти з формулами і термінами, приклади розв’язання задач. Урок завжди починається з «вхідного» тесту, а наприкінці розбираються приклади із ЗНО минулих років. Обов’язково даються домашні завдання, а на сайті є шкала успішності, де можна бачити свій прогрес у навчанні.

Academia пропонує школярам найбільшу кількість безкоштовних курсів для підготовки до ЗНО, одним з яких є курс з математики.

Даний курс поділений на дві частини – алгебра і геометрія. Разом вони містять 64 теми (32 з алгебри і 32 з геометрії). Кожна тема містить матеріал для опрацювання, словник термінів і понять, тестові завдання для закріплення знань та онлайн-ігри з даного матеріалу. По завершенню курсу пропонується пройти підсумкові тренувальні тести. Курс алгебри охоплює теми від «Натуральних чисел та дії над ними» до «Вступ до статистики», з геометрії від «Початкові поняття планіметрії» до «Вектори у просторі». Додатково можна знайти завдання із ЗНО минулих років.

Виокремимо переваги та недоліки онлайн-курсів на відкритих освітніх платформах.

Переваги онлайн-курсів на відкритих освітніх платформах:

- дають змогу за короткий період часу узагальнити та систематизувати майже весь теоретичний матеріал з математики;
- містять багато основних формул та зразків розв'язання задач;
- майже всі розв'язання задач взято із завдань ЗНО минулих років, що надає уявлення про типи та рівень завдань ЗНО;
- вільний доступ до курсу, можливість займатися у зручний час;
- можливість підлаштовувати темп навчання під себе.

Недоліки онлайн-курсів на відкритих освітніх платформах:

- проходження онлайн-курсів вимагає високого рівня мотивації учня;
- брак практичних вмінь і навиків;
- містять лише основний теоретичний матеріал;
- у задачах проміжного, модульного та фінального контролю зустрічаються повтори;
- трапляються випадки, коли задачі передують відповідній теорії або такі, які не розв'язувалися у розглянутих прикладах;
- всі задачі взяті з ЗНО минулих років, а тому всі їх розв'язання наявні в інтернеті і це дає змогу кожному пройти даний курс із «гарним результатом».

Робота з репетиторами по підготовці до ЗНО з математики

Наразі репетиторство є невід'ємною частиною сучасної освіти. Особливо це актуалізується в карантинних умовах, оскільки змінюються форми підготовки до ЗНО. В умовах пандемії Covid-19 змінюється розподіл ролі школи і репетиторства при підготовці випускників до ЗНО, що, на думку М. Гладкевич та О. Заяць, повинно стати предметом занепокоєння педагогічної громадськості, оскільки складається така громадська думка, що без репетиторства випускники закладів загальної середньої освіти не можуть

успішно скласти ЗНО [4]. Тому потрібно переглянути форми роботи з підготовки учнів до зовнішнього незалежного оцінювання в умовах, що склалися.

Нагадаємо, що репетитор – це викладач, який проводить додаткові, зазвичай індивідуальні заняття, допомагаючи засвоїти необхідні знання [17]. Репетитором з підготовки до ЗНО не завжди може бути шкільний вчитель. Перш за все це людина, для якої основною спеціалізацією є підготовка абітурієнтів до тестування ЗНО. Вона знає всі нюанси і тонкощі тестування і, навіть, може передбачити, що саме може бути на іспиті. Зайняття з репетитором можуть відбуватися як вдома, так і в режимі онлайн, що є зручно для учнів та їх батьків.

Існує декілька причин чому батьки звертаються до репетитора для своєї дитини. В першу чергу – це ситуація, коли дитина пропустила декілька уроків і їй важко наздогнати пропущений матеріал. По-друге, потреба у систематизації знань з математики при підготовці до ЗНО, коли репетитор допоможе учневі розібрати незрозумілі питання, пояснити важкі завдання, відкрити «лайфхаки» при розв’язуванні певних класів завдань.

