Our experimental study is devoted to the use of video scribing as one of the methods of increasing the level of students` cognitive interest of grades 6-9 in the study of biology, as well as their better assimilation of knowledge, abilities and skills in this subject, defined by the training program.

Having analyzed the scientific and methodological works of modern researchers, we learned the essence of cognitive interest as an important component for stimulating motivation to study biology, the age characteristics` students of grades 6-9, the specifics of conducting research on the level of cognitive interest in students of the specified category, as well as the patterns of using video scribing as one on methods of increasing the level of cognitive interest of adolescents in the study of biology.

Based on the recommendations for conducting the specified technique, we created our own and implemented it during an experimental study. We investigated that the indicators of the level of cognitive interest of children were lower than they became after using the technique. So, we can state that the use of video scribing as a method of stimulating students' cognitive interest in studying biology and better assimilation of educational material from this subject is effective.

Key words. *Methodology of using videoscribing, videoscribing, cognitive interest, cognitive interest in studying biology, levels of cognitive interest, psychological features of adolescent development, methods of stimulating cognitive interest, modern problems of Ukrainian educational institutions.*

УДК 514.12(07)
DOI 10.5281/zenodo.10213847

Н. П. Селезньова
ORCID ID 0000-0003-0849-3092
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
О. І. Кушлик-Дивульська
ORCID ID 0000-0002-4999-6641
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ. КАНОНІЧНИЙ ВИГЛЯД

Проаналізовано стан математичної освіти в країні, рівень знань з математики за останні роки, її вивчення в провідному вузі.

Показано важливість вивчення такого розділу вищої математики як «Елементи аналітичної геометрії» для технічних спеціальностей вузів, також навчальної дисципліни «Аналітична геометрія» для фізико-математичних та математичних факультетів. Важливим розділом аналітичної геометрії є теорія кривих другого порядку, а в цьому розділі займає чільне місце – задача зведення рівняння кривої другого порядку до канонічного виду.

В статті проаналізовано особливості розв'язання цієї задачі, методики зведення квадратичних форм до канонічного вигляду. Проведено аналіз дослідження канонічного вигляду кривих в декартовій системі координат. Висвітлено і обґрунтовано особливості розв'язання таких задач у випадку задання кривої рівнянням в косокутній декартовій системі координат. Вказано на важливість інваріантів перетворення. Показано відмінності трьох основних інваріантів перетворення кривої при переході від косокутної системи координат до прямокутної канонічної від інваріантів ортогонального перетворення кривої при зведенні її до канонічного вигляду. Наведено приклад зведення кривої другого порядку, яка задана в косокутній системі координат, до канонічного вигляду різними способами.

Проведене теоретичне обґрунтування, аналітичні дослідження кривих другого порядку мають прикладне значення в теоретичній механіці. Запропонована практична задача суттєво підвищить зацікавленість студентів у вивченні курсу аналітичної геометрії, сприятиме кращому розумінню ролі інваріантів. Для подальших досліджень такого змісту задач пропонується зведення до канонічного вигляду різного типу кривих другого порядку. Також планується вивчення подання поверхонь другого порядку в косокутній декартовій системі координат.

Ключові слова: *аналітична геометрія, криві другого порядку, інваріанти, косокутна та прямокутна системи координат, квадратична форма, канонічний вигляд, головні напрямки кривої другого порядку, еліпс.*

Постановка проблеми. За останні роки система освіти України суттєво реформувалася. Недостатня математична освіта, низька математична культура у XXI ст. можуть стати серйозною перешкодою на шляху до формування професійних якостей майбутнього випускника вищого навчального закладу. В наш час відбувається постійне скорочення годин, виділених на вивчення математики, збільшується розрив між рівнем математичних знань випускників ВНЗ і об'єктивними потребами сучасної науки і техніки, існує певна невідповідність шкільного курсу математики з вимогами до знань студентів у вищій школі.

