

Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
 Has been issued since 2013.
 Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
 Виходить з 2013.



p-ISSN 2413-1571
 e-ISSN 2413-158X

DOI: 10.31110/2413-1571
<https://fmo-journal.org/>

DOI 10.31110/2413-1571-2023-038-1-001

УДК 372.851

ЗАСТОСУВАННЯ ПРОГРАМНОГО ЗАСОБУ GEOGEBRA ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРОМ

Марина ВІРА ✉

Ніжинський державний університет
 імені Миколи Гоголя, Україна
 vyramaryna@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-9781-5211>

Петро САМУСЕНКО

Національний технічний університет України «Київський
 політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Україна
 psamusenko@ukr.net
<https://orcid.org/0000-0002-4241-6173>

THE APPLICATION OF GEOGEBRA SOFTWARE FOR SOLVING ALGEBRAIC PROBLEMS WITH A PARAMETER

Maryna VIRA ✉

Nizhyn Mykola Gogol State University, Ukraine
 vyramaryna@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-9781-5211>

Petro SAMUSENKO

National Technical University of Ukraine
 "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Ukraine
 psamusenko@ukr.net
<https://orcid.org/0000-0002-4241-6173>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. Процес розв'язування задач з параметром є потужним засобом активізації пізнавальної діяльності учнів. Розгляд таких задач сприяє узагальненню та систематизації знань і, як наслідок, це призводить до підвищення рівня математичної компетентності учнів. Саме тому задачі з параметрами є важливою складовою шкільного курсу математики профільного рівня. Їм присвячені окремі пункти підручників, ряд методичних посібників.

Матеріали і методи. Дослідження базується на багаторічному досвіді практичної роботи авторів статті з учнями закладів загальної середньої освіти. Воно, також, є наслідком опрацювання різних джерел даних, проведення міркувань дедуктивного характеру.

Результати. В статті проведено огляд посібників та статей в періодичних виданнях, які присвячені традиційним методам розв'язування задач з параметром (аналітичний та графічний методи) і наведено методичні аспекти поєднання традиційного підходу із сучасними засобами навчання математики.

Авторами цієї статті пропонується до розгляду низка задач з параметром, розв'язання яких передбачає поєднання традиційних методів з можливістю демонстрації динамічної моделі розглядуваної задачі в середовищі GeoGebra. На нашу думку, саме такий підхід до викладання дозволить забезпечити реалізацію не лише математичної, а й інформаційної компетентностей учня, що є надзвичайно важливим в умовах реформи НУШ в середній школі.

Проаналізовано, що в процесі навчання математики система GeoGebra використовується як засіб для візуалізації досліджуваних математичних об'єктів, виразів, ілюстрації методів побудови; як середовище для моделювання та емпіричного дослідження властивостей досліджуваних об'єктів; як комплекс, що надає користувачеві набір спеціалізованих інструментів для створення і перетворення об'єкта.

Висновки. Запропонований матеріал може бути використаний як вчителями-початківцями, так і досвідченими педагогами для проведення факультативних занять, оскільки він дозволяє зорієнтуватися в сучасній методичній літературі з даної тематики та зазирнути в творчу майстерню провідних науковців в галузі методики навчання математики.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: рівняння з параметром; система рівнянь з параметром; алгоритм розв'язання; GeoGebra.

ABSTRACT

Formulation of the problem. It is known that solving problems with a parameter is a powerful means of activating the cognitive activity of students. It also helps to generalize and systematize the knowledge. They encourage students to improve their level of mathematical competence. That is why the tasks with parameters are an important component of a school mathematics course at a professional level. Lots of sections of textbooks and several methodical manuals are devoted to them.

Materials and methods. The investigation is based on the author's experience of a long time of practical work with students of institutions of general secondary education. It is also a result of processing different informational sources, conducting reasoning of deductive character, and formulating conclusions.

Results. The article provides an overview of such manuals, as well as articles in periodicals, which are devoted to both traditional methods of solving problems with a parameter (analytical and graphical methods), as well as the author's attempts to combine the traditional approach with modern means of teaching mathematics.

The authors of this article propose for consideration several problems with the parameter, the solution of which involves a combination of an algorithmic approach with the ability to demonstrate a dynamic model of the considered problem in the GeoGebra environment. In our opinion, this approach to teaching will ensure the implementation of not only mathematical but also informational competencies of the student, which is an extremely important combination in the conditions of the reform of the NUS in secondary schools.

During the teaching of algebra, the GeoGebra system is used as a tool for visualizing the studied mathematical objects, and expressions, and illustrating construction methods; as an environment for modeling and empirical research of the properties of the studied objects; as a complex that provides the user with a set of specialized tools for creating and transforming an object.