Виокремимо переваги зайнять з репетитором (рис.39).

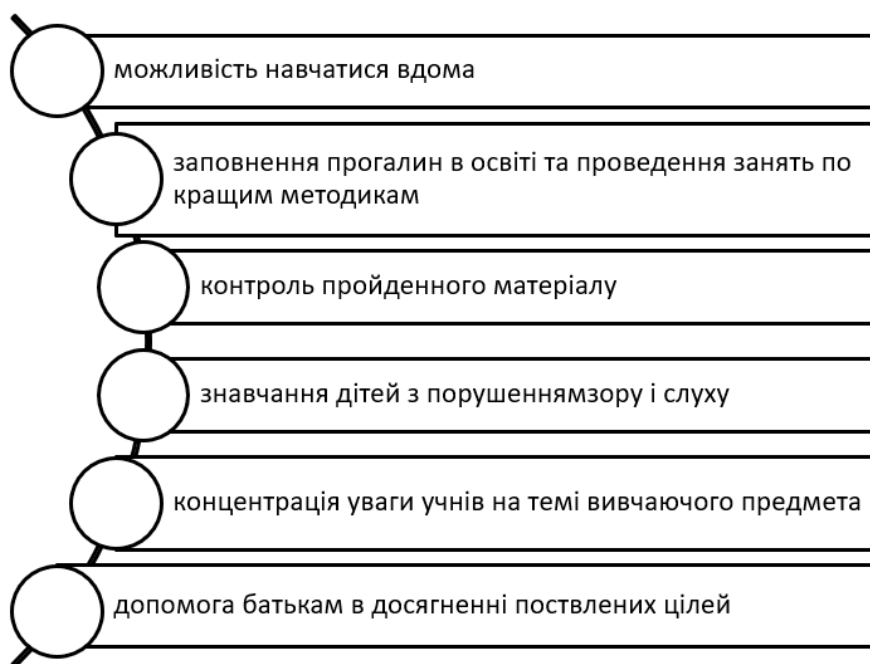


Рис. 39. Переваги зайнять з репетитором

Репетитори досить часто зацікавлюють своїх учнів вивченням окремого предмета. Вони досить грамотно мотивують підлітків на отримання нових знань та добросовісне виконання домашніх завдань. Але в той же час батькам дуже важливо бути впевненими у кваліфікації, порядності та досвіді конкретного педагога, коли їхня дитина залишається з репетитором наодинці. Тому при виборі репетитора важливо враховувати такі наступні чинники (рис. 40).

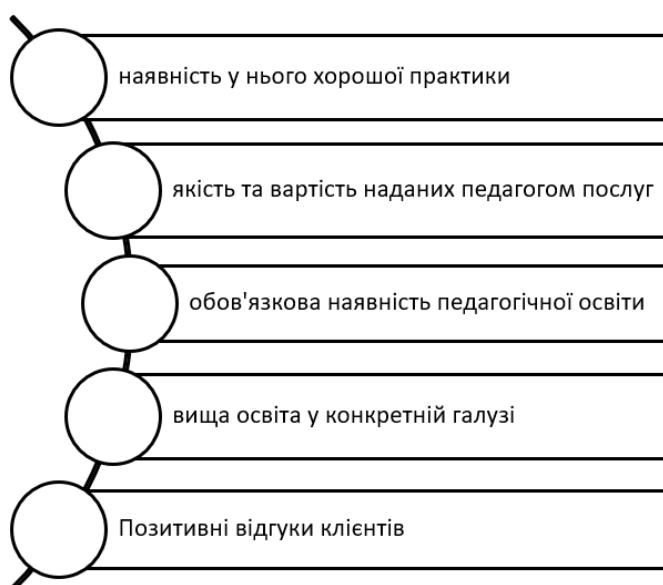


Рис. 40. Критерії правильного вибору репетитора

В умовах навчання онлайн зменшується роль школи саме у підготовці до заключного етапу навчання – проведення ЗНО чи державної підсумкової атестації [4].

