І.А. Почерніна
Сумський державний педагогічний університет ім. А.С. Макаренка

СИМЕТРІЯ В МАТЕМАТИЦІ ТА КРИСТАЛОГРАФІЇ

Симетрія – в широкому і вузькому розумінні є тією ідеєю, яку людина протягом століть намагалася осягнути і створити порядок у всіх фізичних явищах. І наш Всесвіт з усіма його складнощами, мабуть, побудують у майбутньому відповідно до понять про симетрії [1].

З симетрією людина зустрічається скрізь – в природі, техніці, мистецтві, науці. Поняття симетрії проходить через всю багатовікову історію людської творчості. Принципи симетрії відіграють важливу роль у фізиці, математиці, хімії, біології, музиці та архітектурі.

У ряді випадків симетрія є досить очевидним фактом. Наприклад, будь-який школяр, розглядаючи рівносторонній трикутник, може показати, чому ця фігура симетрична, для підтвердження думки може запропонувати кілька перетворень, в результаті яких трикутник не змінить свого виду. Насправді поняття симетрії набагато ширше, під нею розуміється незмінність при будь-якій операції не тільки предметів, але й фізичних явищ, математичних формул, рівнянь, тощо. За допомогою уявлення про симетрію людина намагається зрозуміти порядок, красу, досконалість природи. Початковий сенс симетрії – це співрозмірність, схожість, подібність, порядок, ритм, узгодження частин в цілісній структурі.

Поняттям симетрії займалися досить давно. Так ще Піфагорійці створювали перші космологічні системи центрально-симетричного Всесвіту. Також вони вважали, що в природі найбільш поширені два види симетрії – дзеркальна і радіальна. Дзеркальну симетрію має метелик, а радіальну симетрію, наприклад, – ромашка.

Поняття симетрії в науці постійно розвивалося й уточнювалося. Наука відкрила цілий світ нових, невідомих раніше симетрій, що вражає своєю складністю і багатством.

Якщо серед усіх наук розглянути саме геометрію, то в ній поняття симетрії вводиться через розгляд деяких перетворень площини, які і допомагають створювати симетричні об'єкти, основними з яких є: симетрія відносно точки, осьова симетрія, дзеркальна симетрія, паралельне перенесення, ковзна симетрія тощо.

Для початку розглянемо найбільш поширений вид симетрії: симетрію відносно точки.

Перетворення фігури F у фігуру F', при якому кожна її точка X переходить у точку X', симетричну відносно даної точки O, називається перетворенням симетрії відносно точки O. При цьому фігури F і F' називаються симетричними відносно точки O (рис.1) [2].

Для того, щоб знайти положення об'єкта симетричного даному, відносно точки О, достатньо знайти положення визначаючих його точок.

Знайдемо координатні формули симетрії відносно точки $A_0(x_0, y_0)$. Нехай $A(x, y)$ і $A'(x', y')$ – дві взаємно симетричні точки відносно точки A_0. Оскільки A_0 – середина відрізка AA', то її координати визначаються за формулами

$$x_0 = \frac{x+x'}{2}, y_0 = \frac{y+y'}{2}$$

Записавши ці рівності відносно x' і y', дістанемо *координатні формули симетрії відносно точки:*

$$\begin{cases} x' = -x + 2x_0, \\ y' = -y + 2y_0. \end{cases}$$

Коли центр симетрії збігатиметься з початком координат, тобто $A_0(x_0, y_0) = O(0, 0)$, то координати взаємно симетричних точок $A\ (x, y)$ і $A'(x', y')$ визначатимуться такими рівностями:

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = -y. \end{cases}$$

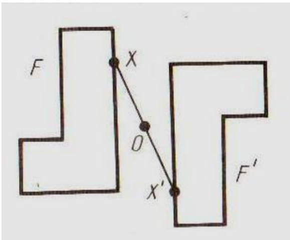

Рис. 1

Рис. 2

Ці формули переконують, що для найпростішого аналітичного зображення центральної симетрії зручно за початок системи координат брати центр симетрії.

