Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Косенко Олександр Миколайович

ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «МНОГОГРАННИКИ» У СТАРШІЙ ШКОЛІ

Спеціальність: 014.04 Середня освіта (Математика)
Галузь знань: 01. Освіта

Кваліфікаційна робота
на здобуття освітнього ступеня магістра

Науковий керівник
_______________ Ю.В.Хворостіна
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математики
«____» ____________________ 2020 року
Виконавець
_______________ О.М. Косенко
«____» ____________________ 2020 року

Суми – 2020

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми: Протягом усього свого існування людство не перестає поповнювати свої наукові знання в тій чи іншій галузі. Не тільки багато вчених, а й простих людей, цікавилися многогранниками. Багато реальних об'єктів у живій природі, фізиці, астрономії, географії та інших природничих науках, мають форму призми, паралелепіпеда, куба, піраміди. В наш час часто виникає практична необхідність визначати об'єм і площу поверхні об'єктів природи, побуту, виробництва, досліджувати їх розміри, взаємне розташування і т.п. З погляду на це, процес навчання стереометрії, зокрема вивчення многогранників, потрібно розглядати комплексно, як надбання учнями необхідних загальнолюдських знань і цінностей, а тому спрямувати на розвиток навчально-пізнавальної та творчої активності учнів і на забезпечення їх потреб та основ життєдіяльності. Огляд методичної літератури свідчить про важливість вивчення розділу «Многогранники» для розвитку логічного і просторового мислення, для загальнокультурного та естетичного виховання учнів. Суперечності, що існують між різними методологічними підходами до вивчення понять та доведення тверджень, структурування навчального матеріалу в підручниках зі стереометрії, організації навчання в умовах профілізації зумовлює проблему пошуку шляхів реалізації системного підходу до вивчення розділу «Многогранники».

Вивчення учнями многогранників у старшій школі передбачає досягнення двох самостійних, але взаємопов'язаних завдань: опанування учнями змісту конкретного розділу та цілеспрямоване формування у них прийомів розумової діяльності. Нові вимоги сучасного суспільства, що характеризуються посиленням уваги до особистості учня, до його саморозвитку та самопізнання, разом зі змінами в умовах навчання школярів у класах різних напрямів профілізації, учнів з різним рівнем підготовки та різним рівнем мотивації зумовлюють необхідність побудови оновленої методичної системи вивчення геометричних тіл.

Актуальність проблеми вивчення даної теми також зумовлена реальним станом вивчення розділу «Многогранники» учнями старшої школи. Більшість учнів не вміють розв'язувати задачі практичного змісту, про що, наприклад, свідчать результати ЗНО.

Саме тому для написання дипломної роботи нами обрано тему «Вивчення теми «Многогранники» у старшій школі».

Об'єкт дослідження: методика навчання стереометрії учнів старшої школи.

Предмет дослідження: методика навчання теми «Многогранники» у старшій школі.

Мета дослідження: дослідити методичні особливості навчання теми «Многогранники» учнів старших класів.

У відповідності до мети було поставлено наступні **завдання** дослідження:

1) опрацювати науково-методичні джерела та навчальну літературою за напрямками дослідження;

2) проаналізувати програму навчання геометрії в старшій школі;

3) порівняти та виділити особливості введення основних понять з теми «Многогранники» у шкільних підручниках;

4) сформулювати методичні вказівки до формування основних понять з теми дослідження;

5) виділити методичні особливості розв'язування задач з основних розділів теми «Многогранники».

Методи дослідження:

У ході написання роботи були застосовані такі методи дослідження: абстрактно-логічний (передбачає узагальнення теоретичних основ та формулювання на їх основі висновків), табличний (аналіз чинників відбувається у вигляді таблиць), аналітичний, аналіз (виокремлення суттєвих ознак і характеристик із загального, несуттєвого), синтез (поєднання абстрагованих сторін у цілісне відображення реального стану речей).

Практичне значення: Дана дипломна робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаної літератури.

У першому розділі наведено аналіз діючих програм та підручників з теми «Многогранники» та подано порівняльну таблицю основних означень з цієї теми.

У другому розділі розглянуто методичні особливості вивчення многогранників у старшій школі. Детальніше звернуто увагу на типи опуклих многогранників (призми, піраміди, правильні многогранники) та їх властивості.

Третій розділ присвячений методиці розв'язання задач з основних розділів теми «Многогранники». Розглянуто задачі на обчислення, побудову, доведення, дослідження.

Дана дипломна робота може бути використана вчителями математики при підготовці та проведенні уроків з теми «Многогранники» для учнів 11 класів, студентами при написанні курсових робіт, абітурієнтами для підготовки до вступних іспитів.

Апробація результатів. Участь у студентській звітній конференції фізико-математичного факультету 2020 року, за результатами якої було опубліковано статтю: Косенко О. М. Особливості введення основних понять з теми «Многогранники» у шкільних підручниках / О. М. Косенко // Студентська звітна конференція: Матеріали результатів наукових досліджень молодих науковців. – Суми: Вид-во фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2020. – Випуск 14. – Том 1. –С. 32-36.

РОЗДІЛ 1. МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ВИВЧЕННЯ МНОГОГРАННИКІВ У СТАРШІЙ ШКОЛІ

1.1. Пропедевтика теми «Многогранники» в основній школі

Аналізуючи програми з математики для загальноосвітніх закладів (5–11-і класи), бачимо, що вперше діти зустрічаються зі словом «многогранники в 5 класі, де многогранник розглядається при вивченні теми "Прямокутний паралелепіпед. Піраміда". Наприклад: **Прямокутний паралелепіпед** є видом ***многогранника*** – фігури, поверхні якої складається з многокутників; Одним із видів многогранника є **піраміда** [23,с.137]; Многогранники є видами геометричних тіл [23,с.138]. Під час вивчення даної теми вводяться поняття основних многогранників: паралелепіпеда, куба, піраміди, їх основних елементів. Учні вивчають об'єм прямокутного паралелепіпеда і властивості об’ємів деяких фігур.

Далі з многогранниками, а потім з тілами обертання, учні зустрічаються в 6 класі, за темою: "Циліндр. Конус. Куля" [24,с.130].

Перша тема по многогранниках з’являється з геометрії в 10 класі. Тема називається "Просторові фігури. Початкові відомості про многогранники." [14,с.21], де учні знайомляться з основними видами многогранників та їх елементами, вчаться будувати перерізи многогранника площиною, знайомляться з методом перерізів, вчаться розв'язувати стереометричні задачі. [14,с.33].

Більш детально дана тема розглядається в 11 класі. В геометрії 11 класу многогранники вивчають в двох розділах: в першому розділі тема називається: "Многогранники", вона складається з чотирьох параграфів: перший параграф "Двогранні та многогранні кути. Многогранник. Призма."; другий параграф "Паралелепіпед"; третій параграф "Піраміда"; четвертий параграф "Правильні многогранники".

В першому параграфі вводяться такі поняття: "Двогранній кут", "Градусна міра двогранного кута", "Многогранній кут", "Многогранник", "Призма", "Висота призми", "Діагональ призми", " похила та пряма призма ",

"Правильна призма", "Площа повної поверхні призми" і теорема (про площу бічної поверхні прямої призми). [16 с.6]

В другому параграфі вводяться поняття і теореми: "Паралелепіпед", "Теорема 1 (властивостей протилежних граней паралелепіпеда)", Теорема 2 (властивість діагоналей паралелепіпеда)", "Прямокутний паралелепіпед", "Теорема 3 (про довжину діагоналі прямокутного паралелепіпеда)", наслідок з теореми, "Куб".[16 с.27]

В третьому параграфі вводяться такі поняття і теореми : «Піраміда», «n-кутна піраміда », «Висота піраміди», «Площа повної поверхні піраміди», «Правильна піраміда», «Апофема піраміди», Теорема 1 (про площу бічної поверхні правильної піраміди), формула переходу між кутами (залежності), «Площа бічної та повної поверхні», Теорема 2 (про площу бічної поверхні правильної зрізаної піраміди). [16 с.44]

В четвертому параграфі розглядаються правильні многогранники, також вводяться поняття: «Опуклий многогранник», «Діагональ октаедра». [16 с.72]

Третій розділ складається з двох параграфів підручника. Параграф дев’ятий - «Об’єм тіла. Об’єм призми та паралелепіпеда», Параграф десятий - «Об’єм піраміди. Об’єм зрізаної піраміди»

В дев’ятому параграфі вводяться поняття і теореми: «Рівновеликі фігури», Теорема 1(про об’єм прямокутного паралелепіпеда), наслідок, «Принцип Кавальєрі», Теорема 2(про об’єм призми) та три наслідки.

В десятому параграфі вводиться одна Лема і дві теореми:

«Лема (про рівновеликість трикутних пірамід із рівними висотами і рівновеликими основами)», Теорема 1(про об’єм піраміди), Теорема 2 (про об’єм зрізаної піраміди). [16 с.163]

1.2. Аналіз програм старшої школи за темою дослідження

На сайті Міністерства освіти і науки України розміщено навчальні програми з математики для учнів 10-11 класів, що використовуються в 2020 - 2021 н.р. Програми подані по трьох основних рівнях вивчення предмету: рівень стандарту[45], профільний рівень[46]; та поглиблений рівень навчання (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу). [47]

Нижче наведено порівняльну таблицю кількості годин та різницю в змісті матеріалу на вивчення теми дослідження за даними програмами.

Таблиця 1

Порівняльна таблиця змісту програм з математики по темі «Многогранники»

Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів Рівень стандарту		
11 клас Геометрія Тема 1. Многогранники (14 годин) (2 години на тиждень в першому семестрі)		
Зміст навчального матеріалу	**Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів**	**Коментар**
Многогранник та його елементи. Опуклі многогранники. Призма. Пряма і правильна призми. Паралелепіпед. Піраміда. Правильна піраміда. Перерізи многогранників. Площі бічної та повної поверхонь призми, піраміди.	**Учень/учениця:** **розпізнає** основні види многогранників та їх елементи; **зображує** основні види многогранників та їх елементи; **має уявлення** про перерізи многогранника площиною; **формулює** означення вказаних у змісті многогранників; **записує** формули для обчислення площі бічної та повної поверхонь призми та піраміди **обчислює** величини основних елементів многогранників; **застосовує** вивчені формули і властивості до розв’язування задач, зокрема прикладного змісту.	На вивчення матеріалу за темою відводиться 14 годин. Як бачимо вивчаються основні види многогранників та їх елементів; побудова перерізів основних видів просторових фігур; вводяться формули для обчислення площі бічної та повної поверхонь призми та піраміди

<table>
<tr><td colspan="3">Навчальна програма з математики
для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів
Профільний рівень</td></tr>
<tr><td colspan="3">10 клас Геометрія
Тема 1. Вступ до стереометрії (15 годин)
(3 години на тиждень)</td></tr>
<tr><td>Зміст навчального матеріалу</td><td>Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів</td><td>Коментар</td></tr>
<tr><td>Основні поняття стереометрії.
Аксіоми стереометрії та наслідки з них.
Поняття про аксіоматику та побудову науки.
Просторові геометричні фігури. Початкові уявлення про многогранники. Найпростіші задачі на побудову перерізів піраміди та прямокутного паралелепіпеду методом слідів.</td><td>Учень/учениця
наводить приклади:
точок і прямих, що належать одній площині; многогранників та інших стереометричних фігур;
пояснює що таке плоска і просторова геометричні фігури; поверхня многогранника; перетин многогранника січною площиною;
формулює основні поняття, аксіоми, наслідки з них;
виокремлює серед многогранників: піраміду та призму;
розрізняє означувані та не означувані поняття; аксіома та наслідок; видимі і невидимі елементи многогранника;
ілюструє текстовий зміст аксіоми, теореми, задачі за допомогою рисунка;
пояснює та записує: належність точок та прямих площині; позначення многогранників, їх елементів та поверхні; скорочений запис умови задачі;
характеризує форму просторової геометричної фігури; сліди площини перерізу; розміщення двох точок двох площин, якими визначається лінія їх перетину;
розв’язує вправи, що передбачають: використання аксіом стереометрії та наслідків з них; доведення та дослідження висновків задач, виконання найпростіших побудов перерізів у пірамідах та призмах.</td><td>Початкові уявлення про многогранники, та найпростіші задачі на побудову перерізів піраміди та прямокутного паралелепіпеду, метод слідів учні вивчають ще в 10 класі, під час вивчення теми «Вступ до стереометрії», на вивчення якої відводиться всього 15 годин, з яких на вивчення многогранників відводиться близько 10 годин. На цьому етапі учні вже знайомляться з основними видами многогранників, виокремлюють серед них призму і піраміду,
зображують піраміди та призми, перерізи пірамід та прямокутних паралелепіпедів; вивчають метод слідів.</td></tr>
</table>

11 клас Тема 1. Многогранники (24 години) (3 години на тиждень)		
Зміст навчального матеріалу	**Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів**	**Коментар**
Многогранні кути. Многогранник та його елементи. Призма. Пряма і правильна призми. Паралелепіпед. Піраміда. Зрізана піраміда. Правильна піраміда. Перерізи многогранників. Площі бічної та повної поверхонь призми, піраміди, зрізаної піраміди. Правильні многогранники.	**Учень/учениця** **наводить приклади:** геометричних фігур; многогранників і їх видів; **пояснює що таке:** многранний кут; бічна та повна поверхня призми, паралелепіпеда, піраміди, зрізаної піраміди; перетин многогранника січною площиною; **формулює** означення основних понять та властивостей для многогранників, зазначених у змісті теми; **формулює і доводить** теореми про: діагоналі паралелепіпеда та наслідки з неї; площу бічної поверхні прямої призми; площу бічної поверхні правильної піраміди; площу бічної поверхні правильної зрізаної піраміди; **класифікує многогранники** за характеристиками їх елементів: призми – за видом і формою, піраміди – за видом і розміщенням проекції вершини піраміди (зокрема, за рівністю бічних ребер та кутів, які утворюють бічні ребра/грані з площиною основи); правильні многогранники; **розрізняє** елементи призми, паралелепіпеда, піраміди; видимі і невидимі елементи призми/піраміди; прямі, правильні, опуклі многогранники; плоский кут многогранника при вершині та двогранний кут многогранника при ребрі; прямий і прямокутний паралелепіпеди; правильну піраміду і тетраедр; **зображає** на рисунку, відповідно до властивостей паралельного проекціювання: призму; паралелепіпед;, піраміду; зрізану піраміду; видимі та невидимі елементи, які є шуканими в задачах	На вивчення теми многогранники відводиться 24 години, де вивчаються многогранні кути, в тому числі і тригранний кут; вивчаються многогранники і їх різновиди та характеристика їх елементів, в тому числі зрізана піраміда; вивчаються формули для обчислення бічної та повної поверхонь цих многогранників; вчаться будувати перерізи цих многогранників січною площиною. Учні вчаться формулювати і доводити теореми та наслідки з них; аналізувати та досліджувати елементи многогранників; виконують завдання підвищеної складності

	для знаходження характеристик інших та є основними для заданого многогранника – висота, твірна, апофема; перерізи площинами (осьові, діагональні, паралельні до площини основи тощо); **пояснює та записує** відповідно до умови задачі: скорочений запис введення позначень за рисунком; формули для обчислення площ бічної та повної поверхні: прямої призми, паралелепіпеда, правильної піраміди, правильної зрізаної піраміди; **аналізує та досліджує** кут між похилою та її проекцією (між діагоналлю призми та площиною основи, між апофемою піраміди та площиною основи); кут між двома площинами (кут між перерізом і площиною основи, кут між бічною гранню та площиною основи); розміщення проекції вершини піраміди в площині основи (відома рівність усіх бічних ребер, рівність усіх кутів, утворених бічними ребрами/гранями та площиною основи); **обґрунтовує** розміщення основи висоти піраміди; позначення кута між апофемою і площиною основи, між бічною гранню і площиною основи, плоского кута при вершині піраміди, утвореного площиною перерізу; застосування теореми про три перпендикуляри та теорем для розв’язування прямокутного трикутника; **характеризує** покрокові можливості досягнення відповіді до навчально-практичної задачі; модель прикладної задачі, перекладаючи її на мову геометрії; вид перерізу многогранника та шляхи пошуку невідомих лінійних вимірів та величин для його розв’язання; **вимірює та обчислює** площі бічної	

	та повної поверхні: прямої призми, паралелепіпеда, правильної піраміди, правильної зрізаної піраміди; **розв'язує вправи, що передбачають:** використання вивчених означень, теорем, формул та властивостей до розв`язування задач, у т.ч. прикладного та практичного змісту; обчислення площ бічної та повної поверхні прямої призми, паралелепіпеда, правильної піраміди, правильної зрізаної піраміди; виконання побудов перерізів, доведення та дослідження їх виду.	
Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) **загальноосвітніх навчальних закладів Профільний рівень**		
Тема 1. Вступ до стереометрії (15 годин) (3 години на тиждень)		
Зміст навчального матеріалу	**Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів**	**Коментар**
Основні поняття стереометрії. Аксіоми стереометрії та наслідки з них. Поняття про аксіоматику та побудову науки. Просторові геометричні фігури. Початкові уявлення про многогранники. Найпростіші задачі на побудову перерізів піраміди та призми методом слідів	**Учень/учениця** **наводить приклади** точок і прямих, що належать одній площині; многогранників та інших стереометричних фігур; **пояснює що таке** плоска і просторова геометричні фігури; поверхня многогранника; перетин многогранника січною площиною; **формулює** основні поняття, аксіоми, наслідки з них; **виокремлює серед многогранників**: піраміду та призму; **ілюструє** текстовий зміст аксіом, теорем, задач за допомогою рисунка; **характеризує** форму просторової геометричної фігури; **розв'язує вправи, що передбачають:** використання аксіом стереометрії	Вивчення матеріалу за темою подібне до програми профільного рівня, при цьому поглиблене вивчення математики за цією програмою починається з 8 класу. Відповідно до програми для поглибленого вивчення математики в 8 – 9 класах, в кінці 9 класу протягом 8 годин вивчається тема «Вступ до стереометрії», в рамках якої

	та наслідків з них; виконання найпростіших побудов перерізів пірамідах та призмах.	протягом близько 5 годин відводиться на вивчення многогранників: призми та піраміди; також вводяться формули для обчислення площ поверхонь та об'ємів призми та піраміди.
Тема 5. Многогранники (20 годин) (3 години на тиждень)		
Зміст навчального матеріалу	**Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів**	**Коментар**
Многогранник та його елементи. Призма. Пряма і правильна призми. Паралелепіпед. Піраміда. Зрізана піраміда. Правильна піраміда. Перерізи многогранників. Площі бічної та повної поверхонь призми, піраміди, зрізаної піраміди. Відношення площ поверхонь подібних многогранників. Правильні многогранники. Тригранний кут та його властивості. Перша теорема косинусів для тригранного кута. Друга теорема косинусів для тригранного кута. Теорема синусів для тригранного кута. Поняття	**Учень/учениця** **наводить приклади:** геометричних тіл і фігур; многогранників і їх видів; **пояснює що таке:** многогранний кут; бічна та повна поверхня призми, паралелепіпеда, піраміди, зрізаної піраміди; перетин многогранника січною площиною; **формулює** означення основних понять та властивостей многогранників, зазначених у змісті теми; **формулює і доводить** теореми про: діагоналі паралелепіпеда та наслідки з неї; площу бічної поверхні прямої призми; площу бічної поверхні правильної піраміди; площу бічної поверхні правильної зрізаної піраміди; **класифікує многогранники**: призми – за видом і формою, піраміди – за видом і розміщенням проекції вершини піраміди (зокрема, за рівністю бічних ребер та кутів, які утворюють бічні ребра/грані з площиною основи); правильні многогранники; **розрізняє** геометричні фігури і геометричні тіла; елементи призми,	На вивчення теми «Многогранники» відводиться 20 годин, де також як і в програмі профільного вивчаються многогранні кути, в тому числі і тригранний кут; вивчаються многогранники і їх різновиди та характеристика їх елементів, в тому числі зрізана піраміда; вивчаються формули для обчислення бічної та повної поверхонь цих многогранників; вчаться будувати перерізи цих многогранників січною площиною. Вивчаються правильні многогранники

геометричного тіла. Теорема Ейлера.	паралелепіпеда, піраміди; прямі, правильні, опуклі многогранники; плоский кут многогранника при вершині та двогранний кут многогранника при ребрі; прямий і прямокутний паралелепіпеди; правильну піраміду і тетраедр; **зображає** на рисунку, відповідно до властивостей паралельного проектування: призму; паралелепіпед;, піраміду; зрізану піраміду та їх елементи; **визначає** відношення площ поверхонь подібних многогранників; **обчислює** площі бічної та повної поверхні: прямої призми, паралелепіпеда, правильної піраміди, правильної зрізаної піраміди; **розв'язує вправи, що передбачають:** використання вивчених означень, теорем, формул та властивостей до розв`язування задач, у т.ч. прикладного та практичного змісту; обчислення площ бічної та повної поверхні прямої призми, паралелепіпеда, правильної піраміди, правильної зрізаної піраміди; виконання побудов перерізів, доведення та дослідження їх виду.	(Платонові тіла), їх класифікація і властивості. Характерною відмінністю цієї програми є те, що окремим розділом програми винесено вивчення елементів геометрії тетраедра.
Тема 6. Елементи геометрії тетраедра (11 годин) (3 години на тиждень)		
Зміст навчального матеріалу	**Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів**	**Коментар**
Ортоцентричний тетраедр та його ознаки і властивості. Рівногранний тетраедр та його властивості. Медіани тетраедра та їх властивості. Середні лінії тетраедра та їх	**Учень/учениця** **наводить приклади:** ортоцентричних та рівногранних тетраедрів; **пояснює що таке:** медіана та середня лінія тетраедра; **формулює** означення основних фігур, зазначених у змісті теми; **формулює і доводить** ознаку ортоцентричного тетраедра,	Як бачимо з таблиці 2, на вивчення тетраедра, який є одним правильних многогранників відводиться 11 годин навчального часу, що відрізняє дану програму серед інших. Учні

властивості. Теорем Менелая для тетраедра.	теорему про середні лінії тетраедра, теорему про медіани тетраедра, теорему Менелая для тетраедра; **класифікує тетраедри** за видом (правильний, ортоцентричний, рівногранний); **зображує** на рисунку, відповідно до властивостей паралельного проектування: середні лінії, медіани, висоти тетраедра; перерізи площинами.	знайомляться з видами тетраедрів та їх елементів; вивчають теореми про медіани тетраедра та теорему Менелая для тетраедра; виконують зображення на побудову відповідно до властивостей паралельного проектування.

Усі навчальні програми, що розглядалися, призначена для організації навчання математики розроблені на основі Державного стандарту базової і повної середньої освіти з урахуванням особливостей відповідних профілів навчання.

Порівнюючи навчальний матеріал і кількість годин, відведену на його вивчення в кожній із програм, бачимо, що на рівні стандарту учні знайомляться з основними видами просторових фігур та їх елементами, розглядають їх властивості та знайомляться з основними формулами для визначення площ бічної та повної поверхонь цих просторових фігур; вчаться будувати зображення цих просторових фігур та їх перерізів площиною.

На відміну від програми рівня стандарту, в програмі профільного рівня навчання вивчення просторових фігур починається з 10 класу в темі «Вступ до стереометрії», де учні знайомляться з основними видами многогранників, виокремлюють серед них призму і піраміду, зображують піраміди та призми, перерізи пірамід та прямокутних паралелепіпедів, характерним є вивчення методу слідів, для побудови перерізів многогранників.

В 11 класі на вивчення теми многогранники відводиться 24 години, на відміну від рівня стандарту, вивчаються многогранні кути, в тому числі і тригранний кут; вивчаються многогранники і їх різновиди та характеристика їх елементів; розглядається зрізана піраміда; вивчаються формули для обчислення бічної та повної поверхонь цих многогранників. Вивчення многогранників проводиться на більш високому рівні складності, наприклад: учні вчаться формулювати і доводити теореми та наслідки з них; аналізувати та досліджувати елементи многогранників; виконують завдання підвищеної складності ;вчаться зображувати на рисунку, відповідно до властивостей паралельного проекціювання основні просторові геометричні фігури та їх перерізи; видимі та невидимі елементи, які є шуканими в задачах для знаходження характеристик інших та є основними для заданого многогранника.

За програмою поглибленого навчання , (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу), з многогранниками учні знайомляться в кінці 9 класу під час вивчення теми «Вступ до стереометрії». Протягом близько 5 годин вивчаються призма і піраміда та формули для обчислення прощ і об’ємів цих просторових тіл. В цілому матеріал програми подібний до програми профільного рівня, за виключенням того, що на вивчення теми «Многогранники відводиться не 24 а 20 годин», при цьому протягом 11 годин, окремою темою вивчаються елементи геометрії тетраедра.

1.3. Особливості введення основних понять з теми «Многогранники» у шкільних підручниках

У наш час Міністерством освіти і науки України рекомендовано багато підручників з геометрії для закладів загальної середньої освіти. Заклад загальної середньої освіти, зокрема і вчитель, має право самостійно вирішувати, який з підручників використовувати на заняттях. Одним із основних критеріїв вибору підручника є особливості введення основних понять. Це і спонукало нас до вибору теми статті.