Conclusions. We hope that the proposed material will be useful to both novice teachers and experienced teachers for teaching algebra classes, as it allows you to navigate the modern methodological literature on this topic and to look into the creative workshop of leading scientists in the field of mathematics teaching methods, who willingly share their ideas and experience in scientific articles.

KEYWORDS: equation with a parameter; a system of equations with a parameter; solution algorithm; GeoGebra.

Для цитування:

Віра М., Самусенко П. Застосування програмного засобу GeoGebra до розв'язування алгебраїчних задач з параметром. *Фізико-математична освіта*, 2023. Том 38. № 1. С. 7-13. DOI: 10.31110/2413-1571-2023-038-1-001

Віра, М., & Самусенко, П. (2023). Застосування програмного засобу GeoGebra до розв'язування алгебраїчних задач з параметром. *Фізико-математична освіта*, 38(1), 7-13. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-1-001>

For citation:

Vira, M., & Samusenko, P. (2023). The application of geogebra software for solving algebraic problems with a parameter. *Physical and Mathematical Education*, 38(1), 7-13. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-1-001>

Vira, M., & Samusenko, P. (2023). Zastosuvannya prohramnoho zasobu GeoGebra do rozv'язuvannya alhebraichnykh zadach z parametrom [The application of geogebra software for solving algebraic problems with a parameter]. *Fiziko-matematichna osvita – Physical and Mathematical Education*, 38(1), 7-13. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-1-001>

ВСТУП

Постановка проблеми. В умовах реформи НУШ невпинно зростає зацікавленість педагогів до сучасних інформаційно-комунікаційних засобів навчання математики. Безумовно, перспективним є використання в навчальному процесі програмних засобів навчання, зокрема систем динамічної математики і програм для роботи з графіками функцій. Слід відмітити важливість проблеми органічного поєднання традиційних методів викладання математики із елементами графічного представлення (створення динамічної картини) для унаочнення та глибокого опрацювання учнями необхідного матеріалу. Саме комп'ютерне моделювання досліджуваних об'єктів має велике значення для узагальнення та систематизації учнями навчального матеріалу, вдало доповнюючи арсенал традиційних засобів навчання математики. Досліджувана проблема є актуальною, оскільки демонструє можливості використання системи динамічної математики GeoGebra до розгляду ряду алгебраїчних задач основної школи.

Аналіз актуальних досліджень. Насьогодні є ряд навчальних посібників вітчизняних авторів, які присвячені застосуванню традиційних методів до розв'язування задач з параметром, що сприяють формуванню математичної компетентності. Зокрема, в науково-методичному виданні «Перші зустрічі з параметром» (Апостолю & Ясінський, 2008), в навчально-методичному посібнику «Задачі з параметрами в шкільному курсі математики» (Прус & Швець, 2018) та «Задачі з параметрами і методи їх розв'язання» (Крамор, 2011) розроблені авторські підходи до розв'язування задач з параметром, наведено значну кількість прикладів, що надзвичайно важливо як для учнів так і для вчителів-початківців.

У працях багатьох вчених досліджувались різноманітні аспекти методики викладання задач з параметром. Зокрема, в статтях (Беседін та ін., 2022), (Ilany & Hassidov, 2014) запропоновано методичні рекомендації щодо активізації пізнавальної діяльності здобувачів освіти в контексті розв'язування задач із параметрами. В (Беседін & Кадубовський, 2018) акцентується увага на доцільності використання алгоритмічного підходу до розв'язання рівнянь та нерівностей, що містять параметр. У (Підгорна, 2018), (Прус & Чемерис, 2019), (Zakirova et al., 2019) автори діляться тонкощами методики навчання розв'язування задач з параметром студентів педагогічних спеціальностей.

Слід зазначити, що протягом останніх років з'явилося багато статей науковців, які займаються проблемами використання інформаційно-комунікаційних технологій на уроках математики. Зокрема, в роботі (Юнчик & Федонюк, 2019) здійснено порівняльний аналіз найпоширеніших систем комп'ютерної математики та описано їх структуру, визначено основні функції систем комп'ютерної математики та наведено переваги і недоліки використання таких систем, як: Derive, Mathematika, Matlab, Mathcad, Maple, MuPad, Gran, GeoGebra.