Якщо ж говорити про дзеркальну симетрію, то в цьому випадку все зводиться до більш описового означення. Побачити дзеркальний двійник об'єкту зовсім неважко. Досить помістити освітлений об'єкт перед плоским дзеркалом і заглянути в це дзеркало. Звичайно вважають, що спостережуваний в дзеркалі двійник є точною копією самого об'єкту. Насправді ж це не зовсім так. Дзеркало не просто копіює об'єкт, а міняє місцями (переставляє) передні і задні по відношенню до дзеркала частини об'єкту. У порівнянні з самим об'єктом його задзеркальний двійник опиняється таким, що «вивернуло» уздовж напрямку, перпендикулярного до площини дзеркала (рис.2).

Припустимо, що одна половина об'єкту є дзеркальним двійником по відношенню до іншої його половини. Такий об'єкт називають дзеркально симетричним. Він перетворюєтся сам в себе при віддзеркаленні у відповідній дзеркальноій площині, ця площина є площиною симетрії.

У разі двовимірного (плоского) об'єкту замість площини симетрії розглядається вісь симетрії – лінія перетину площини симетрії з площиною об'єкту. У разі одновимірного (лінійного) об'єкту розглядається центр симетрії – точка перетину прямої об'єкту з площиною симетрії.

Тобто, якщо розглядати дзеркальну симетрію на площині, то це буде не що інше як симетрія відносно прямої або осьова симетрія.

Нагадаємо означення осьової симетрії.

Перетворення фігури F у фігуру F' при якому кожна її точка X переходить у точку X', симетричну відносно даної прямої l, називається перетворенням симетрії відносно прямої l (осьова симетрія). При цьому фігури F і F' називаються симетричними відносно прямої l [2].

Для координатного задання симетрії відносно прямої l доцільно за одну з осей координат взяти пряму l, оскільки вона при такій симетрії залишається незмінною. Отже, нехай вісь OX збігається з прямою l. Тоді при симетрії відносно прямої OX кожна точка A(x; y) площини перетворюється в точку A'(x'; y') таку, що

$$\begin{cases} x' = x; \\ y' = -y. \end{cases}$$

Тому перетворення симетрії відносно осі абсцис виражається такими формулами:

$$\begin{cases} x' = x; \\ y' = -y. \end{cases}$$

Аналогічними міркуваннями знаходимо, що симетрія відносно осі ординат виражається формулами

$$\begin{cases} x' = -x; \\ y' = y. \end{cases}$$

Щодо паралельного перенесення, то застосування цього перетворення ми доволі часто зустрічаємо і в повсякденному житті. Це і різноманітні бордюри, графіки деяких функцій, поширення звукових хвиль та інше (рис.3). Такі рівномірні (поступальні) повторення і називають паралельними перенесеннями. Введемо поняття паралельного перенесення площини як окремого випадку перетворення площини за допомогою понять відображення і вектора.

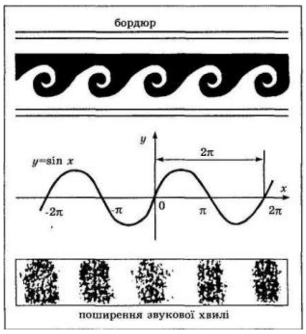

Рис. 3

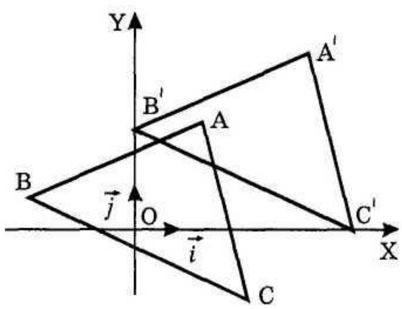

Рис. 4

Нехай $\vec{\alpha}$ – деякий вектор площини. Перетворення площини, при якому кожна точка M площини відображається на таку точку M' цієї ж площини, що $(\overrightarrow{MM'}) = \vec{\alpha}$, називається паралельним перенесенням [2].

Щоб записати дане перетворення в координатах виберемо прямокутну систему координат (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) на площині, в якій визначене паралельне перенесення вектором $\vec{\alpha}$ (рис.4)

Якщо A (x; y) і A' (x'; y') є парою відповідних точок, то $\overrightarrow{AA'} = \vec{\alpha}$. Нехай вектор $\vec{\alpha}$ в (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) має координати x_0 і y_0. Знайдемо вираження координат x', y' точки-образу через координати x, y її прообразу. Вектор $\overrightarrow{AA'}$ має координати x' – x і y' – y. Але $\overrightarrow{AA'} = \vec{\alpha}$ тому x' – x = x_0, y' – y = y_0. Отже, координати x', y' образу виражаються через координати x, y прообразу в паралельному перенесенні на вектор a (x_0, y_0) формулами

$$\begin{cases} x' = x + x_0, \\ y' = y + y_0. \end{cases}$$

Досить часто доводиться користуватися також формулами, що визначають координати прообразу через координати її образу.

Ці формули безпосередньо дістанемо з формул:

$$\begin{cases} x = x' - x_0, \\ y = y' - y_0. \end{cases}$$

Обертанням користуються як методом розв’язання геометричних задач на побудову. Ідея методу обертання полягає в тому, щоб повернути яку-небудь дану або шукану фігуру біля доцільно вибраного центра на відповідний кут так, щоб полегшити аналіз задачі або навіть безпосередньо прийти до розв’язку.

Нехай у площині дана точка O та орієнтований кут α (рис.5). Кожній точці M даної площини будемо ставити у відповідність таку точку M', щоб OM=OM'. та ∠MOM'= α. Такого роду відповідність називається обертанням площини біля точки O на кут α. Точка O називається центром обертання, кут α – кутом повороту [2].

Щоб знайти координати точки при її повороті візьмемо таку прямокутну декартову систему координат з початком у точці *O*, щоб координатний базис ($\vec{i}$, $\vec{j}$) і кут повороту α були однаково орієнтовані. Нехай довільна точка *M(x; y)* площини поворотом R_O^{α} відображується в точку *M'(x'; y')*.Тоді *OM = OM', ∠MOM'* = α. Позначимо $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ = φ. Матимемо:

$$\left.\begin{aligned} x &= OMcos\varphi, \\ y &= OMsin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \text{і} \quad \left.\begin{aligned} x' &= OM'\cos(\varphi + \alpha), \\ y' &= OM'\sin(\varphi + \alpha). \end{aligned}\right\}$$

Перетворивши формули, отримаємо координати точки-образу при її повороті.

$$\left.\begin{aligned} x' &= xcos\alpha - ysin\alpha, \\ y' &= ysin\alpha + xcos\alpha. \end{aligned}\right\}$$

Якщо ж говорити про композицію перетворень, то важливо буде згадати ковзну симетрію (рис.6).

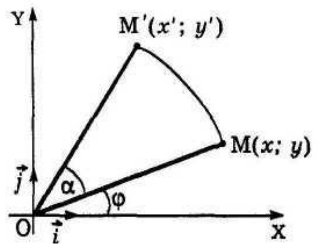

Рис. 5

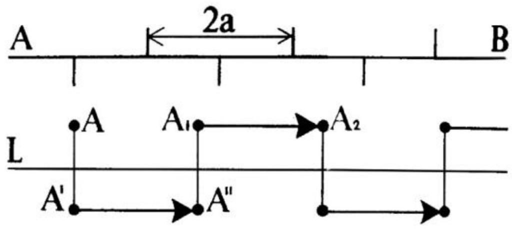

Рис. 6

Композицію осьової симетрії і нетотожного перенесення паралельно осі симетрії називають *ковзною симетрією* і позначають

$$S_l^{\vec{a}} = T_{\vec{a}} S_l \text{ або } S_l^{\vec{a}} = S_l T_{\vec{a}}$$

Ковзну симетрію можна подати композицією трьох осьових симетрій, вісь однієї з яких збігається з віссю даної ковзної симетрії, а дві інші осі до неї перпендикулярні.

Принципи симетрії використовуються у всіх напрямках сучасної науки. Симетрія відіграє важливу роль в математиці, логіці, філософії, мистецтві, біології, фізиці, хімії та інших науках, які мають справу з системами, а також дослідженнями в області загальної методології.

Якщо говорити про використання симетрії у фізиці, то тут на перший план виходить симетрія в кристалографії.

Здавна правильну, симетричну форму кристалів пояснювали симетричним розташуванням атомів. Саме існування атомів було ще гіпотезою, але зовнішній прояв чіткого порядку змушував припускати внутрішню причину.

Симетрія кристалів - властивість кристалів поєднуватися із собою при поворотах, відображеннях, паралельних переносах або при комбінації цих операцій. Симетрія зовнішньої форми кристала визначається симетрією його атомної будови, яка зумовлює також і симетрію фізичних властивостей кристала.

Кристали - об'єкти в тривимірному просторі, тому класична теорія симетрії кристалів – це теорія симетричних перетворень в тривимірному просторі. Такі перетворення називаються ортогональними або ізометричними. Після перетворення симетрії частини об'єкту, що знаходилися в одному місці, збігаються з частинами, що перебували в іншому місці. Це означає, що в симетричному об'єкті є рівні частини (сумісні або дзеркальні) [3].

Закономірність і симетрія структури кристала - наслідок динамічної рівноваги багатьох сил або процесів. Зовнішні впливи, як, наприклад, електричне або магнітне поле, механічне зусилля або додавання чужорідних атомів в кристал, можуть порушувати цю рівновагу і відповідно міняти властивості кристала. Це відкриває широкі можливості управління властивостями кристалів, які використовуються в сучасній техніці.

Симетрія описується за допомогою операцій і елементів симетрії. Операцією симетрії називається таке перетворення, при якому точка, частина фігури або вся фігура збігається з іншою точкою, частиною фігури або фігура збігається сама з собою. Кожній операції симетрії може бути зіставлений елемент симетрії - пряма, площина або точка, відносно якої проводиться дана операція.

Кристалу може бути притаманна не одна, а кілька операцій симетрії. Так, кристал кварцу поєднується із собою не тільки при повороті на 120° навколо вісі, але і при повороті навколо вісі на 240 ° , а також при поворотах на 180° навколо осей Ox, Oy, Oz. Сукупність операцій симетрії {g1, g2, ..., gN} даного кристала утворює групу симетрії G (g1, g2, ... gN). Послідовність проведення операцій симетрії також є операцією симетрії. Для опису кристалів використовують різні групи симетрії, з яких найважливішими є точкові групи симетрії, що описують зовнішню форму кристалів; їх називають також кристалографічними класами; просторові групи симетрії, що описують атомну структуру кристалів [3].

Існує безліч видів симетрії як в рослинному, так і в тваринному світі, але при всьому різноманітті живих організмів, принцип симетрії діє завжди, і цей факт ще раз підкреслює гармонійність нашого світу.

Література

1. Урманцев Ю. А. Симметрия природы и природа симметрии / Ю.А.Урманцев – М.: Знание, 1974. – 461с.
2. Мурач М.М. Геометричні перетворення і симетрія. – К. 1987.
3. Овчинников Н.Ф. Философские проблемы классической и некласической физики. Современная интерпретация/ Н.Ф.Овчинников – М.: ИФРАН, 1998. – С. 79-98.
4. http://alexfrost.ucoz.ru/index/nature/0-4.

Анотація. *У статті розглянуто різні підходи до визначення поняття симетрії, її застосування у кристалографії. Наведені різні види симетричних перетворень та коротко розглянуто історичне виникнення поняття «симетрія»*

Ключові слова: *симетрія, перетворення, кристали, геометричні фігури.*

Аннотация. *В статье рассмотрены различные подходы к определению понятия симметрии, ее применения в кристаллографии. Приведены различные виды симметричных преобразований и кратко рассмотрены историческое возникновение понятия «симметрия».*

Ключевые слова: *симметрия, преобразования, кристаллы, геометрические фигуры.*

Summary. *There are different approaches to the concept of symmetry and its application in crystallography in this article. These different types of symmetry transformations and briefly reviewed the historical emergence of the concept of "symmetry"*

Keywords: *symmetry transformation, crystals, geometric shapes.*