Нижче наведено порівняльну таблицю означень основних понять з теми «Многогранники» у підручниках з геометрії для учнів 11-го класу (профільний рівень) наступних авторів: 1) Істер О.С., Єргіна О.В. [15]; 2) Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б. [16]; 3) Нелін Є.П., Долгова О.Є. [17].

Таблиця 2

Порівняльна таблиця означень основних понять

Істер О.С., Єргіна О.В.	**Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б.**	**Нелін Є.П., Долгова О.Є.**
Многогранником називається тіло, поверхня якого складається із скінченної кількості плоских многокутників	**Многогранником** називають тіло, поверхня якого складається зі скінченної кількості многокутників.	**Многогранник** – це таке тіло, поверхня якого складається зі скінченного числа плоских многокутників
Коментар: поняття «многогранник» введено однаково.		
Призмою називають многогранник, у якого дві грані між собою рівні і лежать у паралельних площинах (їх називають основами призми), всі інші грані паралелограми (їх називають гранями призми.)	Многогранник, дві грані якого – рівні n-кутники, що лежать у паралельних площинах, а решта n-граней, паралелограми, називають **n-кутною призмою**	**Призмою** називається многогранник, утворений двома плоскими многокутниками, що лежать у різних площинах і суміщаються паралельним перенесенням, і всіма відрізками, які сполучають відповідні точки цих многокутників

Коментар: геометричні фігури проілюстровані кольоровими зображеннями	*Коментар: вводиться поняття «n-кутної призми»*	*Коментар: поняття призми вводиться через паралельне перенесення в просторі*
Призму називають **прямою**, якщо її бічні ребра перпендикулярні до її основи в іншому випадку призму називають **похилою**	Призму називають **прямою**, якщо її бічні ребра перпендикулярні до її основи. Якщо призма не є прямою, то її називають **похилою.**	Призму називають **прямою**, якщо її бічні ребра перпендикулярні до основ, якщо бічні ребра не перпендикулярні до основ призму називають **похилою**
Коментар: поняття «пряма призма» введено однаково. Відмінності у підході до поняття «похила призма»: «в іншому випадку», «призма не є прямою» і чітке означення «бічні ребра не перпендикулярні до основ».		
Пряму призму називають **правильною**, якщо її основою є правильний многокутник	Призму називають **правильною**, якщо вона є прямою, а її основа – правильний многокутник	Пряма призма називається **правильною**, якщо її основи є правильними многокутниками.
Коментар: у перших двох підручниках автори вживають в означенні поняття «основа» в однині, а у третьому – у множині (бо основ дві). Автори другого підручника акцентують увагу учнів, що призма пряма.		
Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра основи P на висоту призми, тобто на довжину її бічного ребра l	**Площа бічної поверхні прямої призми** дорівнює добутку периметра її основи та бічного ребра призми	**Площа бічної поверхні прямої призми** дорівнює добутку периметра основи на висоту призми, тобто на довжину бічного ребра.
Коментар: автори першого і третього підручника у формулюванні теореми вживають поняття «висота призми», уточнюючи його як бічне ребро.		
Паралелепіпед – це призма, основою якої є паралелограм	**Паралелепіпедом** називають призму, основи якої є паралелограмами	**Паралелепіпедом** називається призма, в основі якої лежить паралелограм
Коментар: лише автори другого підручника вживає поняття «основи» у множині, підкреслюючи, що вона не одна.		
Прямокутним паралелепіпедом називають прямий паралелепіпед, основою якого є прямокутник	Прямий паралелепіпед називають **прямокутним**, якщо його основами є прямокутники.	Прямий паралелепіпед, основою якого є прямокутник, називається **прямокутним паралелепіпедом**.
Коментар: лише автори другого підручника вживає поняття «основи» у множині, підкреслюючи, що вона не одна.		

Довжини трьох ребер прямокутного паралеле-піпеда, які виходять з однієї вершини, називають **вимірами** (або **лінійними вимірами) прямокутного паралелепіпеда**	Довжини трьох ребер прямокутного паралеле-піпеда, які виходять з однієї вершини, називають **вимірами прямокутного паралелепіпеда**	Довжини непаралельних ребер прямокутного паралелепіпеда називаються його **лінійними розмірами (вимірами).**
Коментар: третє означення більш широке, але перші два доступніші для сприйняття учнями		
Прямокутний паралелепіпед, усі три виміри якого рівні, називають **кубом**	Прямокутний паралелепіпед називають **кубом**, якщо його виміри є рівними	Прямокутний паралеле-піпед, усі ребра якого рівні, називається **кубом**.
Коментар: автори третього підручника означення куба вводиться через рівність ребер, а не його вимірів, на відміну від двох інших авторів		
Піраміда – це многогранник, у якого одна з граней, яку називають основою, є довільним многокутником, а інші грані – трикутники зі спільною вершиною	Многокутник, одна грань якого n-кутник, а решта граней – трикут-ники, що мають спільну вершину, називають **n-кутною пірамідою**	**Пірамідою** називається многогранник, що складається з плоского многокутника – основи піраміди, точки, яка не лежить у площині основи, – вершини піраміди – і всіх відрізків, що сполу-чають вершину піраміди з точками основи
Коментар: автори другого підручника вводять поняття «n-кутної піраміди»; третє означення містить в собі означення інших понять, що ускладнює його сприйняття учнями		
Перпендикуляр, проведений з вершини піраміди до площини основи, називається **висотою** піраміди	**Висотою** піраміди називають перпенди-куляр, опущений із вершини піраміди на площину основи	**Висотою** піраміди називається перпен-дикуляр, проведений із вершини піраміди на площину основи
Піраміду називають **правильною**, якщо її основа – правильний многокутник, а основа висоти піраміди збігається із центром цього многокутника	**Піраміду** називають правильною, якщо її основа – правильний многокутник, а основа висоти піраміди є центром цього многокутника	Піраміду називають **правильною**, якщо її основа – правильний многокутник, а основа висоти піраміди збігається з центром цього многокутника

<table>
<tr><td colspan="3">Коментар: означення висоти і правильної піраміди в трьох підручниках співпадають за змістом</td></tr>
<tr><td>Висота бічної грані правильної піраміди, що виходить із вершини піраміди, називають апофемою піраміди</td><td>Апофемою правильної піраміди називають висоту бічної грані, проведену з вершини піраміди</td><td>Висота бічної грані правильної піраміди, проведена з її вершини, називається апофемою</td></tr>
<tr><td colspan="3">Коментар: автори першого і третього підручників акцентують увагу на тому, що поняття апофеми визначене тільки для правильної піраміди. Автори другого підручника залишать відкритим питання: «Чи існує поняття апофеми у неправильній піраміді?»</td></tr>
<tr><td></td><td>Площею бічної поверхні піраміди називають суму площ усіх її бічних граней. Площею поверхні піраміди (ще говорять «площа повної поверхні піраміди») називають суму площ усіх її граней.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Коментар: у першому і третьому підручниках відсутнє означення площі бічної та повної поверхні піраміди, лише наведена теорема про способи їх обчислення.</td></tr>
<tr><td>Розглянемо довільну піраміду $QABC...L$. Проведемо площину α, яка паралельна її основі. Ця площина перетинає бічні ребра піраміди в точках $A_1, B_1, C_1, ..., L_1$ і розбиває піраміду на два многогранники. Многогранник, паралельними гранями якого є многокутники $ABC...L$ і $A_1B_1C_1...L_1$, чотирикутники AA_1B_1B BB_1C_1C, …, LL_1A_1A, називають зрізаною пірамідою.</td><td>Перетнемо довільну піраміду площиною, паралельною основі піраміди. Ця площина розбиває піраміду на два многогранники: один многогранник є пірамідою, другий називають зрізаною пірамідою</td><td>Якщо задано піраміду $SABC$ і проведено площину $A_1B_1C_1$, паралельну основі піраміди, то ця площина відтинає від заданої піраміди піраміду $SA_1B_1C_1$, подібну заданій. Іншу частину заданої піраміди – многогранник, $ABCA_1B_1C_1$ називають зрізаною пірамідою</td></tr>
<tr><td colspan="3">Коментар: друге означення найкомпактніше, не прив’язане до малюнка</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Перпендикуляр, проведений із деякої точки однієї основи до площини іншої основи, називається висотою зрізаної піраміди</td>
<td>Висотою зрізаної піраміди називають перпендикуляр, опущений з будь-якої точки площини однієї основи на площину другої основи</td>
<td>Висотою зрізаної піраміди називається перпендикуляр, проведений із будь-якої точки однієї основи на іншу основу</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Коментар: у означенні першого підручника автори вживають невизначене поняття «деяка точка», ніби це якась одна якась фіксована точка, положення якої невизначено</td>
</tr>
<tr>
<td>Зрізану піраміду називають правильною, якщо вона отримана з правильної піраміди перетином її площиною, паралельною основі</td>
<td>Якщо правильну n-кутну піраміду перетнути площиною, паралельною основі, то утворену зрізану піраміду називають правильною n-кутною зрізаною пірамідою.</td>
<td rowspan="2">Якщо зрізана піраміда отримана із правильної піраміди, то вона називається правильною зрізаною пірамідою, висота бічної грані називається апофемою правильної зрізаної піраміди, а пряма, що містить висоту піраміди, яка проходить через центри основ, – віссю правильної зрізаної піраміди .</td>
</tr>
<tr>
<td>Основи правильної зрізаної піраміди – правильні многокутники, а бічні грані – рівні між собою рівнобічні трапеції. Висоти цих трапецій називають апофемами зрізаної піраміди.</td>
<td>Апофемою правильної зрізаної піраміди називають відрізок, який сполучає середини ребер основ, що належать одній бічній грані.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Коментар: автори другого підручника на відмінну від інших вводять поняття «n-кутної зрізаної піраміди», означення апофеми в усіх трьох підручниках введено по різному: як «висоти трапецій»; як «відрізок, який сполучає середини ребер основ»; і як «висота бічної грані».</td>
</tr>
<tr>
<td>Площею бічної поверхні зрізаної піраміди називають суму площ усіх її бічних граней, а площею повної поверхні – суму площ усіх її граней.</td>
<td>Площею бічної поверхні зрізаної піраміди називають суму площ усіх її бічних граней. Площею поверхні зрізаної піраміди (ще говорять: «площа повної поверхні зрізаної піраміди») називають суму площ усіх її граней.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Коментар: у третьому підручниках відсутнє означення площі бічної та повної поверхні зрізаної піраміди, лише наведений приклад розв’язання задачі про способи їх обчислення.</td>
</tr>
</table>

Опуклий многогранник називають **правильним**, якщо всі його грані – рівні між собою правильні многокутники, а в кожній його вершині сходиться одна й та сама кількість ребер	Опуклий многогранник називають **правильним**, якщо всі його грані – рівні правильні многокутники і в кожній вершині сходиться одна й та сама кількість ребер.	Опуклий многогранник називається **правильним**, якщо його грані – рівні правильні многокутники й у кожній вершині многогранника сходиться одне й те саме число ребер.
Коментар: означення однакові. У першому і третьому підручниках додатково наведено таблицю кількості сторін грані, вершин і ребер кожного з правильних многогранників		

Усі підручники, що розглядалися, написані на високому науковому і методичному рівнях, при цьому автори намагалися дотримуватись принципу доступності, враховуючи вікові особливості учнів. Звичайно автори кожного з підручників мають свій стиль написання, своє бачення у поданні означень понять тощо. Підручники відрізняються і наповненістю матеріалом. Так, у підручнику [15] є рубрика перевір свою компетентність у тестовій формі, окрему увагу приділено побудовам перерізів призми і піраміди; у підручнику [16] використовуються кольорові ілюстрації геометричних фігур, є історична довідка і є рубрика «Головне в параграфі»; у підручнику [17] на початку кожного параграфа наведена таблиця з означеннями основних понять і основними властивостями геометричних фігур, розглянуто теорему Ейлера про зв’язок кількості вершин, граней і ребер многокутника, винесено окремим параграфом «Метод слідів».

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1

В цьому розділі було зроблено пропедевтику вивчення теми «Многогранники» в основній школі, зроблено порівняльний аналіз програм старшої школи за даною темою, проаналізовано особливості введення основних понять з теми дослідження у шкільних підручниках.

Як бачимо з порівняльного аналізу програм старшої школи, програма рівня стандарту визначає зміст навчання предмета, спрямований на завершення формування в учнів уявлення про математику як елемент загальної культури. При цьому не передбачається, що в подальшому випускники школи продовжуватимуть вивчати математику або пов’язуватимуть з нею свою професійну діяльність.

Програма профільного рівня призначена для організації навчання математики в класах математичного, фізичного та фізико-математичного профілів. Зміст навчальної програми вивчення геометрії у класах з поглибленим вивченням математики передбачає поглиблене вивчення предмета. Вивчення стереометрії у класах з профільним рівнем навчання починається в 10-у класі, що дає час для ґрунтовного застосування стереометрії до розв’язання задач та теоретичних поглиблень окремих питань у наступному класі. За програмою поглибленого навчання учні починають вивчати початкові відомості з стереометрії на поглибленому рівні з 8 класу.

З аналізу шкільних підручників бачимо, що всі вони рекомендовані Міністерством освіти і науки України і є підручниками для профільного рівня навчання, але при профільному і поглибленому рівнях навчання доцільніше використовувати підручники [16] і [17], в яких більш широко розкриті теоретичні основи по темі «Многогранники», наведені приклади розв'язування типових задач. Підручник [15], на мою думку, доцільніше використовувати при стандартному рівні навчання математики в старшій школі.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «МНОГОГРАННИКИ»

2.1. Многогранник та його елементи. Опуклі многогранники. Теорема Ейлера

Поняття про многогранник формується з допомогою ряду наочних приладів і рисунків на дошці або на папері, виготовлених заздалегідь. Треба показати достатній асортимент моделей многогранників: призми різних основ і різних висот, зрізані призми, правильні многогранники різних типів і розмірів, піраміди повні і зрізані, прямі і похилі, правильні і неправильні, многогранники опуклі й угнуті різних розмірів. Ці моделі повинні бути різного розміру, щоб учні навчилися відрізняти форму від розмірів. Для формування поняття многогранника не можна обмежуватись тільки моделями, а обов'язково треба виконувати рисунки, бо рисунок остаточно відокремлює форму від тіла [26,с.78].

Після цього вводиться означення многогранника. У таблиці 1 п.1.3. наведені різні означення многогранника і його елементів, відповідно до профілю класу. У деяких підручниках попередньо не означуються поняття «тіло», «поверхня», через які означується поняття многогранника. Мається на увазі, що ці поняття сприймаються учнями в наочному, життєвому розумінні.

Сформулювавши загальне поняття про многогранник, слід перейти до розгляду окремих видів многогранників, а саме: опуклих і угнутих (не опуклих). Тут, насамперед, треба спинитися на відміні одного виду многогранників від іншого.

Перш ніж вводити на уроці означення опуклого многогранника, треба повторити означення плоского многокутника, опуклого многокутника, оскільки їх використання і аналогія в означенні з опуклим многогранником сприятиме кращому засвоєнню нових понять [39,с.463].

Потім підкреслюється, що надалі вивчення многогранників буде обмежено лише дослідженням опуклих многогранників.

Після цього слід перейти до вивчення загальних властивостей опуклих многогранників, а саме: треба у різних многогранників дослідити їх грані, ребра, кути (плоскі, двогранні, многогранні,) діагоналі, треба дати поняття про основи, бічні грані тощо.

Після цього слід перейти до вивчення загальних властивостей опуклих многогранників

Теорема Ейлера.

Формула Ейлера, яка встановлює залежність між числом вершин, граней і ребер опуклого многогранника, була відома, як вважає Бальцер, ще в старі часи [26; 124]. Вона була відома і Декартові. Потім вона була втрачена і знову знайдена та опублікована Ейлером в 1752 р. Ейлер довів, що незалежно від типу опуклого многогранника завжди існує співвідношення:

$$E-K+F=2,$$

де E – число вершин, K – число ребер, F – число граней будь-якого многогранника. Тобто у будь-якому опуклому многограннику сума числа граней і числа вершин на дві одиниці більша від числа ребер.

Цю теорему розглядали такі видатні математики, як Ейлер, Коші, Брюкнер, Штейнер, Лежандр, Штаудт та інші. Найцікавіше доведення формули Ейлера дає Пуанкаре. Розглянемо це доведення.

Вилучимо з многогранника кілька суміжних між собою граней і назвемо ту фігуру, що залишилася, відкритим многогранником. Для кожного відкритого многогранника буде мати місце формула:

$$K+1=E+F \qquad (1)$$

Доведемо цю формулу методом математичної індукції. Ми помічаємо, що формула справедлива, коли многогранник складається з однієї грані, що являє собою многокутник з n сторонами. Для цього випадку F = 1, а через те що число вершин E дорівнює числу ребер K, а також дорівнює і n, то рівність (1) задовольняється. Покажемо тепер, що коли формула (1) буде справедлива для будь-якого числа F граней, то вона залишається справедливою, коли ми до відкритого многогранника приставимо ще одну грань. Нехай ця грань буде m-кутник і нехай вона приставлена до відкритого многогранника так, що P її сторін збігаються з сторонами інших граней, а $m - P$ сторін залишаються вільними. Тоді зрозуміло, що збігатимуться $P + 1$ вершин останньої грані з вершинами попередніх граней. Позначимо для нового відкритого многогранника число граней, ребер і вершин через F', K', і E'. Тоді $F'=F + 1$, бо в новому многограннику число граней на одну більше. Аналогічно:

$$K' = K + m - P;$$

$$E' = E + m - (P + 1).$$

Ми бачимо, що коли має місце рівність (1), то числа F', K', E' задовольняють ту саму рівність.

І справді, $1 + K + m - P = F + 1 + E + m - P - 1$.

$K + 1 = F + E$, тобто рівність (1) має місце.

Щоб перейти до теореми Ейлера, припустимо, що у відкритому многограннику існує тільки один отвір, який утворився внаслідок вилучення однієї грані. Це усунення однієї грані не зменшує ні числа ребер, ні числа вершин, тільки число граней стає на одиницю меншим, а тому в формулі (1) треба підставити замість числа F число $F - 1$ і ми дістанемо формулу Ейлера:

$$K + 1 = F + E,$$

$$K + 1 = F - 1 + E; \qquad K + 2 = F + E,$$

$$E - K + F = 2.$$

Це доведення не дуже складне, тому його можна повністю використати для роботи в математичних гуртках.

2.2. Призма та її властивості

У діючих підручниках з геометрії призму означують наступним чином:

1) **призмою** називається многогранник, який складається з двох плоских многокутників, які лежать у різних площинах і суміщаються паралельним перенесенням, та всіх відрізків, що сполучають відповідні точки цих многокутників [34, с.63];

2) **призмою** називається геометричне тіло, обмежене двома різними многокутниками, які лежать у паралельних площинах, і паралелограмами [9,с.138];

3) **призмою** називається многогранник, у якого дві грані – рівні n-кутники, а решта n граней – паралелограми [5, с.111].

Якщо використовувати перше означення, потрібно звернути увагу учнів на наступні властивості призми:

1°. Основи призми рівні.

Дана властивість випливає з того, що паралельне перенесення – це рух.

2°. Основи призми лежать у паралельних площинах.

Оскільки при паралельному перенесенні площина переходить у паралельну площину (або в себе).

3°. Бічні ребра призми паралельні і рівні.

Так як при паралельному перенесенні точки суміщаються по паралельних прямих (або прямих, які збігаються) на одну й ту саму відстань.

Отже, для повного формування уявлення про форму призми та взаємного розміщення її граней, потрібно щоб учнів добре засвоїли поняттям паралельного перенесення і його властивостями.

Друге і третє означення недостатні і не повні, про що свідчить тіло, подане на рис. 2.2.1.

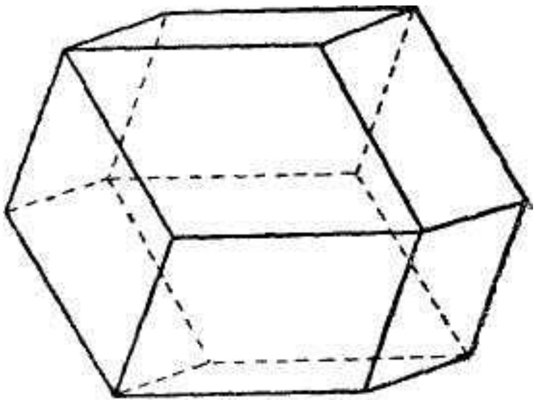


рис. 2.2.1.

У цього тіла всі бічні грані — паралелограми, основи — рівні многокутники, які лежать у паралельних площинах, але це тіло не є призма.

Отже, означення призми, щоб воно було достатнім, можна дати таким чином: «Призмою називається многогранник, дві грані якого є рівні многокутники, які лежить у паралельних площинах, бічні грані — паралелограми, а всі бічні ребра між собою паралельні» [20; 79].

Після означення призми і розгляду видів призми (похилої, прямої і правильної) і паралелепіпедів (прямокутного, прямого, похилого) треба спинитися на розгляді окремих елементів цих тіл: вершин, ребер, граней і кутів. Тут, зокрема, треба звернути увагу на кути, які утворюють діагоналі з кожною гранню і з кожним ребром окремо.

Чим більше уваги буде приділено розгляду кутів між різними площинами і прямими у призмі, тим це буде кориснiше для майбутнього, бо тільки таке докладне дослідження взаємного положення різних прямих та площин на початку вивчення многогранників допомагає розвиткові просторових уявлень учнів.

Слід порівняти відшукання кутів нахилу діагоналей до граней у прямому, прямокутному і похилому паралелепіпеді. Коли учні ще на початку вивчення ґрунтовно дослідять всі ці взаємні положення ребер, діагоналей, граней тощо у призмі, то все це значно допоможе їм у майбутньому запобігти рядових помилок під час розв'язування задач.

Кожен учень повинен вміти показати на дротяній моделі будь-які кути нахилу ребер і діагоналей до будь-якої грані, а також це саме він повинен вміти показувати і на рисунку. Але не варто дуже захоплюватися моделями.

Слід завжди пам'ятати, що модель відіграє тільки допоміжну роль, а головним завданням є навчання учнів орієнтуватися у формах тіл по рисунку.

Слід спинитися на розгляді кутів між гранями призми. Тут можливий розгляд двогранного кута між бічною гранню і основою та розгляд кута, утвореного двома сусідніми гранями. Такі кути треба розглядати на призмі прямій і похилій. Демонструючи пряму призму, треба підкреслити, що двогранні кути при основі є прямі, а лінійними кутами двогранних кутів, утворених бічними гранями, є кути многокутника, що лежить в основі.

Не завжди учням зрозуміло, що в прямій призмі сторони основи є перпендикуляри до ребра, що лежать на площинах, перетин яких утворює це ребро [26,с. 81].

У шкільному курсі геометрії при вивченні теми «Призма» значна увага приділяється паралелепіпедам. Розглянемо деякі основні властивості паралелепіпеда.

1°. У паралелепіпеді протилежні грані паралельні й рівні.

Доведення

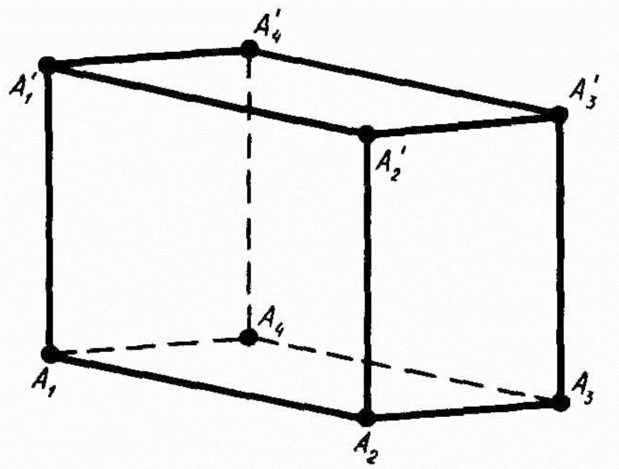


рис. 2.2.7.

Розглянемо будь-які дві протилежні грані паралелепіпеда, наприклад $A_1A_2A_2'A_1'$ і $A_3A_4A_4'A_3'$ (рис. 2.2.7). Оскільки всі грані паралелепіпеда — паралелограми, то пряма A_1A_2 паралельна прямій A_3A_4, а пряма A_1A_1' паралельна прямій A_4A_4'. Звідси випливає, що площини граней, які розглядаються, паралельні. З того, що грані паралелепіпеда — паралелограми, випливає, що відрізки A_1A_4, $A_1'A_4'$, $A_2'A_3'$ і A_2A_3 паралельні і рівні. Звідси робимо висновок, що грань $A_1A_2A_2'A_1'$ суміщається паралельним перенесенням вздовж ребра A_1A_4 з гранню $A_3A_4A_4'A_3'$. Отже, ці грані рівні.