Останнім часом значна увага приділяється аналізу системи динамічної математики GeoGebra, перша версія якої була розроблена ще в 2001 році Маркусом Хохенвартером (Hohenwarter & Fuchs, 2004). В роботах (Хрущ & Лотоцький, 2019), (Ilhan, 2013) проводиться дослідження зазначеної системи як засобу для створення динамічних моделей при вивченні задач з параметрами. При цьому акцентується увага на використанні системи GeoGebra як засобу активізації навчально-пізнавальної діяльності учня. В (Гриб'юк & Юнчик, 2016), (Krawczyk-Stamdo et al., 2013) на основі теорії розв'язування дослідницьких задач продемонстровано алгоритми їх розв'язування з використанням системи динамічної математики GeoGebra. Стаття (Semenikhina et al., 2019) присвячена вивченню можливостей програми динамічної математики GeoGebra у контексті набуття емпіричного досвіду на прикладі задач з параметром.

Мета. Розробити методику навчання задач з параметром, що ґрунтується на поєднанні традиційного підходу із можливостями динамічного моделювання розв'язання задачі в середовищі GeoGebra.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Під час роботи над публікацією використовувалися методи теоретичного аналізу, синтезу та узагальнення положень означеної проблеми.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

В даній статті розглянемо деякі аспекти методики роботи над задачами з параметром, розв'язання яких виконується за допомогою аналітичного методу з ілюстраціями динамічної картини графіка розв'язків в системі GeoGebra. Наведемо декілька прикладів.

Приклад 1. Визначити кількість розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} (a+3)x + 4y = 5 - 3a; \\ 2x + (5+a)y = 8. \end{cases}$$

Розв'язання: розв'яжемо задачу аналітичним методом. Помітивши той факт, що у другому рівнянні даної лінійної системи коефіцієнт біля x не залежить від параметра, виразимо із другого рівняння x і підставимо у перше рівняння. Отримаємо:

$$\begin{cases} (a+3) \cdot \frac{8 - (5+a)y}{2} + 4y = 5 - 3a; \\ x = \frac{8 - (5+a)y}{2}. \end{cases}$$

Виконавши тотожні перетворення в першому рівнянні системи, запишемо її у вигляді:

$$\begin{cases} (a^2 + 8a + 7)y = 14(a+1); \\ x = \frac{8 - (5+a)y}{2}. \end{cases}$$

Розклавши квадратний тричлен на множники, проаналізуємо розв'язність відносно y в першого рівняння системи (а, отже, і даної системи):

$$(a+1)(a+7)y = 14(a+1).$$

Очевидно, що при $a \neq -1$; $a \neq -7$, останнє рівняння (і дана система) однозначно розв'язна; якщо $a = -1$, то рівняння набуває вигляду $0 \cdot y = 0$, яке має безліч розв'язків; якщо $a = -7$, то рівняння набуває вигляду $0 \cdot y = -8$, тому рівняння (а, отже, і система) не має розв'язків.

Після розв'язання задачі аналітичним методом доцільно продемонструвати динамічну картину аналізу розв'язності системи за допомогою GeoGebra (<https://www.geogebra.org/m/smkmejby>). При цьому слід наголосити на тому, що кожне рівняння системи при певному значенні параметра геометрично задає пряму. При зміні параметра прямі змінюють своє положення. Якщо $a = -7$, то отримаємо дві паралельні прямі (див. рис.1), оскільки вони не перетинаються, то задана система не має розв'язків.

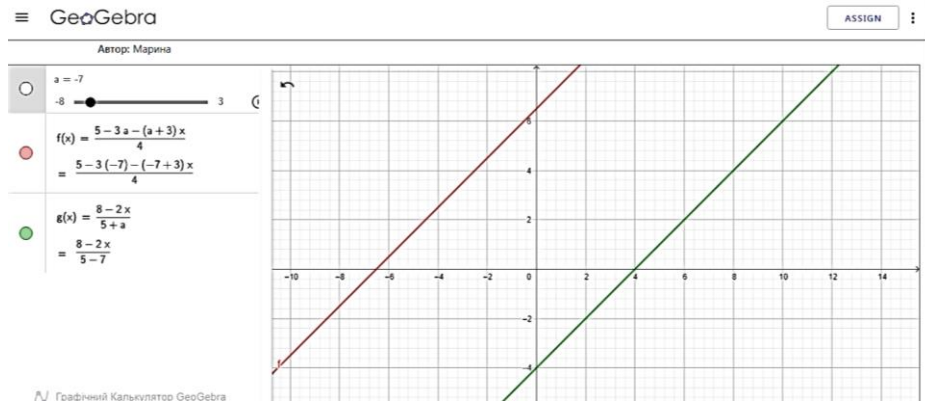


Рис. 1.

При $a = -1$ прямі збігаються (див. Рис.2), тобто задана система має безліч розв'язків (координати точок прямої).