Вважаємо, що взаємопоєднання та взаємодоповнення всіх трьох окреслених нами шляхів підготовки до ЗНО у поєднанні із коректною психологічною підтримкою усіх зацікавлених осіб буде найефективнішим.

ВИСНОВКИ

Основною метою зовнішнього незалежного оцінювання з математики є підвищення рівня освіти населення України та реалізація конституційних прав на рівний доступ до якісної освіти, що в свою чергу позитивно позначилося на якості середньої та вищої освіти, стало вагомим внеском у боротьбі проти корупції.

Уточнено сутнісні характеристики ключових понять «оцінювання», «навчальні досягнення школярів», «якість». Описано функції оцінювання навчальних досягнень та основні форми оцінювання навчальних досягнень. З'ясовано, що зовнішнє незалежне оцінювання (ЗНО) можна розглядати і як вид підсумкового оцінювання (воно дозволяє визначити рівень підготовки учнів) і як вид діагностичного оцінювання (використовується для ранжування рівня початкових досягнень учнів під час їх вступу до закладів вищої освіти).

Обґрунтовано психологічні засади підготовки учнів до зовнішнього незалежного оцінювання. Проаналізовано напрямки психологічної підготовки школярів до зовнішнього незалежного оцінювання (підготовка батьків, як підтримати власну дитину, у період до та під час проходження ЗНО; психологічна підготовка учнів до проходження ЗНО; підготовка вчителів до створення психологічно комфортного клімату під час проходження ЗНО) з детальними рекомендаціями кожному із учасників такого процесу.

Проаналізовано типи завдань ЗНО з математики (завдання з вибором однієї правильної відповіді з кількох запропонованих альтернатив, завдання на встановлення відповідності, завдання відкритої форми з короткою та розгорнутою відповіддю (повним поясненням) з відповідними прикладами. Пояснено сутність поняття «статистична складність» завдання ЗНО.

Описано зміст підготовки до ЗНО з математики. Сформульовано методичні особливості кожної змістової лінії шкільного курсу математики та

створено пам'ятки для вчителів у межах кожної змістової лінії, які можна використовувати при підготовці до ЗНО.

Виокремлено шляхи підготовки до ЗНО: введення повторювально-систематизуючого курсу чи факультативу з математики (формальна освіта); проходження курсів з підготовки до ЗНО на відкритих освітніх платформах (неформальна освіта); робота з репетиторами (інформальна освіта). Розроблено факультатив з розв'язування задач ЗНО з математики. Здійснено порівняльний аналіз курсів з підготовки до ЗНО на відкритих освітніх ресурсах. Закцентовано увагу на феномені репетиторства при підготовці до ЗНО.

Взаємопоєднання, взаємодоповнення та взаємовплив усіх трьох окреслених нами шляхів підготовки до ЗНО у поєднанні із коректною психологічною підтримкою усіх зацікавлених осіб створює ефективну систему підготовки учнів до розв'язування задач ЗНО з математики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Bibi K. E. Clarence Edward Beeby, 1977.
2. Black P., Dylan W. *Inside the Black Box: Raising Standards through Classroom Assess-Black P. Men* // Phi Delta Kappan. 1998. Vol. 80, No. 2. pp. 1-12.
3. Вілмут Дж. *Оцінювання для навчання: навч. посіб.* / за ред. І. Є. Булах, М. Р. Мруги. К.: Майстер-клас, 2007. 170 с.
4. Гладкевич М., Заяць О. Підготовка до ЗНО: школа чи репетиторство? *Молодь і ринок*. 2018. №2 (157). С. 11-15.
5. Гронлунд Н. Е. *Оцінювання студентської успішності: практичний посібник*. К., 2005. 312 с.
6. Додаток до листа Міністерства освіти і науки України від 28 січня 2014 року № 1/9-74 «Інструктивно-методичні матеріали щодо контролю та оцінювання навчальних досягнень учнів початкових класів загальноосвітніх навчальних закладів» [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://zakononline.com.ua/documents/show/449752_449817
7. Додаток до наказу МОН України від 19 серпня 2016 року № 1009 «Орієнтовні вимоги до контролю та оцінювання навчальних досягнень учнів початкової школи» [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://old.mon.gov.ua/img/zstored/files/1-2-08-%D1%96.pdf>
8. Заєць М. Відкриті освітні ресурси: підготовка до ЗНО з математики. *Студентська звітна конференція: Матеріали результатів наукових досліджень молодих науковців*. Суми: Вид-во фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2021. Вип. 15. Т. 1. С. 4-7.
9. Заєць М. До проблеми вгадування при розв'язуванні завдань ЗНО з математики. *II Всеукраїнська науково-методична інтернет-конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу – ІТМ*плюс-2021 Форум молодих дослідників»*. 12 листопада 2021 р. Суми. С.