Аналогічно доводимо паралельність і рівність будь-яких двох протилежних граней паралелепіпеда.

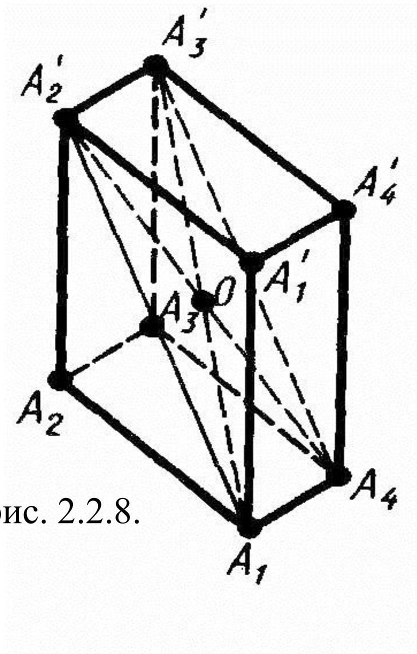


рис. 2.2.8.

2°. Діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці і точкою перетину діляться пополам.

Доведення

Розглянемо будь-які дві діагоналі паралелепіпеда, наприклад, A_1A_3' і A_4A_2' (рис. 2.2.8). Оскільки чотирикутники $A_1A_2A_3A_4$ і $A_2A_2'A_3'A_3$ – паралелограми із спільною стороною A_2A_3, то їх сторони A_1A_4 і $A_2'A_3'$ паралельні одна одній, а отже, лежать в одній площині. Ця площина перетинає площини протилежних граней паралелепіпеда по паралельних прямих A_1A_2' і A_4A_3'. Отже, чотирикутник $A_4A_1A_2'A_3'$ — паралелограм. Діагоналі паралелепіпеда A_1A_3' і A_4A_2' є діагоналями цього паралелограма. Тому вони перетинаються і точкою перетину діляться пополам.

Аналогічно доводять, що діагоналі A_1A_3' і A_2A_4', а також діагоналі A_1A_3' і A_3A_1' перетинаються і точкою перетину діляться пополам. Звідси робимо висновок, що всі чотири діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці і точкою перетину діляться пополам.

3°. У прямокутному паралелепіпеді квадрат будь-якої діагоналі дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів.

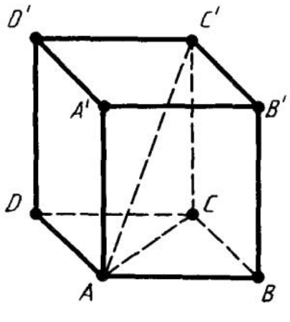


рис. 2.2.9.

Доведення

Розглянемо прямокутний паралелепіпед $ABCDA'B'C'D'$ (рис. 2.2.9.). З прямокутного трикутника $AC'C$ за теоремою Піфагора маємо:

$$AC'^2 = AC^2 + CC'^2.$$

З прямокутного трикутника ACB за теоремою Піфагора маємо:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

Звідси $AC'^2 = AC^2 + AB^2 + BC^2$.

Ребра *AB, BC* і *CC'* не паралельні, отже, їх довжини є лінійними розмірами паралелепіпеда.

У ході розв'язання задачного матеріалу учні зустрінуться ще з деякими властивостями призми, та паралелепіпеда, які вони муситимуть довести самостійно. Акцентувати увагу дітей на цих властивостях, пропонувати запам'ятати їх з методичної точки зору не коректно. Головна задача вчителя навчити дітей самостійно логічно і абстрактно мислити, розвивати уяву і творчі здібності.

До вимірювання величини поверхні призми ми застосовуємо теорію вимірювання площ многокутників, бо коли розгорнути поверхню призми в площину, то справа зведеться до обчислення площі того многокутника, з якого складається одержана розгортка. Отже, обчислення поверхні призми – не складна справа. Учні розуміють, що перпендикулярний переріз відразу дає висоти всіх бічних граней, а підсумування площ многокутників і паралелограмів не становить труднощів. Доцільно записати на дошці формули бічної поверхні похилої і прямої призми, які не викликають складності у доведенні (*похила призма*: $S_{\text{біч.}}=P_{\text{пер.}}\cdot l$, де $P_{\text{пер.}}$– периметр перпендикулярного перерізу, l – довжина бічного ребра; *пряма призма*: $S_{\text{біч.}}=P_{\text{осн.}}\cdot H$, де $P_{\text{осн.}}$ – площа основи, H – висота призми).

Перш ніж вивчати об'єм призми учням необхідно нагадати поняття об'єму та його властивостей. В основу вимірювання об'єму призми покладено вимірювання об'єму прямокутного паралелепіпеда. Знайдемо об'єм прямокутного паралелепіпеда з лінійними розмірами *a, b, c.* Для цього спочатку доведемо, що об'єми двох прямокутних паралелепіпедів з рівними основами відносяться, як їх висоти.

Нехай P і P_1 – два прямокутні паралелепіпеди із спільною основою *ABCD* і висотами *AE* і AE_1 (рис. 2.2.2.). Нехай V і V_1 – їх об'єми. Розіб'ємо ребро *AE* паралелепіпеда P на велику кількість n рівних частин. Кожна з них

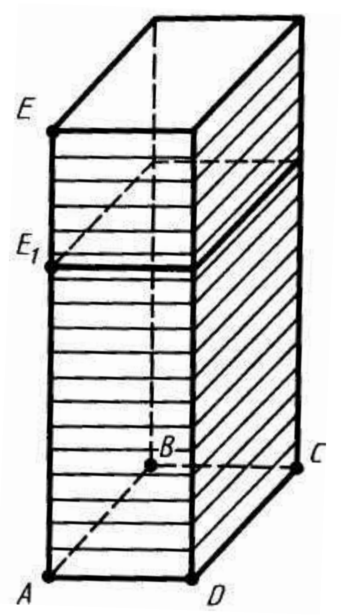


рис. 2.2.2.

дорівнює $\frac{\grave{A}\mathring{A}}{n}$. Нехай m – кількість точок поділу, які лежать на ребрі AE_1. Тоді $\left(\frac{AE}{n}\right)m \le AE_1 \le \left(\frac{AE}{n}\right)\cdot(m+1)$.

Звідси $\frac{m}{n} \le \frac{AE_1}{AE} \le \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$. **(*)**

Проведемо через точки поділу площини, паралельні основі. Вони розіб'ють паралелепіпед P на n рівних паралелепіпедів. Кожний з них має об'єм $\frac{V}{n}$. Паралелепіпед P_1 містить перші m паралелепіпедів, починаючи знизу, і міститься у $m+1$ паралелепіпедах. Тому

$$\left(\frac{V}{n}\right)m \le V_1 \le \left(\frac{V}{n}\right)\cdot(m+1)$$

Звідси $\frac{m}{n} \le \frac{V_1}{V} \le \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$. (**)

З нерівностей (*) і (**) бачимо, що обидва числа $\frac{V_1}{V}$ і $\frac{AE_1}{AE}$ містяться між $\frac{m}{n}$ і $\frac{m}{n} + \frac{1}{n}$. Тому вони відрізняються не більш ніж на $\frac{1}{n}$.А оскільки n можна взяти як завгодно великим, то це може бути тільки тоді, коли $\frac{V_1}{V} = \frac{AE_1}{AE}$, що й треба було довести.

Візьмемо тепер куб, який є одиницею виміру об'єму, і три прямокутні паралелепіпеди з вимірами: a, 1, 1; a, b, 1; a, b, c. Позначимо їх об'єми V_1, V_2, V. За доведеним

$$\frac{V_1}{1} = \frac{a}{1}, \frac{V_2}{V_1} = \frac{b}{1}, \frac{V}{V_2} = \frac{c}{1}.$$

Перемноживши ці три рівності почленно, дістанемо: $V = abc$.

Отже, об'єм прямокутного паралелепіпеда з лінійними вимірами a, b, c обчислюється за формулою $V=abc$.

Перехід від об'єму прямокутного паралелепіпеда до об'єму довільної призми автори різних підручників роблять по-різному.

Перший шлях такий. Спочатку доводиться лема, що всяку похилу призму можна перетворити на рівновелику пряму призму. Після цього доводиться теорема про об'єм прямого паралелепіпеда, похилого паралелепіпеда, тригранної призми і многогранної призми.

Другий шлях такий. Розглядається об'єм прямої трикутної призми, в основі якої лежить прямокутний трикутник, потім розглядається об'єм трикутної прямої призми з будь-яким трикутником в основі, далі об'єм довільної прямої призми. Після цього доводиться теорема, що будь-яку похилу призму можна перетворити на рівновелику пряму призму і виводиться формула об'єму для довільної призми.

Яка різниця між цими двома шляхами і який з них ми можемо рекомендувати?

В той час як за першим шляхом здійснюється поступовий перехід від прямокутного паралелепіпеда до прямої призми і потім до похилої, тобто перехід від видового поняття до родового, другий шлях більш штучний. Від прямокутного паралелепіпеда ми переходимо до прямої трикутної призми, причому ця призма не просто пряма трикутна, а ще має в основі прямокутний трикутник.

Нам ясно, чому треба переходити обов'язково до такої призми: таку призму дістаємо, якщо переріжемо прямокутний паралелепіпед діагональною площиною. Але для учнів цей перехід є занадто штучний.

Перший шлях має ясну цілеспрямованість. Ми тут доводимо, що всяку похилу призму можна перетворити на рівновелику пряму, а це дає змогу відразу перейти до вимірювання об'єму всякої призми. Якщо похилу призму можна перетворити на рівновелику пряму призму, то зрозуміло, що треба знати, чому дорівнює об'єм прямої призми.

Оскільки будь-яку призму можна поділити діагональними перерізами на трикутні призми, треба знати, чому дорівнює об'єм трикутної призми, а об'єм всякої трикутної призми завжди можна обчислити як половину об'єму відповідного паралелепіпеда. Отже, аналіз приводить нас до об'єму паралелепіпеда.

Такої натуральної поступовості ми не маємо, коли користуємося другим прийомом, і тому наша думка, що краще доведення провадити першим шляхом. Перетворення похилої призми на пряму є поділ призми на два многогранники, які при іншому розміщенні дають пряму призму. Трудність тут тільки у виконанні рисунка (рис. 2.2.3.).

Форму для вимірювання об'єму прямого паралелепіпеда виводимо через перетворення його на прямокутний. Тут учням важко зрозуміти, що ми цей паралелепіпед повертаємо так, що основою стає бічна грань, тобто в основі лежить тоді прямокутник, а весь паралелепіпед стає похилий (рис. 2.2.4).

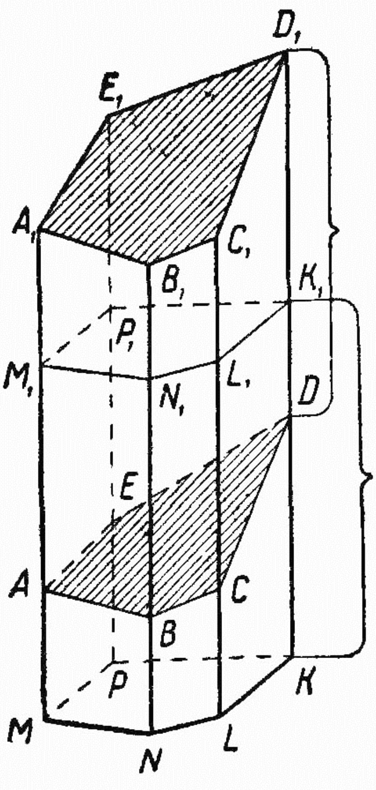


рис. 2.2.3.

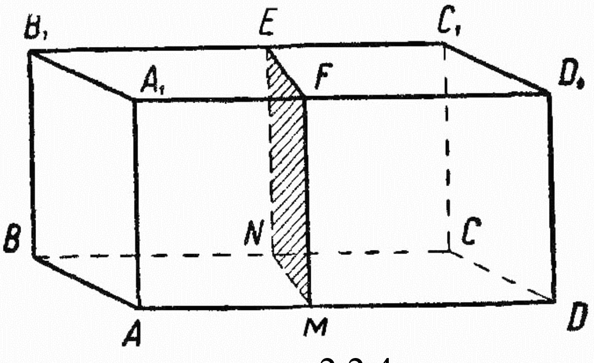


рис. 2.2.4.

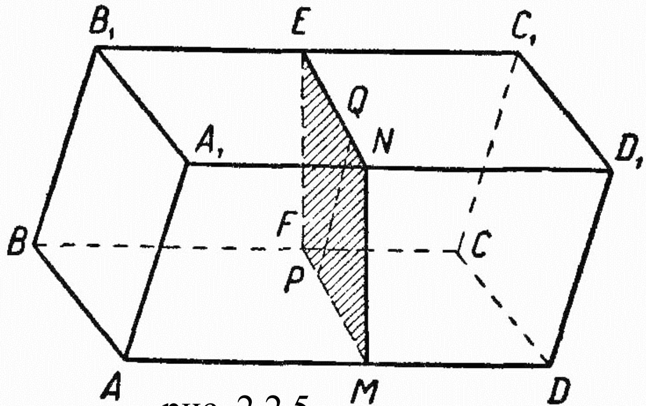


рис. 2.2.5.

Другий важкий для учнів момент – це добре зрозуміти рисунок, через те що на рисунку у нас прямий паралелепіпед, а ми цей рисунок розглядаємо так, що за основи вважаємо бічні грані, тобто у нас основи розміщені не горизонтально, а вертикально. На докладному розгляді рисунка треба спинитися.

Перпендикулярний переріз *MNEF* є основа для прямокутного паралелепіпеда, на який цей прямий паралелепіпед перетвориться, якщо переставити частини. Тут треба з'ясувати, чому саме у нас утворюється прямокутний паралелепіпед: переріз *MNEF* (перпендикулярний до ребер AD, A_1D_1, BC і B_1C_1) є основою нового паралелепіпеда, а *MNEF* є прямокутник, бо його кути прямі як лінійні кути прямих двогранних кутів. Величина об'єму цього паралелепіпеда дорівнює добуткові відрізків $MN \cdot MF \cdot AD$.

Щоб з цього виразу: $V = MN \cdot MF \cdot AD$ одержати формулу, зручну для обчислення об'єму прямого паралелепіпеда, треба зробити таке розміщення множників: $(AD \cdot MN) \cdot MF$. Учні бачать, що в дужках є вираз для площі основи нашого прямого паралелепіпеда, а $MF = AA_1 = BB_1$ є його висота. Ця заміна множників дає змогу узагальнити попередню формулу для обчислення об'єму будь-якого паралелепіпеда. Щоб учням легше було усвідомити цю заміну, треба підкреслити, що об'єм не залежить від того, як ми повертаємо тіло і як ми його будемо перетворювати, замінюючи одні частини тіла іншими частинами, але конгруентними попереднім частинам. Формула об'єму, придатна для тіла в одному положенні, цілком придатна для цього тіла і в іншому положенні. Якщо учні це усвідомлять, то й доведення буде зрозуміле для них.

Перетворення похилого паралелепіпеда на прямий мало відрізняється від перетворення прямого паралелепіпеда на прямокутний, а тому і роз'яснення щодо цього аналогічні (рис. 2.2.5.).

Важко довести, що PQ – висота перпендикулярного перерізу *MNEF* – є одночасно висотою паралелепіпеда. Тут потрібна модель, яка наочно переконує учня, що коли площина перпендикулярна до ребер *AD* і *BC,* то вона перпендикулярна і до площини *ABCD* .

На моделі можна краще зрозуміти, що перпендикуляр *PQ* до площини *ABCD,* проведений через точку *P,* яка лежить на площині *MNEF,* повинен весь лежати на цій площині.

Усі дальші міркування, які приводять нас до висновку, що об'єм призми дорівнює добуткові площі основи на висоту, не становлять труднощів.

2.3. Піраміда та її властивості

Методичні вказівки до цього розділу треба почати з означення піраміди як многогранника певного типу. У діючих шкільних підручниках можна зустріти наступні означення піраміди:

1) **пірамідою** називається многогранник, який складається з плоского многокутника – основи піраміди, точки, яка не лежить у площині основи, – вершини піраміди і всіх відрізків, що сполучають вершину піраміди з точками основи [34,с.70].

2) **пірамідою** називається многогранник, одна грань якого – довільний многогранник, а інші грані – трикутники, що мають спільну вершину [5,с.119].

Аналізуючи перше означення піраміди, можна помітити, що автор два рази звертає увагу на те, що піраміда – це тіло. Перший раз, коли говорить про піраміду як многогранник, а вдруге ,– що вона складається з усіх відрізків, які сполучають вершину з точками основи. Це дещо ускладнює означення для сприйняття і усвідомлення учнями.

Друге означення дає безпосереднє уявлення про форму всіх граней піраміди. Це значно полегшує учням сприймання форми самої піраміди, отже, й дослідження її властивостей.

Ознайомлюючи учнів з елементами піраміди (бічною гранню, основою, висотою тощо), треба звернути увагу на можливість різного розташування висоти. Так, висота може проходити всередині піраміди, може лежати в площині однієї (і навіть двох) граней і може проходити зовні піраміди.

Є піраміди, одна або дві грані яких перпендикулярні до площини основи. Такі піраміди мають властивості пов'язані з висотою, при чому не має значення до якого з типів належить піраміда, тобто який n-кутник лежить в її основі.

Властивості:

1°. Якщо в піраміді одна із граней перпендикулярна площині основи, то висота піраміди співпадає з висотою трикутника, що обмежує цю грань.

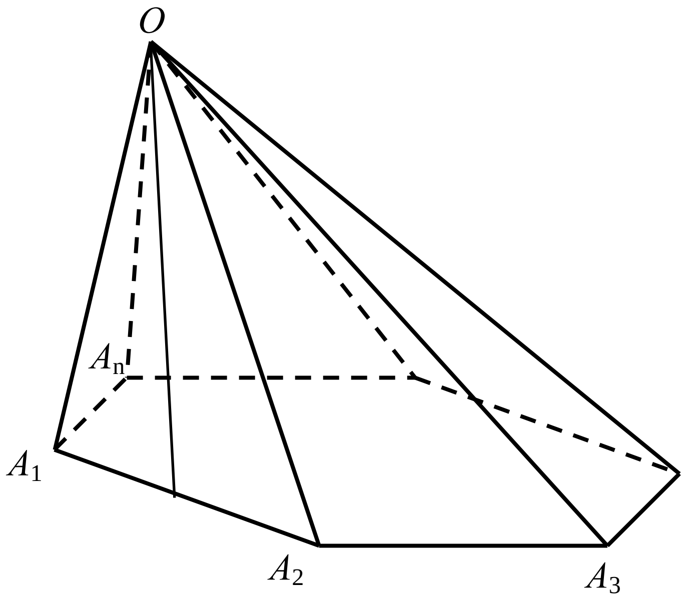


рис. 2.3.1.

Доведення

Нехай O – вершина піраміди, $A_1A_2A_3...A_n$ – довільний многогранник в основі піраміди і OA_1A_2 – грань перпендикулярна площині основи. У трикутнику опустимо висоту OO_1. Пряма OO_1 перпендикулярна до прямої A_1A_2 у площині основи піраміди і в той же час належить площині OA_1A_2, яка перпендикулярна до площини основи. А якщо пряма, яка лежить в одній із двох перпендикулярних площин, перпендикулярна до лінії їх перетину, то вона перпендикулярна до другої площини. Отже, пряма OO_1 перпендикулярна до площини основи. Висотою піраміди називається перпендикуляр, опущений з вершини піраміди на площину основи. Значить, OO_1 – висота піраміди.

2°. Якщо у піраміді дві грані перпендикулярні до площини основи, то висота піраміди співпадає з ребром, спільним для цих двох граней.

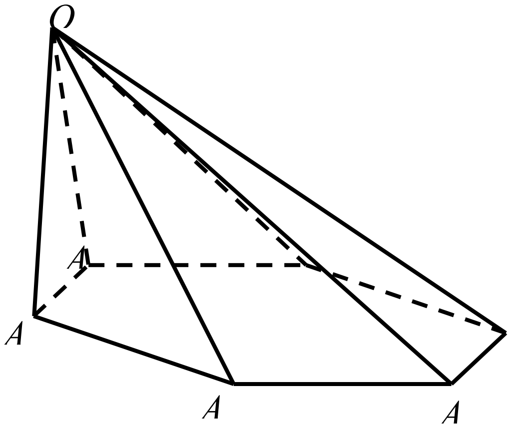


рис. 2.3.2.

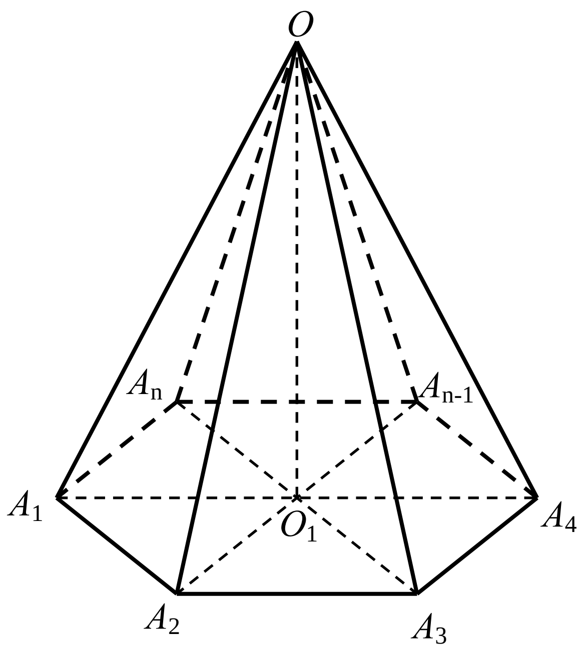
З методичної точки зору для доведення даної властивості рекомендується використовувати не малюнок, а модель. Це сприятиме кращому розвитку просторових уявлень, а значить і кращому усвідомленню властивості.

Доведення

Нехай O – вершина піраміди, $A_1A_2A_3...A_n$ – довільний многокутник в основі піраміди, грані OA_1A_2 і OA_2A_3 – перпендикулярні площині основи. Доведемо, що OA_2 – висота. Враховуючи попередню властивість, висота піраміди співпадає з висотою трикутників OA_1A_2 і OA_2A_3, тобто одночасно лежить і у площині OA_1A_2 і у площині OA_2A_3. Оскільки, з точки до площини можна опустити лише один перпендикуляр, то у піраміди лише одна висота. А, отже, висота піраміди лежить на прямій спільній для обох площин OA_1A_2 і OA_2A_3, тобто співпадає з ребром OA_2. Значить, OA_2 – висота піраміди.

Надзвичайно важливо для розв'язання задач з'ясувати умови, коли висота піраміди проходить через центр вписаного в основу або описаного навколо неї кола. Це приведе нас до наступних властивостей.

3°. Якщо всі бічні ребра піраміди рівні, то всі вони нахилені до площини основи під однаковими кутами і висота цієї піраміди проектується в центр кола, описаного навколо основи піраміди.



Доведення.

Нехай O – вершина піраміди, $A_1A_2A_3...A_n$ – довільний многокутник в основі піраміди, ребра OA_1, OA_2, OA_3,..., OA_n – рівні. Оскільки, кут між похилою і площиною – це кут між похилою і її проекцією на цю площину, то побудуємо проекції ребер на площину основи. Для цього опустимо висоту піраміди OO_1 і проведемо проекції похилих A_1O_1, A_2O_1, ..., A_nO_1. Доведемо, що $\angle OA_1O_1 = \angle OA_2O_1 = ... = \angle OA_nO_1$. Відомо, що у рівних похилих рівні проекції. Так як ребра рівні, то $A_1O_1 = A_2O_1 = ... = A_nO_1$. Для трикутників OA_1O_1, OA_2O_1, ..., OA_nO_1 сторона OO_1 – спільна. За третьою ознакою рівності трикутників ці трикутники рівні. Із рівності трикутників OA_1O_1, OA_2O_1, ..., OA_nO_1 випливає рівність кутів $\angle OA_1O_1 = \angle OA_2O_1 = ... = \angle OA_nO_1$. Отже, першу частину властивості ми довели. Доведемо, що O_1 –

центр описаного навколо многокутника $A_1A_2A_3...A_n$ кола. Оскільки, відрізки A_1O_1, A_2O_1, ..., A_nO_1 – рівні, то точка O_1 рівновіддалена від усіх вершин многокутника, який задає основу. Тому, точка O_1 – центр кола описаного навколо цього многокутника. Властивість доведено.

4°. Якщо всі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під однаковими кутами, то всі вони рівні.