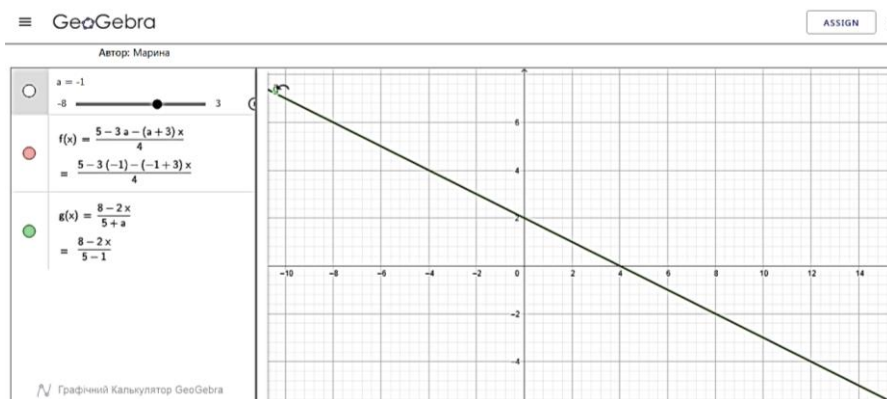


Рис. 2.

У інших випадках прямі завжди перетинаються (координати точки перетину є розв'язком системи). Див. рис.3.

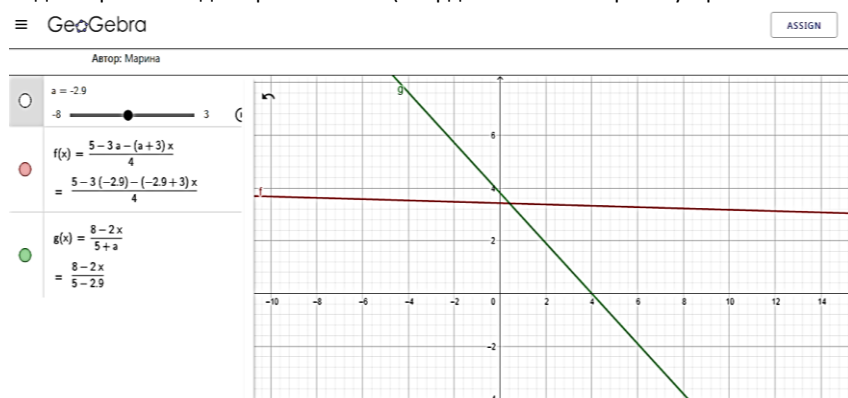


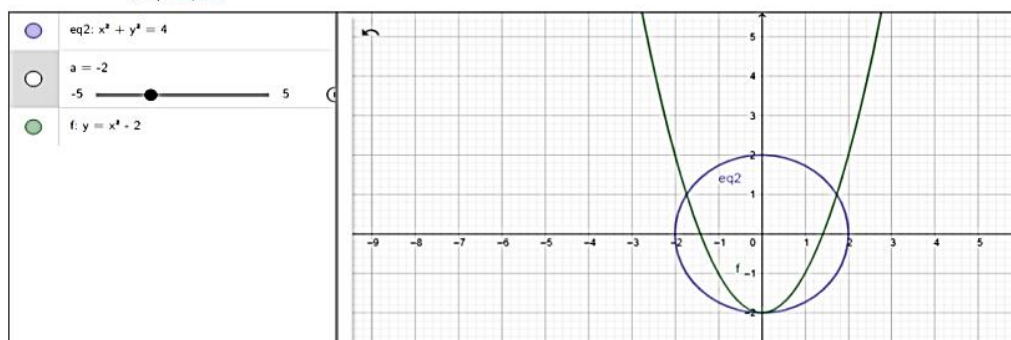
Рис. 3.

Приклад 2. (Репета та ін., 2002). При якому значенні параметра a система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4; \\ y = x^2 + a \end{cases}$ має три розв'язки?

Розв'язання: застосуємо графічний метод. Графіком першого рівняння системи є коло, радіуса 2 з центром у початку координат. Графіком функції $y = x^2 + a$ є парабола, вершина якої $(0; a)$ при зміні a рухається вздовж осі Oy . Система буде мати три розв'язки, якщо коло і парабола перетинатимуться у трьох точках. Очевидно, що це буде при $a = -2$. Для більшої переконливості доцільно розглянути динамічну модель (<https://www.geogebra.org/graphing/xgkym4fk>).