10. Заєць М. Особливості підготовки до ЗНО з математики в умовах пандемії COVID-19. *Міжнародна науково-практична конференція «Наукова діяльність як шлях формування професійних компетентностей майбутнього фахівця»*. 9 грудня 2021 р. Суми. Подано до друку.
11. Заєць М. Про психологічну підготовку учнів до ЗНО. *Студентська звітна конференція: Матеріали результатів наукових досліджень молодих науковців*. Суми: Вид-во фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С.Макаренка, 2021. Вип. 15. Т. 2. С. 6-7.
12. ЗНО з математики: особливості тесту 2022 року. Режим доступу: <https://osvita.ua/test/training/5017/>
13. Канівець Т. М. *Основи педагогічного оцінювання: навчально-методичний посібник*. Ніжин : Видавець ПП Лисенко М. М., 2012. 102 с.
14. Локшина О. І. *Зміст шкільної освіти в країнах Європейського Союзу: теорія і практика (друга половина ХХ – початок ХХІ ст.): монографія*. К.: Богданова А.М., 2009. 404 с.
15. Офіційний звіт про проведення в 2020 році зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання, здобутих на основі повної загальної середньої освіти. Режим доступу: https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2020/09/ZVIT-ZNO_2020-Том_2.pdf
16. Пинская М. А. *Формирующее оценивание: оценивание в классе: учебн. пособие*. М. : Логос, 2010. 264 с.
17. Словник української мови онлайн. Режим доступу: <http://sum.in.ua/s/repetytor>
18. Український центр оцінювання якості освіти. Офіційні звіти. Режим доступу: <https://testportal.gov.ua/ofzvit/>
19. Український центр оцінювання якості освіти. Режим доступу: <https://testportal.gov.ua/>
20. Український центр оцінювання якості освіти. Статистичні дані. Режим доступу: <https://testportal.gov.ua/stat/>

21. Фишман И. С., Голуб Г. Б. *Формирующая оценка образовательных результатов учащихся : методическое пособие*. Самара: Учебная литература, 2007. 244 с.
22. Школьный О. В. Теоретико-методичні засади оцінювання навчальних досягнень з математики учнів старшої школи. Автореф.... докт. пед. наук: 13.00.02 – теорія та методика навчання (математика). Київ. 2015.
23. Школьный О.В. Про систему підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання якості знань з математики. *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія 3: Фізика і математика у вищій і середній школі*. 2014. Вип. 13. С. 117-136.
24. Школьный О.В. Проблема захисту від угадування тестових завдань ДПА та ЗНО з математики. *Психолог. Шкільний світ*. 2009. №13. С. 148-163.
25. Щербак О. І., Софій Н. З., Бович Б. Ю. *Теорія і практика оцінювання навчальних досягнень: навчально-методичний посібник*. Івано-Франківськ: Лілея-НВ, 2014. 136 с.