Якість вищої освіти сильно погіршилась за рахунок скорочення кількості не тільки аудиторних годин, а й зменшення обсягу матеріалу, що вивчається. Як зазначено в [9], «без фундаментальних знань неможливе розуміння природи навколишніх процесів і явищ…». На жаль, середня кількість аудиторних годин з математики по університету КПІ імені Ігоря Сікорського з 2016-2017 н.р. до 2022-2023 н.р. зменшилась з 324 до 293. Так, аналітичну геометрію на фізико-математичному факультеті в цьому вузі вивчають тільки протягом одного першого семестру (36 лекційних годин та 52 практичних) замість традиційних двох семестрів. Зрозуміло, що зі зменшеною кількістю годин неможливо подати студентам фізико-математичного факультету в повному обсязі весь матеріал. Проблемним у вивченні стає важливий розділ, як – теорія кривих та поверхонь другого порядку, який має широке практичне застосування. У Київському національному університеті імені Тараса Шевченка взагалі ліквідовано кафедру геометрії.

В результаті значна частина випускників вищих навчальних закладів стала неконкурентоспроможними на європейському ринку праці. Як відомо, конкурентоздатність економіки країни визначається інтелектуальним потенціалом працездатного населення, який формується у вищих навчальних закладах.

Втішним є той факт, що в порівнянні з рівнем підготовки вступників в країні з математики (середній бал ЗНО): 2019 р. – 139,4; 2020 р. – 138,4; 2021 р. – 137,9; 2022 р. – 148,1 для КПІ ім. Ігоря Сікорського маємо суттєво вищі показники: 2019 р. – 170,4; 2020 р. – 166,4; 2021 р. – 167,9; 2022 р. – 174,1. Останнього року середній показник з математики є вищим у зв'язку з проведенням НМТ зі спрощеними завданнями. Більше уваги слід приділяти вивченню такої фундаментальної дисципліни як математика, її розділів. Варто було б зосереджуватись на відомих методиках [1, 6], порівнювати їх, а також опрацьовувати, досліджувати та створювати нові. Власне це відноситься до вивчення кривих другого порядку, зведення їх рівнянь до канонічного вигляду у різних системах координат. Враховуючи оптичні властивості кривих другого порядку, застосування кривих в економіці, техніці, визначення типу кривої за її рівнянням має обґрунтовану зацікавленість для задач прикладного характера.

В умовах військового стану, проведення занять в змішаному режимі, який і буде надалі ще більш затребуваним (період відбудови країни) [3], потрібно навчання робити якомога більш цікавим для студентів. Для цього слід використовувати класичні методи, організовувати продуктивне вивчення математичних дисциплін і, водночас, не виснажливе для всіх учасників навчального процесу.

Звичайно, також варто затосовувати творчі новітні методики із використанням інноваційних технологій для розв'язування практичних задач. Для цього і потрібні ґрунтовні знання фундаментальних дисциплін.

Аналіз актуальних досліджень. Походження назви — аналітична геометрія пов'язують з тим, що французький математик Ф. Вієт буквену алгебру називав — аналітичним мистецтвом. Термін «аналітична геометрія» введено французьким математиком С. Лакруа в четвертому виданні книги «Курс математики» (1807). Першою книгою «Аналітична геометрія» був підручник француза Г. Гарньє (1808). Систематичний виклад аналітичної геометрії в просторі вперше міститься у другому томі швейцарського математика Л. Ейлера «Вступ до аналізу» (1748), який вважається першим курсом аналітичної геометрії. У XVIII ст. завершено формування аналітичної геометрії як науки і як навчального предмету.

Будь-який геометричний об'єкт, геометрична операція мають числову інтерпретацію. Вагомі результати в напрямку арифметизації геометрії були отримані такими відомими вченими як Ферма (не пізніше 1629 року) та Декартом (1637 р.). Основна ідея аналітичної геометрії полягає в застосуванні «координат» – чисел, пов'язаних з геометричним об'єктом, які повністю цей об'єкт характеризують. Усім, ще з шкільного курсу математики, відомі прямокутні або декартові координати, які фіксують положення довільної точки на площині чи у просторі. Більш вузькому колу людей відомі ще афінні координати, які відрізняються від прямокутних тим, що кут між координатними осями не є прямим.

Теоретичні відомості, пов'язані з кривими другого порядку, висвітлені у багатьох навчальних виданнях з аналітичної геометрії [2, 10].

Окремо слід відзначити підручник академіка Ґраве [4] початку XX століття, в якому ґрунтовно описана теорія кривих другого порядку. Значна увага приділяється інваріантам квадратичних та кубічних форм та їх застосуванню до вивчення властивостей кривих та поверхонь не тільки 2-го порядку, а і частково 3-го порядку. Слід зазначити, що інваріанти кривих другого порядку вказано в прямокутній декартовій системі координат. Також автор не обмежується тільки прямокутними координатами, а і застосовує косокутні декартові координати у тих випадках, коли це не призводить до певних ускладень. Також в підручнику містяться деякі відомості з теорії тензорів.