Коло і парабола

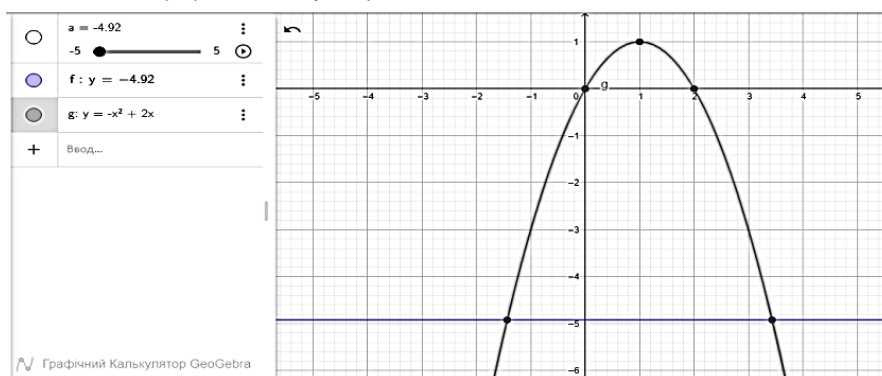
Автор: Марина



Приклад 3. Розв'язати рівняння $x^2 - 2x + a = 0$ в залежності від параметра a .

Розв'язання: як і в попередньому випадку застосуємо графічний метод. Запишемо рівняння у вигляді $-x^2 + 2x = a$. Побудуємо графіки двох функцій $y = a$ та $y = -x^2 + 2x$. Виділивши повний квадрат, запишемо квадратичну функцію у вигляді $y = -(x - 1)^2 + 1$. Отже, геометрично маємо параболу, вітками вниз, з вершиною у точці $(1; 1)$, та нулями функції $x = 0, x = 2$. З іншого боку, при кожному значенні параметра a отримаємо пряму $y = a$, паралельну осі абсцис. Аналізуючи динамічну модель (<https://www.geogebra.org/graphing/xpfxuk4u>), отримаємо наступні результати: якщо $a < 1$, то $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - a}$; якщо $a = 1$, то $x_{1,2} = 1$; якщо $a > 1$, то $x \in \emptyset$.

GeoGebra Графічний Калькулятор



Приклад 4. При яких значеннях a рівняння

$$\frac{3}{x-1} - \frac{x}{x-a} + \frac{3}{2} = 0$$

має єдиний корінь?

Розв'язання: скористаємось аналітичним методом. Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x \neq 1; \\ x \neq a; \\ x^2 - (3a - 5)x - 3a = 0. \end{cases}$$

Дослідимо розв'язність рівняння $x^2 - (3a - 5)x - 3a = 0$. Обчислимо дискримінант: $D = 9(a - 1)^2 + 16$, який є додатним при всіх значеннях параметра, a , отже, рівняння має два дійсні корені.

Дане дробово-раціональне рівняння має один корінь, якщо один з коренів квадратного рівняння дорівнює 1 або a . Нехай коренем останнього рівняння є 1, а отже, задовольняє його: $1^2 - (3a - 5) \cdot 1 - 3a = 0$, звідки $a = 1$. Тоді $x = -3$ – корінь дробово-раціонального рівняння.

Нехай коренем рівняння є a , а отже, задовольняє його: $a^2 - (3a - 5) \cdot a - 3a = 0$, звідки $\begin{cases} a_1 = 0; \\ a_2 = 1. \end{cases}$

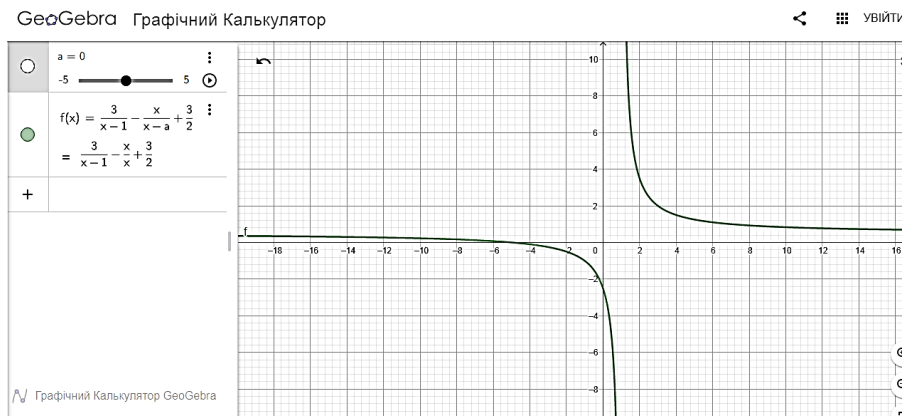
1) Якщо $a = 0$, то $x^2 + 5x = 0$, звідки $\begin{cases} x_1 = -5; \\ x_2 = 0, \end{cases}$ де $x = 0$ – сторонній корінь.

2) Якщо $a = 1$, то $x^2 + 2x - 3 = 0$, звідки $\begin{cases} x_1 = -3; \\ x_2 = 1, \end{cases}$ де $x = 1$ – сторонній корінь.