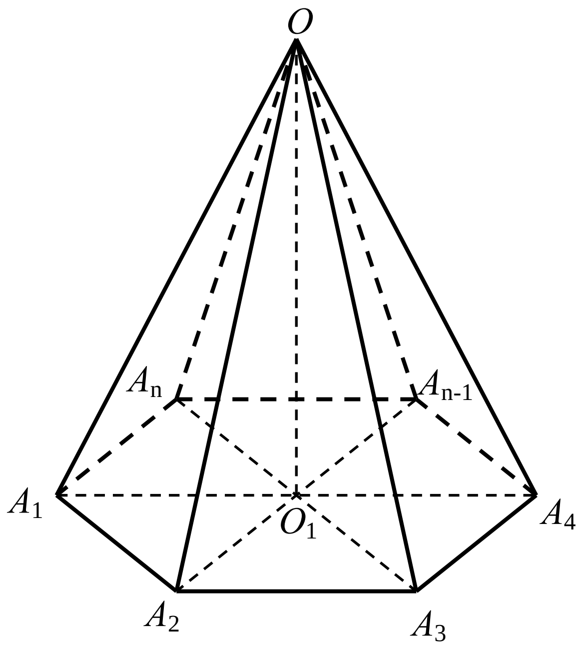


рис. 2.3.3.

Доведення.

Нехай O – вершина піраміди, $A_1A_2A_3...A_n$ – довільний многокутник в основі піраміди. Відомо, що кут між похилою і площиною – це кут між похилою і її проекцією на цю площину. Опустимо перпендикуляр із точки O на площину основи. Отже, відомо, що $\angle OA_1O_1 = \angle OA_2O_1 = ... = \angle OA_nO_1$. Доведемо, що $OA_1 = OA_2 = OA_3 = ... = OA_n$. Розглянемо трикутники OA_1O_1, OA_2O_1, ..., OA_nO_1. Вони прямокутні, з прямим кутом $\angle O_1$. OO_1 – спільний катет для всіх розглядуваних трикутників. Тому, всі ці прямокутні трикутники рівні за катетом і гострим кутом. З рівності трикутників випливає рівність сторін OA_1, OA_2, OA_3,..., OA_n, які є ребрами піраміди. Що і треба було довести.

5°. Якщо всі двогранні кути при основі піраміди рівні, то висота такої піраміди проектується в центр кола, вписаного в її основу.

Доведення.

Нехай O – вершина піраміди, $A_1A_2A_3...A_n$ – довільний многокутник в основі піраміди. Оскільки двогранний кут вимірюється лінійним кутом, то побудуємо лінійні кути між гранями і основою піраміди. Опустимо висоти бічних граней піраміди і побудуємо їх проекції у площині основи, попередньо опустивши перпендикуляр OO_1 до площини $A_1A_2A_3$. За теоремою

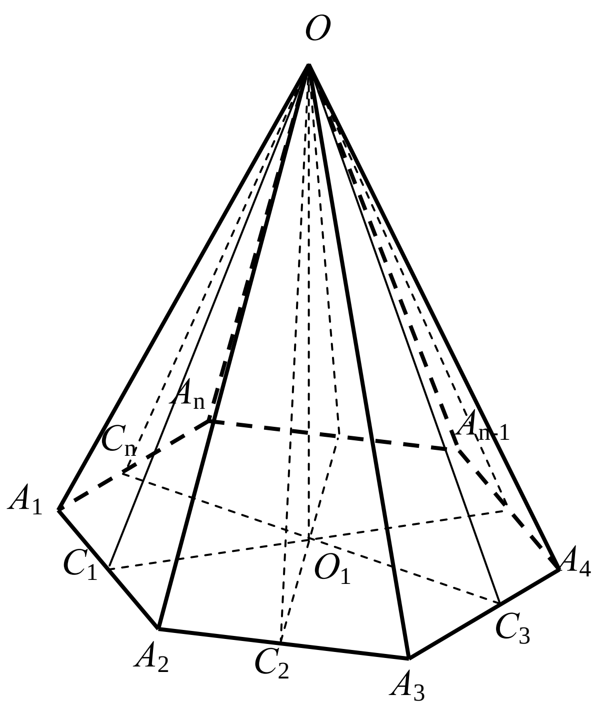


рис. 2.3.4.

про три перпендикуляра проекції O_1C_1, O_1C_2, ... , O_1C_n перпендикулярні до відповідних сторін многокутника, що задає основу. Так як, всі двогранні кути при основі рівні, то $\angle OC_1O_1$ = $\angle OC_2O_1$ = ... = $\angle OC_nO_1$, як відповідні їм лінійні кути.

Розглянемо трикутники OC_1O_1, OC_2O_1, ..., OC_nO_1. Вони прямокутні з прямим кутом $\angle O_1$. OO_1 – спільний катет для всіх цих трикутників. Тому всі розглянуті трикутники рівні за катетом і гострим кутом. З рівності трикутників випливає рівність сторін O_1C_1, O_1C_2, ... , O_1C_n. Отже, точка O_1 рівновіддалена від сторін многокутника $A_1A_2A_3...A_n$, а тому співпадає з центром кола вписаного у цей многокутник. Властивість доведено.

Виходячи з міркувань доведення вище названої властивості нескладно довести наступну властивість, яку можна рекомендувати довести дітям самостійно, навіть без вказівок вчителя.

6°. Якщо висота піраміди проходить через центр кола, вписаного в її основу, то всі двогранні кути при основі такої піраміди рівні.

Властивості 5° і 6° є взаємно оберненими. Варто звернути увагу дітей на цьому факті, щоб учні практично переконувались в існуванні прямих і обернених теорем і краще засвоїли ці поняття.

Класифікація пірамід за типами ніяких труднощів не викликає. При означенні правильної піраміди треба звернути увагу на два моменти: по-перше, в основі такої піраміди лежить правильний многокутник, а по-друге, висота піраміди проходить через центр описаного навколо основи кола і вписаного в неї. У зв’язку з цим бажано показати зразки неправильних пірамід, що мають лише одну з цих двох особливостей.

7°. Якщо у площині основи правильної піраміди переміщати точку, залишаючи її всередині цієї основи, то сума відстаней цієї точки від бічних граней залишається сталою.

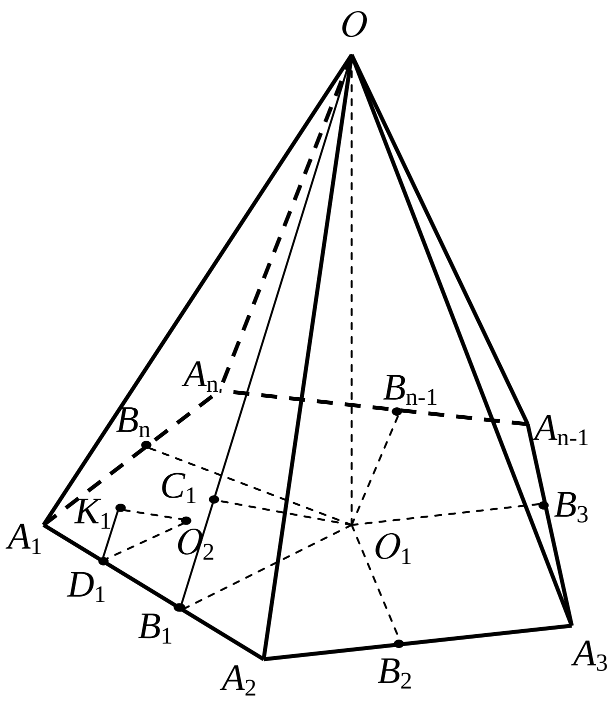


рис. 2.3.5.

Доведення.

Нехай $OA_1A_2...A_n$ – правильна піраміда. Тоді многокутник $A_1A_2...A_n$ – правильний, а основа висоти O_1 рівновіддалена від сторін цього многогранника. У попередніх властивостях уже було доведено, що $\angle OB_1O_1$ лінійний кут двогранного кута, утвореного бічною гранню і основою. Як відомо лінійний кут – це півпрямі, утворені перетином граней двогранного кута і площини перпендикулярної до них. Тому перпендикуляри із точки O_1 до бічної грані лежатиме у площині OO_1B_1. Нехай цей перпендикуляр буде O_1C_1, довжина якого і є відстанню від точки O_1 до бічної грані. Міркуючи аналогічно, можна показати, що довжини перпендикулярів O_1C_2, O_1C_3, ..., O_1C_n і є відстані від точки O_1 до всіх бічних граней. Оскільки $O_1B_1 = O_1B_2 = ... = O_1B_n$ і з попередніх властивостей $\angle C_1B_1O_1 = \angle C_2B_2O_1 = ... = \angle C_nB_nO_1$, то прямокутні трикутники $C_1B_1O_1$, $C_2B_2O_1$, ..., $C_nB_nO_1$ рівні за гіпотенузою і гострим кутом. З рівності цих трикутників випливає рівність сторін $O_1C_1 = O_1C_2 = ...= O_1C_n$. Отже, якщо позначити $O_1C_1 = l$, то сума відстаней від точки O_1 до граней рівна nl, де n – кількість кутів многокутника в основі піраміди.

Тепер, для доведення властивості, нам достатньо довести, що якщо сума відстаней від довільної точки O_2 до бічних граней рівна nl, то і сума відстаней від будь-якої точки буде постійна.

Проведемо через довільну точку O_2 площину паралельну площині $O_1C_1B_1$. Оскільки пряма A_1A_2 перпендикулярна до площини $O_1C_1B_1$, то вона перпендикулярна до площини $O_2K_1D_1$, де K_1D_1 і O_2D_1 – прямі перетину проведеної площини відповідно з бічною гранню і площиною основи. Тому $\angle K_1D_1O_2$ – лінійний кут двогранного кута, гранями якого є бічне ребро і площина основи. Звідси, $\angle K_1D_1O_2 = \angle C_1B_1O_1$, як лінійні кути одного і того ж двогранного кута. З рівності цих кутів випливає подібність прямокутних трикутників $O_1B_1C_1$ і $O_2K_1D_1$ ($\Delta O_2K_1D_1$ утворився проведенням перпендикуляра O_2K_1 до площини бічної грані). Якщо позначити $O_1B_1 = = O_1B_1 = \ldots = O_1B_1 = p$ і $O_2K_1 = d_1$, а $O_2D_1 = c_1$, то маємо співвідношення $\frac{p}{l} = \frac{c_1}{d_1}$.

Якщо позначити відповідно відстані до граней піраміди $d_2, d_3, \ldots, d_n$, і відстані до сторін основи $c_2, c_3, \ldots, c_n$ від точки O_2, то аналогічно можна довести, що $\frac{p}{l} = \frac{c_2}{d_2}$; $\frac{p}{l} = \frac{c_3}{d_3}$; … ; $\frac{p}{l} = \frac{c_n}{d_n}$.

За властивостями співвідношень маємо $\frac{p}{l} = \frac{c_1}{d_1} = \frac{c_2}{d_2} = \ldots = \frac{c_n}{d_n} = \alpha$.

З курсу планіметрії відомо, що якщо у многокутнику переміщати точку, то сума відстаней від цієї точки до сторін многокутника залишається сталою. Отже, $\frac{p + p + \ldots + p}{c_1 + c_2 + \ldots + c_n} = \frac{np}{c_1 + c_2 + \ldots + c_n} = 1$.

Використавши властивість проекції не важко перейти до наступного твердження

$$\frac{nl\alpha}{d_1\alpha + d_2\alpha + \ldots + d_n\alpha} = \frac{nl\alpha}{(d_1 + d_2 + \ldots + d_n) \cdot \alpha} = \frac{nl}{d_1 + d_2 + \ldots + d_n} = 1$$

Звідси, $d_1 + d_2 + \ldots + d_n = nl$.

Отже, сума відстаней від будь-якої точки із основи правильної піраміди до бічних граней залишається сталою.

Вимірюючи величину поверхні піраміди, ми застосовуємо теорію вимірювання площ многокутників. Оскільки, бічними гранями піраміди є трикутники, то площа бічної поверхні є сума площ цих трикутників. При розгляді правильної піраміди, радимо запропонувати учням вивести формулу бічної поверхні самостійно, що не повинно викликати труднощів у отриманні результату ($S_{á³÷} = \frac{1}{2} P \cdot l$, де P – периметр основи, l – апофема). Потрібно звернути увагу учнів на те, що площу повної поверхні піраміди ми обчислюємо як суму площі бічної поверхні піраміди і площі многогранника в її основі. Складності можуть виникнути при знаходженні площі поверхні зрізаної піраміди, бо площа бічної поверхні є сума площ трапеції, а до формули площі повної поверхні додається площа ще одного многогранника. Варто розглянути формулу площі бічної поверхні зрізаної правильної піраміди ($S_{á³÷} = \frac{1}{2}(P + ð) \cdot l$, де P – периметр нижньої основи, p – периметр верхньої основи, l – апофема), адже вона часто використовується при розв’язанні задач.

Для визначення об’єму піраміди спочатку ми розглядуємо трикутну піраміду, а потім перейдемо до довільної піраміди.

Нехай $SABC$ – трикутна піраміда з вершиною S і основою ABC. Доповнимо цю піраміду до трикутної призми з тією самою основою і висотою, як показано на рисунку 2.3.6. Ця призма складається з трьох пірамід: даної піраміди $SABC$ і ще з двох трикутних пірамід SCC_1B_1 і $SCBB_1$.

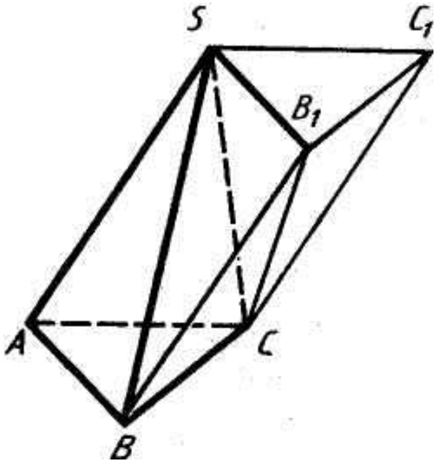


рис. 2.3.6.

Друга і третя піраміди мають рівні основи ΔCC_1B_1 і ΔB_1BC і спільну висоту, проведену з вершини S. Тому у них рівні об'єми.

У першій і третій пірамідах теж рівні основи $ASAB$ і ABB_1S і висоти, проведені з вершини C, збігаються. Отже, у них теж рівні об'єми.

Отже, усі три піраміди мають один і той самий об'єм. Оскільки сума цих об'ємів дорівнює об'єму призми, то об'єми пірамід дорівнюють $\frac{SH}{3}$

Важливо пояснити учням перехід від трикутної до довільної піраміди. Потрібно пригадати з учнями, що многокутник можна розбити на скінчену кількість трикутників. Використавши цей факт, необхідно розбити довільні піраміду на трикутні піраміди. Потрібно звернути увагу дітей на те, що всі отримані трикутні піраміди мають одну й ту саму висоту. Усі ці міркування приводять нас до формули об’єму будь-якої піраміди:

$$V = \frac{1}{3} H(S_1 + S_2 + ... + S_3) = \frac{1}{3} SH .$$

Отже, об’єм будь-якої піраміди дорівнює третині добутку площі її основи на висоту.

При розгляді об’єму зрізаної піраміди, необхідно звернути увагу дітей на той факт, що будь-яку зрізану піраміду можна доповнити до повної. Не складно зрозуміти, що об’єм зрізаної піраміди буде рівний різниці об’ємів повної піраміди і доповненої. З подібності цих пірамід можна знайти висоту повної піраміди і, виконавши обчислення, отримати формулу об’єму зрізаної піраміди: $V = \frac{1}{3} H \cdot (S + s + \sqrt{Ss})$, де S – площа нижньої основи, s – площа верхньої основи, H – висота.

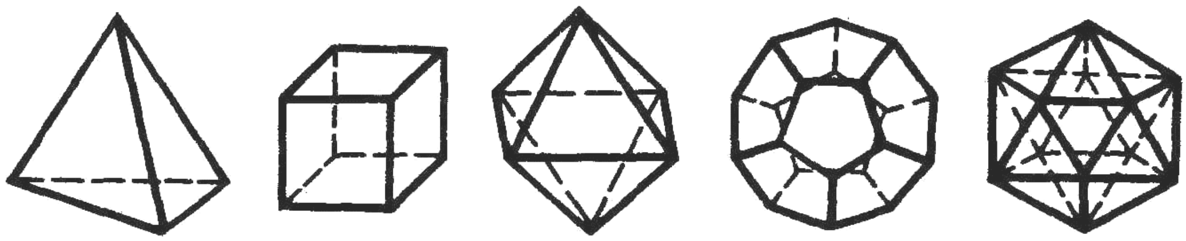
2.4. Правильні многогранники та їх властивості

У стародавні часи правильним многогранникам приділяли дуже багато уваги. Так, у піфагорійській школі існувало вчення про те, що елементи вогню, води, повітря і землі мають форму чотирьох правильних многогранників, а п'ятий (додекаедр) – зображає всесвіт. Велику увагу приділяв правильним многогранникам і Платон. Недарма правильні многогранники мають назву платонових тіл.

Не можна нехтувати ними і в наш час, бо дослідження їх форм, обмірковування способів їх побудови, використання їх під час розв'язування стереометричних задач буде дуже добре впливати на розвиток просторових уявлень учнів.

Означення. Опуклий многогранник називається правильним, якщо його грані є правильними многокутниками з однією й тією ж кількістю сторін, а в кожній вершині многогранника сходиться одна й та ж кількість ребер [34,с. 74].

Існує лише п’ять типів правильних опуклих многогранників: правильний тетраедр, куб (гексаедр), октаедр, додекаедр та ікосаедр.



Правильний тетраедр *Куб (Гексаедр)* *Октаедр* *Додекаедр* *Ікосаедр*

У правильного тетраедра грані – правильні трикутники; у кожній вершині сходиться по три ребра. Тетраедр – трикутна піраміда, всі ребра якої рівні.

У куба всі грані – квадрати; у кожній вершині сходиться по три ребра. Куб – прямокутний паралелепіпед з однаковими ребрами.

У октаедра грані – правильні трикутники, але на відміну від тетраедра у кожній його вершині сходиться по чотири ребра.

У додекаедра грані – правильні п'ятикутники. У кожній вершині його сходиться по три ребра.

У ікосаедра грані – правильні трикутники, але на відміну від тетраедра і октаедра у кожній вершині сходиться по п'ять ребер.

Слід зазначити, що програма на рівні обов’язкових результатів навчання передбачає лише введення поняття про правильні многогранники. Тому недоцільно на уроці розглядати задачі, що доводять їх властивості, які не ввійшли до означення [39,с. 465].

Разом з тим доцільно з’ясувати з учнями, чому існує лише п’ять типів правильних многогранників. Для цього досить згадати про те, що сума градусних мір плоских кутів опуклого многогранного кута менше за 360^{o}. Многогранний кут може складатись щонайменше з трьох плоских кутів. Оскільки

$\alpha_3 = 60^o$, $\alpha_4 = 90^o$, $\alpha_5 = 108^o$, $\alpha_6 = 120^o$, … , $\alpha_n = \dfrac{180^0(n-2)}{n}$ і

$\alpha_3 \cdot 3 = 60^o \cdot 3 = 180^o < 360^o$, $\alpha_4 \cdot 3 = 90^o \cdot 3 = 270^o < 360^o$,

$\alpha_5 \cdot 3 = 108^o \cdot 3 = 324^o < 360^o$, $\alpha_6 \cdot 3 = 120^o \cdot 3 = 360^o = 360^o$,

то гранями тригранних кутів правильного многогранника можуть бути правильний трикутник, квадрат і правильний п’ятикутник. Одержуємо відповідно правильний тетраедр, куб і додекаедр. Аналогічно для чотиригранного кута правильного многогранника знаходимо, що він може складатися лише з плоских кутів правильних трикутників. Дістаємо відповідно октаедр. Нарешті, гранями п’ятигранного кута можуть бути лише правильні трикутники , бо $\alpha_3 \cdot 5 = 60^o \cdot 5 = 300^o < 360^o$. Достаємо ікосаедр. Жодних інших можливостей щодо утворення правильних многогранників немає.

Цей спосіб, безперечно, заслуговує на увагу. Він дуже конкретно з’ясовує учням і наочний спосіб утворення правильних многогранників, і принцип класифікації цих платонівських многогранників. Але, на жаль, у підручниках для середньої школи про другий принцип, який може бути покладений в основу класифікації правильних многогранників, – теорему Ейлера – нічого не говориться, в той час як теорема Ейлера просто і науково розв'язує це питання і дає можливість обчислити не тільки кількість граней правильного многогранника, а й число ребер та число вершин.

Застосування теореми Ейлера до класифікації правильних многогранників.

Теорема Ейлера дає можливість зробити цілий ряд дуже важливих висновків. Насамперед ми маємо змогу відповісти на питання, чи існують многогранники, в яких всі грані мають однакову кількість вершин і з усіх вершин виходить однакове число ребер. Припустимо, що всі грані многогранника являють собою P-кутники і що в кожній вершині сходяться q ребер. Через те що кожне ребро лежить на двох гранях і кожна грань має p ребер, то

$$pF = 2K; \qquad (1)$$

$$qE = 2K. \qquad (2)$$

згідно з формулою Ейлера:

$$E - K + F = 2,$$

а тому, $\dfrac{2K}{q} - K + \dfrac{2K}{p} = 2$, $\quad K\left(\dfrac{2}{p} + \dfrac{2}{q} - 1\right) = 2$, (3)

звідси: $$\frac{2}{p} + \frac{2}{q} > 1, \qquad (4)$$

а через те що кожне з чисел p і q повинне, принаймні, дорівнювати 3, то $\dfrac{2}{p} > \dfrac{1}{3}$ і $\dfrac{2}{q} > \dfrac{1}{3}$, звідси $p < 6$ і $q < 6$.

Таким чином, для p і q залишаються значення 3, 4, 5, а із співвідношень:

$$\begin{cases} pF = 2K \\ qE = 2K \\ K\left(\dfrac{2}{q} + \dfrac{2}{q} - 1\right) = 2 \\ \dfrac{2}{q} + \dfrac{2}{q} > 1 \end{cases}$$

дістанемо такі можливі випадки:

p	*q*	*K*	*E*	*F*	
3	3	6	4	4	тетраедр
3	4	12	6	8	октаедр
3	5	30	12	20	ікосаедр
4	3	12	8	6	куб(гексаедр)
5	3	30	20	12	додекаедр

Отже, теорема Ейлера дає можливість не тільки довідатися про кількість правильних многогранників, але й досить ґрунтовно дослідити форму їх, дізнавшись про кількість граней, ребер та вершин у кожному з цих правильних многогранників.

Маючи на увазі, що і саме доведення теореми Ейлера за способом Пуанкаре і застосовування її до правильних многогранників цілком доступне учням, бажано опрацьовувати цю теорему в школі, причому бажано пропонувати учням як вправу перевірити цю залежність на знайомих їм многогранниках: призмах, пірамідах. Разом з цим теорема Ейлера, різні способи її доведення і висновки з неї є багатим матеріалом для гурткової роботи.

При вивченні правильних многогранників треба обов'язково використовувати моделі. Без них учням важко уявити собі ці тіла (особливо додекаедр та ікосаедр), взаємне положення їх граней, вершин, ребер тощо.

Властивості правильних многогранників

1. Кінці двох непаралельних діагоналей протилежних граней куба є вершинами правильного тетраедра.

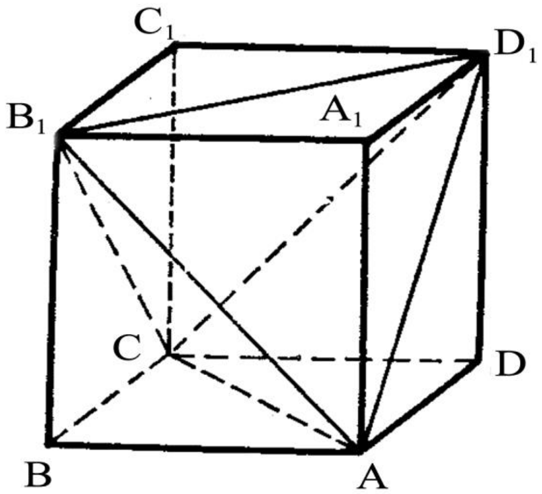


рис. 2.4.1.

Доведення

Нехай дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведемо, що кінці діагоналей AC і B_1D_1 його граней, тобто точки A, B, C і D є вершинами правильного тетраедра. Кожне ребро многогранника ACB_1D_1 – діагональ грані куба, отже, всі ці ребра рівні. Кожна грань розглядуваного многогранника – рівносторонній трикутник. З кожної вершини многогранника ACB_1D_1 виходить три ребра. Отже, цей многогранник правильний. Оскільки він має чотири грані, то робимо висновок, що ACB_1D_1 – правильний тетраедр.

2. Центри граней куба є вершинами правильного октаедра.

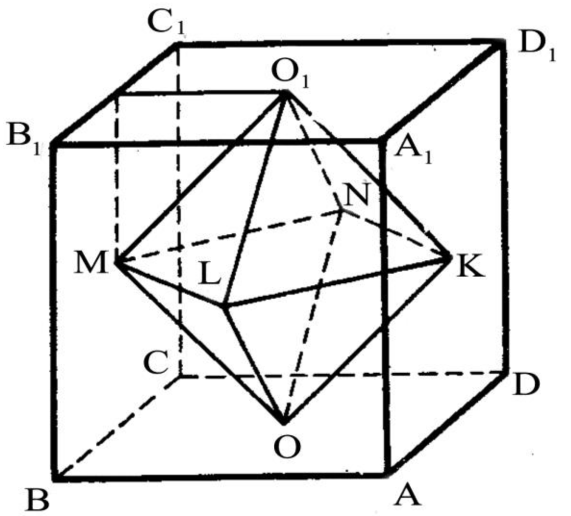


рис. 2.4.2.