Для вивчення та дослідження кривих другого порядку, зведення їх до канонічного вигляду використовують в основному традиційні методики. Для технічних та економічних спеціальностей обмежуються виділенням повних квадратів в квадратичних формах, враховуючи паралельне перенесення системи координат, не завжди розглядають поворот осей системи координат. Для фізико-математичних та механіко-математичних, також фізичних спеціальностей спектр досліджень розширюється, розглядаються інші види рівнянь кривих другого порядку (параметричні рівняння, криві в полярній системі координат). В навчальному посібнику [5] розглянуто рівняння еліпса і гіперболи зі спільним фокальним параметром, досліджено сім'ї співфокусних еліпсів та гіпербол, показано зв'язок між декартовою та еліптичною системою координат. Доведена також класифікаційна теорема, сутність якої полягає в тому, що вибором прямокутної системи координат рівняння будь-якої кривої другого порядку може бути зведеним до рівняння еліпса, гіперболи, параболи, уявного еліпса та рівнянь пар прямих, зокрема, і уявних (перетинаються, паралельні) та прямих, що співпадають, наприклад: $y^2 = 0$.

Проблемі методиці навчання аналітичної геометрії присвячені роботи багатьох науковців. Питанням методики викладання аналітичної геометрії присвячена робота Махомети Т. М. [8]. У статті розглянуто деякі форми, методики організації діяльності студентів педагогічних вузів при вивченні кривих та поверхонь другого порядку у курсі аналітичної геометрії.

В навчальній літературі добре вивчені питання ортогональної, афінної, проективної і топологічної класифікації кривих не лише другого порядку [1]. Однак з методичної точки зору ця тема привертає до себе неабиякий інтерес. А саме, у випадку ортогональної класифікації кривих другого порядку (з точністю до рухів площини), можна обійтись без інваріантів [6], які пропонуються в більшості навчальних посібників. В [7] для рівняння гіперболи крім канонічної системи координат (осі координат збігаються з осями симетрії гіперболи) розглянуто іншу систему, осями якої є її асимптоти (поворот декартової системи координат на кут $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$).

В той же час у прикладних задачах часто зустрічаються ситуації, коли рівняння кривої задане в косокутній декартовій системі координат. Тоді зведення такої кривої до канонічного виду досягається за допомогою переходу до прямокутної системи координат, якщо координатні осі є головними діаметрами кривої [7]. Найпростіше це виконати за допомогою застосування інваріантів кривої, які будуть відрізнятись від добре відомих ортогональних інваріантів кривої.

Концепція інваріанта є однією із найважливіших в математиці, адже встановлення та вивчення інваріантів безпосередньо пов'язане з задачами класифікації об'єктів різних типів. Найпростішими прикладами інваріантів є інваріанти дійсних плоских кривих другого порядку при перетворенні координат. Слід зазначити, що теорія інваріантів має велике значення для розвитку загальних ідей геометрії. Швейцарський математик Габріель Крамер (1704-1752) практично розв'язував задачу дослідження кривої за її рівнянням, але ним не було встановлено існування зв'язку між геометричними властивостями самої кривої та її рівнянням, віднесеним до певної системи координат. Цей зв'язок було остаточно знайдено за допомогою теорії інваріантів.

Як відомо, загальне рівняння кривої другого порядку складається із квадратичної форми та лінійної частини. Спрощення квадратичної форми в прямокутній системі координат часто є непростим, трудомістким і супроводжується не врахуванням деяких важливих моментів. Крім того, існують випадки, коли дослідження можна провести простіше із застосуванням косокутної системи координат. Саме розгляду інваріантів кривої в косокутній системі координат та зведенні такої кривої до головних напрямків і присвячена ця стаття.

Мета статті – дослідження особливостей методик зведення кривої другого порядку до канонічного виду, заданої в косокутній системі координат.

Виклад основного матеріалу. Поняття кривої є одним із найважливіших понять у різних розділах не тільки геометрії, а і взагалі математики. Лінією (кривою) другого порядку називається геометричне місце точок площини, координати яких задовольняють загальне рівняння

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{1}$$

де $a_{12} = a_{21}, a_{13} = a_{31}, a_{23} = a_{32}$.

Крива цілком визначається своїм рівнянням по відношенню до будь-якої системи координат, як за видом і геометричними властивостями, так і за положенням відносно координатної системи. При цьому, коли задано рівняння кривої, то це означає, що задано коефіцієнти рівняння (1).

Змінимо координатну систему, зсунувши початок координат та повернувши осі. Тоді та сама крива по відношенню до нової системи координат буде задаватись новим рівнянням. Положення кривої відносно координатної системи змінилось, але її вигляд та геометричні властивості не залежать від вибору координатної системи. При застосуванні методу координат для дослідження кривої, тобто її вид, параметри, мають певні числові характеристики, а тому кожна геометрична властивість кривої також характеризуватися числами. Крива визначається своїм рівнянням, але його окремі коефіцієнти змінюються при зміні координатної системи. Отже, для визначення геометричних властивостей ліній мають існувати такі вирази (функції), складені із коефіцієнтів рівняння кривої, які не змінюють своїх значень при зміні координатної системи. Ці незмінні функції коефіцієнтів рівняння лінії називаються інваріантами рівняння кривої.

Теорема. Три функції

$I_1 = a_{11} + a_{22} = S$ – слід матриці $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$,

$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \delta$ – малий визначник лінії,

$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta$ – великий визначник лінії

є *ортогональними інваріантами* лінії другого порядку (1).

Вираз $K_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ називається *напівінваріантом* (семиінваріантом) лінії (1). Рівняння $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$ називається характеристичним рівнянням лінії (1).

Поняття кривої другого порядку є афінним в тому сенсі, що якщо крива визначається рівнянням другого порядку в якійсь афінній системі координат [4], то вона також визначається рівнянням другого порядку і в будь-якій іншій афінній системі координат. З цієї точки зору відшукання геометричних властивостей лінії за її рівнянням алгебраїчно зводиться до відшукання інваріантів її рівняння.

Позначимо

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}. \qquad (2)$$

Функція від коефіцієнтів многочлена (2) називається ортогональним інваріантом, якщо вона не змінюється при переході від однієї прямокутної системи координат до іншої прямокутної системи координат (таке перетворення називається ортогональним). За раніше наведеною теоремою, функції S, σ, Δ є ортогональними інваріантами кривої.

Розглянемо косокутну систему координат. Згадаємо терміни коваріантність і контраваріантність, які були введені Сильвестром в 1853 році для досліджень з алгебраїчної теорії інваріантів.

Коваріантність і контраваріантність – поняття, які використовуються в математиці (лінійній алгебрі, диференціальній геометрії, тензорному аналізі) і у фізиці, для опису того, як тензори (скаляри, вектори, оператори, білінійні форми тощо) змінюються при перетвореннях базисів у відповідних просторах або многовидах. Контраваріантними називають «звичайні» компоненти, які при зміні базису простору змінюються за допомогою перетворення, оберненого до перетворення базису. Коваріантними − ті, які змінюються так само, як і базис.

Для досліджень в косокутній декартовій системі координат використовують коваріантні та контраваріантні декартові координати За загальною теорією відомо, що довільний вектор $\vec{a}$ за умови базисних неортогональних векторів $\vec{u},\ \vec{v}$ можна задати двома різними способами:

1) розкладом його за векторами базису $\vec{a} = x\vec{u} + y\vec{v}$;

2) за допомогою проекцій цього вектора на координатні осі.

У випадку прямокутної декартової системи координат $x,\ y$ можуть бути представлені у вигляді скалярних добутків векторів

$$x = \vec{u}\cdot\vec{a};\ y = \vec{v}\cdot\vec{a}.$$

Відповідно, узагальнення на випадок довільних неколінеарних координатних векторів $\vec{u},\vec{v}$: $x^* = \vec{u}\cdot\vec{a};\ y^* = \vec{v}\cdot\vec{a}$, причому у випадку прямокутної системи координат величини $x^*,\ y^*$ перетворюються на звичайні координати x, y. В загальному випадку цього співпадіння нема, оскільки

$$x^* = |\vec{u}|\cdot np_x\vec{a};\ y^* = |\vec{v}|\cdot np_y\vec{a},$$

де $np_x\vec{a},\ np_y\vec{a}$ −ортогональні проекції, за умови задання величин x, y формулами:

$$x = np_x\frac{\vec{a}}{|\vec{u}|},\ y = np_y\frac{\vec{a}}{|\vec{v}|},$$

проектування є паралельними відповідним осям координат.

Координати x, y називають звичайними або контрваріантними координатами, а $x^*,\ y^*$ – коваріантними координатами. Зауважимо, що задання координат $x^*,\ y^*$ визначає ортогональні проекції вектора $\vec{a}$ на осі координат. Вкажемо залежність між коваріантними та контраваріантними координатами. Позначимо кут між осями OY та OX через α і введемо позначення:

$$g_{11} = |\vec{u}|^2;\ g_{22} = |\vec{v}|^2;\ g_{12} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha \tag{3}$$

Тоді

$$\begin{aligned} &x^* = g_{11}x + g_{12}y;\ y^* = g_{21}x + g_{22}y; \\ &x = g^*_{11}x^* + g^*_{12}y^*;\ y = g^*_{21}x^* + g^*_{22}y^*. \end{aligned} \tag{4}$$

Звідси, враховуючи (3), маємо:

$$g_{11}^* = \frac{1}{|\vec{u}|^2 \sin^2\alpha};\; g_{22}^* = \frac{1}{|\vec{v}|^2 \sin^2\alpha};\; g_{12}^* = g_{21}^* = -\frac{1}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\sin^2\alpha}.$$

Слід зауважити, що скалярний добуток двох векторів $\vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$, заданих контраваріантними та коваріантними координатами обчислюється за формулою:

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1^* y_1 + x_2^* y_2 = y_1^* x_1 + y_2^* x_2.$$

Скалярний квадрат вектора $\vec{a}$ можна подати, як $|\vec{a}|^2 = xx^* + yy^*$, також із врахуванням значень x^*, y^*:

$$|\vec{a}|^2 = g_{11}x^2 + 2g_{12}xy + g_{22}y^2.$$

Отже, $|\vec{a}|^2$ є квадратичною формою незалежних змінних x, y, причому додатно визначена квадратична форма, за винятком випадку, коли $x = y = 0$.

Відомо, що квадратична форма додатна і неособлива [11], тоді і тільки тоді, коли виконуються умови:

$$g_{11} > 0;\; g_{22} > 0;\; g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0.$$

Квадратичну форму

$$g_{11}x^2 + 2g_{12}xy + g_{22}y^2 \tag{5}$$

будемо називати основною метричною формою.

Формули, що визначають основні характеристики кривих другого порядку, такі як ексцентриситет, довжини осей для еліпса та гіперболи, параметр для параболи, фокальні параметри тощо, не залежать від розташування лінії відносно системи декартових координат. В той же час вони залежать від довжин координатних векторів $\vec{u}, \vec{v}$ та кута між ними.

Форма та розміри системи координат цілком характеризуються коефіцієнтами квадратичної форми (5), яка визначає квадрат довжини довільного вектора $\vec{a} = (x, y)$. Величини (3) цілком визначають базисні вектори $|\vec{u}|, |\vec{v}|$ та кут між ними α $(0 < \alpha < \pi)$.

Метричними інваріантами полінома $F(x, y)$ називають функції $f(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}, g_{11}, g_{12}, g_{22})$, які залежать від коефіцієнтів полінома та від коефіцієнтів (4), що залишаються незмінними при заміні даної декартової системи довільною іншою декартовою системою.

У випадку неузагальненої косокутної декартової системи координат $(|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1)$ маємо: $g_{11} = g_{22} = 1,\; g_{12} = \cos\alpha$.

Тоді $G = \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha \\ cos\alpha & 1 \end{vmatrix} = \sin^2\alpha$, а інваріанти кривої S, δ, Δ набувають вигляду

$$\Delta^* = \frac{\Delta}{\sin^2\alpha};\; \delta^* = \frac{\delta}{\sin^2\alpha};\; S^* = \frac{a_{11} + a_{22} - a_{12}\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \tag{6}$$

При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ формули (6) задають звичайні ортогональні інваріанти кривої. Окремо зауважимо, що при повороті системи координат на кут β навколо початку координат при зведенні рівняння кривої до найпростішого вигляду, його обчислюють за формулою (із міркувань, що коефіцієнт a_{12} має дорівнювати нулю):

$$\mathrm{tg}2\beta = \frac{a_{11}\sin 2\alpha - 2a_{12}\sin\alpha}{a_{11}\cos 2\alpha - 2a_{12}\cos\alpha + a_{22}} \tag{7}$$

При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ця формула перетворюється в відому формулу [2]:

$$\mathrm{tg}2\beta = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}.$$

Проілюструємо наведені теоретичні відомості на прикладі зведення рівняння кривої другого порядку до найпростішого вигляду. Нехай крива задана рівнянням

$$x^2 + y^2 = 4\ , \tag{8}$$

та кут між координатними осями $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

За умовою маємо: $a_{11} = 1;\ a_{22} = 1;\ a_{12} = 0;\ a_{13} = 0;\ a_{23} = 0;\ a_{33} = -4$. Зведення рівняння кривої до головних осей означає перейти в даному прикладі від косокутної системи координат до прямокутної, щоб при цьому крива набула канонічного виду. Обчислимо основні інваріанти (6) для цієї кривої

$$\Delta^* = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}}{\sin^2\frac{\pi}{3}} = -\frac{16}{3};\ \delta^* = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\sin^2\frac{\pi}{3}} = \frac{4}{3};\ S^* = \frac{1+1}{\sin^2\frac{\pi}{3}} = \frac{4}{3}.$$

Для кривої, що не розпадається на пару прямих, завжди можна знайти таку прямокутну систему координат, щоб перетворене рівняння кривої не містило члена з добутком координат. Це означає, що можна підібрати кут повороту системи координат β таким чином, що перетворення за формулами

$$x = \frac{x'\sin(\alpha-\beta) - y'\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha};\ y = \frac{x'\sin\beta + y'\cos\beta}{\sin\alpha}$$

визначить новий коефіцієнт $a'_{12} = 0.$

Знайдемо кут β за формулою (7), підставивши $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Маємо $\beta = \frac{\pi}{6}$, тоді підставимо вказані α, β, x, y в рівняння кривої (1) та отримаємо:

$$\frac{2}{3}x'^2 + 2y'^2 + \frac{\Delta^*}{\delta^*} = 0\,,$$

де $\frac{\Delta^*}{\delta^*} = -4.$

Отже, остаточно маємо: $\frac{x'^2}{6}+\frac{y'^2}{2}=1.$ Зрозуміло, що це рівняння описує еліпс в канонічній системі координат.

Розв'язати запропонований приклад (8) можна також іншим способом. Розглянемо рівняння кривої другого порядку (1). Для заданої кривої в косокутній системі координат перейдемо від такої системи координат до прямокутної за допомогою формул:

$$x'=x+y\cos\alpha;\ \ y'=y\sin\alpha.$$

Справедливість формул видно із рис. 1, де представлено довільну точку M в косокутній системі координат XOY та прямокутній системі координат $X'OY'$, причому $X'=X$.

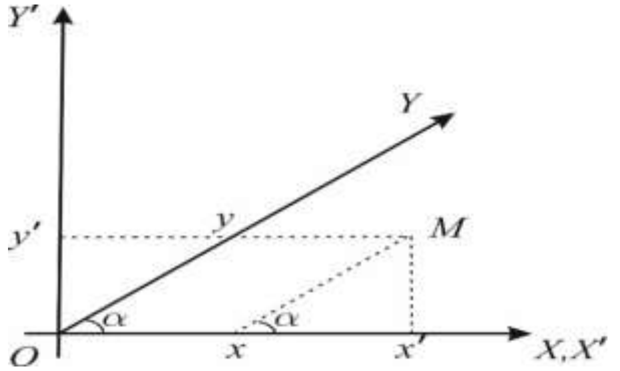

Рис. 1. Точка *M* в двох системах координат.

Із рис. 1 слідує, що $y=\frac{y'}{\sin\alpha};\ x=x'-y'\mathrm{ctg}\,\alpha.$

Підставимо значення x, y в рівняння (8), отримаємо:

$$x'^2-\frac{2}{\sqrt{3}}x'y'+\frac{5}{3}y'^2-4=0.$$

Зведемо отримане рівняння кривої до канонічного виду. Для цього складемо характеристичне рівняння квадратичної форми цієї кривої [1, 2].

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{5}{3}-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad \text{або } 3\lambda^2-8\lambda+4=0.$$

Корені квадратного рівняння, як власні числа квадратичної форми, є дійсними: $\lambda_1=\frac{2}{3},\ \lambda_2=2.$

Відомо, що після переходу до головних осей канонічне рівняння кривої (1) можна написати в такому вигляді [4]:

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\frac{\Delta}{\delta}=0.$$

Інваріанти Δ, δ обчислюють за наведеними формулами (6). Підставивши знайдені власні числа квадратичної форми та обчислені інваріанти, отримуємо канонічне рівняння в прямокутній системі координат для кривої, заданої рівнянням (8):

$$\frac{2}{3}x'^2 + 2y'^2 - 4 = 0, \text{ або } \frac{x'^2}{6} + \frac{y'^2}{2} = 1.$$

Як бачимо, отримано однаковий результат розв'язування прикладу, і досліджувана крива є еліпс (рис. 2).

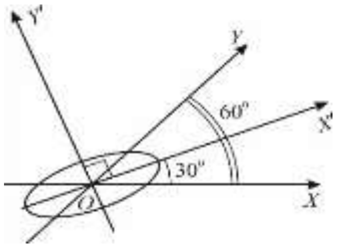

Рис. 2. Еліпс в косокутній системі координат.

Аналогічно можна зводити до канонічного виду інші типи кривих другого порядку.

Висновки та перспективи подальших наукових досліджень. Проведене теоретичне обґрунтування, аналітичні дослідження кривих другого порядку мають прикладне значення в теоретичній механіці. Запропонована практична задача суттєво підвищить зацікавленість студентів у вивченні курсу аналітичної геометрії, сприятиме кращому розумінню ролі інваріантів. Для подальших досліджень такого змісту задач пропонується зведення до канонічного вигляду різного типу кривих другого порядку. Також планується вивчення подання поверхонь другого порядку в косокутній декартовій системі координат.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ / REFERENCES

1. Білоусова, В. П., Ільїн, І. Г., Сергунова, О. П., Котлова, В. М. (1973). Аналітична геометрія : навчальний посібник для студентів університетів і педагогічних інститутів. В. П. Білоусова (ред). Київ : Вища школа. (Bilousova, V.P., Ilyin, I.G., Sergunova, O.P., Kotlova, V.M. (1973). Analytic geometry: a study guide for students of universities and pedagogical institutes. V. P. Bilousova (ed.). Kyiv : Vyshcha shkola).
2. Борисенко, О. А., Ушакова, Л. М. (1993). Аналітична геометрія. Харків : Основа. (Borysenko, O. A., Ushakova, L. M. (1993). Analytical geometry. Kharkiv : Osnova).
3. Бурда, М., Васильєва, Д. (2022). Особливості навчання математики в умовах воєнного стану. Математика в рідній школі, 4–5, 6–15. (Burda, M., Vasilieva, D. (2022). Features of teaching mathematics under martial law. Mathematics in native school, 4–5, 6–15).
4. Ґраве, Д. О. (1933). Аналітична геометрія. Державне науково-технічне видавництво України. Харків-Київ. (Grave, D. O. (1933). Analytical geometry. State Scientific and Technical Publishing House of Ukraine. Kharkiv-Kyiv).
5. Драч, К. Д., Шугайло, О. О., Ямпольський, О. Л. (2020). Канонічна теорія кривих другого порядку: навчально-методичний посібник з аналітичної геометрії для студентів 1-го курсу факультету математики і інформатики. Харків: ХНУ імені В. Н. Каразіна. Режим доступу: http://geometry.karazin.ua/resources/documents/20200406094041_e7217d744d0.pdf (Drach, K. D., Shugailo, O. O., Yampolskyi, O. L. (2020). Canonical theory of second-order curves: a teaching and methodical manual on analytical geometry for 1st year students of the faculty of mathematics and computer science. Kharkiv : V. N. Karazin Kharkiv National

University. Retrieved from: http://geometry.karazin.ua/resources/documents/ 20200406094041_e7217d744d0.pdf).

6. Зайцева, Л. Л. (2008). Аналітична геометрія в прикладах і задачах. Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет». Режим доступу: http://matphys.rpd.univ. kiev.ua/downloads/courses/angem/AGLA.pdf. (Zaitseva, L. L. (2008). Analytical geometry in examples and problems. Kyiv: Publishing and Printing Center «Kyivskyi universytet». Retrieved from: http://matphys.rpd.univ.kiev.ua/downloads/courses/angem/ AGLA.pdf).
7. Збірник задач з аналітичної геометрії: навчальний посібник для проведення практичних занять з дисципліни «Аналітична геометрія та лінійна алгебра» : Навчальний посібник для студентів спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення». (2021). В. І. Сущук-Слюсаренко, Ю. В. Бухтіяров, В. В. Жабіна, Л. В. Дрозденко (укл). Київ : КПІ ім.Ігоря Сікорського. Режим доступу: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/46175/1/ Zbirnyk_zadach_z_analitychnoi_heometrii.pdf. (Problem book on analytical geometry: a manual for practical classes in the discipline «Analytical geometry and linear algebra» : Study guide for students of specialty 121 "Software engineering". (2021). V. I. Suschuk-Slyusarenko, Yu. V. Bukhtiyarov, V. V. Zhabina, L. V. Drozdenko (incl.). Kyiv: Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute. Retrieved from: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/46175/1/ Zbirnyk_zadach_z_analitychnoi_heometrii.pdf).
8. Махомета, Т. М. (2015). Організаційні форми і методи вивчення ліній і поверхонь у курсі аналітичної геометрії. Наукові записки Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка. Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти, вип. 8(1), 81-85. Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/ UJRN/nz_pmfm_2015_8(1)__21. (Makhometa, T. M. (2015). Organizational forms and methods of studying lines and surfaces in the course of analytical geometry. Scientific Notes of Kirovohrad Volodymyr Vynnychenko State Pedagogical University. Series: Problems of methods of physical, mathematical and technological education, Issue 8(1), 81–85. Retrieved from: http://nbuv.gov.ua/UJRN/nz_pmfm_2015_8(1)__21).
9. Решетняк, С. (2020). Фундаментальна підготовка в КПІ: стан та виклики. Режим доступу: https://osvita.kpi.ua/sites/default/files/files/2_Gundamentalna_pidgotovka_KPI.pdf. (Reshetnyak, S. (2020). Fundamental training at Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute: status and challenges. Retrieved from: https://osvita.kpi.ua/sites/default/files/files/2_Gundamentalna_ pidgotovka_KPI.pdf).
10. Яковець, В. П., Боровик, В. Н., Ваврикович, Л. В. (2004). Аналітична геометрія: навчальний посібник. Суми: ВТД «Університетська книга». (Yakovets, V. P., Borovik, V. N., Vavrikovich, L. V (2004). Analytical geometry: a manual, (Eds.). Sumy : VTD "University book").

Seleznova N. P., Kushlyk-Dyvulska O. I. Second-order curves. Canonical form.

Summary. *The article analyzes the state of mathematical education in the country, the level of knowledge in mathematics in recent years, and its study in a leading university.*

The importance of studying such a section of higher mathematics as "Elements of Analytic Geometry" for technical specialties of universities, as well as discipline "Analytic Geometry" for physical-mathematical and mathematical faculties is shown. An important section of analytical geometry is the theory of second-order curves, and in this section the problem of reducing the equation of a second-order curve to the canonical form occupies a prominent place.

The article analyzes the peculiarities of solving this problem and the methods of reducing quadratic forms to the canonical form. The analysis of the study of the canonical form of curves *in the Cartesian coordinate system is performed. The peculiarities of solving such problems in the case of setting the curve by an equation in the oblique Cartesian coordinate system are highlighted and substantiated. The importance of transformation invariants is emphasized. The differences between the three main invariants of the curve transformation when moving from the oblique coordinate system to the rectangular canonical coordinate system and the invariants of the orthogonal transformation of the curve when reducing it to the canonical form are shown. An example of reducing a second-order curve defined in the oblique coordinate system to the canonical form by various methods is given.*

The conducted theoretical justification, analytical studies of second-order curves have applied value in theoretical mechanics. The proposed practical task will significantly increase the interest of students in studying the analytical geometry course, will contribute to a better understanding of the role of invariants. For further studies of this content of the problems, reduction to the canonical form of various types of second-order curves is proposed. It is also planned to study the presentation of second-order surfaces in the oblique Cartesian coordinate system.

Key words: *analytical geometry, second-order curves, invariants, oblique and rectangular coordinate systems, quadratic form, canonical form, main directions of a second-order curve, ellipse.*