

Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
 Has been issued since 2013.

ISSN 2413-158X (online)
 ISSN 2413-1571 (print)

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
 Видається з 2013.



<http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/>

Івченко В.В. Вивчення лінійних та нелінійних моделей як невід'ємна складова курсу фізики у закладі вищої освіти. Фізико-математична освіта. 2020. Випуск 1(23). С. 48-51.

Ivchenko V. Study of linear and nonlinear models as an indispensable component of the physics course in university. Physical and Mathematical Education. 2020. Issue 1(23). P. 48-51.

DOI 10.31110/2413-1571-2020-023-1-008
 УДК 378.147:53

В.В. Івченко
 Херсонська державна морська академія, Україна
 retery@gmail.com
 ORCID: 0000-0001-7367-3669

ВИВЧЕННЯ ЛІНІЙНИХ ТА НЕЛІНІЙНИХ МОДЕЛЕЙ ЯК НЕВІД'ЄМНА СКЛАДОВА КУРСУ ФІЗИКИ У ЗАКЛАДІ ВИЩОЇ ОСВІТИ

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. У шкільному курсі фізики межі застосування лінійних законів не обговорюються, що призводить до їх надмірного використання при вирішенні задач. У зв'язку з цим необхідно: 1) розробити та описати методику аналізу меж застосування лінійних моделей граничного переходу в курсі фізики закладу вищої освіти; 2) висвітлити приклади застосування деяких найбільш світоглядно значущих нелінійних моделей для опису певних фізичних процесів та явищ.

Матеріали і методи. Узагальнення та системний аналіз літературних джерел з обраної тематики; методи математичного аналізу, системний підхід, задачний підхід.

Результати. Ефекти, пов'язані з нелінійністю фізичних систем і процесів, є дуже різноманітними і проявляються як у макро-, так і у мікросвіті. Лінійні моделі, як правило, є граничним випадком нелінійних моделей і є застосовними для доволі вузьких інтервалів зміни аргументу. Кількісний аналіз меж застосування лінійних фізичних моделей, який може бути проведений разом із студентами під час лекційних або практичних занять, повинен сприяти формуванню та розвитку їх уявлень про застосування моделей граничного переходу у фізиці. Описана методика аналізу має дедуктивний характер і дозволяє з єдиних позицій розглянути низку лінійних фізичних моделей.

Висновки. Надмірне використання та абсолютизація лінійних фізичних моделей студентами обумовлюють необхідність систематичного висвітлення в курсі фізики закладу вищої освіти меж застосування стрижневих «лінійних» законів та впровадження в навчальний процес вивчення найбільш значущих нелінійних моделей фізичних явищ, процесів та систем. Попередні результати навчання підтверджують ефективність описаного підходу для розвитку модельних уявлень студентів.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: курс фізики закладу вищої освіти, лінійні закони, нелінійні моделі, типи нелінійності.

ВСТУП

Постановка проблеми. Лінійні або пропорційні моделі є найпростішим та потужним методом опису складної фізичної реальності. Треба відзначити, що весь шкільний курс фізики побудований переважно на певній інваріантній сукупності фундаментальних лінійних фізичних моделей. Проте, варто пам'ятати, що лінійна фізична модель завжди являє собою граничний випадок більш універсальної (але й більш складної) нелінійної моделі (Івченко, 2018). На жаль, проблеми методики формування понять про наукові лінійні та нелінійні фізичні моделі (зокрема, у здобувачів вищої освіти) у сучасній науковій літературі приділено недостатньо уваги.

Аналіз актуальних досліджень. Розвитку модельних уявлень у студентів про лінійні та нелінійні фізичні моделі присвячено дослідження О. Н. Голубевої, М. Н. Степанищевої, Dirk De Vosk, J. M. Christian та ін. В цих роботах, зокрема, висунуто концепцію нелінійності як стрижневої ідеї сучасного курсу фізики (Голубева та ін., 2018); розглянуто засоби формування світогляду студентів при вивченні лінійних та нелінійних фізичних систем в курсі електрорадіотехніки (Степанищева, 2018) та виокремлено проблему надмірного вживання та «абсолютизації» лінійних фізичних моделей студентами (Dirk De Vosk та ін., 2018).