Доведення

Позначимо центри граней куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ буквами O, K, L, M, N, O_1. Кожна грань многогранника $OKLMNO_1$ – трикутник. Покажемо, що всі ці трикутники рівносторонні. Якщо ребро куба завдовжки *a*, то, позначивши середину ребра B_1C_1 буквою P, маємо:

$$MO_1 = \sqrt{MP^2 + PO_1^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

Аналогічно можна показати, що й кожне інше ребро многогранника $OKLMNO_1$ має таку саму довжину. Отже, всі грані многогранника $OKLMNO_1$ – рівні правильні трикутники, в кожній його вершині збігаються чотири ребра. Тому цей многогранник правильний. Усього він має вісім граней. Отже, це – правильний октаедр.

3. Центри граней правильного октаедра є вершинами куба.

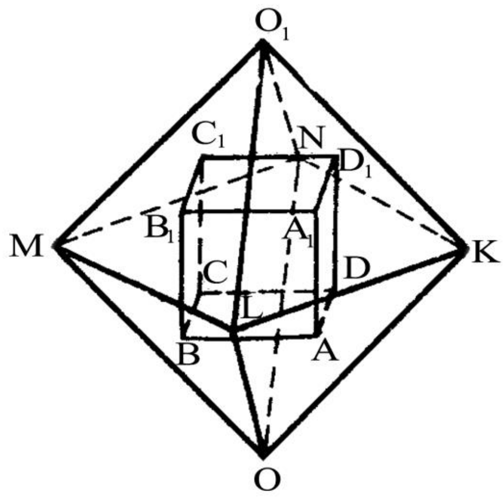


рис. 2.4.3.

Доведення

Нехай $OKLMNO_1$ – правильний октаедр, а точки A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 – центри його граней. Многогранник $ABCDA_1B_1C_1D_1$ має 6 граней, бо кожна його грань відповідає одній вершині октаедра, а вершин у октаедра 6. Кож-ний діагональний переріз правильного октаедра – квадрат. Тому якщо A_2, B_2, C_2, D_2 – середини ребер KL, LM, MN, NK, то і $A_2B_2C_2D_2$ – квадрат. І гомотетичний йому відносно вершини O чотирикутник ABCD також квадрат. Аналогічно можна довести, що кожна грань шестигранника $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є квадратом. А таку властивість має тільки куб.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2

Узагальнивши методичні вказівки до вивчення теми «Многогранники», можемо виділити ряд рекомендацій.

Поняття многогранника слід формувати за допомогою ряду наочних приладів і рисунків на дошці або на папері, виготовлених заздалегідь.

Після формування поняття про многогранник, слід перейти до розгляду окремих видів многогранників, а саме: опуклих і угнутих (не опуклих). підкресливши, що надалі вивчення многогранників буде обмежено лише дослідженням опуклих многогранників і їх властивостей.

Для повного формування уявлення про форму призми та взаємного розміщення її граней, потрібно щоб учнів добре володіли поняттям паралельного перенесення і його властивостями.

Після означення призми і розгляду видів призми , слід спинитися на розгляді окремих елементів цих тіл: вершин, ребер, граней і кутів. Тут, зокрема, треба звернути увагу на кути, які утворюють діагоналі з кожною гранню і з кожним ребром окремо, оскільки докладне дослідження взаємного положення різних прямих та площин на початку вивчення многогранників допомагає розвиткові просторових уявлень учнів.

Рекомендовано не дуже захоплюватися моделями, оскільки модель відіграє тільки допоміжну роль, а головним завданням є навчання учнів орієнтуватися у формах тіл по рисунку.

Ознайомлюючи учнів з елементами піраміди (бічною гранню, основою, висотою тощо), треба звернути увагу на можливість різного розташування висоти: в середині піраміди чи в площині однієї (і навіть двох) граней і може проходити зовні піраміди.

При визначенні об'єму піраміди рекомендовано спочатку розглянути трикутну піраміду, а потім перейти до довільної піраміди, розбивши довільну піраміду на трикутні піраміди і довівши, що всі отримані трикутні піраміди мають одну й ту саму висоту, вивести формулу об'єму будь-якої піраміди.

При розгляді об'єму зрізаної піраміди, необхідно звернути увагу дітей на той факт, що будь-яку зрізану піраміду можна доповнити до повної. Тобто об'єм зрізаної піраміди буде рівний різниці об'ємів повної піраміди і доповненої.

При вивченні правильних многогранників потрібно обов'язково використовувати моделі (Платонових тіл), також доцільно з'ясувати з учнями, чому існує лише п'ять типів правильних многогранників. Теорема Ейлера дає можливість не тільки довідатися про кількість правильних многогранників, але й досить ґрунтовно дослідити форму їх, дізнавшись про кількість граней, ребер та вершин у кожному з цих правильних многогранників.

РОЗДІЛ 3. МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З ОСНОВНИХ РОЗДІЛІВ ТЕМИ «МНОГОГРАННИКИ»

3.1. Зображення многогранників в паралельній проекції

Розв’язуючи задачу або доводячи теорему з курсу стереометрії, ми користуємося, як правило, не просторовою моделлю відповідної фігури, а її зображенням на площині, тобто, як іноді говорять, її графічною моделлю. Той, хто хоче навчитися розв’язувати стереометричні задачі, повинен перш за все навчитися правильно зображувати просторові фігури на площині – на листі паперу або на класній дошці.

Для отримання таких зображень користуються частіше за все двома методами – паралельним проектуванням і центральним проектуванням (перспективою). Другий з цих методів більш відповідає апарату людського зору, але він дуже складний і тому не придатний у школі, адже малюнок при вивченні стереометрії грає допоміжну роль. До малюнка пред'являються вимоги не тільки достовірності оригіналу і наочності, але і простоти і швидкості виконання. Цим вимогам цілком відповідає паралельна проекція [18,с.15].

В ясний сонячний день ми бачимо на тротуарах, на гладких стінах чітко обкреслені тіні предметів. Це сонячне проміння проектують ці предмети на площину тротуару або стіни. Адже сонячне проміння виходить не з точкового джерела світла. Їх випромінює вся величезна поверхня Сонця, що світиться, величезна і відстань Сонця до Землі, тому сонячне проміння можна вважати практично паралельним. Цілком можливо, що ідея паралельного проектування підказала математикам саме механізмом утворення сонячних тіней.

Щоб вільно користуватися паралельним проектуванням, треба виявити його властивості і перш за все з'ясувати, які властивості фігур, що проектуються, залишаються незмінними (інваріантними) при паралельному проектуванні. При цьому вважатимемо, що проектовані прямі і відрізки не паралелі напряму проектування.

Властивості паралельного проектування.

1. Проекція прямої, не паралельної напряму проектування, є пряма.

2. Якщо точка належить прямій, то проекція цієї точки належить проекції вказаної прямої.

3. Проекції паралельних прямих, які не є проектуючими, паралельні.

4. Відношення відрізків однієї прямої або паралельних прямих дорівнює відношенню їх проекцій (тобто зберігається при паралельному проектуванні).

5. Паралельною проекцією кола є еліпс (або відрізок — у випадку, якщо коло лежить в проектуючій площині.

Зображення в паралельній проекції фігури залежить не тільки від самої фігури, але і від взаємного розташування площини зображення, проектуючих прямих і фігури, яку проектують. Вибір напряму проектування в загальному випадку обмежений лише умовою непаралельності проектуючих прямих і площини проекцій. Для отримання наочного зображення фігури і забезпечення можливої простоти зображення доцільно користуватися довільним паралельним проектуванням, тобто не задавати наперед певного напряму проектування. Крім того, при зображенні просторових фігур не слід враховувати дані в умовах задач довжини відрізків, величини кутів, якщо ці дані не впливають на геометричний зміст задачі і її геометричне рішення (не можна, наприклад, не враховувати дані відношення між довжинами відрізків однієї і тієї ж прямої або паралельних прямих, перпендикулярності прямих і т. п.).

Проілюструємо зазначене на прикладі побудови зображення при розв’язанні конкретної задачі.

Задача. В основі піраміди $S'A'B'C'$ лежить рівнобедрений трикутник $A'B'C'$ $\{A'B' = B'C')$ з кутом $\alpha = 50°$ при основі $A'C'$. Висота трикутника, опущена на його бічну сторону, $A'D'$ = 3см. Бічна грань піраміди, що проходить через $A'C'$, перпендикулярна до площини основи; бічні ребра $S'A'$ і $S'C'$ рівні; висота піраміди $S'O'$ = 4 см. Знайти об'єм піраміди.

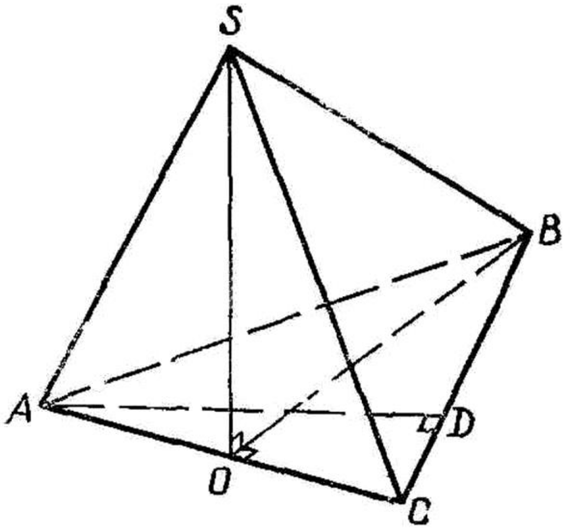


рис.3.1.1.

При зображенні даної піраміди враховуємо: рівнобедреність трикутника $A'B'C'$, перпендикулярність бічної грані $A'S'C'$ до площини основи, рівність бічних ребер $S'A'$ і $S'C'$, умова $45° < \alpha < 90°$ (трикутник ABC – гострокутний), оскільки ці умови визначають геометричні властивості фігури і геометричний розв'язок задачі. Числові дані при зображенні фігури не враховуємо, тобто вважаємо, що $45° < \alpha < 90°$, а відрізки $S'O'$ і $A'D'$ – довільної довжини. Це спрощує побудову зображення фігури і в той же час нiскільки не позначається на наочності зображення, не ускладнює розв'язок даної задачі з конкретними числовими даними.

Основу піраміди зображуємо довільним трикутником ABC. Медіана $B'O'$ трикутника-оригіналу зображується медіаною BO трикутника ABC (властивість 4 паралельних проекцій). З умови виходить, що висота $S'O'$ піраміди лежить в грані $A'S'C'$ *і* проходить через середину O' сторони $A'C'$ основи.

Висота піраміди є вертикальним відрізком довільної довжини, причому основа висоти є середина O сторони AC трикутника ABC. Точку S сполучаємо з A, B і C. Отримане зображення даної піраміди вірне. Воно враховує всі її геометричні властивості, не враховує лише конкретних розмірів відрізків і кута α (у вказаних межах $45° < \alpha < 90°$). Залишається зобразити висоту $A'D'$ основи піраміди.

Зображення піраміди або призми зводиться до зображення основи і бічних ребер многогранника. Зображення многогранника звичайно починаємо із зображення його основи – багатокутника. Після цього добудувати зображення тіла звичайно не викликає особливих ускладнень.

Розглянемо спочатку зображення багатокутників.

1. Зображення трикутника. Як зазначалось вище, будь-який трикутник *ABC* можна (з точністю до подібності) розглядати як зображення довільного трикутника *A'B'C'*. При цьому медіани трикутника *A'B'C'* зображаються медіанами трикутника *ABC*.

Вибір трикутника *ABC* для зображення даного трикутника-оригіналу *A'B'C'* визначає напрям проектування. Але ж при цьому трикутник *ABC* буде зображенням самих різних за формою трикутників. Звичайно доводиться проводити в трикутнику-оригіналі висоти, бісектриси, будувати інші відрізки і точки. Природно, при їх зображенні необхідно враховувати конкретні властивості даного трикутника-оригіналу і властивості паралельного проектування.

Зображення називається *метрично визначеним*, якщо воно визначає оригінал з точністю до подібного перетворення, інакше кажучи, якщо по зображенню можна відновити істинний вид фігури, подібній фігурі-оригіналу.

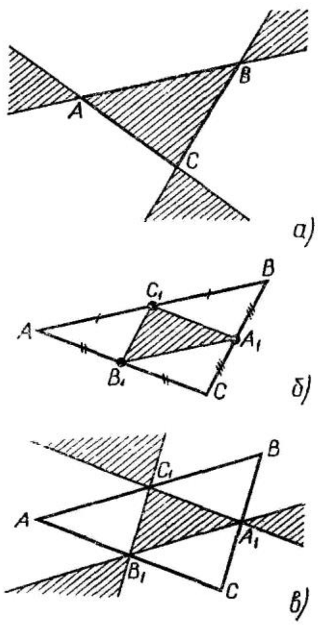


рис. 3.1.2.

Зображення *ABC* трикутника загального вигляду *A'B'C'* стає метрично визначеним, якщо на ньому довільно вибрати зображення або двох висот, або двох бісектрис, або серединних перпендикулярів до двох сторін трикутника *A'B'C'* (третя висота, бісектриса, серединний перпендикуляр до третьої сторони проходять через відповідні точки перетину перших двох). Ця умова рівносильна довільному вибору на зображенні *ABC* трикутника *A'B'C'* точки, яка є зображенням або ортоцентра (точки перетину висот), або центру вписаного кола (точки перетину бісектрис), або центра кола (точки перетину серединних перпендикулярів до сторін), описаного навколо трикутника *A'B'C'*.

На малюнку ***а*** заштрихована область існування зображень ортоцентра трикутника *A'B'C'* (трикутник *ABC* – проекція трикутника-оригіналу *A'B'C'*, точки A_1, B_1, C_1 – середини сторін трикутника *ABC*). На малюнку ***б*** заштрихована область існування зображень центру вписаною в трикутник *A'B'C'* кола (тільки внутрішні точки трикутника $A_1B_1C_1$). На малюнку ***в*** заштрихована область існування зображень центра кола, описаного навколо трикутника *A'B'C'* (включаючи точки A_1, B_1, C_1).

Прямокутний трикутник A'B'C' також можна зобразити будь-яким трикутником *ABC*. Але при цьому треба мати на увазі, що зображення напрямів двох його висот (катетів) вже задане. Довільно можна зобразити лише висоту, опущену на гіпотенузу. Якщо даний прямокутний трикутник по умові не рівнобедрений, висоту, опущену на гіпотенузу (як і бісектрису прямого кута), не можна зображати медіаною трикутника *ABC*, проведеної до проекції гіпотенузи даного трикутника.

Якщо *рівнобедрений трикутник A'B'C'* (*A'B'* = *B'C'*) зображений довільним трикутником *ABC*, то висота, бісектриса і медіана *B'D'* зображуються медіаною *BD* трикутника *ABC*. Отже, довільність у виборі зображення ортоцентра, центра описаної або центра вписаного кола обмежено такою умовою: вони повинні належати не тільки відповідній області існування, але і прямій *BD*.

Правильний трикутник *A'B'C'* можна також зобразити будь-яким трикутником *ABC*, але при цьому зображення буде метрично визначеним, оскільки центри описаного і вписаного кіл, а також ортоцентр трикутника *A'B'C'* співпадають і зображаються точкою перетину медіан трикутника *ABC*. Тому всі подальші побудови на цьому трикутнику не можуть бути довільними.

2. Зображення паралелограма. Будь-який заданий паралелограм *A'B'C'D'* (в тому числі прямокутник, квадрат, ромб) може бути зображений довільним паралелограмом *ABCD*.

Нехай у заданого паралелограма кут *B'A'D'* гострий. Відповідний кут *BAD* паралелограма-зображення може бути як гострим, так і тупим. Для більшої наочності і щоб уникнути зорових ілюзій звичайно (якщо дозволяють умови задачі) приймають гострий кут паралелограма *ABCD* за зображення відповідного гострого кута оригіналу.

На зображенні паралелограма загального виду зображення двох його висот, опущених з однієї вершини (як і перпендикулярів, проведених з будь-якої точки в площині паралелограма до його сторін), можна побудувати довільно, після чого зображення стає метрично визначеним. Слід врахувати, що висоти, опущені з вершини гострого кута паралелограма-оригіналу, лежать поза паралелограмом, а висоти, опущені з вершини тупого кута, – усередині нього.

Квадрат A'B'C'D' може бути зображений довільним паралелограмом *ABCD*. При цьому зображення буде метрично визначеним, всі подальші метричні побудови (наприклад, зображення перпендикулярів до сторін квадрата, бісектрис кутів) вже не можна будувати довільно.

3. Зображення трапеції. Будь-яка трапеція *A'B'C'D'* (зокрема рівнобічна, прямокутна) може бути зображена довільною трапецією *ABCD*.

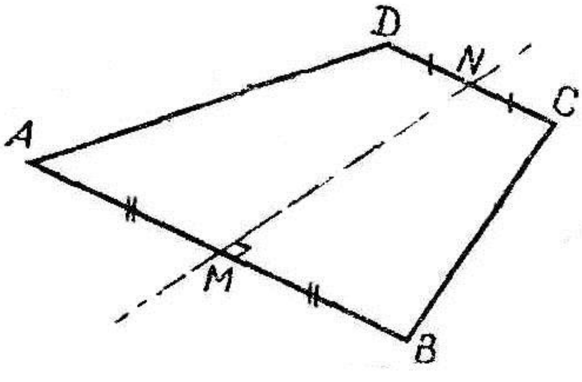


рис. 3.1.3.

Якщо трапеція *A'B'C'D'* – загального вигляду, то зображення її висоти на кресленні можна побудувати довільно. У випадку, якщо A'B'C'D' прямокутна трапеція, *C'B'* *A'B'*, зображення її висоти на малюнку вже задане. Аналогічно положення при зображенні рівнобічної трапеції. Тут роль висоти відіграє відрізок, що сполучає середини основ трапеції (рис. 3.1.3.).

4. Зображення правильного шестикутника. Нехай *A'B'C'D'E'F'* – *правильний* шестикутник. Тоді *B'C'E'F'* — прямокутник, *A'D'* || *B'C* || *E'F'*, причому *B'M'* = *M'F'*. Крім того, *A'M'* = *M'O'* = *O'N'* = *N'D'*.

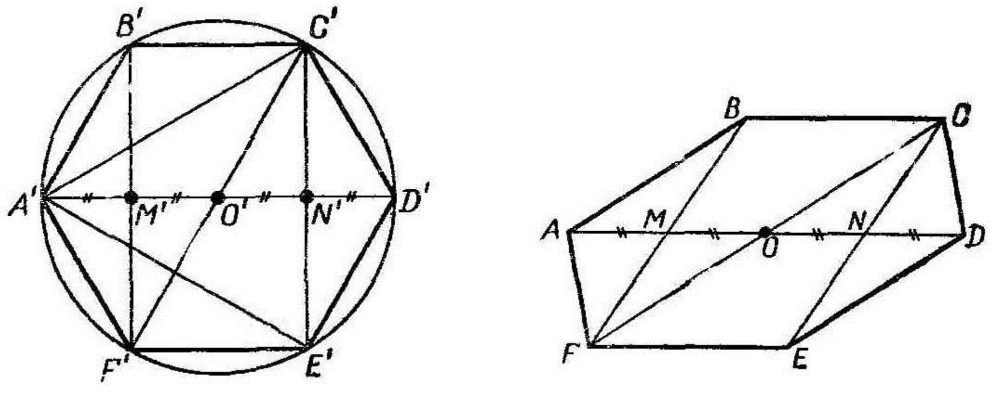


рис. 3.1.4.

Побудувавши довільний паралелограм *BCEF,* який може розглядатися як зображення прямокутника *B'C'E'F',* ми одержуємо зображення чотирьох вершин правильного шестикутника. Через середини *M* і *N* його сторін *BF* і *CE* проведемо пряму *MN.* Діагональ *CF* паралелограма *BCEF* розділить відрізок *MN* пополам. Відкладаємо на прямій *MN* зовні паралелограма відрізки *MA* = *ND* = *OM.* Побудовані таким чином точки *A* і *D* – зображення решти двох вершин даного правильного шестикутника

Зображення многогранників.

Нагадаємо, що для більшої наочності креслення висоту піраміди, бічні ребра прямої призми, висоту похилої призми ми домовилися зображати «вертикальними» відрізками. Крім того, ми також домовилися не враховувати числові дані про довжини відрізків або величини кутів, якщо вони не впливають на геометричний зміст і геометричне розв’язання задачі. Це забезпечує велику свободу при зображенні елементів фігури.

Приступаючи до зображення многогранника, слід перш за все проаналізувати його форму і властивості. Наприклад, висота піраміди може співпадати з одним з її бічних ребер, лежати в одній з бічних граней і т.д. В цих випадках, природно, висоту не можна зображати довільно. Це ж стосується і висоти похилої призми, проведеної з кінця її бічного ребра. Якщо ж заданих многогранник загального вигляду, тобто многогранник, який не має яких-небудь спеціальних геометричних властивостей, що однозначно визначають положення його висоти, то основу зображення її можна вибрати на зображенні основи многогранника довільно.

1. Зображення правильної трикутної піраміди. Малюємо довільний трикутник *ABC,* який приймаємо за зображення правильного трикутника. Через точку *O* перетину медіан трикутника *ABC,* яка зображає центр правильного трикутника, проводимо «вертикальний» відрізок *OS* довільної довжини, що зображає висоту піраміди. Точку *S* сполучаємо відрізками з вершинами трикутника *ABC* .

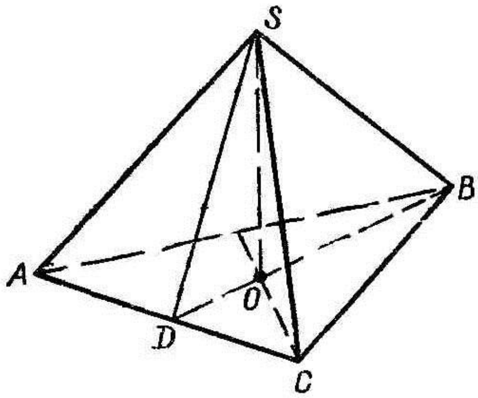


рис. 3.1.5.

Аналогічно будуємо зображення інших правильних пірамід (чотирикутної, шестикутної і т. д.).

2. Зображення зрізаної піраміди. Нерідко учні при зображенні зрізаної піраміди роблять так: малюють два багатокутники різних розмірів з відповідно паралельними сторонами і сполучають відрізками їх відповідні вершини. Навіть незначні неточності при зображенні паралельних сторін основ зрізаної піраміди ведуть до того, що вказані багатокутники виявляються негомотетичними, тобто продовження бічних ребер на зображенні зрізаної піраміди не сходяться в одній точці.

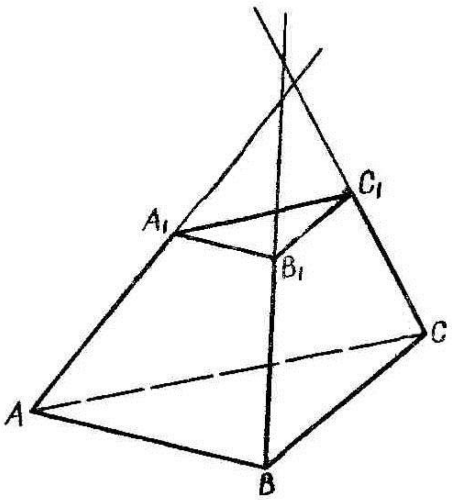


рис. 3.1.6.

Згідно визначенню, зрізаною пірамідою називається многогранник, вершинами якого служать вершини основи піраміди і вершини її перетину площиною, паралельною основі. У повній відповідності з цим визначенням і треба будувати зображення зрізаної піраміди, починаючи із зображенням повної піраміди і зобразивши потім перетин її площиною, паралельною основі. Січна площина перетинає площини бічних граней піраміди по прямих, паралельних відповідних сторонах основи, а площини діагональних перерізів – по прямих, паралельних діагоналям основи. Цю останню властивість зручно використовувати для побудови вершин верхньої основи правильної чотирикутної або шестикутної зрізаної піраміди.

3. Зображення призми. Зображуємо багатокутник (для правильної призми – правильний), що лежить в основі призми. Від його вершин проводимо відрізки рівної довжини (для прямої призми – вертикальні, для похилої – під довільним кутом до вертикалі), кінці їх послідовно сполучаємо відрізками.

Докладний розгляд питань зображення просторових фігур в паралельній проекції виходить далеко за межі шкільної програми. Тому ми обмежуємося приведеними вище вказівками – їх цілком достатньо, щоб навчити правильному зображенню многогранників, що зустрічаються в шкільних задачах, включаючи побудову окремих їх елементів.