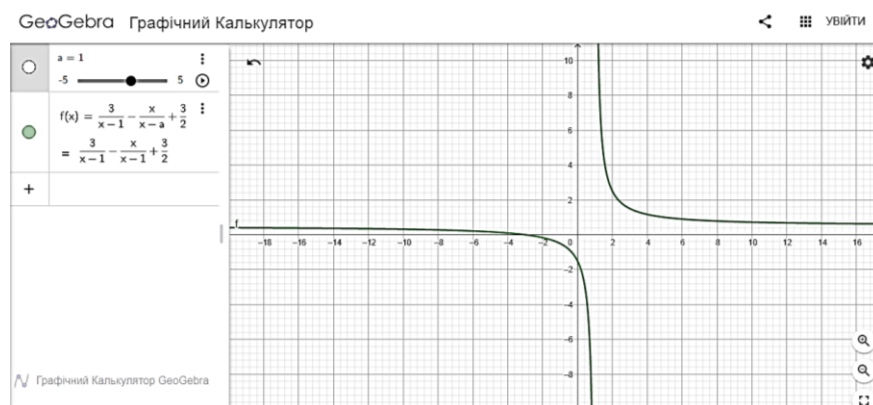
Отже, при $a = 0$ та $a = 1$ дане рівняння має один корінь.

Динамічну картину розв'язку можна переглянути за посиланням: <https://www.geogebra.org/graphing/vxqfd2u5>

Зокрема, при $a = 0$:

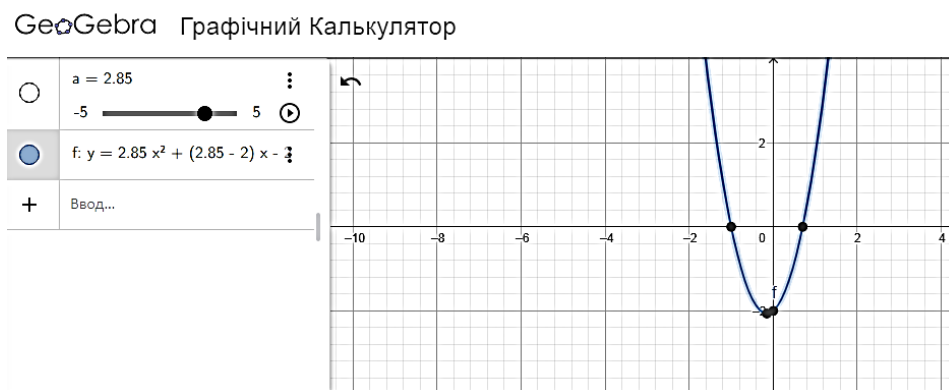


При $a = 1$:



Приклад 5. При яких значеннях параметра a рівняння $ax^2 + (a - 2)x - 2 = 0$ має один корінь?

Розв'язання: квадратне рівняння з параметром має один корінь, якщо коефіцієнт біля x^2 дорівнює нулю або дискримінант рівний нулю. Тобто при $a = 0$ або $a = -2$. Динамічну картину графіка розв'язку можна переглянути за посиланням: <https://www.geogebra.org/graphing/snpnpqadp>.



ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Наведені в статті приклади демонструють можливості використання програмного сервісу GeoGebra при вивченні алгебри основної школи. При цьому акцентується увага на педагогічній доцільності поєднання традиційного методу викладання і демонстрації динамічної картини графіка розв'язку за допомогою програмного засобу GeoGebra. Слід відмітити, що подібні задачі з параметрами є надзвичайно важливими при формуванні математичної та інформаційної компетентностей. Тому їх доцільно пропонувати на уроках алгебри досить регулярно. Оскільки, незалежно від рівня навчальних досягнень учнів, завжди можна підібрати доступні вправи, які дозволять створити "ситуацію успіху" на уроці, що дасть змогу учню відчувати себе у ролі першовідкривача і, таким чином, спонукати до активізації пізнавальної активності, що є надзвичайно важливим завданням в умовах реформи НУШ.

Сподіваємося, що наведений огляд літературних джерел та підібрані вправи стануть у нагоді вчителям математики для практичного використання в освітньому процесі.