Мета статті. Метою статті є презентація та системний аналіз меж застосування низки фізичних лінійних моделей, а також висвітлення найбільш світоглядно значущих нелінійних моделей.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Узагальнення та системний аналіз літературних джерел з обраної тематики; методи математичного аналізу, системний підхід.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Лінійні моделі. Найбільш розповсюдженою математичною моделлю в фізиці є так звана модель «лінійного відклику». За номенклатурою Р. Пайєрлса така модель відноситься до моделей типу «наближення» (тип 3) (Peierls, 1983). У рамках даного наближення похідна або відносна похідна від деякої функції вважається сталою на певному інтервалі значень аргументу:

$$\frac{dy}{dx} = \xi = \text{const} \text{ або } \frac{dy}{y_0 dx} = \zeta = \text{const}, \text{ де } y_0 = y(0).$$

З математичної точки зору можна завжди зробити цей інтервал як завгодно малим, щоб залежність $y(x)$ могла бути апроксимована на ньому з належним ступенем точності лінійною функцією. У фізиці ж, цей інтервал може бути часто доволі широким (ці відомості мають бути повідомлені студентам під час перших (ввідних) лекційних занять). Нижче ми проаналізуємо межі застосування основних «лінійних» законів в курсі фізики вищої школи.

Основною «лінійною» моделлю в теорії пружності є закон Гука ($y = \sigma$ – механічна напруга, $x = \varepsilon$ – відносне видовження, $\xi = E$ – модуль Юнга). Для різних матеріалів межа пропорційності коливається від одиниць до сотень МПа.

Розглянемо тепер особливості теплового розширення речовин у різних агрегатних станах. У припущенні «лінійності» розширення $y = I(V)$ – довжина (об'єм), $x = T$ – абсолютна температура, $\zeta = \alpha(\beta)$ – коефіцієнт лінійного (об'ємного) розширення твердих тіл (рідин та газів). Аналіз таблиць, наведених у (Кикоин, 1976) показує, що для більшості речовин (важливе виключення – вода) коефіцієнт теплового розширення лишається сталим в інтервалі температур порядку декількох десятків градусів. Цей висновок не має місця для твердих тіл поблизу температури плавлення. В цьому випадку часто $\alpha = 69,6/T$ (Кикоин, 1976).

У термодинаміці, під час розгляду явищ теплообміну, часто вважають сталою величиною теплоємність речовини C ($y = Q$ – кількість теплоти, $x = T$ $\xi = C$). За даними (Кикоин, 1976), це твердження виявляється справедливим для хімічних елементів і сполук (окрім органічних сполук) починаючи з кімнатних температур в температурних інтервалах порядку 100 К.

При вивченні електричних (магнітних) властивостей речовини важливим «лінійним» наближенням є зв'язок між поляризацією P (намагнічуваністю M) та напруженістю E (H) електричного (магнітного) поля ($y = P(M)$, $x = E(H)$, $\xi = \chi$ – діелектрична (магнітна) сприйнятливість). Таке правило стверджується для всіх речовин окрім сегнетоелектриків (ферромагнетиків) (Кикоин, 1976).

В електриці найбільш розповсюдженим «лінійним» законом є закон Ома. Для нього $y = j$ – густина струму, $x = E$ – напруженість електричного поля, $\xi = \sigma$ – питома електропровідність. Закон виконується для металів, електролітів та для газів за малих напруженостей і високих тисків p (при цих умовах рухливість майже не залежить від E/p (Кикоин, 1976)). Для змінних полів необхідно також, щоб інерційний час електрона був набагато більшим періоду коливань струму.

При не дуже низьких температурах лінійну температурну залежність демонструє питомий електричний опір металів ρ ($y = \rho$, $x = T$, $\zeta = \alpha$ – температурний коефіцієнт опору). За даними (Кикоин, 1976) таке правило виявляється коректним в інтервалах температур порядку 10К. Зауважимо, що викладач обов'язково повинен наголошувати на «лінійному» характері розглянутих вище законів.

Нелінійні моделі. Ідея нелінійності є однією з ключових ідей сучасної фізики. Нелінійний підхід стосовно аналізу фізичної теорії визначається її системністю, яка найбільш глибоко і повно знаходить своє теоретичне відображення в діалектиці суперечливої природи речей (діалектика «лінійного» та «нелінійного» характеру фізичних законів). Розвиток науки, заснований на дослідженні явищ нового класу складності – нелінійних систем і процесів, веде до розробки більш глибоких методів наукового аналізу і, фактично, до становлення нового бачення Світу. Відбувається утвердження "нелінійного мислення". Розвинення такого роду мислення повинно продовжуватися протягом всього життя, починаючи зі студентської ланки.

У сучасній теоретичній фізиці прийнято розрізняти два основних типи нелінійності:

- геометричну нелінійність (виникає у випадку, коли переміщення частин системи не можуть вважатися як завгодно малими у порівнянні з розмірами самої системи);
- фізичну нелінійність (виникає у випадку, коли дія на систему є достатньо інтенсивною).

З першим типом нелінійності ми зустрічаємося у випадку вищезгаданого математичного маятника (в цьому випадку плече сили тяжіння за законом синуса (тобто нелінійно) залежить від кута відхилення підвісу). Яскравим прикладом другого типу нелінійності є порушення закону Гука за відносно великих навантажень. Отже, у випадку вантажу, що здійснює коливання під дією пружної сили з боку гумки, ми маємо справу з фізичним типом нелінійності. Натомість, під час коливань вантажу на пружині переважну роль відіграє ефект геометричної нелінійності. Дійсно, якщо розтяг пружини є великим, то вона витягнеться в майже пряму лінію. В такий ситуації ми вже будемо мати справу не з витками, що «працюють на вигін» а зі шматком дроту, що «працює на розтяг». Тому коефіцієнт жорсткості пружини при її суттєвому розтягу почне збільшуватися.

Позначимо через \bar{x} середню відстань між частинками (атомами, молекулами або іонами) в твердому тілі. Для її знаходження розглянемо потенціальну енергію частинки в полі інших структурних елементів і обмежимося першими чотирма доданками при розкладанні її в ряд Тейлора за ступенями зміщення частинки x від положення рівноваги ($x = 0$) при її коливальному русі:

$$U(x) \approx U_0 + \frac{ax^2}{2} - \alpha x^3 - \beta x^4. \tag{1}$$

Перший доданок в цьому виразі визначає мінімальне значення потенціальної енергії, яке відповідає положенню рівноваги частинки; другий доданок є її потенціальною енергією в наближенні гармонічного осцилятора. Третій і четвертий доданок відповідальні за ангармонічність коливань і визначають нелінійні внески у вираз для повертаючої сили

$\vec{F} = -\nabla U$, що діє на частинку під час її коливань. При цьому третій доданок (кубічний член) є відповідальним за асиметрію коливань (визначає асиметрію кривої $U(x)$). Користуючись розподілом Больцмана матимемо:

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x \exp(-U(x)/kT) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-U(x)/kT) dx} \quad (2)$$

Будемо вважати, що ангармонічні складові у виразі (1) є набагато меншими за середню енергію теплового руху kT . У такому разі

$$\exp\left(-\frac{U(x)}{kT}\right) \approx \exp\left(-\frac{\alpha x^2}{2kT}\right) \exp\left(\frac{\alpha x^3 + \beta x^4}{kT}\right) \approx \exp\left(-\frac{\alpha x^2}{2kT}\right) \left(1 + \frac{\alpha x^3 + \beta x^4}{kT}\right).$$

Враховуючи останнє наближене співвідношення, з виразу (2) дістанемо: $\bar{x} = 3\alpha kT/a^2$. Таким чином, середня відстань між частинками твердого тіла (а, отже, і його розміри) змінюється з температурою лише при врахуванні нелінійної (кубічної) складової повертаючої сили.