3.2. Задачі на обчислення

При розв’язуванні задач на обчислення, слід визначити довжини відрізків, величини кутів, площі перерізів, поверхні та об'єми найпростіших многогранників. Щоб за відведений навчальним планом час можна було розв'язати більше задач, радимо майже на кожному уроці розв'язувати 5–10 задач усно. Особливу увагу слід звернути на вироблення умінь і навичок розв'язувати найпростіші задачі, бо без цього не можна навчити добре розв'язувати задачі середньої складності.

Для усного розв'язування корисно пропонувати стереометричні задачі, пов'язані з тим самим малюнком. Наприклад, зобразивши на класній дошці правильну чотирикутну призму з проведеною діагоналлю, учитель може запропонувати учням послідовно кілька задач:

1. Діагональ правильної чотирикутної призми d нахилена до площини основи під кутом α.

Визначте:

а) висоту призми;

б) діагональ основи призми;

в) площу основи призми;

г) площу діагонального перерізу призми;

д) об’єм призми;

є) кут між діагоналлю призми і бічним ребром.

2. Діагональ правильної чотирикутної призми d утворює з бічним ребром кут φ. Визначте:

а) висоту призми;

б) діагональ основи призми і т. д.

3. Бічне ребро h правильної чотирикутної призми з її діагоналлю утворює кут φ. Визначте:

а) діагональ призми;

б) діагональ основи призми і т. д.

Так за одним малюнком на уроці можна усно розв'язати з учнями 10 –15 задач.

Під час вивчення об'єму похилої призми корисно запропонувати учням, наприклад, такі задачі.

1. Знайдіть об'єм похилої призми, висота якої h, а в основі лежить:

а) квадрат з стороною a;

б) квадрат з діагоналлю d;

в) прямокутник з сторонами a і b;

г) рівносторонній трикутник з стороною a;

д) ромб з стороною a й кутом α;

є) паралелограм з сторонами a і b та кутом α;

є) ромб з діагоналями d і d_1;

ж) правильний шестикутник з стороною a.

2. Знайдіть об'єм похилої призми з площею основи S, якщо:

а) бічне ребро с нахилене до площини основи під кутом α;

б) бічне ребро c нахилене до площини основи піди кутом 60°;

в) середина бічного ребра віддалена від площини основи на m;

г) бічне ребро і його проекція на площину основи відповідно дорівнюють b і c.

Вважаємо, що для усного розв'язування слід пропонувати учням не менше задач, ніж для письмового.

Спочатку, після усних вправ, краще пропонувати учням, наприклад, такі задачі.

Задача. Площа основи правильної чотирикутної призми дорівнює 144 см^2, а висота 14 см. Знайдіть довжину діагоналі цієї призми.

На класній дошці задачу та її розв'язання можна записати так.

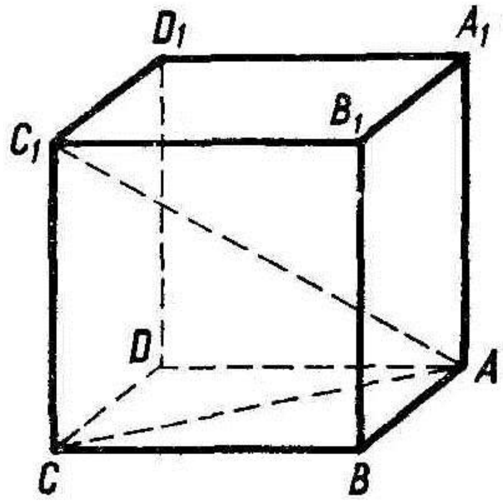


рис. 3.2.1.

Д а н о : $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прав. призма, $S_{ABCD} = 144$ см^2, CC_1 = = 14 см.

З н а й т и : AC_1

Розв’язання.

1) $AB = \sqrt{144} = 12, \quad AC = 12\sqrt{2}$

2) З Δ ACC_1 ($\angle \tilde{N} = 90^0$)

$AC_1 = \sqrt{AC^2 + CC_1^2}; AC_1 = \sqrt{288 + 196} = 22$

В і д п о в і д ь : 22 см.

Задача. У прямій трикутній призмі відстані між бічними ребрами дорівнюють 37 см, 13 см і 40 см. Знайдіть відстань між більшою бічною гранню і протилежним бічним ребром.

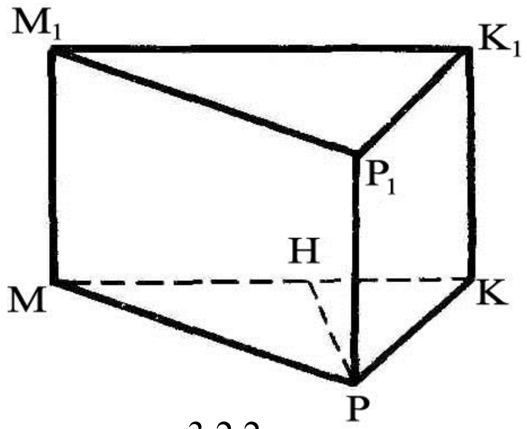


рис. 3.2.2.

Розв'язання.

Нехай $KPMK_1P_1M_1$ – дана призма, а KP = 13 см, PM = 37 см, MK = = 40 см – відстані між ЇЇ бічними ребрами. Більша бічна грань призми KMM_1K_1, бо MK – найбільша сторона ΔKPM. Висота PH цього трикутника – шукана відстань. Справді, $PH \perp KM$ і $PH \perp KK_1$, бо ребро KK_1 перпендикулярне до площини KPM, а відрізок PH належить цій площині. Прямі KM і KK_1 перетинаються, тому відрізок PH перпендикулярний до площини грані KMM_1K_1, якій належать ці прямі.

Довжину відрізка PH можна визначити, обчисливши двома способами площу S трикутника KPM. За формулою Герона

$S = \sqrt{45 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 32} = 240$,

$S = 0{,}5 \cdot PH \cdot KM$

звідки $$PH = \frac{2S}{KM} = \frac{2 \cdot 240}{40} = 12.$$

В і д п о в і д ь : 12 см.

Задача. Основа піраміди — прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см. Всі бічні грані нахилені до площини основи під кутом 60°. Знайдіть висоту піраміди.

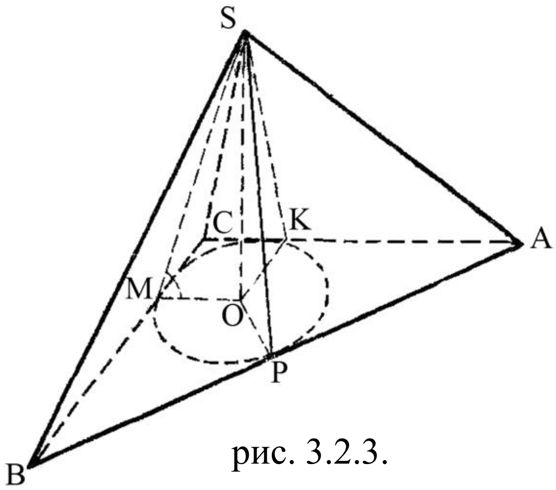


рис. 3.2.3.

Розв’язання

Якщо всі двогранні кути при основі піраміди рівні, то вершина цієї піраміди проектується в центр кола, вписаного в її основу. Задача зводиться до визначення радіуса кола, вписаного в прямокутний трикутник з катетами *CB* = 6 см, *AC* = 8 см. Чотирикутник *OKCM* — квадрат, *AK* = *AP*, *BM* = *BP*, тому

$$2r = MC + CK = BC + CA - AB = 8 + 6 - 10 = 4,\ r = 2.$$

Радіус вписаного в трикутник кола кожна визначити й інакше, обчисливши площу цього трикутника двома способами:

$$r(AB + BC + CA) = AC \cdot CB.$$

$$r(8 + 6 + 10) = 6 \cdot 8,\ r = 2.$$

Отже, шукана висота піраміди

$$SO = r \cdot tg\,60° = 2\sqrt{3}.$$

Не складно помітити, що сформульовану задачу ми замінили іншою: замість «бічні грані нахилені до площини основи» написали «двогранні кути при основі піраміди». Це – не те саме, бо кут між бічною гранню і площиною основи піраміди не може бути більший від 90°, а двогранний кут при основі піраміди може перевищувати 90°. Умові задачі відповідають також такі піраміди, вершини яких проектуються в центри зовні вписаних кіл основи піраміди. Одну з таких пірамід зображено справа на малюнку (вигляд

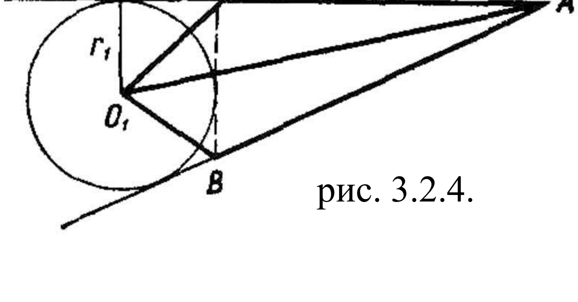


рис. 3.2.4.

зверху). Щоб визначити радіус r_1 зовні вписаного кола з центром у точці O_1, обчислимо подвоєну площу даного трикутника ABC двома способами:

$$r_1\left(AB + AC - CB\right) = AC \cdot CB,$$

$$r_1\left(8 + 8 - 6\right) = 8 \cdot 6, r_1 = 4.$$

Аналогічно знаходимо, що $r_1 = 6$, $r_2 = 12$.

Отже, для сформульованої задачі повна відповідь має бути такою: $2\sqrt{3}$ñì , $4\sqrt{3}$ñì , $6\sqrt{3}$ñì , $12\sqrt{3}$ñì .

Повне розв'язання цієї задачі бажано розглянути на факультативних заняттях або у позакласній роботі; на класних заняттях досить обмежитись розглядом одного випадку.

Задача. Через сторону основи правильної трикутної піраміди проведено площину, перпендикулярну до протилежного бічного ребра. Знайдіть площину перерізу, якщо сторона основи a, а висота піраміди h.

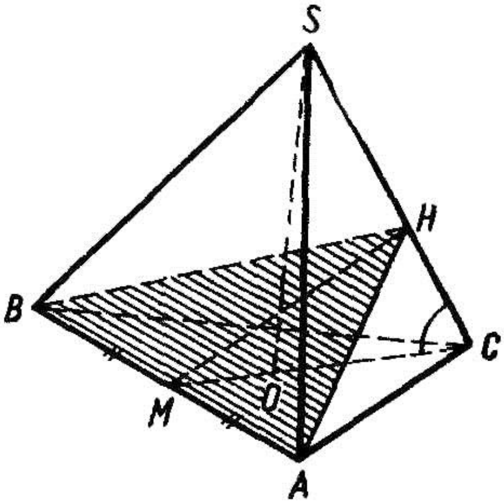


рис. 3.2.4.

Розв’язання

На малюнку зображено дану правильну піраміду $SABC$ і переріз ABH, перпендикулярний до SC. Трикутник ABH рівнобедрений, бо прямокутні трикутники AHC і BHC рівні за гіпотенузою і катетом. Отже, $AH = BH$ і HM — висота $\Delta\ ABH$ (M — середина AB). Тому шукана площа перерізу $Q = 0{,}5 \cdot AB \cdot HM$. Довжина відрізка AB відома, треба визначити висоту HM.

Трикутники MHC і SOC подібні, бо обидва прямокутні і мають спільний кут SCO. Тому

$$MN : MC = SO : SC, \quad MN = \frac{MC \cdot SO}{SC}.$$

З $\Delta\ ACM$

$$MC=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a}{2}\sqrt{3}$$

З $\Delta\ SOC$

$$SC=\sqrt{OC^2+SO^2}=\sqrt{\frac{a^2}{3}+h^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+3h^2}\ .$$

$$MN=\frac{a\sqrt{3}\cdot h\cdot\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{a^2+3h^2}}=\frac{3ah}{2\sqrt{a^2+3h^2}}\ .$$

Отже, $Q=\frac{1}{2}a\cdot\frac{3ah}{2\sqrt{a^2+3h^2}}=\frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2+3h^2}}$.

При яких значеннях a і h задача має розв'язки? Нерідко вважають, що при будь-яких додатних a і h, бо вираз не має змісту тільки при $a = h = 0$. Це неправильно.

Якщо плоский кут при вершині даної піраміди прямий або тупий, то площина, що проходить через її сторону основи перпендикулярно до протилежного бічного ребра, не створить перерізу. Визначимо, при яких a і h це буває. Граничний випадок – коли плоскі кути при вершині піраміди прямі. В цьому випадку $SC=\frac{a}{\sqrt{2}}$, $OC=\frac{a}{\sqrt{3}}$, $h=\sqrt{\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{3}}=\frac{a}{\sqrt{6}}$.

Отже, задача має розв’язки при $h>\frac{a}{\sqrt{6}}$.

В і д п о в і д ь : $Q=\frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2+3h^2}}$ при $h>\frac{a}{\sqrt{6}}$.

Якщо вчитель не вважає потрібним робити таке дослідження, можна дещо змінити формулювання задачі: розглядати не довільну правильну трикутну піраміду, а таку, в якої плоскі кути при вершині гострі.

Задачу можна розв'язати й іншими способами. Щоб не розглядати подібних трикутників і не розв'язувати пропорцій, можна скористатись тригонометричними функціями. Нехай $\angle SCO=\varphi$, тоді

$$MN = MC \cdot \sin\varphi = \frac{a\sqrt{3}}{2}\sin\varphi.$$

З Δ SOC

$$\sin\varphi = \frac{SO}{SC} = \frac{h}{\sqrt{\frac{a^2}{3}+h^2}} = \frac{h\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+3h^2}}$$

Отже, $MH = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{h\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+3h^2}} = \frac{3ah}{2\sqrt{a^2+3h^2}}$ і т. д.

Якщо учні знають формулу об'єму піраміди, то задачу можна розв'язати ще інакше. Об'єм даної піраміди дорівнює сумі об'ємів двох частин, на які січна площина ділить дану піраміду. Отже,

$$\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot h = \frac{1}{3}Q\cdot SH + \frac{1}{3}Q\cdot CH,$$

або $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot h = Q\cdot SC$,

звідси $Q = \frac{\sqrt{3}a^2h}{4\cdot SC} = \frac{\sqrt{3}a^2h}{4\sqrt{\frac{a^2}{3}+h^2}} = \frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2+3h^2}}$.

Задача. Грані паралелепіпеда – рівні ромби з стороною a і гострим кутом α. Знайдіть об'єм цього паралелепіпеда.

Розв’язання

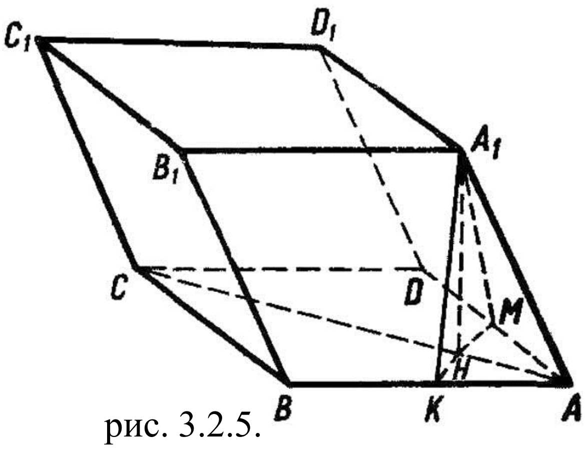


рис. 3.2.5.

На малюнку зображено паралелепіпед, який задовольняє умову задачі: кожне з його ребер має довжину a, а кожний з гострих кутів при вершині A має величину α.

Об'єм даного паралелепіпеда визначатимемо за формулою $V=Qh$, де h – висота паралелепіпеда, а Q – площа його основи. Тоді

$$Q = 2 \cdot S_{ABD} = a^2 \sin\alpha \,.$$

Отже, задача зводиться до визначення висоти *h* паралелепіпеда.

Нехай його висота буде A_1H. Проведемо з вершини A_1 перпендикуляри A_1K і A_1M до *AB* і *AD*. З рівності прямокутних трикутників A_1KA і A_1MA випливає рівність похилих A_1K і A_1M. Якщо рівні похилі, то рівні і їх проекції: *HK* = *HM*. За теоремою про три перпендикуляри $HK \perp AB$, $HM \perp AD$. Отже, точка *H* рівновіддалена від сторін кута *BAD*, тобто лежить на його бісектрисі. Тоді

$$A_1K = A_1A\sin\alpha = a\sin\alpha,$$

$$AK = A_1A\cos\alpha = a\cos\alpha,$$

$$KH = AKtgB\hat{A}H = a\cos\alpha \cdot tg\frac{\alpha}{2},$$

$$h = A_1H = \sqrt{A_1K^2 - KH^2} = \sqrt{a^2\sin^2\alpha - a^2\cos^2\alpha \cdot tg^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin^2\alpha \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\left(\alpha - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\alpha + \frac{\alpha}{2}\right)} =$$

$$= \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}}$$

Отже,

$$V = a^2\sin\alpha \cdot = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}} = 2a^3\sqrt{\sin^3\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}}$$

Висоту *h* можна визначити, ввівши додатковий параметр $\varphi = \angle \grave{A}_1\grave{A}\acute{I}$.

Тоді $\cos\alpha = \cos\varphi \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$, звідси $\cos\varphi = \cos\alpha : \cos\frac{\alpha}{2}$ і

$$A_1H = A_1A\sin\varphi = a\sqrt{1-\cos^2\varphi} = a\sqrt{1 - \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha},$$

$$V = a^2 \sin\alpha \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha} = 2a^3 \sin\frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha}\ .$$

Відповідь можна записати у такому вигляді. Проте, якщо треба пересвідчитись, що вона тотожна знайденій при першому способі розв'язання, то виконують тотожні перетворення:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos\alpha) - \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos\alpha - \cos 2\alpha) = \sin\frac{3\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Для розв'язання задачі можна скористатись і векторним методом:

$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KH} + \overrightarrow{HA_1}$, тому

$$\overrightarrow{AA_1}^2 = \overrightarrow{AK}^2 + \overrightarrow{KH}^2 + \overrightarrow{HA_1}^2 + 2\cdot\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{KH} + 2\cdot\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{HA_1} + 2\cdot\overrightarrow{KH}\cdot\overrightarrow{HA_1}$$

Оскільки кожний з трьох останніх доданків дорівнює нулю, то

$$AA_1^2 = AK^2 + KH^2 + HA_1^2,$$

звідси

$$a^2 = a^2\cos^2\alpha + a^2\cos^2\alpha \cdot tg^2\frac{\alpha}{2} + h^2,$$

$$h^2 = a^2\left(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\alpha\cdot tg^2\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{a^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\left(\sin^2\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \frac{a^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\sin\left(\alpha - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\alpha + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{a^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}$$ і т. д.

3.3. Задачі на побудову

Переважна більшість задач на побудову, які розв'язують під час вивчення розділу, це задачі на побудову перерізів многогранників площинами. Їх ефективно розв'язують на проекційних малюнках. Основні способи таких побудов – спосіб слідів і спосіб відповідності.

Задача. Дві бічні грані чотирикутної призми паралельні. Побудуйте переріз цієї призми площиною, яка проходить через три дані на бічних ребрах точки.

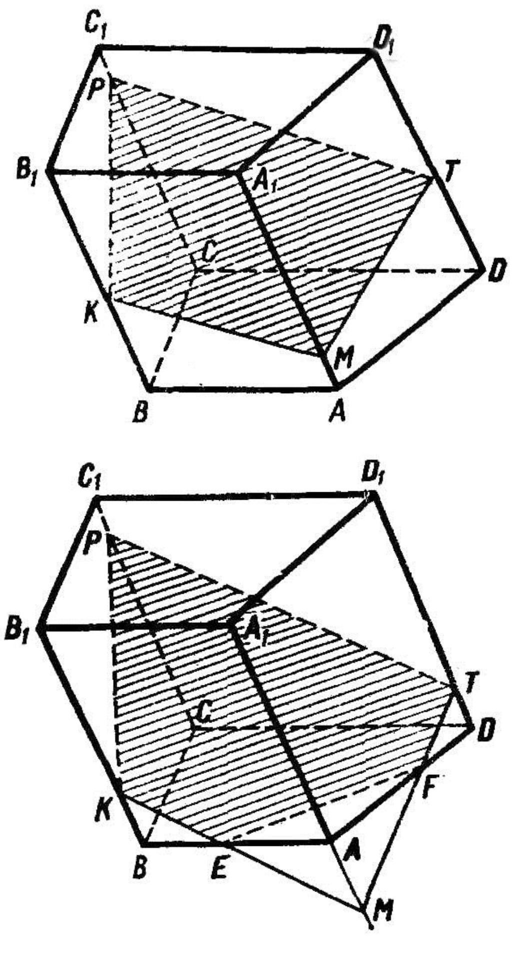


рис. 3.3.1.

Конкретизуємо задачу. Нехай дано чотирикутну призму $ABCDA_lB_1C_lD_1$ з паралельними гранями ABB_1A_1 і CC_1D_1D, і точки *К, Р, Т* які лежать на її бічних ребрах. Треба побудувати переріз призми площиною, що проходить через точки *К, Р, Т.* У перерізі має бути якийсь многокутник, у цьому випадку – чотирикутник з вершинами на бічних ребрах призми. Три вершини чотирикутника відомі, треба знайти четверту. В якій точці січна площина перетне бічне ребро AA_1?

Приблизно так можна ввести учнів у задачу. Якщо вони запропонують правильний спосіб розв'язання, то можна приступити до його реалізації. Якщо таких пропозицій не буде, то вчитель повинен допомогти, звернувши увагу на те, що дві бічні грані даної призми паралельні. Розв’язання в зошиті можна оформити так.

Розв'язання. ***Перший спосіб***. Проведемо через точку K пряму, паралельну PT. Якщо ця пряма перетне ребро AA_1 в точці M, то чотирикутник $KPTM$ – шуканий переріз. Якщо пряма KM перетне продовження ребра AA_1 визначаємо точки E і F перетину прямих KM і MT з ребрами AB і AD. В цьому випадку перерізом буде п'ятикутник $KPTFE$ (рис. 3.3.2.).

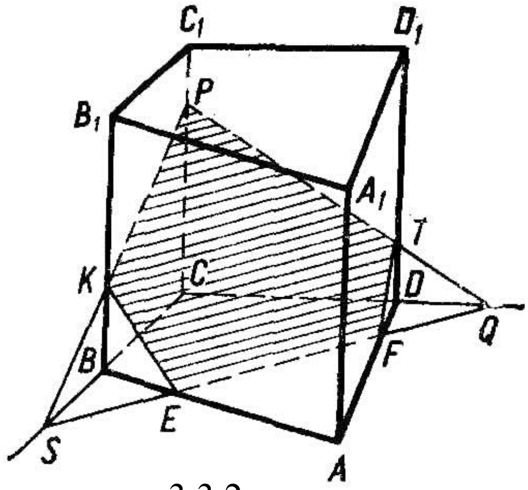


рис. 3.3.2.

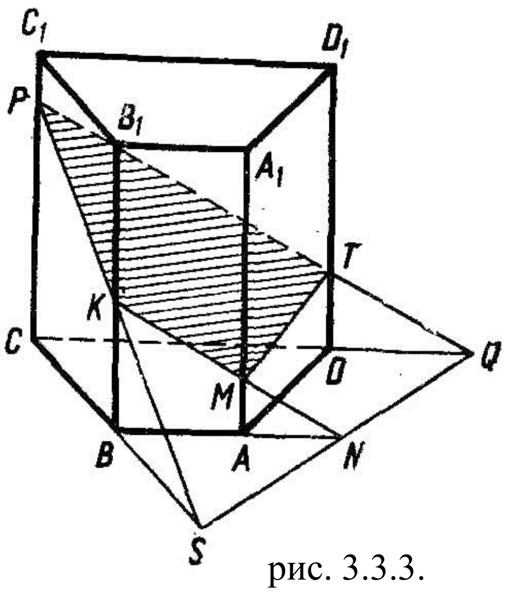


рис. 3.3.3.

Описувати розв'язання таких задач за схемою «аналіз – побудова – доведення – дослідження» не радимо. Не треба пояснювати побудову за заздалегідь виконаним готовим малюнком, лінії і точки на нього треба наносити поступово, одночасно з відповідним поясненням.

Далі задачу узагальнюють:

— Як виконати побудову, якщо серед бічних граней призми немає паралельних? Зробити це можна так (рис.3.3.3.).

Прямі PK і PT належать січній площині, тому й точка S, в якій перетинаються прямі BC і PK, і точка Q, в якій перетинаються прямі PT і CD, належать січній площині. Крім того, точки S і Q належать площині основи даної призми. Кожна точка прямої SQ належить січній площині. Тому якщо пряма SQ перетинає ребра AB і AD у точках E і F, то п'ятикутник $KPTFE$ – шуканий переріз. Якщо пряма SQ не перетинає основи призми (рис.), знаходимо точку N перетину прямих BA і SQ, а потім точку M, в якій перетинаються прямі NK і AA_1. У цьому випадку перерізом призми буде чотирикутник $KPTM$.