Проведене дослідження не претендує на вичерпний аналіз усіх аспектів означеної проблеми. Перспективними вважаємо наукові дослідження у контексті визначення методів роботи над задачами з параметром з метою активізації науково-пошукової діяльності учнів засобами програмного сервісу GeoGebra.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Апостолюва, Г.В., & Ясінський, В.В. (2008). *Перші зустрічі з параметром*. Науково-методичне видання. Київ, "Факт".
2. Беседін, Б.Б., Рulloва, Н.Г., & Сагай, А.М. (2022). Задачі з параметрами як засіб активізації пізнавальної діяльності учнів на уроках алгебри. *Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ*, 12, 77-81. <http://znppfizmat.ddpu.edu.ua/issue/view/15645>.
3. Беседін, Б.Б., & Кадубовський, О.А. (2018) Про алгоритмічний підхід до розв'язання рівнянь та нерівностей (з однією змінною) другого степеня з параметром. *Фізико-математична освіта*, 2(16), 18-22. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2018-016-2-003>.
4. Гриб'юк, О. О., & Юнчик, В. Л. (2016). Проектно-дослідницька діяльність у процесі навчання математики з використанням системи динамічної математики GeoGebra. *Наукові записки. Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти*, 2 (9), 8-18. <https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/NZ-PMFMT0/article/view/918>.
5. Крамор, В. С. (2011). *Задачі з параметрами і методи їх розв'язання*. Тернопіль, Навчальна книга - Богдан.
6. Підгорна, Т. В. (2018). Застосування геометричних перетворень до розв'язування задач з параметрами. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 2: Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання*, 20, 56-61.
7. Прус, А.В., & Чемерис, О.А. (2019). Про навчання студентів педагогічних спеціальностей розв'язувати завдання з параметрами. *Фізико-математична освіта*, 1(19), 171-176. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2019-019-1-027>.
8. Прус, А.В., & Швець, В.О. (2018). Задачі з параметрами в шкільному курсі математики: *навч.-метод. посібник*. Житомир: Вид-во ПП «Рута».
9. Репета, В., Клешня, Н., Коробова, М., & Репета, Л. (2002). Задачі з параметрами. Розв'язки, рекомендації, приклади: *навчальний посібник для старшокласників та абітурієнтів*. Тернопіль: підручники і посібники.
10. Semenikhina, E., Drushlyak, M., Bondarenko, Yu., Kondratiuk, S., & Dehtiarova, N. (2019). Cloud-based service GeoGebra and its use in the educational process: the BYOD-approach. *TEM JOURNAL – Technology, Education, Management, Informatics*, 8(1), 65-72. <https://doi.org/10.18421/TEM81-08>.
11. Хрущ, Л., & Лотоцький, В. (2019). Застосування програми GeoGebra для організації навчально-пізнавальної діяльності учня. *Гірська школа українських Карпат*, 20, 19-27.
12. Юнчик, В. Л., & Федонюк, А. А. (2019). Порівняльна характеристика функціональних можливостей систем комп'ютерної математики в процесі розв'язування задач. *Вісник Національного університету "Львівська політехніка". Інформаційні системи та мережі*, 6, 90-102. <https://science.lpu.ua/sites/default/files/journal-paper/2019/nov/19774/191675maket2-92-104.pdf>.
13. Hohenwarter, M. & Fuchs, K. (2004). Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system geogebra. *In Computer algebra systems and dynamic geometry systems in mathematics teaching conference*, 1 -6.
14. Ilany, B., & Hassidov, D. (2014). Solving equations with parameters. *Creative Education*, 5, 963-968.
15. Ilhan, E. (2013). Introducing parameters of a linear function at undergraduate level: use of geogebra. *Mevlana International Journal of Education*, 3(3), 77-84.
16. Krawczyk-Stamdo, D., Guncaga, J., & Stamdo, J. (2013). Some examples from historical mathematical textbook with using geogebra. *In 2013 Second International Conference on E-Learning and E-Technologies in Education, Lodz*.
17. Zakirova, V. G., Zelenina, N. A., Smirnova, L. M., & Kalugina, O. A. (2019). Methodology of teaching graphic methods for solving problems with parameters as a means to achieve high mathematics learning outcomes at school. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 15(9), 1-12.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Apostolova, H.V., Yasinskyi, V.V. (2008). Pershi zustrichi z parametrom [First meetings with the parameter]. *Naukovo-metodychne vydannia. Kyiv, "Fakt"*. (in Ukrainian).
2. Besedin, B.B., Rulova, N.H., & Sahai, A.M. (2022). Zadachi z parametramy yak zasib aktyvizatsii piznavalnoi diialnosti uchniv na urokakh alheby [Problems with parameters as a means of activating students' cognitive activity in algebra lessons]. *Zbirnyk naukovykh prats fizyko-matematichnoho fakultetu DDPU – Collection of scientific works of the Faculty of Physics and Mathematics of the State University of Applied Sciences*, 12, 77-81. (in Ukrainian).
3. Besedin, B.B., & Kadubovskiy, O.A. (2018). Pro alhorytmichnyi pidkhid do rozv'iazannia rivnian ta nerivnostei (z odniieu zminnoiu) druhoho stepenia z parametrom [On The Algorithmic Approach To Solving Of The Second-Degree Equations And Inequalities (With One Variable) With The Parameter]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 2(16), 18-22. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2018-016-2-003>. (in Ukrainian).
4. Hrybiuk, O. O., & Yunchyk, V. L. (2016). Proektno-doslidnytska diialnist u protsesi navchannia matematyky z vykorystanniam systemy dynamichnoi matematyky GeoGebra [Project-research activity in the process of teaching mathematics using the GeoGebra dynamic mathematics system]. *Naukovi zapysky. Serii: Problemy metodyky fizyko-matematychnoi i tekhnolohichnoi osvity – Proceedings. Series: Problems of the methodology of physical, mathematical and technological education*, 2 (9), 8-18. (in Ukrainian).
5. Kramor, V. S. (2011). *Zadachi z parametramy i metody yikh rozv'iazannia [Problems with parameters and methods of their solution]*. Ternopil, Navchalna knyha -Bohdan. (in Ukrainian).
6. Pidhorna, T. V. (2018). Zastosuvannia heometrychnykh peretvoren do rozv'iazuvannia zadach z parametramy [Application of geometric transformations to solving problems with parameters]. *Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Drahomanova. Serii 2: Kompiuterno-orientovani systemy navchannia – Scientific journal of the M.P. Drahomanov NPU. Series 2: Computer-oriented learning systems*, 20, 56-61. (in Ukrainian).
7. Prus, A.V., & Chemerys, O.A. (2019). Pro navchannia studentiv pedahohichnykh spetsialnostei rozv'iazuvaty zavdannia z parametramy [On Teaching Students Of Pedagogical Specialties To Solve Do Tasks With Parameters]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 1(19), 171-176. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2019-019-1-027>. (in Ukrainian).
8. Prus, A.V., & Shvets, V.O. (2018). Zadachi z parametramy v shkilnomu kursu matematyky [Problems with parameters in the school mathematics course]. *navch.-metod. posibnyk*. Zhytomyr: Vyd-vo PP «Ruta
9. Rypeta, V., Kleshnia, N., Korobova, M., & Rypeta, L. (2002). Zadachi z parametramy. Rozv'iazky, rekomendatsii, pryklady [Problems with parameters. Solutions, recommendations, examples]: *navchalnyi posibnyk dlia starshoklasnykiv ta abiturientiv*. Ternopil: pidruchnyky i posibnyky. (in Ukrainian).
10. Semenikhina, E., Drushlyak, M., Bondarenko, Yu., Kondratiuk, S., & Dehtiarova, N. (2019). Cloud-based service GeoGebra and its use in the educational process: the BYOD-approach. *TEM JOURNAL – Technology, Education, Management, Informatics*, 8(1), 65-72. <https://doi.org/10.18421/TEM81-08>.
11. Khrushch, L., & Lototskyi, V. (2019). Zastosuvannia prohramy GeoGebra dlia orhanizatsii navchalno-piznavalnoi diialnosti uchnia [Application of the GeoGebra program for the organization of the student's educational and cognitive activities]. *Hirska shkola ukrainskykh Karpat – Mountain School of the Ukrainian Carpathians*, 20, 19-27. (in Ukrainian).

12. Yunchyk, V. L., & Fedoniuk, A. A. (2019). Porivnialna kharakterystyka funktsionalnykh mozhlyvostei system kompiuternoi matematyky v protsesi rozviazuvannia zadach [Comparative characteristics of the functional capabilities of computer mathematics systems in the process of solving problems]. *Visnyk Natsionalnoho universytetu "Lvivska politekhnika". Informatsiini systemy ta merezhi – Bulletin of the Lviv Polytechnic National University. Information systems and networks*, 6, 90-102. (in Ukrainian)
13. Hohenwarter, M., & Fuchs, K. (2004). Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system geogebra. *In Computer algebra systems and dynamic geometry systems in mathematics teaching conference*, 1–6.
14. Ilany, B., & Hassidov, D. (2014). Solving equations with parameters. *Creative Education*, 5, 963–968.
15. Ilhan, E. (2013). Introducing parameters of a linear function at undergraduate level: use of geogebra. *Mevlana International Journal of Education*, 3(3), 77–84.
16. Krawczyk-Stamdo, D., Guncaga, J., & Stamdo, J. (2013). Some examples from historical mathematical textbook with using geogebra. *In 2013 Second International Conference on E-Learning and E-Technologies in Education, Lodz*.
17. Zakirova, V. G., Zelenina, N. A., Smirnova, L. M., & Kalugina, O. A. (2019). Methodology of teaching graphic methods for solving problems with parameters as a means to achieve high mathematics learning outcomes at school. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 15(9), 1–12.