Розглянемо металевий провідник, що знаходиться в навколишньому середовищі з температурою T_0 при напрузі U . Нехай його електричний опір за температури T_0 дорівнює R_0 . За температури T опір $R = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$, де α – температурний коефіцієнт електричного опору. За умови стаціонарності температура T лишається незмінною в часі і потужність U^2/R , що виділяється в провіднику дорівнює потужності $\beta(T - T_0)$ (закон Ньютона-Ріхмана) тепловіддачі від провідника до навколишнього середовища. Оскільки ще $I = U/R$, то

$$I = \frac{U}{R_0} \left(\frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4\alpha U^2/(\beta R_0)}} \right) \quad (3)$$

Як видно з формули (3) за великих напруг зв'язок між силою струму металевого провідника і напругою прикладеною до нього стає нелінійним. Як і слід було очікувати з симетричних міркувань сила струму є непарною функцією напруги: $I(U) = -I(-U)$. Розклавши праву частину виразу (3) в ряд за ступенями U , матимемо:

$$I = \frac{U}{R_0} - \frac{\alpha U^3}{\beta R_0^2} + \dots$$

Одним з найбільш широких класів нелінійних явищ в фізиці є нелінійні коливання. Нелінійний характер таких коливань пов'язаний з нелінійною залежністю узагальноної повертаючої сили від узагальненого зміщення. Основними фундаментальними ефектами до яких призводить нелінійність коливань є неізохронність та ангармонічність коливань.

Нелінійні ефекти також мають місце в лазерній оптиці та акустиці (Christian, 2017). Нехай ми маємо нелінійний елемент (людське вухо, неізотропне оптичне середовище), для якого потужний вхідний сигнал задається часовою функцією $x(t)$, а вихідний – часовою функцією $y(t)$. При цьому нелінійна характеристика елемента, що пов'яже їх, може бути розкладена в ряд Тейлора:

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

Припустимо, що вхідний сигнал є гармонічним: $x(t) = A \sin \omega t$. Тоді, користуючись відомими тригонометричними формулами пониження степеню, матимемо:

$$y(t) = a_2 A^2/2 + (a_1 A + 3a_3 A^3/4) \sin \omega t + a_2 A^2 \sin(2\omega t - \pi/2)/2 + a_3 A^3 \sin(3\omega t)/4 + \dots$$

Таким чином, квадратична нелінійність відповідальна за виникнення у вихідному сигналі другої гармоніки; кубічна – третьої і т.д.

ОБГОВОРЕННЯ

Як бачимо, межі застосування лінійних фізичних моделей є доволі вузькими. Така їх «обмеженість» має бути обов'язково усвідомлена здобувачами вищої освіти. Аналіз меж застосування лінійних моделей вимагає від студентів вміння працювати з довідковою літературою; служить розвитку їх аналітичного і критичного мислення. Запропоновані автором статті питання застосування нелінійних моделей під час вивчення деяких фізичних ефектів повинні розширити та поглибити знання студентів щодо самої сутності використання модельного підходу в фізиці. Матеріали, викладені у даній роботі можуть бути корисними для студентів і викладачів фізичних спеціальностей університетів, зокрема, для майбутніх вчителів фізики.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Надмірне вживання та абсолютизація лінійних фізичних моделей студентами зумовлюють необхідність систематичного висвітлення в курсі фізики закладу вищої освіти меж застосування стрижневих «лінійних» законів та впровадження в учбовий процес вивчення найбільш значущих нелінійних моделей явищ та систем. Наступну роботу планується присвятити аналізу можливості вивчення деяких нелінійних рівнянь математичної фізики в курсі фізики закладу вищої освіти.

Список використаних джерел

1. Christian J. M. Anharmonic effects in simple physical models: introducing undergraduates to nonlinearity. *Eur. J. Phys.* 2017. 38(5), 055002 (1-17). DOI: 10.1088/1361-6404/aa7cbe.

2. Dirk De Bock , Wim Van Dooren and Lieven Verschaffel. Students' Overuse of Linearity: An Exploration in Physics. *Research in Science Education*. 2011. 41(3) 389-412. DOI: 10.1007/s11165-010-9171-8.
3. Голубева О. Н., Минасян Л. А., Сидоров С. В. Нелинейность как междисциплинарная идея в дисциплине «Концепции современного естествознания». *Физическое образование в Вузах*. 2018. 24(1) С. 34-42.
4. Івченко В. В. Про різні типи класифікації наукових навчальних моделей у курсі фізики вищого закладу освіти. *Фізико-математична освіта*. 2018. 3(17) С. 40-45. DOI: 10.31110/2413-1571-2018-017-3-007.
5. Кикоин И. К. Таблицы физических величин: Справочник. М.: «Атомиздат», 1976. 1008 с.
6. Пайерлс Р. Построение физических моделей. *УФН*. 1983. Выпуск 2(140), С. 315-332.
7. Степаніщева М. Н. Способы формирования мировоззрения студентов при изучении линейных и нелинейных физических систем. *Вестник Брянского государственного университета*. 2008. С. 82-86.

References

1. Christian J. M. (2017). Anharmonic effects in simple physical models: introducing undergraduates to nonlinearity. – *Eur. J. Phys.*, 2017. 38(5), 055002 (1-17). DOI: 10.1088/1361-6404/aa7cbe [in English].
2. Dirk De Bock , Wim Van Dooren and Lieven Verschaffel. (2011). Students' Overuse of Linearity: An Exploration in Physics. – *Research in Science Education*, 41(3), 389-412. DOI: 10.1007/s11165-010-9171-8 [in English].
3. Golubeva O. N., Minasyan L. A., Sidorov S. V. (2018) Nelinejnost` kak mezhdisciplinarnaya ideya v discipline «Konceptcii sovremenogo estestvoznaniya» [Nonlinearity as an interdisciplinary idea in the discipline "Concepts of modern science"]. *Fizicheskoe obrazovanie v Vuzakh – Physics in Higher Education*, 24(1), 34-42. [in Russian].
4. Іvchenko V.V. (2018). Pro rizni typy klasyfikaciyi naukovyx navchalnyx modelej u kursy fizyky vyshhogo zakladu osvity y [On Different Types Of Classification Of The Scientific Models In University Physics Education]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 3(17), 40-45. DOI: 10.31110/2413-1571-2018-017-3-007 [in Ukraine].
5. Kikoin I. K. (1976). *Tabliczy` fizicheskikh velichin: Spravochnik* [Tables of physical quantities: *Directory*]. М.: «Atomizdat», 1008. [in Russian].
6. Peierls, R. (1980). Model-Making in Physics. –*Contemp. Phys.*, 21, 3-17. [in English].
7. Stepanishheva M. N. (2008) Sposoby` formirovaniya mirovozzreniya studentov pri izuchenii linejny`kh i nelinejny`kh fizicheskikh sistem [Methods of formation of outlook of students in the study of linear and nonlinear physical systems]. *Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta – Bulletin of the Bryansk State University*. 82-86. [in Russian].

STUDY OF LINEAR AND NONLINEAR MODELS AS AN INDISPENSABLE COMPONENT OF THE PHYSICS COURSE IN UNIVERSITY

Vladimir Ivchenko

Kherson State Maritime Academy, Ukraine

Abstract.

Formulation of the problem. In the school course of physics, the limits of applying linear laws are not discussed, which leads to their overuse in problem-solving. In this regard, it is necessary to 1) develop and describe a methodology for analyzing the limits of the application of linear models in the course of higher education physics; 2) cover examples of the application of some of the most important nonlinear models in the world to describe certain physical processes and phenomena.

Materials and methods. Generalization and systematic analysis of literary primary sources on selected topics; the methods of mathematical analysis, system approach, problem-solving.

Results. The effects associated with the nonlinearity of physical systems and processes are very diverse and manifest in both the macro and micro worlds. Linear models are usually a limiting case of nonlinear models and apply to fairly narrow intervals of argument change. Quantitative analysis of the limits of the application of linear physical models, which can be carried out with students during lectures or practical classes, should contribute to the formation and development of their ideas about the use of models of boundary transition in physics. The described method of analysis is deductive and allows us to consider from a single point of view several linear physical models.

Conclusions. The excessive use and absolutization of linear physical models by students necessitates a systematic coverage of the limits of the application of "linear" laws in a university physics course and the introduction of the most significant non-linear models of phenomena and systems into the educational process. Preliminary learning results confirm the effectiveness of the described approach for the development of student model ideas.

Keywords: university physics education, linear laws, nonlinear models, types of nonlinearity.