Можливі й інші випадки. Якщо, наприклад, пряма *PT* буде паралельна *CD*, то описаним способом визначити точку *Q* не можна. У цьому разі проводять *SQ* паралельно *CD*. Якщо точки *K, P, T* задані так, що *PT* || *CD* і *KP* || *CB,* то це означає, що січна площина паралельна основам призми. У цьому випадку на ребрі AA_1 знаходимо точку *M* так, щоб *AM* = *CP,* тоді чотирикутник *KPTM* – шуканий переріз.

Можна звернути увагу учнів, що пряма *SQ*, по якій перетинається січна площина з площиною основи, називається слідом січної площини на площині основи, а пряма *PQ* – слідом січної площини на площині C_1CD і т. д. Тому описаний спосіб розв'язання задачі називають ***способом слідів***.

Другий спосіб. Проаналізуємо рис. 3.3.3. Нехай *KPTM* – переріз, який треба побудувати. Одну з його діагоналей *KT* можна побудувати, бо дано точки *K* і *T.* Задача зводиться до побудови другої діагоналі.

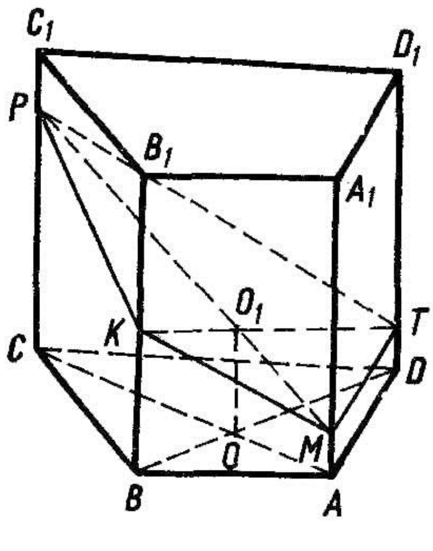


рис. 3.3.4.

Проекції обох цих діагоналей побудувати неважко, бо вони є діагоналями основи призми. Встановимо відповідність: діагоналі перерізу *KT* відповідає проекція *BD;* діагоналі перерізу *PM* – проекція *CA*; перетину діагоналей перерізу O_1 – точка *O.*

З описаного аналізу випливає такий спосіб розв'язання задачі:

1) проводимо діагоналі основи призми *AC, BD* і позначаємо точку *0* їх перетину;

2) проводимо діагональ перерізу *KT,* яку можна провести;

3) через точку *0* проводимо пряму, паралельну AA_1 до перетину з діагоналлю *KT* в точці O_1,

4) проводимо пряму PO_1. до перетину з AA_1 у точці *M.*

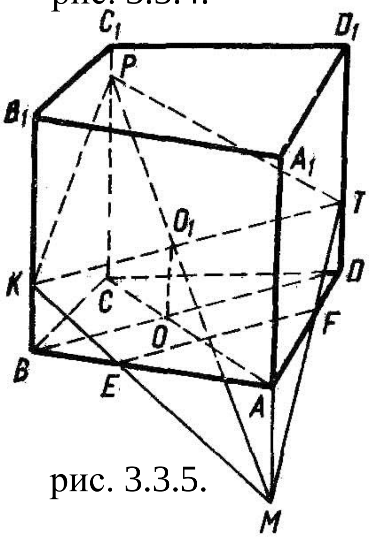


рис. 3.3.5.

Залежно від того, як розміщені дані точки *К, Р* і *Т,* у перерізі може бути чотирикутник *КРТМ* (рис. 3.3.4.) або п'ятикутник *КРТFЕ* (рис. 3.3.5.).

Цей спосіб розв'язання задачі називається ***способом відповідності***

Не менш загальним і доступним для учнів є ***спосіб паралельних площин***. Проілюструємо його на прикладі тієї самої задачі.

Щоб побудувати переріз призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через дані на її бічних ребрах точки *К, Р, Т* (рис. 3.3.6.), треба:

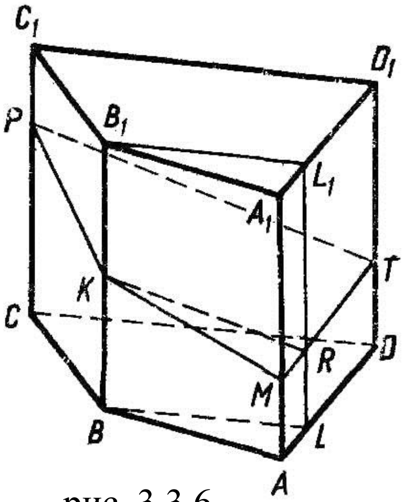


рис. 3.3.6.

1) провести $BL \parallel CD$, позначити точку *L*, в якій перетинаються прямі *BL* і *AD;*

2) провести $LL_X \parallel AA_1$,

3) провести *KR* II *PT,* позначити точку *R,* в перетинаються прямі *KR* і LL_1,

4) провести пряму *TR* до перетину з AA_1 у точці *M*.

Чотирикутник *КРТМ* – шуканий переріз. Якщо пряма *TR* перетинає не ребро AA_1, а його продовження, то в перерізі буде п'ятикутник.

Користуючись згаданими трьома способами, можна будувати перерізи не тільки призм, а й інших многогранників. Правда, будуючи переріз піраміди способом відповідності, треба розглядати не паралельні проекції, а центральні. На рис. 3.3.7. і 3.3.8. показано, як побудувати переріз піраміди *SABCD* площиною, що проходить через дані точки *К, Р, Т.* Спосіб паралельних площин для побудови перерізів пірамід менш раціональний, тому з ним учнів можна не ознайомлювати. Можна не розглядати й способу відповідності, але з способом слідів бажано ознайомити учнів.

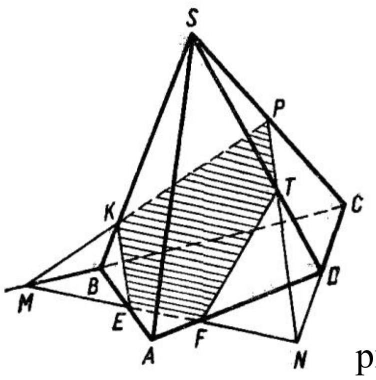


рис. 3.3.7.

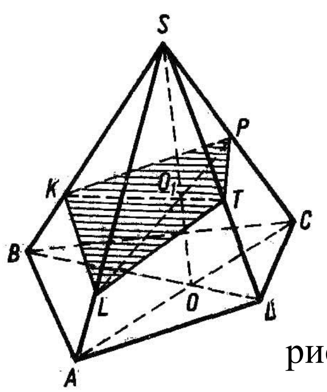


рис. 3.3.8.

Найважча для учнів задача на побудову перерізу многогранника площиною, що проходить через точки, задані на попарно мимобіжних ребрах. Розв'яжемо таку задачу.

Задача. На трьох попарно мимобіжних ребрах паралелепіпеда взято три точки. Побудуйте переріз, що проходить через ці три точки.

Розв'язання

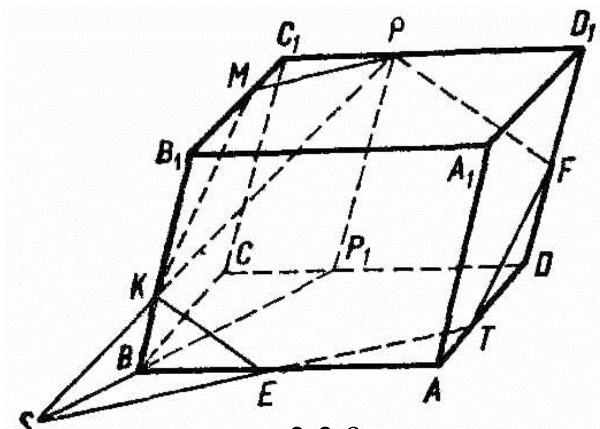


рис. 3.3.9.

Щоб побудувати переріз паралелепіпеда, зображеного на рис.3.3.9, який проходив би через точки *K, P T,* позначимо проекцію (паралельну бічному ребру) точки *P* буквою P_1. Якщо прямі *PK* і P_1B перетинаються в точці *S,* знаходимо точку *E,* в якій пряма *ST* перетинає ребро *AB.* Далі у верхній основі паралелепіпеда проводимо відрізок *PM,* паралельний *TE.* а в грані C_1CD — відрізок *PF,* паралельний *KE.* Шестикутник *KMPFTE* — переріз, який треба було побудувати.

Коли б даний шестигранник не мав паралельних граней, закінчувати побудову треба було б інакше: $ST \cap CD = Q$, $QP \cap DD_1 = F$, $QP \cap CC_1 = R$, $RK \cap B_1C_1 = M$

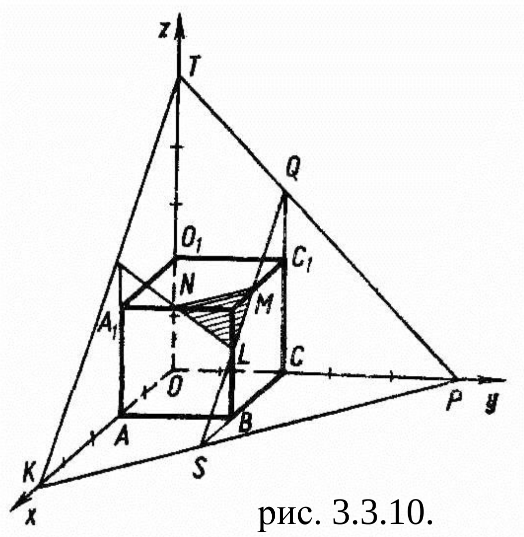


рис. 3.3.10.

Задача. Чотири вершини куба розміщені в точках *0* (0; 0; 0), *A* (2; 0; 0), *C* (0; 2;0), O_1 (0; 0; 2). Побудуйте переріз цього куба площиною, яка проходить через точки *K* (5; 0; 0), *P* (0; 5; 0) і *T* (0; 0; 5).

Побудувавши в прямокутній системі координат за даними координатами куб і площину *KPT* (рис. 3.3.10.), майже усі учні стверджують, що куб лежить поза площиною і, отже, ніякого перерізу не існує. Насправді це не так.

Розв'язання. Якщо прямі *CB* і *KP* перетинаються в точці *S*, а прямі CC_1 і *PT* — в точці *Q*, то пряма *SQ* перетинає ребра куба BB_1 і B_1C_1 у точках *L* і *M*. Аналогічно знаходимо точку *N*. Рівносторонній трикутник *LMN* — шуканий переріз.

Задачі, подібні до двох останніх, краще розглядати на факультативних заняттях.

Досі йшлося про перерізи многогранників площинами, заданими трьома точками. Зрозуміло, що їх можна задавати й інакше.

1. Побудуйте переріз правильного тетраедра площиною, яка перпендикулярна до ребра тетраедра і проходить через його середину.

2. Дано правильну шестикутну призму. Побудуйте її переріз площиною, що проходить через одну з сторін нижньої основи і протилежну їй сторону верхньої основи.

І не тільки до проведення перерізів повинні зводитись задачі на побудову. Треба пропонувати учням також задачі на побудову відрізків, многогранників, окремих точок тощо. І не слід відмовлятись від найпростіших задач, наприклад, таких.

1. Побудуйте відрізок, який сполучає середини двох протилежних ребер правильної трикутної піраміди.

2. Побудуйте відрізок, який сполучає центри двох граней правильного тетраедра.

Радимо пропонувати учням також вправи на побудову многогранників, особливо їх комбінацій. Маємо на увазі, наприклад, такі вправи.

1. Побудуйте піраміду, в основі якої — трапеція. Всі бічні ребра піраміди нахилені до основи під однаковими кутами.

2. Побудуйте куб, вписаний у правильну чотирикутну піраміду так, щоб чотири його вершини лежали на апофемах піраміди, а чотири – на ЇЇ основі.

Розглянемо розв'язання останньої задачі.

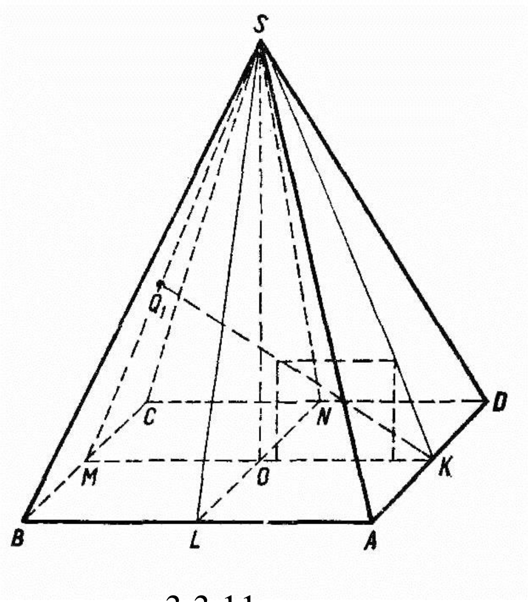


рис. 3.3.11

Спочатку, зрозуміло, треба побудувати правильну чотирикутну піраміду, провести її висоту і всі чотири апофеми (рис. 3.3.11). Потім можна запропонувати учням розмістити вершини вписаного куба «на око». В результаті в учнівських зошитах «куби» будуть або високі, або низькі. Не біда: на помилках навчаються. Тепер учні уважніше слухатимуть пояснення учителя.

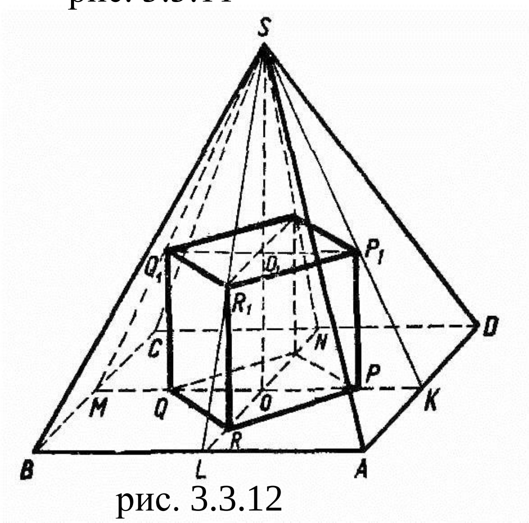


рис. 3.3.12

Діагональний переріз куба повинен бути вписаний у рівнобедрений трикутник *SKM*. Сторони діагонального перерізу куба відносяться які $1:\sqrt{2}$. Намалюємо довільний прямокутник з таким відношенням сторін, як показано на рис. 3.3.11, а потім скористаємось методом подібності. Дістанемо одну з вершин вписаного куба Q,. Тепер уже неважко знайти інші вершини: Q, P_1, P, R_1, R, T_1, T. Усі ребра куба можна зображати штриховими лініями, але можна й так, як показано на рис. 3.3.12.

3.4. Задачі на доведення

Розв'язувати задачі на доведення можна під час вивчення кожної теми цього розділу. Починати краще з найпростіших, які можна розв'язувати й усно. Щоб не витрачати багато часу, корисно пов'язувати їх з якимось одним малюнком.

Задача. На рис. 3.4.1 зображено пряму призму, в основі якої — ромб. Доведіть, що:

1) $B_1A = A_1B$;

2) $A_1B = A_1D$;

3) всі діагоналі бічних граней цієї призми рівні;

4) $AC \perp BD$;

5) $AC \perp B_1D$;

6) $AC \perp (BB_1D)$;

7) $BD \perp (ACC_1)$;

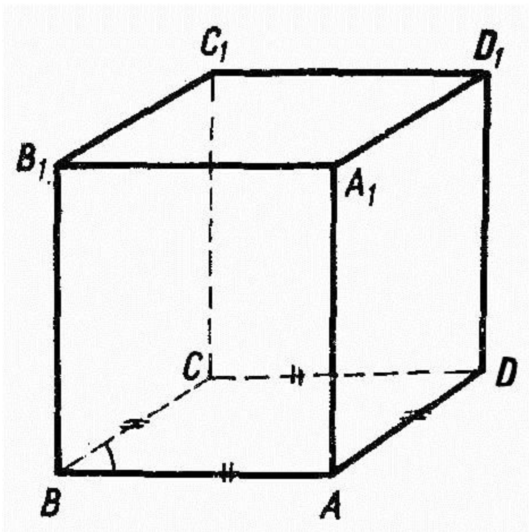
8) ACC_1A_1 — прямокутник;

9) B_1C_1DA — паралелограм;

10) $\Delta B_1AD = \Delta B_1CD$;

11) $\Delta B_1D_1A = \Delta B_1D_1C$;

12) $\angle B_1DA = \angle B_1DC$; і т. д.



мал. 3.4.1

Викликані до дошки (або й з місць) учні по черзі можуть пропонувати свої доведення:

1) призма пряма, тому її бічна грань AA_1B_1B — прямокутник. B_1A і A_1B — його діагоналі, а в кожному прямокутнику діагоналі рівні;

2) в основі даної призми лежить ромб, тому $BA = AD$. Трикутники A_1AB і A_1AD рівні за двома катетами. Отже, і гіпотенузи цих трикутників рівні: $A_1B= A_1D$...

Не обов'язково підряд розв'язувати тільки задачі на доведення, краще різні види задач (навіть пов'язаних з одним малюнком) пропонувати учням по черзі. З часом задачі ускладнюють.

Задача. Три грані паралелепіпеда, які мають спільну вершину,— прямокутники. Доведіть, що всі інші його грані – також прямокутники.

Розв'язання. У кожному паралелепіпеді протилежні грані рівні, тому якщо грань *ABCD* – прямокутник, то й протилежна їй грань $A_1B_lC_1D_1$ також прямокутник. Аналогічно доводимо, що й дві інші грані даного паралелепіпеда прямокутники.

Під час розв'язування стереометричних задач на доведення корисно звертати увагу учнів на аналогічні планіметричні задачі, особливо якщо і методи їх розв'язування аналогічні. Бажано кілька таких задач розв'язати на класній дошці паралельно: з одного боку – планіметричну, з другого – стереометричну. Розв'яжемо для прикладу дві задачі

Доведіть, що бісектриса кута трикутника ділить його протилежну сторону на частини, пропорційні двом іншим його сторонам

Нехай *AM* — бісектриса кута *A* трикутника *ABC* (рис. 3.4.2). Доведемо, що *MB: MC = AB: AC.*

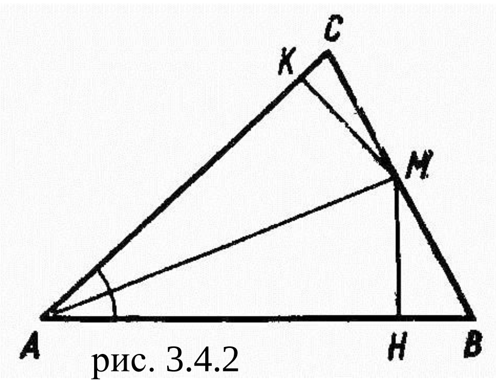


рис. 3.4.2

Доведення

$MB:$ *і* $MC = S_{AMB}$ і S_{AMC}, бо висоти трикутників *AMB* і *AMC,* опущені з вершини *A,* рівні.

Доведіть, що бісектор двогранного кута тетраедра ділить протилежне ребро у відношенні, яке дорівнює відношенню площ граней, що утворюють цей двогранний кут.

Нехай *ADM* — бісектор двогранного кута *BADC* тетраедра *ABCD* (рис. 3.4.3). Доведемо, що *MB : MC =*
$= S_{ADB} : S_{ADC}$

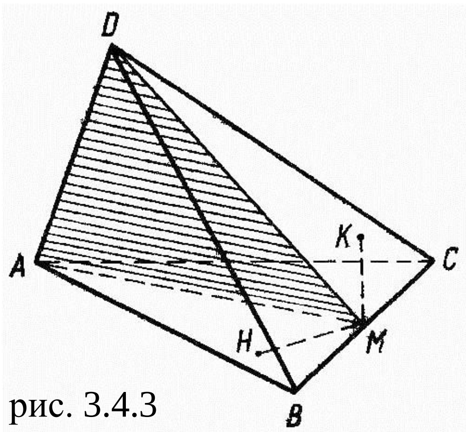


рис. 3.4.3

Доведення. $MB : MC = S_{AMB} : S_{AMC} = V_{DAMB} : V_{DAMC}$, бо

Якщо *MH* І *MK* — висоти трикутників *MAB і MAC,* то

$$S_{AMB} : S_{AMC} = (\frac{1}{2} MN \cdot AB) :$$

$$: (\frac{1}{2} MK \cdot AC) = AB : AC,$$

бо *MH = MK*

Якщо, *MB : MC = AB : AC.*

висоти тетраедрів DAMB і DAMC, опущені з вершини D, рівні. Якщо *MH* і *MK* — висоти тетраедрів *MABD* і *MABC,* то

$$V_{DAMB} : V_{DAMC} = (\frac{1}{3} MH \cdot S_{ABD}) :$$

$$: (\frac{1}{3} MK \cdot S_{ACD}) = S_{ABD} : S_{ACD},$$ бо

MH = MK. Отже, MB : MC = $= S_{ADB} : S_{ADC}$

Особливо радимо розв'язати з учнями такі задачі на доведення, які можна використовувати при розв'язуванні інших задач.

1. Доведіть, якщо в піраміді одна із граней перпендикулярна площині основи, то висота піраміди співпадає з висотою трикутника, що обмежує цю грань.

2. Доведіть, якщо у піраміди дві грані перпендикулярні до площини основи, то висота піраміди співпадає з ребром спільним для цих двох граней.

3. Доведіть, що коли всі бічні ребра піраміди рівні, то всі вони нахилені до площини основи під однаковими кутами і висота цієї піраміди проектується в центр кола, описаного навколо основи піраміди.

4. Доведіть, що коли всі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під однаковими кутами, то всі вони рівні.

5. Доведіть, що коли всі двогранні кути при основі піраміди рівні, то висота такої піраміди проходить через центр кола, вписаного в її основу.

6. Доведіть, що коли висота піраміди проходить через центр кола, вписаного в її основу, то всі двогранні кути при основі такої піраміди рівні

Вище названі задачі розв’язано у пункті 2.3.

У другому розділі розглянуто ще декілька задач на доведення, які можна використовувати на уроках і факультативних заняттях.

3.5. Задачі на дослідження

Задач на дослідження властивостей многогранників багато. Серед них – задачі на дослідження існування многогранників із заданими властивостями, на порівняння, на встановлення умов і залежностей, на підтвердження або спростування тверджень тощо.

Задача. Чи може бути гранню п'ятигранника п'ятикутник?

Розв'язання. Якщо одна з граней многогранника — п'ятикутник, то крім неї, цей многогранник має ще принаймні п'ять граней (тих, що прилягають до кожної з п'яти сторін даного п'ятикутника). Отже, найменше число граней многогранника, одна з граней якого п'ятикутник,— шість.

Відповідь. Не може бути.

Задача. Чи існує призма, яка має рівно 500 ребер?

Розв'язання. Припустимо, що така n-кутна призма існує. При кожній з основ її є по n ребер, крім них, вона має ще n бічних ребер. Всього така призма має $3n$ ребер. Рівняння $3n = 500$ не має розв'язків у натуральних числах.

Відповідь. Не існує.

Зрозуміло, що й такі задачі можна ілюструвати відповідними малюнками. Але вони не обов'язкові

Задача. Чи існує чотирикутна піраміда, дві протилежні бічні грані якої перпендикулярні до площини основи?

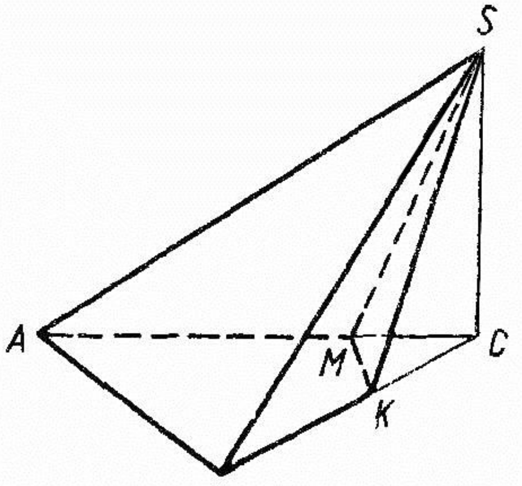


рис. 3.5.1

Щоб правильно відповісти на поставлене запитання, досить навести один вдалий приклад, або показати, як можна побудувати піраміду з заданими властивостями.

Розв'язання. Розглянемо трикутну піраміду *SABC,* *в* якої бічне ребро *SC* перпендикулярне до площини основи.

Візьмемо на ребрах *AC* і *BC* точки *M* *і* *K* (рис. 3.5.1.) і перетнемо піраміду *SABC* площиною *SKM.* Утворена при цьому піраміда *SABKM* задовольняє умову задачі: вона чотирикутна, протилежні бічні грані її *SAM* і *SBK* перпендикулярні до площини основи.

Відповідь. Існує.

Задача. Чи може правильна піраміда бути правильним многогранником?

На це запитання багато учнів відповідають неправильно. Окремі міркують навіть так:

— Кожна піраміда є многогранником, тому кожна правильна піраміда є правильним многогранником.

Учитель повинен підкреслити, що далеко не кожна правильна піраміда чи правильна призма є правильним многогранником. Згідно з означенням у правильному многограннику всі грані — рівні правильні многокутники. А наприклад, у правильній чотирикутній піраміді бічні грані — трикутники, не обов'язково правильні, а основа — квадрат.

Розв'язання. У правильному многограннику всі грані повинні бути рівними правильними многокутниками. У кожній піраміді бічні грані — трикутники Отже, з усіх пірамід тільки трикутні можуть бути правильними многогранниками. І то тільки ті, в яких усі чотири грані рівні рівносторонні трикутники. Це— трикутна піраміда, всі шість ребер якої рівні.

Відповідь. Може бути.

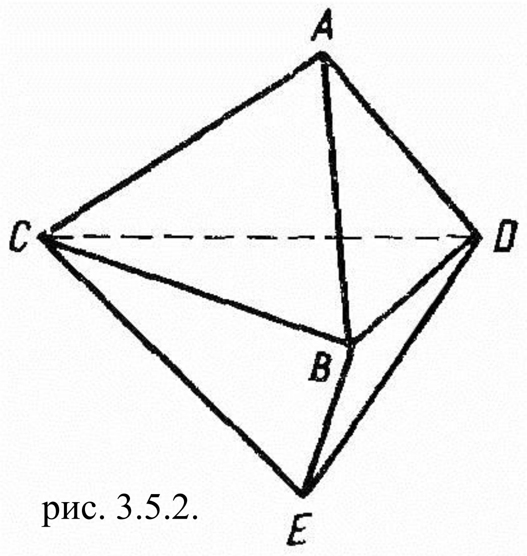


рис. 3.5.2.

Задача. На рис. 3.5.2. зображено многогранник, усі шість граней якого рівні рівносторонні трикутники. Чи правильний цей многогранник?

Розв'язання.

Згідно з означенням у кожній вершині правильного многогранника повинна збігатись однакова кількість ребер. А в

намальованому многограннику при
вершині A збігаються три ребра, а при вершині B — чотири.

Відповідь. Даний многогранник не правильний.

Задача. Площі бічних поверхонь двох прямих паралелепіпедів рівні між собою. Чи рівні об'єми цих паралелепіпедів, якщо їх основи мають рівні площі?

Розв'язання. Розглянемо два прямокутні паралелепіпеди, в основі одного з яких лежить квадрат, а другого — прямокутник. Нехай сторона квадрата дорівнює 4, а сторони прямокутника — 8 і 2 одиниці довжини. Площі квадрата і прямокутника рівні: $4^2 = 8 \cdot 2$. Припустимо, що площа бічної поверхні кожного з цих паралелепіпедів дорівнює Q. Тоді їх висоти

$$H_1 = \frac{Q}{16},\ H_2 = \frac{Q}{20}$$

Отже, об'єми розглядуваних паралелепіпедів

$$V_1 = 16 \cdot \frac{Q}{16} = Q,\ V_2 = 16 \cdot \frac{Q}{20} = 0{,}8 \cdot Q.$$

Відповідь. Об'єми таких паралелепіпедів можуть бути не рівними. Роботу над задачею можна продовжити: уточнити, коли паралелепіпеди із заданими властивостями мають рівні об'єми, а коли ні. Однак ця задача набагато важча від сформульованої, тому її доцільно розглянути на факультативних або позакласних заняттях.

Задача. Чи існує многогранник, зображений на рис. 3.5.3?

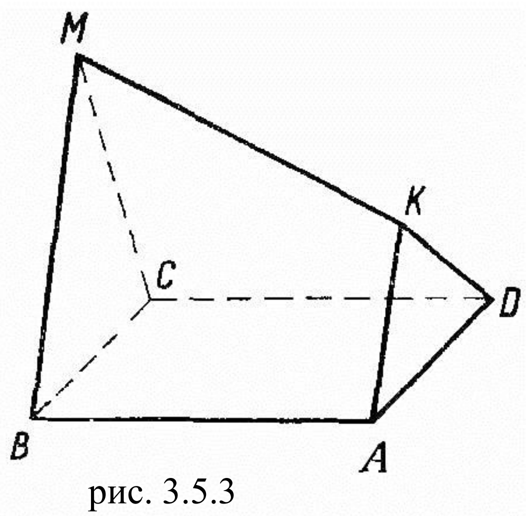


рис. 3.5.3

Розв'язання.

На рис. __ відрізки AB і CD паралельні. Вони не можуть зображати мимобіжні ребра, бо належать одній грані $ABCD$, тому $AB \parallel CD$ і площини $ABMK$ і $DCMK$ повинні перетинатись по прямій MK, паралельній AB. А відрізок MK не паралельний *AB*. Отже, малюнок не відповідає многограннику.

Відповідь. Не існує

Нерідко учні не вірять такому розв'язанню:

— Адже намальовано многогранник! Ми бачимо всі його ребра і всі грані. У нього дві грані — трикутники, а три — чотирикутники.

Спростувати такі заперечення найкраще за допомогою моделі. Досить показати, що принаймні один з чотирикутників *ABMK* чи *DCMK* не плоский. Якщо на малюнку додатково провести один з відрізків — *BK, CK, AM* або *DM,* то дістанемо зображення многогранника.

Задача. У якої правильної піраміди всі діагональні перерізи рівні?

Розв'язання. Трикутна піраміда діагональних перерізів не має. Діагональні перерізи правильної чотирикутної піраміди рівні, бо діагоналі квадрата рівні.

Усі п'ять діагоналей правильного п'ятикутника також рівні, тому й діагональні перерізи правильної п'ятикутної піраміди рівні рівнобедрені трикутники; їх бічні сторони — рівні бічні ребра правильної піраміди.

Діагоналі правильного n-кутника при $n \geq 6$ не всі рівні. Тому в n-кутної піраміди при $n \geq 6$ не всі діагональні перерізи рівні.

Відповідь. У чотирикутної і п'ятикутної правильної піраміди.

Задача. Чи існують неправильні піраміди, всі діагональні перерізи яких рівні?

Розв'язання. Розглянемо піраміду, в основі якої лежить рівнобедрена трапеція, а висота проектується в точку перетину діагоналей цієї трапеції. Обидва її діагональні перерізи — рівні трикутники.

Відповідь. Існують.

Для відповіді на поставлене запитання досить навести один приклад. Але не треба думати, що тільки згадана в розв'язанні піраміда має рівні діагональні перерізи. Наприклад, рівні діагональні перерізи має кожна піраміда, в основі якої лежить прямокутник, і висота якої проектується на вісь симетрії цього прямокутника.

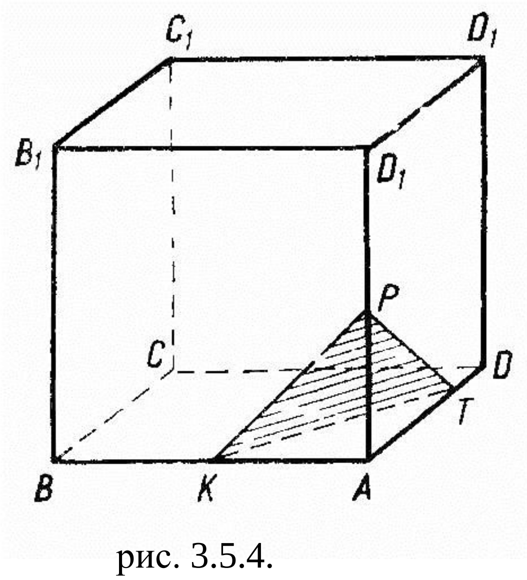


рис. 3.5.4.

Задача. Чи може в перерізі куба площиною утворитись прямокутний або тупокутний трикутник?

Розв'язання.

Трикутник у перерізі куба площиною буде тоді, коли січна площина перетинає три ребра, що виходять з однієї вершини. З'ясуємо, чи може бути прямокутним або тупокутним трикутник *KPT,* зображений на рис. 3.5.4. Нехай $\angle\ KPT$ — α, тоді згідно з теоремою косинусів

$$KT^2 = KP^2 + PT^2 - 2KP \cdot PT \cdot \cos\alpha .$$

З другого боку

$$KT^2 = KA^2 + AT^2 < KP^2 + PT^2.$$

Це можливо тільки тоді, коли cosα > 0, тобто коли α < 90°.

Задачу можна розв'язати й векторним методом:

$$\overrightarrow{PK} \cdot \overrightarrow{PT} = \left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AK}\right) \cdot \left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AT}\right) = \overrightarrow{PA}^2 + \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AT} > 0$$

що можливо тільки при α < 90°.

Аналогічно можна довести, що й кожний з кутів *PKT* і *PTK* не може бути ні прямим, ні тупим.

Відповідь. Ні.

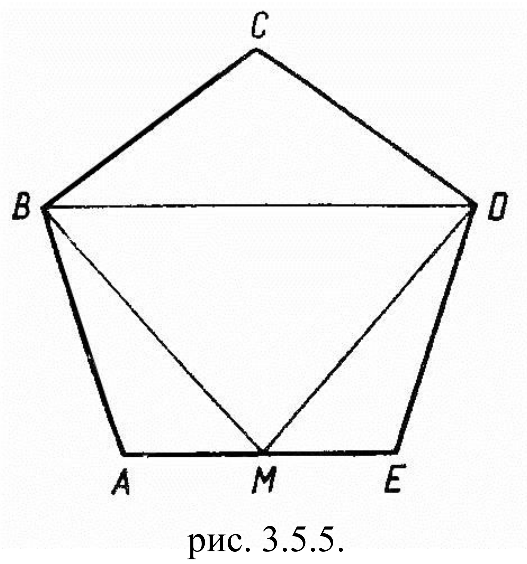


рис. 3.5.5.

Задача. Чи існує тетраедр, розгорткою якого є правильний п'ятикутник?

Розв'язання. Нехай *ABCDE* — правильний п'ятикутник, а *M* — середина його сторони *AE* (рис. 3.5.5.). Перегнемо цей п'ятикутник по відрізках *BD, DM* і *MB* так, щоб його вершини *A, C* і *E* збіглися в одній точці S, розміщеній над площиною *BDM.* В результаті дістанемо тетраедр *SBDM,* розгорткою якого є правильний п'ятикутник.

Відповідь. Існує.

Задача. *SABCD* — правильна чотирикутна піраміда (рис. 3.5.6.). У яких межах може змінюватись:

1) кут α при її вершині;

2) кут β між бічним ребром і стороною основи;

3) двогранний кут φ при бічному ребрі?

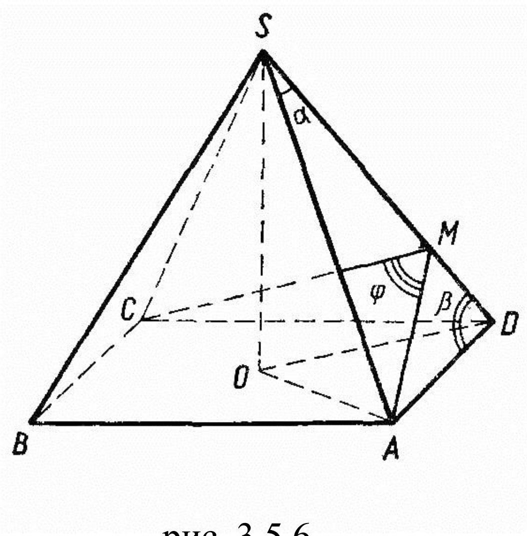


рис. 3.5.6.

Задачу можна розв'язати, порівнявши відношення відповідних відрізків. Але швидше і природніше можна дати відповідь, якщо розглянути зміну зазначених кутів від зміни висоти піраміди.

Розв'язання. 1) Якщо висота *SO* піраміди зменшується до 0, то кут *ASD* прямує до кута *AOD,* а якщо вона збільшується, то величина кута α прямує до 0. Отже, $0° < \alpha < 90°$.

2) Якщо висота *SO* піраміди зменшується, то кут *SDA* прямує до кута *ODA,* а якщо вона необмежено збільшується, то ребро *SD* наближається до перпендикуляра, проведеного до основи піраміди через її вершину D. Отже, $45° < \beta < 90°$.

3) Із зменшенням висоти піраміди *SO* кут *AMC* прямує до кута *AOC,* а із збільшенням – до кута *ADC.* Отже, $90° < \varphi < 180°$.

Відповідь. $0° < \alpha < 90°$, $45° < \beta < 90°$, $90° < \varphi < 180°$.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 3

Провівши аналіз методів розв'язування задач з основних розділів теми «Многогранники, можемо виділити п'ять основних методів:

1. Задачі на зображення многогранників у паралельній проекції;
2. Задачі на обчислення;
3. Задачі на побудову;
4. Задачі на доведення;
5. Задачі на дослідження.

Для того щоб навчитися розв'язувати стереометричні задачі, потрібно навчитися правильно зображувати просторові фігури на площині. Для цього потрібно володіти двома методами – паралельним проектуванням і центральним проектуванням (перспективою). При паралельному проектуванні, потрібно враховувати властивості фігур, що проектуються, перш за все ті, які залишаються незмінними (інваріантними) при паралельному проектуванні, хоча докладний розгляд питань зображення просторових фігур в паралельній проекції виходить далеко за межі шкільної програми.

При розв'язуванні задач на обчислення, визначаються довжини відрізків, величини кутів, площі перерізів, поверхні та об'єми найпростіших многогранників. Рекомендуємо слідувати закону наступності: від простого до більш складного, оскільки без вироблення умінь і навичок розв'язувати найпростіші задачі не можна навчити добре розв'язувати задачі середньої складності. Також слід звернути увагу на розв'язування усних задач і розв'язування послідовно кількох задач за одним малюнком.

При розв'язуванні задач на побудову перерізів многогранників площинами, ефективним є їх розв'язання на проекційних малюнках. Основні способи таких побудов – спосіб слідів і спосіб відповідності. Не менш загальним і доступним для учнів є спосіб паралельних площин.

Користуючись згаданими трьома способами, можна будувати перерізи всіх многогранників.

Розв'язувати задачі на доведення можна під час вивчення кожної теми цього розділу, при цьому рекомендується пов'язувати їх з якимось одним малюнком. Під час розв'язування стереометричних задач на доведення корисно звертати увагу учнів на аналогічні планіметричні задачі, особливо якщо і методи їх розв'язування аналогічні.

Також слід звернути особливу увагу на розв'язування задач на дослідження властивостей многогранників, серед яких: задачі на дослідження існування многогранників із заданими властивостями, на порівняння, на встановлення умов і залежностей, на підтвердження або спростування тверджень тощо.

ВИСНОВКИ

Вивчення в шкільному курсі многогранників є доцільним у зв'язку з тим, що вивчення цієї теми розв'язує завдання формування в учнів реального погляду на оточуючий світ, оскільки ми живемо у тривимірному просторі. Не зручно те, що вивчення стереометрії припадає на останній рік навчання, бо не залишається часу для ґрунтовного застосування стереометрії до розв'язання задач та теоретичних поглиблень окремих питань у наступному класі.

Основна мета вивчення теми – спираючись на уявлення і знання про многокутники, одержані при вивченні математики, креслення і в життєвому досвіді, ввести означення многогранника і його видів, вивчити їх властивості і застосовувати при розв'язуванні задач, далі розвивати просторові уявлення й уяву, логічні, графічні і обчислювальні вміння. Здатність до оперування просторовими образами є однією з важливих сторін інтелектуального розвитку особистості. Уявлення і образи уяви виникають не миттєво і не в закінченому вигляді, а формуються поступово. Складність формування просторової тривимірної уяви, у порівнянні з двовимірними образами на площині, обумовлена їх динамічністю, тобто необхідністю поступового переходу від об'ємних зображень до площинних і навпаки.

У ході написання дипломної роботи були вирішені всі поставлені завдання, тим самим мета дипломної роботи була досягнута. Було здобуто такі результати:

1) опрацьовано науково-методичні джерела та навчальну літературою за напрямками дослідження;
2) проаналізовано програму навчання геометрії в старшій школі;
3) зроблено порівняльний аналіз та виділено особливості введення основних понять з теми «Многогранники» у шкільних підручниках;
4) сформульовано методичні вказівки до формування основних понять з теми дослідження;

5) виділено методичні особливості розв'язування задач з основних розділів теми «Многогранники».

Отримані результати дослідження, умови їх створення, апробування та оцінювання дають підстави зробити наступні висновки:

1) Засоби навчання, такі як моделі просторових фігур та наочні приладдя дозволяють вчителю більш глибоко пояснити матеріал, тим самим краще формувати та розвивати предметну математичну компетентність та просторову уяву.

2) Уміння виконувати побудови зображень стереометричних фігур на площині необхідні фахівцям у багатьох сферах діяльності. Найбільша відповідальність за їх формування в нинішніх умовах покладена на шкільний курс геометрії, зокрема, стереометрії. Тому потрібно працювати над формуванням і розвитком вмінь старшокласників будувати зображення стереометричних фігур та їх перерізів та використання цих навичок під час розв'язування задач, доведення теорем тощо.

3) Уміння будувати зображення просторових фігур та їх перерізів мають бути структуровані на елементарні вміння, з яких формуються більш складні, поки не сформуються узагальнені вміння, яких повинні набути учні на кінець вивчення курсу стереометрії. Така ієрархія вмінь має бути чітко прописана в програмі з геометрії для старшої школи, у вигляді компетентностей, якими мають оволодіти старшокласники під час вивчення курсу стереометрії.

4) В процесі розв'язування усних задач, зокрема, при вивченні стереометрії: активізується просторова уява учнів; засвоюються базові поняття певної теми та співвідношення між ними; економиться навчальний час в процесі уроку. Основним засобом розвитку просторового мислення учнів є розв'язування стереометричних задач, зокрема, з теми «Многогранники».

5) Для досягнення позивних результатів у формуванні в учнів математичної компетентності доцільно використовувати таблиці, схеми,

наочні моделі тіл обертання та їх перерізів, добірки орієнтованих усних задач, добірки орієнтованих базових задач, комп'ютерні, анімаційні динамічні 3-D моделі, тощо.

6) Привертати особливу увагу учнів до розв'язування задач на знаходження об'ємів многогранників.

Дана дипломна робота може бути використана вчителями при підготовці та проведенні уроків з теми «Многогранники» для учнів 11 класів, студентами при написанні курсових робіт, абітурієнтами для підготовки до вступних іспитів, а також для самоосвіти.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Адамар Ж. Елементарна геометрія, ч. ІІ, Стереометрія. – К.: Рад. шк., 1955. – 735 с.
2. Александров А.Д. и др. Геометрия для 10–11 классов: Учеб. Пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. математики. – 3-е изд., перераб. – М.: Просвещение, 1992. – 464с.
3. Антоненко М.І. Розв'язування геометричних задач: Книжка для вчителя. – К.: Рад. шк., 1991. – 128 с.
4. Апостолова Г.В. Стереометрія в опорних схемах. – К.: Факт, 2000. – 68 с.
5. Бевз Г.П., Бевз В. Г., Владіміров В.М., Владімірова Н.Г. Підручник для учнів 10–11 класів з поглибленим вивченням математики в середніх загальноосвітніх закладах. – К.: Освіта, – 2000. – 239 с.
6. Бевз Г.П., Бевз В. Г. Вивчення елементів стереометрії в основній школі. // Математика. – 2002. – № 13.
7. Бевз Г. П. Математика: Проб. підруч. для 11 кл. серед. шк. – К.: Освіта, 1995. – 191 с.
8. Бевз Г.П. Методика розв'язування стереометричних задач: Посібник для вчителя. – К.: Рад. шк., 1988. – 192 с.
9. Бурда М.І., Дубинчук О.С., Мальований Ю. І. Математика 10–11: Проб. навч. посібник для шк., ліцеїв та гімназій гуманітар. профілю. – К.: Освіта, 1997. – 224 с.
10. Березняк О.С. Розв'язання екзаменаційних завдань з математики. Частина 2. Геометрія. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2000.– 104 с.
11. Веселовский С.Б., Колесникова Л.В., Рябчинская В.Д. Изучение геометрии в 10 классе: Метод. пособие /Под ред. проф. И.Ф.Тесленко. – К.: Рад. шк., 1985. – 136 с.
12. Гельфанд М.Б., Лоповок Л.М., Скобелєв Г.М., Тесленко І.Ф. Розв'язування геометричних задач у середній школі /За редакцією доц. Лоповок Л.М. – К.: Рад. школа, 1972. – 257 с.

13. Генденштейн Л.Е., Єршова А.П. Наочний довідник з геометрії. – Харків–Тернопіль: Гімназія – Підручники і посібники, 1997. –96 с.
14. Геометрія: проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти/ А.Г.Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б.Полонський, М.С.Якір.– Х.: Гімназія, 2018. –240 с. :іл.
15. Геометрія: (профіл. рівень): підруч. для 11 кл. закл. заг. серед. освіти/ Олександр Істер, Оксана Єргіна. –Київ: Генеза, 2019.–288с.:іл.
16. Геометрія: початок вивч. на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А.Г.Мерзляк, Д.А.Номіровський, В.Б.Полонський та ін.–Х.: Гімназія, 2019.–240 с.:іл.
17. Геометрія (профільний рівень) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. — Харків : Вид-во «Ранок», 2019. — 208 с.
18. Гольдберг Я.Е. С чего начинается решение стереометрической задачи: Пособие для учителя. – К.: Рад. шк., 1990. – 118 с.
19. Гончаренко Б.Г. Задачи и вопросы по стереометрии (для устного решения). – М.: Просвещение, 1964. – 96 с.
20. Епишева О. Б., Крупич В. И. Учить школьников учиться математике: Кн. для учителя – М.: Просвещение, 1990. − 128 с.
21. Кнопський В.М., Скопець З.А., Ягодовський М.І. Геометрія: Навчальний посібник для 10 класу середньої шк. – К.: Рад. шк., 1978. – 160 с.
22. Кушнір І.А. Трикутник і тетраедр у задачах: Для ст. шк. віку. – К.: Рад. шк., 1991. – 208 с.
23. Математика. 5 клас: підруч. для закладів загальної середньої освіти / А.Г.Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Ч. :Гімназія, 2018 – 272с.:іл.
24. Математика: підруч. для 6 класу загальноосвіт. навч. закл./ Н.А.Тарасенкова, І.М.Богатирьова, О.М.Коломієць, З.О.Сердюк,. – К.:Видавничий дім «Освіта», 2017. –304 с.
25. Межейнікова Л.С. Про визначення поняття активізація пізнавальної діяльності учнів в процесі навчання. // Дидактика математики: проблеми

і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. – 2005. – Вип. 23. – 112 с.

26. Методика стереометрії. /За ред. Астряба О.М., Білоусової В.П. – 2-е видання. – К.: Рад. шк., 1949. – 192 с.
27. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика / В. А. Оганесян, Ю. М. Колягин, Г. Я. Луканин, В. Я Соминский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1980. – 367 с.
28. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика / Сост.: В. С. Черкасов, А. А. Столяр. – М.: Просвещение , 1985. – 336 с.
29. Мізенко Г. Задачі з геометрії для розвитку математичних здібностей дітей. // Математика. – 2001. – № 1.
30. Моляко В. А. Психология решения школьниками творческих задач. – К.: Рад. шк., 1983. – 94 с.
31. Общая психология. Учебное пособие для студентов пед. ин-тов. Под ред. В. В. Богословского и др. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Просвещение, 1973.
32. Орач Б. Побудова перерізів многогранників. // Математика. – 2004. – № 27-28.
33. Прокопенко Н.С., Щекань Н.П.(відповідальні за випуск). Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. Навчальні програми для профільного навчання. Програми факультативів, спецкурсів, гуртків. Математика. – К: Навчальна книга, 2003 – 302с.
34. Погорєлов О.В. Геометрія: Стереометрія: Підручник для 10–11 кл. серед. шк. – 6-те вид. – К.: Освіта, 2001. – 128 с.
35. Развитие творческой активности школьников. / Под ред. Матюшкина А.М.; Науч. – исслед. ин-т общей и педагогической психологии Акад. пед. наук СССР. – М.: Педагогика, 1991. – 160 с.
36. Роганін О.М. Геометрія. 11 клас: Плани-конспекти уроків. – Харків: Веста: Видавництво «Ранок», 2003. – 256с.

37. Рословой Л., Бусев В. Профильное обучение: вопросы и ответы. // Математика. – 2006. – № 14.
38. Саранцев Г. И. Обучение решению задач на построение сечений многогранников // Мат. в шк. – 1991. – № 5 – С.35 – 40
39. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512с.
40. Слепкань З.И. Психолого-педагогические основы обучения математике: Метод. пособие. – К.: Рад. школа, 1983. – 192 с.
41. Танабаш Л.Ю. Креативність, або творчі здібності. // Математика в школах України. – 2004. – №11.
42. Хоха В. Многогранники. // Математика. – 2003. – № 2.
43. Шарыгин И. Ф. Учимся решать задачи по геометрии. // Математика в школе – 1989.- № 4 – С. 73-81.
44. Ярославська Г. М. Многогранники? Еврика! Урок-гра в 11 класі. // Математика в школах України. – 2005. – № 30. – 40 с.
45. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv
46. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv
47. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Поглиблений рівень [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv