О. В. Мартиненко, Я. О. Чкана

Глосарій з математичного аналізу

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний педагогічний університет
імені А. С. Макаренка
Фізико-математичний факультет

О. В. Мартиненко, Я. О. Чкана

Глосарій з математичного аналізу

Навчальний посібник

Суми – 2019

УДК 517(038+075.8.057.875)

М29

Рекомендовано вченою радою Сумського державного педагогічного університету імені А. С. Макаренка (протокол № 9 від 22.04.2019 р.)

Рецензенти:

Тарельник В. Б., доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри «Технічний сервіс» Сумського національного аграрного університету

Лисенко О. В., доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики та моделювання складних систем СумДУ

Мартиненко О. В., Чкана Я. О.

М29 Глосарій з математичного аналізу : навчальний посібник. – Суми : СумДПУ імені А. С. Макаренка, 2019. – 56 с.

Навчальний посібник містить необхідну математичну символіку, основні поняття та їх означення, важливі математичні твердження з математичного аналізу російською мовою. Весь матеріал подано у формі глосарію відповідно до розділів курсу математичного аналізу (функції однієї змінної, теорії рядів), що вивчається у педагогічних університетах. Наведено словник термінів трьома мовами (українською, російською, частково туркменською), у кінці посібника – алфавітний покажчик.

Посібник є важливим елементом білінгвального навчання, він розрахований на формування необхідної термінологічної бази іноземних студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів, для яких мовою-партнером є російська.

УДК 517(038+075.8.057.875)

Зміст

Оглавление

СЛОВАРЬ ТЕРМИНОВ

Русский	Украинский	Туркменский
Абсолютно сходящийся ряд	Абсолютно збіжний ряд	
Аддитивное свойство	Адитивна властивість	
Аналитический способ	Аналітичний спосіб	
Аппроксимация	Апроксимація	
Аргумент	Аргумент	argumenti
Асимптота	Асимптота	asimptotasy
Бесконечно большая	Нескінченно мала послідвоність	tukeniksiz kici
Бесконечно малая	Нескінченно мала	tukeniksiz uly
Вертикальная асимптота	Вертикальна асимптота	w ertikal asimptota
Вогнутые функции	Угнуті функції	
Возрастающая последовательность	Зростаюча послідовність	artyan yzygiderlik
Возрастающая функция	Зростаюча функція	artyan funksiya
Вторая теорема Больцано–Коши	Друга теорема Больцано-Коші	
Вторая теорема Вейерштрасса	Друга теорема Вейєрштраса	
Второй замечательный предел	Дріга чудова границя	ikinji ajayyp predel
Выделение целой части	Виділення цілої частини	
Выпуклые функции	Опуклі функції	
Высказывание	Вислів	
Гармонический ряд	Гармонічний ряд	
Геометрический смысл неопределенного	Геометричний зміст похідної	
интеграла,	Геометричний зміст визначеного	
Геометрический смысл определенного	інтеграла	
интеграла	Геометричний зміст похідної	
Геометрический смысл производной	Гіперборлічні функції	
Гиперболические функции	Глобальні екстремуми	
Глобальные экстремумы	Графік непарної функції	funksiyanyň grafigi
График нечетной функции	Графік функції	
График функции	Графік парної функції	
График четной функции	Графіки взаємно обернених функцій	
Графики взаимно обратных функций	Дизюнкція	
Дизъюнкция	Диференціал	differensial
Дифференциал	Диференціальний біном	
Дифференциальный бином	Диференціювання	differensirleme
Дифференцирование	Диференційоана функція	differensirlenyan funksiya
Дифференцируемая функция	Довжина дуги кривої	duganyň uzynlygy
Длина дуги кривой	Достатня умова інтегровності	
Достаточное условие интегрируемости	Достатня умова існування екстремума	ekstremumyň yeterlik şerti
Достаточное условие существования		
локального экстремума	Достатня ознака для знаходження	
Достаточный признак для нахождения	радіуса збіжності	
радиуса сходимости		
Дробно-рациональная функция	Дробо-раціоанальна функція	
Знакопеременный ряд	Знакозмінний ряд	Geometrik progressiyanyň
Знаменатель прогрессии	Знаменник прогресії	maydalaw jysy
Импликация	Імплікація	
Интегральная кривая	Інтегральна крива	integral egri
Интегральный признак Коши	Інтегральна ознака Коші	integral Koşiniň nyşany
Интегрирование равномерно сходящегося	Інтегрування рівномірно збіжного	
функционального ряда	функціонального ряду	
Интегрируемая по Риману функция	Інтегровна за Ріманом функція	
Интервал	Інтервал	interw al
Интервалы монотонности	Інтервали монотонності	
Иррациональное число	Ірраціональне число	
Квантор общности	Квантор загальності	
Квантор существования	Квантор існування	
Конъюнкция	Конюнкція	
Коэффициенты степенного ряда	Коефіцієнти степеневого ряду	
Коэффициенты Фурье	Коефіцієнти Фурє	
Криволинейная трапеция	Криволнійна трапеція	Egricyzykly trapesiya
Критерий Коши сходимости	Критерій Коші збіжності послідовності	
последовательности	Критерій Коші збіжності ряду	
Критерий Коши сходимости ряда	Критерій рівномірної збіжності	
Критерий равномерной сходимости	функціональної послідовності	
функциональной последовательности	Критичні точки	kritik nokat
Критические точки	Кускова монотонність	
Кусочная монотонность	Кусково-гладка функція	
Кусочно-гладкая функция	Кусково-неперервна функція	
Кусочно-непрерывная функция	Лівостороння границя	cep tarapky predel
Левосторонний предел	Локальні екстремуми	yerli ekstremum
Локальные экстремумы	Локальний максимум	
Локальный максимум	Локальний мінімум	
Локальный минимум	Мажоранта	
Мажоранта	Метод інтегрування частинами	

Метод интегрирования по частям	Метод інтегрування підстановкою	calşyrma usuly
Метод интегрирования подстановкой	Метод М.В. Остроградського	
Метод М.В.Остроградского	Метод інтегрування	
Методы интегрирования	Множина	kopluk
Множество	Множина цілих чисел	bitin sanlaryň koplugi
Множество целых чисел	Множина дійсних чисел	hakyky sanlaryň koplugi
Множество действительных чисел	Множина натуральних чисел	natural sanlaryň koplugi
Множество натуральных чисел	Множина раціональних чисел	rasional sanlaryň koplugi
Множество рациональных чисел	Модуль числа	hakyky sanyň moduly
Модуль числа	Монотонна функція	monoton funksiya
Монотонная функция	Похила асимптота	yapgyt asimptota
Наклонная асимптота	Натуральний логарифм	natural logarifm
Натуральный логарифм	Необхідна умова інтегровності	
Необходимое условие интегрируемости		
Необходимое условие существования локального экстремума	Необхідна умова існування локального екстремума	ekstremumyň zerur şerti
Необходимый признак сходимости ряда	Необхідна ознака збіжності ряду	
Неопределенный интеграл	Невизначений інтеграл	kesgitsiz integraly
Непрерывная функция в точке	Неперервна функція в точці	
Непрерывная функция на отрезке	Неперервна функція на відрізку	
Непрерывная функция в области	Неперерна функція в області	
Непрерывность суммы равномерно сходящегося функционального ряда	Неперервність суми рівномірно збіжного функціональног ряду	
Несобственный интеграл второго рода	Невласний інтеграл другого роду	
Несобственный интеграл первого рода	Невласний інтеграл першого роду	
Нижняя (верхняя) сумма Дарбу	Нижня (верхя) сума Дарбу	
Область значений	Область значень	funksiyanyň bahalarynyňyaylasy
Область определения	Область визначення	funksiyanyň kesgitleniş yaylasy
Область сходимости	Область збіжності	yygnanyan yaylasy
Обобщенный гармонический ряд	Узагальнений гармонічний ряд	
Обратная функция	Обернена функція	ters funksiya
Общий член последовательности	Загальний член послідовнсті	yzygiderligiň umumy agzasy
Общий член ряда	Загальний член ряду	
Объединение множеств	Обєднання множин	koplukleriň birleşigi
Объем тела вращения	Обєм тіла обертання	
Ограниченная последовательность	Обмежена послідовність	
Ограниченная сверху функция	Обмежена зверху функція	
Ограниченная снизу функция	Обмежена знизу функція	
Ограниченная функция	Обмежена функція	caklendirilen funksiya
Окрестность точки	Окіл точки	
Описательный способ	Описовий спосіб	
Определенный интеграл	Визначений інтеграл	
Остаток ряда	Залишок ряду	
Отрезок	Відрізок	
Отрицание	Заперечення	
Первая теорема Больцано–Коши	Перша теорема Больцано-Коші	
Первая теорема Вейерштрасса	Перша теорема Вейєрштраса	
Первообразная функции	Первісна функції	
Первый замечательный предел	Перша чудова границя	birinji ajayyp predel
Пересечение множеств	Перетин множин	Koplukleriň kesişmesi
Период функции	Період функції	
Периодическая функция	Періодична функція	
Площадь криволинейного сектора	Площа криволінійного сектора	
Площадь криволинейной трапеции	Площа криволонійноїтрапеції	egricyzykly trapesiyanyň
Подмножество	Підмножина	meydany
Подстановки Эйлера	Підстановки Ейлера	
Подынтегральная функция	Підінтегравльна функція	
Подынтегральное выражение	Підінтегральний вираз	integral aşagyndaky funksiya
Положительный ряд	Додатний ряд	integralyň aşagyndaky aňlatma
Полуинтервал	Напівінтервал	
Последовательность	Послідовність	
Правила нахождения производных	Правила знаходження похідних	yzygiderlik
Правило Лопиталя	Правило Лопіталя	
Правильная рациональная дробь	Правильний раціональний дріб	
Правосторонний предел	Правостороння границя	
Предел функции	Границя функції	sag tarapky predel
Предел числовой последовательности	Границя числовоїпослідовності	funksiyanyň predeli
Предикат	Предикат	yzygiderligiň predeli
Признак Вейерштрасса	Ознака Вейєштраса	
Признак Даламбера	Ознака Даламбера	
Признак Лейбница	Ознака Лейбніца	
Признак сравнения в обычной форме	Ознака порівняння у звчайній формі	
Признак сравнения в предельной форме	Ознака порівняння в граничній формі	
Приращение функции	Приріст функції	
Произведение Коши рядов	Добуток рядів за Коші	funksiyanyň artdyrmasy
Производная n-го порядка	Похідна n-го порядку	
Производная обратной функции	Похідна оберненої функції	*n* tertipli onum

Производная сложной функции	Похідна складної функції	
Производная функции	Похідна функції	cylşyrymly funksiyanyň onumi
Простейшая дробь второго типа	Найпростіший дріб другого типу	funksiyanyň onumi
Простейшая дробь первого типа	Найпростіший дріб першого типу	
Простейшая дробь третьего типа	Найпростіший дріб третього типу	
Простейшая дробь четвертого типа	Найпростіший дріб четвертого типу	
Пустое множество	Порожня множина	
Равномерная сходимость	Рівномірна збіжність	boş kopluk
Равномерная сходимость степенного ряда	Рівномірна збіжність степеневого ряду	
Равномерная сходимость ряда	Рівномірна збіжність ряду	
Радикальный признак Коши	Радикальна ознака Коші	
Разложение по косинусам	Розклад по косинусах	Koşiniň nyşany
Разложение по синусам	Розклад по синусах	
Разность множеств	Різниця множин	
Расходящаяся последовательность	Розбіжна послідовність	koplukleriň tapaw udy
Расходящийся интеграл	Розбіжний інтеграл	dargayan yzygiderlik
Рационализирующие подстановки	Підстановки, шо раціоналізують	
Рациональная функция	Раціональна функція	
Рациональное число	Раціоанальне число	rasional funksiya
Ряд геометрической прогрессии	Ряд геометричної прогресії	
Ряд Маклорена	Ряд Маклорена	
Ряд Тейлора	Ряд Тейлора	
Ряд Фурье	Ряд Фур'є	
Свойства неопределенного интеграла	Властивості невизначених інтегралів	
Свойства определенного интеграла	Властивості визначених інтегралів	kesgitsiz integralyň hasiyetleri
Скачок функции	Стрибок функції	
Сложная функция	Складна функція	
Сочетательное свойство сходящихся рядов	Сполучна властивість збіжних рядів	cylşyrymly funksiya
	Степеневий ряд	
Степенной ряд	Сума ряду	
Сумма ряда	Сума функціонального ряду	
Сумма функционального ряда	Збіжність на множині	
Сходиость на множестве	Збіжна послідовність	
Сходящаяся последовательность	Збіжний інтеграл	yygnanyan yzygiderlik
Сходящийся интеграл	Таблиця похідних	
Таблица производных	Табличний метод	onumleriň jedw eli
Табличный метод	Табличний спосіб	
Табличный способ	Теорема Абеля	
Теорема Абеля	Теорема Вейєрштраса	
Теорема Вейерштрасса	Теорема Діріхле	
Теорема Дирихле	Теорема Кантора	
Теорема Кантора	Теорема про середнє значення	
Теорема о среднем значении	Теорема Рімана	
Теорема Римана	Точка перегину	
Точка перегиба	Точка розриву	gyşarma nokat
Точка разрыва	Точка розриву другого роду	
Точка разрыва второго рода	Точка розриву першого роду	
Точка разрыва первого рода	Точка усувного розриву	
Точка устранимого разрыва	Тригонометричний ряд	
Тригонометрический ряд	Спадна послідовність	
Убывающая последовательность	Спадна функція	kemelyan yzygiderlik
Убывающая функция	Універсальна тригонометрична підстановка	kemelyan funksiya
Универсальная тригонометрическая подстановка	Рівняння дотичної	
Уравнение касательной		grafige galtaşyan cyzygyň deňlemesi
	Умова монотонності функції	
Условие монотонности функции	Умова сталості функції	
Условие постоянства функции	Умовно збіжний ряд	funksiyanyň hemişelikliginiň şerti
Условно сходящийся ряд	Фізичний зміст визначеного інтегралу	funksiyanyň hemişelikliginiň şerti
Физический смысл определенного интеграла	Фізичний зміст похідної	
Физический смысл производной	Функціональна послідовність	
Функциональная последовательность	Функціональний ряд	
Функциональный ряд	Функція	
Функция	Частинні суми	funksiya
Частичные суммы	Парна функція	
Четная функция	Число е	jubut funksiya
Число е	Числова послідовність	
Числовая последовательность	Числовий ряд	san yzygiderligi
Числовой ряд	Член послідовності	san hatary
Член последовательности	Член ряду	san yzygiderliginiň agzasy
Член ряда	Еквівалентні послідовності	hataryň agzasy
Эквивалентные последовательности	Еквіваленція	
Эквиваленция	Елемент множини	
Элемент множества		koplugiň elementi

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ. ФУНКЦИЯ

Специальные математические символы, позволяющие сократить запись и точнее выразить утверждение: $+, -, \times, <, \perp, \|, \cup, \cap, \in, \ldots$

Символ «>» – знак сравнения (строгий); запись «*a* > *b*» читается: «число *a* больше числа *b*» или «число *b* меньше числа *a*».

Символ «≥» – знак сравнения (нестрогий); запись «*a* ≥ *b*» читается: «число *a* больше или равно числу *b*» или «число *b* меньше или равно числу *a*».

Если l_1, l_2 – обозначения прямых, то запись $l_1 \perp l_2$ обозначает, что l_1 перпендикулярна l_2.

Если l_1, l_2 – обозначения прямых, то запись $l_1 \| l_2$ обозначает, что l_1 параллельна l_2.

Символ «∪» соответствует операции объединения; запись «*A*∪B» читается так: «объединение множеств A и B».

Символ «∩» соответствует операции пересечения; запись «*A* ∩ B» читается так: «пересечение множеств A и B».

Символ «∈» – знак принадлежности; запись «$x \in M$» читается так: «x является элементом множества *M*» или «элемент x принадлежит множеству *M*».

1.1. ЛОГИЧЕСКАЯ СИМВОЛИКА, ПРИМЕНЯЕМАЯ К ВЫСКАЗЫВАНИЯМ И ПРЕДИКАТАМ В МАТЕМАТИКЕ

Под ***высказыванием*** понимается предложение, которое либо только истинно, либо только ложно.

Например, высказывание «–7>0» является ложным, а высказывание «5+2=7» – истинным. Высказывания обозначают большими латинскими буквами. Например, *A* = «–3 > 0», *B* = «2 $\times$ 2 = 4».

Предикат – это предложение с одной или несколькими переменными. Предложение «число x больше числа 0» (в символах $x > 0$) является предикатом от одной переменной x, а *«a – b = c»* – предикат от трех переменных *a, b, c*.

Предикат при конкретных значениях переменных становится высказыванием, принимая истинное или ложное значение.

Логические символы: $\bar{\ }, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$.

Отрицание « $\overline{\quad}$ » соответствует частице «не» и применяется к одному высказыванию или предикату; запись « $\overline{A}$ » читается: « не А».

Конъюнкция применяется к двум высказываниям или предикатам, соответствует союзу «и», обозначается: $A \wedge B$ (или A & B).

Предложение «число x принадлежит множествам M_1 и M_2» изображается формулой: $x \in M_1 \wedge x > \in M_2$.

Дизъюнкция применяется к двум высказываниям или предикатам, соответствует союзу «или» и обозначается $A \vee B$.

Предложение «число x принадлежит множеству M_1 или множеству M_2» изображается формулой: $x \in M_1 \vee x > \in M_2$.

Импликация соответствует союзу «если ..., то ...», обозначается «$A \Rightarrow B$», читается: «если А, то В».

Эквиваленция обозначается как «$A \Leftrightarrow B$», соответствует предложению: «A тогда и только тогда, когда B».

Символы $\forall, \exists$ соответственно называются ***квантором общности*** и ***квантором существования***, они применяются к предикатам (не к высказываниям).

Квантор общности $\forall$ читается как «любой», «каждый», «все», или с предлогом «для»: «для любого», «для всех», «для каждого» и т.д.

Квантор существования $\exists$ читается: «существует», «найдется», «имеет место».

Например, формула «для $\forall\, x \in R, \exists\, \delta > 0$» читается так: «для любого x, принадлежащего множеству R, существует $\delta > 0$».

Несколько кванторов общности (существования) заменяем на один: вместо $\forall x \forall y\ (P(x, y))$ пишем $\forall x, y\ (P(x, y))$; вместо $\exists x_1 \in M\ \exists x_2 \in M\ \ (Q(x_1, x_2))$ будем писать $\exists\, x_1, x_2 \in M\ \ (Q(x_1, x_2))$.

1.2. МНОЖЕСТВА

Понятие множества является первоначальным понятием математики. Точное определение ему не дается, но его можно описать через другие понятия. Можно сказать, что ***множество*** – это совокупность, набор некоторых объектов, предметов; объекты, входящие в это множество, называют его ***элементами.*** Множества могут содержать как конечное число элементов (конечные), так и бесконечно много элементов (бесконечные). Множество, не содержащее элементов, называют ***пустым*** и обозначают символом $\emptyset$.

Множество можно задать перечислением элементов, а можно описанием свойств элементов (предикатом).

Множества, элементами которых являются числа, называются числовыми. Некоторые из них имеют специальные обозначения.

Множество всех натуральных чисел обозначается через ***N*** и записывается так: ***N*** = {1,2,3,…}.

Множество всех целых чисел, содержащее как натуральные числа, число 0, так и целые отрицательные числа; обозначают через ***Z*** и записывают так: ***Z***={..., –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...}.

Рациональным называется число, которое можно представить в виде отношения двух целых чисел $\frac{p}{q}$, где $p \in Z$, $q \in N$.

Множество всех рациональных чисел обозначается через ***Q.*** Символически определение множества рациональных чисел можно записать так: $Q \overset{def}{=} \left\{ \frac{p}{q} \middle| \; p \in Z \wedge q \in N \right\}$. Здесь знак «$\overset{def}{=}$» заменяет слово «называется», «по определению».

Любое ***рациональное число*** можно представить конечной или бесконечной периодической десятичной дробью и наоборот.

Всякая бесконечная *непериодическая* десятичная дробь представляет собой ***иррациональное число***.

Множество всех рациональных и иррациональных чисел называется ***множеством действительных чисел*** и обозначается буквой ***R.***

Пусть M_1, M_2 – некоторые множества. Множество M_1 является ***подмножеством*** множества M_2, если каждый элемент множества M_1 является элементом множества M_2. Обозначают: $M_1 \subset M_2$.

Для числовых множеств имеем: $N \subset Z$, $Z \subset Q$, $Q \subset R$.

Множество действительных чисел является подмножеством **множества *C* – *всех комплексных чисел*,** *т.е.* $R \subset C$.

Подмножества действительных чисел $(a,\ b)$, $[a,\ b]$, $[a,\ b)$, $(a,\ b]$ называют соответственно ***интервалом, отрезком, полуинтервалами.***

На числовой оси каждое действительное число изображается определенной точкой и любая точка числовой оси задает некоторое число, поэтому [*a*, *b*] изображается множеством всех точек отрезка, вместе с концами *a*, *b*, в то время как (*a*, *b*) – множеством точек отрезка без концов *a*, *b*.

Объединение множеств A и B обозначается как «$A\cup B$» и определяется так: $A\cup B \overset{def}{=} \{x \mid x\in A \vee x\in B\}$.

Пересечение множеств A и B обозначается как «$A\cap B$» *и определяется так:* $A\cap B \overset{def}{=} \{x \mid x\in A \wedge x\in B\}$.

Разность множеств A и B состоит из элементов множества *A*, которые не принадлежат *B*. Обозначают как «$A\backslash B$». $A\backslash B \overset{def}{=} \{x \mid x\in A \wedge \overline{x\in B}\}$.

1.3. ФУНКЦИЯ

Пусть *X* и *Y* – некоторые множества. Если каждому значению переменной x из множества *X* по определенному правилу (закону) соответствует единственное значение переменной y из множества *Y*, то говорят, что *y* является ***функцией*** (однозначной) от x и записывают: $y = f(x)$ или $y = y(x)$. При этом x называют ***аргументом*** или независимой переменной, а y – ***функцией*** или зависимой переменной. Множество *X* называют ***областью определения*** функции $y = f(x)$ (обозначают *D(f))*, а множества *Y* – ***областью её значений*** (обозначают *E(f)).*

Если функция *f* переводит элемент $x\in X$ в элемент $y\in Y$, т.е. $y = f(x)$, то y называют образом элемента x, а x называют прообразом элемента y. Отметим, что образ всегда единственен.

Пример 1. Для функции $y = \sqrt{x^2-1}$ областью определения есть множество $X = (-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$, а множеством значений $-$ $Y = [0;+\infty)$.

Пример 2. $y = \begin{cases} \sin^2 x, & \text{если } x\ge 0 \\ \dfrac{1}{x}, & \text{если } x<0 \end{cases}$, $X = R$, $Y = (-\infty, +1]$.

***Аналитический способ задания функции*:** связь между аргументом x и функцией y задается формулой, при этом на разных участках области определения она может задаваться различными формулами (пример 2). В примерах 1, 2 функции заданы аналитически.

Табличный способ задания функции**:** функция задается таблицей отдельных значений аргумента и соответствующих значений функции (таблицы тригонометрических функций, таблицы логарифмов).

Графический способ задания функции**:** соответствие между значениями x и y задается с помощью графика.

Описательный способ задания функции**:** функция задаётся описанием ее свойств.

Среди числовых функций особое место занимают функции с областью определения $X = N$.

Пусть значениями аргумента х функции $f(x)$ являются все натуральные числа: 1, 2, 3,...n,.... Обозначим: $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, ..., $f(n) = a_n$, ... Такую функцию называют ***последовательностью***, где a_1 – первый член, ..., a_n – n-й член этой последовательности.

Функция $f(x)$ называется ***возрастающей*** на множестве M (строго), если большему значению аргумента соответствует большее значение функции:

$$\forall x_1, x_2 \in M \ (x_1 < x_2 \wedge f(x_1) < f(x_2)).$$

Функция $f(x)$ называется ***убывающей*** (строго) на множестве M, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Символически: $\forall x_1, x_2 \in M \ (x_1 < x_2 \wedge f(x_1) > f(x_2))$.

Функция, убывающая или возрастающая на множестве M, называется ***монотонной*** на этом множестве. Например, функция $y = x^2$ убывает на интервале $(-\infty, 0)$ и возрастает на $(0, +\infty)$.

Функция $f(x)$ называется ***ограниченной сверху*** на множестве M, если существует такое число K, что для любого значения $x \in M$ имеем, что $f(x) \leq K$.

Функция $f(x)$ называется ***ограниченной снизу*** на множестве M, если существует такое число К, что для любого значения $x \in M$ имеем, что $f(x) \geq K$.

Если функция ограничена и сверху, и снизу, то она называется ***ограниченной***. Так, функция $y = \sqrt{x^2 - 1}$ ограничена снизу на множестве X (пример 1), а функция из примера 2 ограничена сверху на множестве R.

Функция $f(x)$ называется ***четной*** , если выполняется два условия: для $\forall x \in X$ имеем, что $(-x) \in X$ и $f(-x) = f(x)$.

Функция $f(x)$ называется ***нечетной***, если для $\forall x \in X$ имеем, что $(-x) \in X$ и $f(-x) = - f(x)$.

Например, функция $y = x^2$ является четной, а $y = \sin x$ – нечетной.

Функция $f(x)$ называется ***периодической с периодом T*** ($T \neq 0$), если для $\forall x \in X$ имеем,что $(x \mp T) \in X$ и выполняется условие: $f(x+T) = f(x)$. Например, все тригонометрические функции являются периодическими.

Если переменная y является функцией от x, $y = f(x)$; а x – функция от переменной t, то есть $x = g(t)$, то $y = f(g(t))$ является функцией от t и называется ***сложной функцией***. Например, пусть $y = x^2$, $x = \sin t$, тогда функция $y = (\sin t)^2$ является сложной.

Пусть $y = f(x)$ с областью определения X и множеством значений Y такова, что для любого значения $y \in Y$ существует единственное значение $x \in X$, такое, что $f(x) = y$, тогда переменная x является функцией от y, обозначим $x = g(y)$. Эту функцию называют ***обратной*** для $y = f(x)$. Для обратной функции $x = g(y)$ областью определения является множество Y, а множеством значений – X.

Функцию, обратную к функции $y = f(x)$, обозначают: $x = f^{-1}(y)$.

Например, для функции $y = x^2$ с областью определения $[0, +\infty)$ обратной является функция $x = \sqrt{y}$.

Графиком числовой функции $y = f(x)$ называется совокупность точек плоскости $(x, f(x))$, где $x \in D(f)$, *а значения* x *и* y *удовлетворяют условие* $y = f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy; ***график нечетной функции*** симметричен относительно начала координат.

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов.

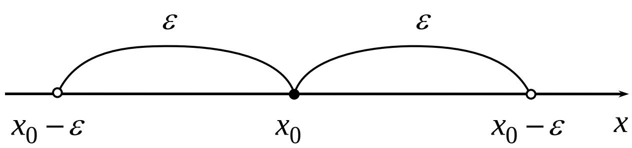
1.4. МОДУЛЬ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА

Модулем или ***абсолютной величиной действительного числа*** x называется неотрицательное число, обозначаемое $|x|$, такое, что:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{если } x \geq 0, \\ -x, \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Неравенство $|x| < m$ ($m > 0$) равносильно двойному неравенству $-m<x<m$; $|x-x_0| < \varepsilon$, ($\varepsilon > 0$) равносильно двойному неравенству $x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$. Множество точек с таким свойством является интервалом $(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$ и называется $\boldsymbol{\varepsilon}$ – ***окрестностью точки*** x_0.

Геометрический смысл неравенства $|x-x_0| < \varepsilon$:



1.5. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, ИХ СХОДИМОСТЬ

Если каждому натуральному числу $n \in N$ поставить в соответствие некоторое число x_n, то множество чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ називается ***числовой последовательностью*** *или просто* ***последовательностью****.* Обозначается символом $\{x_n\}$.

Числа x_n, $n \in N$, называются ***членами последовательности*** *,* $x_n = f(n)$ – ***общий член последовательности****.*

Число a называется ***пределом числовой последовательности*** $\{x_n\}$, если для любого (как угодно малого) $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство: $|x_n - a| < \varepsilon$.

Записывают так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ – это последовательность, которая имеет предел. Последовательность, не являющаяся сходящейся, называется ***расходящейся.***

Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ равносильно неравенству $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, которое означает, что x_n принадлежит ε-окрестности точки a (записывают $O(a, \varepsilon)$).

Геометрический смысл предела a ***числовой последовательности*** $\{x_n\}$: для любого $\varepsilon > 0$ все $x_n \in O(a, \varepsilon)$, начиная с некоторого номера $n > N(\varepsilon)$.

Критерий Коши сходимости последовательности: для сходимости последовательности $\{x_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $N(\varepsilon)$, что $|x_m - x_n| < \varepsilon$ для всех $m, n > N(\varepsilon)$.

Ограниченная последовательность $\{x_n\}$ – это последовательность, для которой $\exists\ M > 0$ такое, что $|x_n| \le M$ при $\forall\ n \in N$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***возрастающей (убывающей)***, если $x_{n+1} > x_n$ $(x_{n+1} < x_n)$ для $\forall\ n \in N$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***невозрастающей (неубывающей)***, если $x_{n+1} \le x_n$ $(x_{n+1} \ge x_n)$ для $\forall\ n \in N$.

Возрастающие и убывающие последовательности называются ***строго монотонными.***

Невозрастающие и неубывающие последовательности называются ***монотонными***.

Всякая сходящаяся числовая последовательность является ограниченной**.** Всякая ограниченная и монотонная последовательность является сходящейся.

Число e определяется как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$; это иррациональное число, его значение: $2 < e < 3$, $e = 2{,}71828182\ldots$

Логарифм числа x по основанию e называют ***натуральным логарифмом,*** обозначают как $\ln x$.

Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется ***бесконечно малой***, если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$

Бесконечно малые последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ называются ***эквивалентными,*** если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1$. Записывают: $\alpha_n \sim \beta_n$.

Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой.

Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную является бесконечно малой последовательностью.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***бесконечно большой,*** если для любого числа $M > 0$ найдётся такий номер $N(M)$, что для всех $n > N(M)$ выполняется неравенство $|x_n| > M$. Записывают так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Бесконечно большие последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называются ***эквивалентными,*** если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$.

Арифметические свойства сходящихся последовательностей:

если для $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ имеем , что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} cx_n = c \lim\limits_{n\to\infty} x_n, \quad c = const$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}, \lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

1.6. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$, кроме, может быть, самой точки $x = a$.

Число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ в точке $x=a$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ ($x_n \neq a$), сходящейся к a, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к A.

Число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ в точке $x=a$, если для любого числа $\varepsilon>0$ найдётся такое число $\delta=\delta(\varepsilon)$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. Записывают так: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

Запись $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ обозначает, что для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое число $M(\varepsilon)>0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x|>M(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Функция $f(x)$ называется ***бесконечно большой***, если $|f(x)|>M$ для всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-a|<\delta(M)$, где M - любое положительное число. Записывают: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.

Если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x)=0$, то функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой*** при $x\to a$.

Запись $x\to a-0$ указывает на то, что переменная x стремится к точке a слева, при этом $x<a$; если $x>a$ и $x\to a$, то условно записывают $x\to a+0$. Читают: «x стремится к точке a слева», «x стремится к точке a справа». Записывают: $f(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$.

Числа $f(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ называются соответственно ***пределом*** функции $f(x)$ слева в точке a (левосторонним) и ***пределом*** функции $f(x)$ *справа* в точке a (правосторонним).

Для того, чтобы функция $f(x)$ имела предел в точке a, необходимо и достаточно, чтобы $f(a-0)=f(a+0)$.

Арифметические свойства функций, имеющих конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ **и** $\lim\limits_{x\to a} g(x)$:

$$\lim_{x\to a} c\, f(x)=c\lim_{x\to a} f(x),\ \ c=const$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)},\ \lim_{x\to a}g(x)\neq 0$$

Первый замечательный предел (перша чудова границя):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

***Второй замечательный предел (друга чудова границя)*:**

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

***Другие замечательные пределы*:** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,$

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu.$$

1.7. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ И НА ОТРЕЗКЕ

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной*** в точке $x = a$, если:

1) функция $f(x)$ определена в точке $x = a$ и некоторой её окрестности,

2) существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, который равен значению функции в точке $x = a$, то есть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Правило предельного перехода для непрерывных функций:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x).$$

Для непрерывной в точке $x = a$ функции, выполняется условие: бесконечно малому приращению аргумента Δx в точке a соответствует бесконечно малое приращение функции $\Delta f(x)$ в этой точке.

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется ***непрерывной в*** этой ***области***.

Точка a, в которой не выполняется хотя бы одно из условий непрерывности, называется ***точкой разрыва*** функции $f(x)$.

Если точка a - точка разрыва функции $f(x)$ и существуют конечные пределы $f(a+0),\ f(a-0)$, то точка a называется ***точкой разрыва первого рода.***

Если $f(a+0) = f(a-0) \neq f(a)$ или $f(a+0) = f(a-0)$, но сама функция $f(x)$ не определена в точке $x = a$, то точка $x = a$ называется ***точкой устранимого разрыва.***

Если $f(a+0) \neq f(a-0)$, то точка $x = a$ называется точкой *«скачка»*, а величина $\Delta f = f(a+0) - f(a-0)$ ***скачком*** *(амплитудой изменения)* функции $f(x)$ в точке a.

Точка a называется ***точкой разрыва второго рода*** функции $f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $f(a+0),\ f(a-0)$ не существует или равен бесконечности.

Арифметические операции над непрерывными в точке $x = a$ ***функциями*** $f(x),\ \varphi(x)$ *приводят снова к* непрерывными функциям

$$c \cdot f(x), c = const;\quad f(x) \pm \varphi(x);\quad f(x)\cdot\varphi(x);\quad \frac{f(x)}{\varphi(x)}\quad (\varphi(a) \neq 0).$$

Если функция $x=\varphi(t)$ непрерывна в точке a, а функция $y=f(x)$ непрерывна в точке $b=\varphi(a),$ то ***сложная функция*** $y=f[\varphi(t)]$ непрерывна в точке a.

Всякая функция $y=f(x)$, определённая, строго монотонная (возрастающая или убывающая) и непрерывная на отрезке $[a,b]$, где $f(a)=\alpha,\ f(b)=\beta\ (\alpha<\beta)$, имеет на $[a,b]$ ***обратную функцию*** $x=f^{-1}(y)$ или $x=\varphi(y)$, которая также является строго монотонной (возрастающей или убывающей) и непрерывной.

Все элементарные функции непрерывны во всех точках, где они определены.

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной на отрезке*** $[a,b]$, если она непрерывна в каждой точке отрезка, причем непрерывность в точке a означает непрерывность справа (то есть $f(a+0)=f(a)$), а непрерывность в точке b означает непрерывность слева (то есть $f(b-0)=f(b)$).

Свойства непрерывной на отрезке $[a,b]$ ***функции*** $f(x)$***:***

1) ограничена на отрезке $[a,b]$ (первая теорема Вейерштрасса);

2) достигает на отрезке $[a,b]$ своих наибольшего и наименьшего значений (вторая теорема Вейерштрасса);

3) принимает все промежуточные значения между $f(a)=A,\ f(b)=B,\ A\neq B$, то есть для любого числа C, лежащего между числами A и B, всегда можно указать такую точку $c\in(a,b)$, что $f(c)=C$ (первая теорема Больцано–Коши).

4) при условии, что $f(a)\cdot f(b)<0$, существует хотя бы одна точка $c\in(a,b)$ такая, что $f(c)=0$ (вторая теорема Больцано–Коши).

Функция $f(x)$ называется ***равномерно непрерывной (рівномірно неперервною)*** на промежутке X, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)$, что для всех $x', x''\in X$, удовлетворяющих неравенство $|x'-x''|<\delta$ следует, что $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

Теорема Кантора*:* если функция $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, то она равномерно непрерывна на нём.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

2.1. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Производная функции – понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции в данной точке.

Приращением Δy ***функции***, соответствующим приращению аргумента в точке $x = x_0$, называется разность между значением функции в точках $x = x_0 + \Delta x$ и $x = x_0 : \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел (если он существует) отношения приращения функции $\Delta f(x_0)$ в точке x_0 к приращению аргумента Δx при условии, что $\Delta x \to 0$.

Коротко записывают: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Процесс вычисления производной называется ***дифференцированием***, а сама функция – ***дифференцируемой.***

Геометрический смысл производной*:* производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной (угловому коэффициенту), проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; f(x_0))$ *с положительным направлением* оси *Ox*.

Уравнение касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; f(x_0))$: $y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$.

Физический (механический) смысл производной: скорость изменения функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Всякая дифференцируемая в некоторой точке x_0 функция $y = f(x)$ непрерывна в этой точке.

Обратное неверно: непрерывная функция может не иметь производной. Например, функция $y = |x|$ всюду непрерывна, но она не имеет производной при $x = 0$, так как в этой точке не существует касательной к графику этой функции.

Правила нахождения производных:

1) $(cu)' = cu'$;

2) $\left(u \pm v\right)' = u' \pm v'$;

3) $(u \cdot v)' = u'v + v'u$;

4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, ($v(x) \neq 0$).

5) Если функция $u = u(x)$ имеет производную u'_x в точке x, а функция $y = f(u)$ имеет производную y'_u в соответствующей точке u, то ***сложная функция*** $y = f(u(x))$ в данной точке x имеет производную y'_x, которая вычисляется по формуле $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

6) Если функция $y = f(x)$ строго монотонна и имеет в точке x_0 производную $f'(x_0) \neq 0$, то и обратная функция $x = g(y)$ имеет производную в точке $y = f(x_0)$, которая вычисляется по формуле $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Производной n-го порядка называют производную от производной $(n-1)$-го порядка и записывают: $\left(y^{(n-1)}\right)' = y^{(n)}$, $\left(f^{(n-1)}(x)\right)' = f^{(n)}(x)$.

Таблица производных:

1. $(c)' = 0$;
2. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$;
3. $(a^x)' = a^x \ln a$;
4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;
5. $(\sin x)' = \cos x$;
6. $(\cos x)' = -\sin x$;
7. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
8. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
11. $(arctg\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
12. $(arcctg\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

2.2. МОНОТОННОСТЬ И ЛОКАЛЬНЫЕ ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ

Интервалы монотонности – это интервалы, на которых функция или только возрастает, или только убывает, или остается постоянной.

Критические точки функции $y = f(x)$ – это точки, в которых производная равна нулю или не существует.

Пусть на [*a;b*] определена и непрерывна функция $y = f(x)$ и на интервале *(a;b)* она имеет конечную производную:

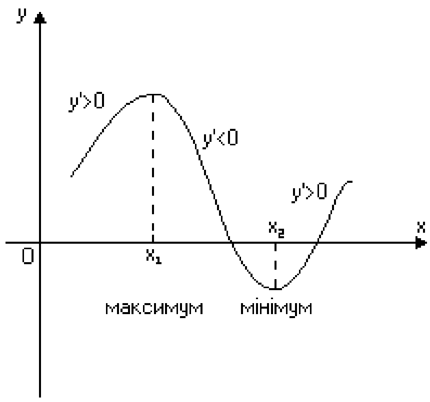
1) для того, чтобы $f(x)$ была ***постоянной*** необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) = 0$ для $\forall x \in (a;b)$;

2) для того, чтобы $f(x)$ была ***неубывающей (невозрастающей)*** на [*a;b*] необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geq 0$ *(* $f'(x) \leq 0$ *) для* $\forall x \in (a;b)$;

3) для того, чтобы $f(x)$ была ***возрастающей (убывающей)*** на [*a;b*] необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) > 0$ *(* $f'(x) < 0$ *) для* $\forall x \in (a;b)$.

Функция $y = f(x)$ имеет ***локальный максимум*** в точке x_0, если существует такая δ-окрестность точки x_0, то есть ($x_0 - \delta$; $x_0 + \delta$), что для $\forall x \in (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ (кроме, быть может самой точки x_0) выполняется условие $f(x_0) > f(x)$, и имеет ***локальный минимум*** в точке, если выполняется такое условие: $f(x_0) < f(x)$.

Локальные максимум и минимум функции называют ее локальными ***экстремумами***.



Необходимое условие существования локального экстремума: если функция $y = f(x)$ дифференцируема на *интервале (a;b)* и имеет экстремум в точке x_0 *(a<* x_0 *<b),* то $f'(x_0) = 0$.

Достаточное условие существования локального экстремума

функции: если производная функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ равна нулю и при переходе через эту точку меняет свой знак с "+ " на "–" (с "–" на "+"), то в точке $x = x_0$ функция имеет максимум (минимум).

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 и её окрестности непрерывные первую и вторую производные, причем $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 ***локальный минимум*** при $f''(x_0) > 0$; ***локальный максимум*** – при $f''(x_0) < 0$.

Алгоритм исследования функции на монотонность и локальный экстремум:

1. Найти область определения функции.
2. Найти производную функции и ее критические точки.
3. Отметить найденные критические точки на координатной прямой и с их помощью разбить ее на интервалы.
4. Исследовать знак производной функции на каждом интервале.
5. Используя соответствующие теоремы, сделать выводы о существовании экстремумов и характере монотонности функции.

2.3. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ

Пусть необходимо найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ (***глобальные экстремумы)***, непрерывной на отрезке $[a;b]$, которые могут приниматься как во внутренних точках отрезка, так и на его концах. Поэтому, для того чтобы найти глобальные экстремумы функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, необходимо:

1) найти все точки локальных максимума і минимума, принадлежащие интервалу $(a;b)$;

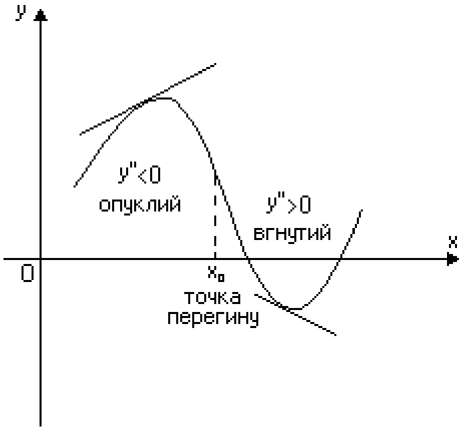
2) найти значения функции во всех этих точках, а также значения на концах отрезка $f(a)$ и $f(b)$;

3) среди найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

2.4. ВОГНУТОСТЬ И ВЫПУКЛОСТЬ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Вогнутым называется график дифференцируемой функции $y = f(x)$ на интервале (a;b), если он находится выше любой его касательной на этом интервале.

Выпуклым называется график дифференцируемой функции $y = f(x)$ на интервале (a;b), если он находится ниже любой его касательной на этом интервале.



Точкой перегиба непрерывной функции называется та точка, что отделяет вогнутость от выпуклости на этом интервале.

Если при $x = x_0$ функция $y = f(x)$ имеет с обоих сторон бесконечную производную одного и того же знака, то точку $M_0(x_0; y_0)$ также называют ***точкой перегиба*** кривой $y = f(x)$.

Теорема. График функции $y = f(x)$ есть вогнутым (выпуклым) в некотором интервале (a;b) тогда и только тогда, когда вторая производная функции $y = f(x)$ для всех $x \in$(a;b) положительна (отрицательна).

Теорема. Если $f''(x)$ обращается в точке $x = x_0$ в ноль и при переходе через эту точку меняет знак, то точка $(x_0; f(x_0))$ графика этой функции будет точкой перегиба.

Прямая называется ***асимптотой*** для кривой $y = f(x)$, если расстояние от точки М, принадлежащей кривой, до этой прямой стремится к нулю при движении точки М вдоль некоторой части кривой до бесконечности.

Вертикальной асимптотой кривой $y = f(x)$ будет прямая $x = x_0$, если выполняется условие $\lim\limits_{x \to x_{0+}} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to x_{0-}} f(x) = \infty$.

Наклонную асимптоту ищут в виде $y = kx + b$, где $k = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx)$. Если хотя бы один предел не существует, то наклонная асимптота отсутствует.

2.5. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ РАСКРЫТИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

ТИПА $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ **И** $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$

Пусть:

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на интервале (a;b) за исключением, возможно, самой точки x_0, такой что $g(x_0) \neq 0$, $x = x_0$;

2) $\lim\limits_{(a;b)\ni x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{(a;b)\ni x \to x_0} g(x) = a$, где $a = 0$ или $a = \infty$;

3) существует $\lim\limits_{(a;b)\ni x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b$,

тогда $\lim\limits_{(a;b)\ni x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{(a;b)\ni x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Замечание. Раскрытие неопределенностей других типов 1^{∞}, $0\cdot\infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0 можно свести к раскрытию неопределенностей типа $\left\{\frac{0}{0}\right\}$та $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, для которых выполняются условия правила Лопиталя.

2.6. СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ЕЕ ГРАФИКА

1. Найти область определения и область значений функции.
2. Исследовать функцию на четность или нечетность, периодичность.
3. Найти точки пересечения графика функции з координатными осями к, промежутки знакопостоянства функции.
4. Исследовать функцию на непрерывность и точки разрыва.
5. Найти нули и точки разрыва производной, интервалы монотонности функции, точки экстремума и экстремальные значения функции.
6. Найти нули и точки разрыва второй производной, интервалы выпуклости графика функции, точки перегиба и значения функции в этих точках.
7. Исследовать поведение функции на бесконечности, найти асимптоты графика функции.

3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

3.1. ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИИ. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Функция *F(*x*)* называется ***первообразной*** функции *f(x)* на отрезке [a;b], если $F^{/}(x)= f(x)$ для $\forall$ x$\in$ [a;b].

График первообразной – ***интегральная кривая.***

Всякую первообразную функции *f(x)* на отрезке [a;b] можно представить в виде *F(x)+C, где F(x)* – некоторая первообразная для *f(x)*, а *C* – произвольная константа.

Неопределенным интегралом функции *f(x)* на отрезке [a;b] *называют* множество всех её первообразных на этом отрезке, то есть $\int f(x)\,dx = F(x)+C.$

Обозначение неопределенного интеграла: $\int f(x)\,dx$, $\int$ – знак неопределенного интеграла*;* *f(x)* – подынтегральная функция (підінтегральна функція); *f(x)dx* – подынтегральное выражение (підінтегральний вираз), *dx* – дифференциал (диференціал) независимой переменной интегрирования.

Геометрический смысл неопределенного интеграла: множество интегральных кривых, которые можно получить параллельным переносом некоторой интегральной кривой в направлении оси О*y*.

Основные свойства неопределенного интеграла:

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции ($(\int f(x)dx)^{/} = f(x)$); а дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению ($d(\int f(x)dx)^{/} = f(x)\,dx$).

2. Неопределенный интеграл от дифференциала любой функции равен сумме этой функции и произвольной константе С: $\int d\,F(x) = F(x) + C$.

3. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от каждой отдельной функции:

$$\int (f(x) \pm q(x))dx = \int f(x)dx \pm \int q(x)dx.$$

4. Постоянную (константу) k$\neq$ 0 можно выносить за знак интеграла:

$$\int k\, f(x)dx = k\int f(x)dx.$$

Методы интегрирования – это методы нахождения неопределенных интегралов.

Табличный метод – нахождение интеграла с использованием формул таблицы интегрирования и свойств неопределенного интеграла.

Метод интегрирования подстановкой (замены переменной) использует формулу $\int f(x)dx = \int f(u(t))\, u'(t)dt$, где x=u(t) - непрерывная и дифференцируемая на отрезке [α;β] функция переменной t, причем если t изменяется в [α;β], то x изменяется в [a;b] и u(α)=a, u(β)= b.

Метод интегрирования по частям определяется формулой $\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)dx$, где u(x) и v(x) – непрерывные и дифференцируемые функции на отрезке [a;b], и для u(x)·v′(x) существует первообразная.

Рациональная функция – это функция, которая может быть представлена как отношение двух многочленов $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$. Если *Qn(x)≡const, то* рациональная функция называется ***целой***; при *Qn(x)≠ const* рациональная функция называется ***дробно-рациональной.***

Правильная рациональная дробь – это дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, у которой степень числителя меньше степени знаменателя, то есть *m< n, при m ≥ n* – дробь неправильная.

Выделение целой части у неправильной рациональной дроби – метод представления её в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

Простейшая дробь первого типа – $\frac{A}{x-a}$ и $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C$.

Простейшая дробь второго типа – $\frac{A}{(x-a)^k}$, *(k∈N, k≥2* и $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \frac{-A}{(m-1)(x-a)^{k-1}} + C$.

Простейшая дробь третьего типа – $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, *(D=p²-4q< 0).*

Простейшая дробь четвертого типа – $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ *,(k∈N, k≥2.).*

Метод М.В.Остроградского для нахождения интегралов от простейших дробей четвертого *типа:* $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{P_{2k-3}(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \lambda\int \frac{dx}{x^2+px+q}$, *P2к-3(x) – многочлен переменной x,* λ - неизвестное число. *k*=2, 3, 4, ….

Рационализирующие подстановки – подстановки, с помощью которых интеграл от произвольной рациональной функции сводится к интегралу от рациональной функции: для $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}}\right)dx$ – это подстановка $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}} = t$.

Дифференциальным биномом интеграла $\int x^m (a+bx^n)^p\,dx$ называют его подынтегральное выражение, где *a* и *b* – произвольные числа, *m, n, p* – рациональные числа.

Подстановки Эйлера применяют для рационализации интегралов вида: $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ (их всего три).

Универсальная тригонометрическая подстановка: $tg\frac{x}{2} = t$ *(-*π*< x<*π*)*,

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Гиперболические функции:

$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ - гиперболический синус;

$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ - гиперболический косинус;

$thx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ - гиперболический тангенс;

$cthx = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ - гиперболический котангенс.

3.2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Определенный интеграл (визначений інтеграл) функции *f(x)* на [a;b] определяется как предел интегральной суммы: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$, где числа *a и b* – нижний и верхний пределы интегрирования.

Интегрируемая по Риману (інтегровна за Ріманом) функция – это функция , от которой существует определенный интеграл.

Необходимым условием интегрируемости функции f(x) на [a;b] является её ограниченность.

Достаточным условием интегрируемости функции f(x) на [a;b] является её непрерывность.

Свойства определенного интеграла

1. Если $f(x)\equiv 0$ для $\forall x\in[a;b]$, то $\int\limits_a^b 0dx = 0$.

2. Если $f(x)\equiv 1$ для $\forall x\in[a;b]$, то $\int\limits_a^b 1dx = b-a$.

3. Если $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ и c - константа, то на этом отрезке интегрируемая функция $cf(x)$, при чем $\int\limits_a^b cf(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx$, то есть постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

4. Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемые функции на отрезке $[a;b]$, то на этом отрезке интегрируемы функции $f(x)\pm g(x)$, при чем $\int\limits_a^b (f(x)\pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$.

5. Если $f(x)$ - интегрируемая функция на отрезке $[a;b]$ і $f(x)\geq 0$ для всех $x\in[a;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.

6. Если $f(x)$ и $g(x)$ - интегрируемые функции на отрезке $[a;b]$ и $f(x)\leq g(x)$ для $x\in[a;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$.

7. Если $f(x)$ - интегрируемая функция на отрезке $[a;b]$, то на этом отрезке интегрируема и функция $|f(x)|$, при чем $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$.

8. ***Аддитивное свойство.*** Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ и $a<c<b$, то эта функция интегрируема на отрезке $[a;c]$ и $[c;b]$, при чем

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx .$$

9. ***Теорема (о среднем значении).*** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то существует точка $c \in (a;b)$ такая, что $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

Следствие. Если m и M - соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на $[a;b]$, то $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

10. Если поменять местами пределы интегрирования, то знак определенного интеграла поменяется на противоположный: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Геометрический смысл определенного интеграла: если функция y= f(x) непрерывна и неотрицательна на отрезке [*a;b*], то определенный интеграл численно равен площади ***криволинейной трапеции***, ограниченной графиком функции *y= f(x),* осью *Ох,* прямыми *x=a, x=b.*

Физический смысл определенного интеграла. *Если f(x)* непрерывна на [*a;b*], то определенный интеграл равен работе силы, проекция вектора которой на ось *Ox* равна *f(x)*, при перемещении точки приложения силы с положения *a* в *b:*

1) Если *a=b*, то *S=A=0.*

2) При изменении направления перемещения точки приложения силы, работу нужно умножить на (-1).

Необходимое условие интегрируемости. Если функция *f(x)* интегрируема на [*a;b*],то она ограничена на этом отрезке.

Нижней (верхней) суммою Дарбу функции *f(x)*, ограниченной на отрезке [*a;b*], называют сумму $\underline{S_n} = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$ ($\overline{S_n} = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$), где $m_k = \inf_{x \in \Delta x_k} f(x)$, $M_k = \sup_{x \in \Delta x_k} f(x)$.

Теорема. Для того, чтобы функция *y=f(x)* ограничена на [*a;b*] была интегрируемой на [*a;b*] необходимо и достаточно выполнения условия $\lim_{\max \Delta x_k \to 0} \left(\overline{S_n} - \underline{S_n}\right) = 0$ или, что равносильно условия: для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, чтобы при выполнении условия $\max_{1 \le k \le n} \Delta x_k < \delta(\varepsilon)$ независимо от способа разбиения отрезка [*a;b*] на части справедливо неравенство: $\left|\overline{S_n} - \underline{S_n}\right| < \varepsilon$.

Для вычисления определенного интеграла используют формулу, связывающую определенный интеграл и первообразную функции. Эта формула имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

где *F(x)* – первообразная для *f(x)*, а *a* и *b* – пределы интегрирования и ее называют ***формулой Ньютона-Лейбница***.

3.3. ПРИМЕНЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ЗАДАЧАХ ГЕОМЕТРИИ

Площадь криволинейной трапеции для непрерывной на [a;b] функции y=f(x)>0 вычисляют по формуле $S = \int_a^b f(x)dx$.

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f_1(x)$, снизу - $y = f_2(x)$, слева и справа соответственно отрезками прямых $x = a,\ x = b$, вычисляется по формуле $S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$.

Площадь криволинейного сектора в полярной системе координат вычисляют по формуле $S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)d\varphi$, где функция $\rho = \rho(\varphi)$ непрерывна при $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$.

Длину дуги кривой на отрезке [a;b] непрерывной вместе со своей производной функции y=f(x) вычисляют по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

В случае параметрического задания кривой $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [t_1;t_2]$, длину ее дуги вычисляют по формуле

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2}\,dt.$$

Если кривая задана в полярной системе координат уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ $\forall \varphi \in [\varphi_1;\varphi_2]$, то

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi$$

Объем тела вращения криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной функцией y=f(x), и основанием [a;b] вокруг оси Ox, вычисляется по формуле

$$V=\pi\int_a^b y^2dx$$.

Если криволинейная трапеция, ограниченная непрерывной функцией $x=\varphi(y)$, и основанием [*c;d*] вращается вокруг оси Oy, то объем тела вращения вычисляют по формуле

$$V=\pi\int_c^d \left(\varphi\left(y\right)\right)^2dy=\pi\int_c^d x^2dy$$

3.4. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Для определенного интеграла при применении формулы Ньютона-Лейбница должны выполняться два условия:

- отрезок интегрирования [a;b] является конечным;
- функция y=f(x) определена и непрерывна на [a;b].

Если промежуток интегрирования бесконечный, например [a; ∞), то рассматривают $\int_a^A f(x)dx$, где [a;A]⊂[a; ∞), A – некоторое произвольное число из [a; ∞). ***Несобственным интегралом первого рода*** (с бесконечным промежутком интегрирования) называют $\lim\limits_{A\to\infty}\int_\alpha^A f(x)dx$. Записывают

$$\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{A\to\infty}\int_\alpha^A f(x)dx.$$

При $\int_a^\infty f(x)dx=I$ интеграл называют ***сходящимся***, если $\lim\limits_{A\to\infty}\int_\alpha^A f(x)dx$ не существует или $\lim\limits_{A\to\infty}\int_\alpha^A f(x)dx=\infty$, то его называют ***расходящимся***.

Пусть функция стремится к бесконечности в некоторой внутренней точке интервала или на его концах. Если $\lim\limits_{x\to b-0} f\left(x\right)=\infty$, то ***несобственный интеграл второго рода*** $\int_a^b f(x)dx$ определяется как $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, при условии его существования, то есть

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

В этом случае несобственный интеграл называют ***сходящимся***; если такой предел не существует или $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \infty$, то несобственный интеграл называют ***расходящимся***.

4. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

4.1. ПОНЯТИЕ ЧИСЛОВОГО РЯДА И ЕГО СХОДИМОСТИ

Пусть задана числовая последовательность $\{u_m\}$. Выражение вида

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

называется ***числовым рядом***. Числа $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называются ***членами*** ряда, u_1 - *первый*, u_2 - *второй*, …, u_n - n-тый или ***общий член*** ряда. Для того, чтобы задать числовой ряд, достаточно задать его общий член.

Каждому ряду (1) поставим в соответствие конечные суммы

$S_1 = u_1,$

$S_2 = u_1 + u_2,$

$\ldots\ldots,$

$S_n = u_1 + u_2 + ..u_n,$

$\ldots\ldots$

которые называются ***частичными суммами*** этого ряда. Частичные суммы ряда образуют некоторую числовую последовательность $\{S_n\}$.

Ряд (1) называется ***сходящимся***, если сходится последовательность его частичных сумм, то есть существует конечный предел $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$. Число S при этом называется ***суммой*** ряда (1). Будем говорить, что ряд (1) сходится к числу S и приписывать ряду (1) это значение суммы: $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = S$. Если же последовательность частичных сумм расходится (соответствующий предел бесконечен или не существует), то ряд (1) называется ***расходящимся*** и в этом случае ряд не имеет суммы.

Геометрическая прогрессия и гармонический ряд

Ряд вида $a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}, a\neq 0$, называется рядом ***геометрической прогрессии***, а число q называется ***знаменателем прогрессии***.

Теорема. *Геометрическая прогрессия сходится тогда и только тогда, когда выполняется условие* $|q|<1$.

Ряд вида $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ называется ***гармоническим*** рядом.

Теорема. *Гармонический ряд расходится*.

Числовой ряд $1+\dfrac{1}{2^{\alpha}}+\dfrac{1}{3^{\alpha}}+\ldots+\dfrac{1}{n^{\alpha}}+\ldots$ называется ***обобщенным гармоническим рядом***.

Теорема. *Обобщенный гармонический ряд сходится при* $\alpha>1$ *и расходится при* $\alpha\leq 1$.

Свойства сходящихся рядов

Пусть задан ряд $u_1+u_2+\ldots+u_n+u_{n+1}+\ldots$. Ряд $u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+k}+\ldots$, полученный из данного отбрасыванием его первых n членов, называется n***-ным остатком*** ряда и обозначается символом r_n.

Теорема. *Заданный ряд и его остаток одновременно сходятся или расходятся*.

Следствие. В случае сходимости заданного ряда справедливо приближенное равенство $S\approx S_n$.

Теорема (необходимый признак сходимости ряда). *Для сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ *необходимо, но недостаточно выполнения условия* $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

Следствие. *Если общий член ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ *не стремится к нулю при* $n\to\infty$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ *является расходящимся*.

Теорема. *Пусть* $c \in R$. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится, то сходится и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cu_n$, *который называется произведением ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *на число* c, *причем справедливо равенство* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cu_n = c\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Эта теорема говорит о том, что постоянный множитель можно выносить не только в конечных суммах, но и в сходящихся рядах.

Теорема. *Если ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u''_n$ *сходятся к* S' *и* S'' *соответственно, то сходится и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u'_n + u''_n)$, *называющийся суммой данных рядов, причем* $S = S' + S''$.

Теорема (сочетательное свойство сходящихся рядов). *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится к числу* S, *то к нему же сходится и ряд*

$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_{k_1}) + (u_{k_1+1} + u_{k_1+2} + \ldots + u_{k_2}) + \ldots + (u_{k_{n-1}+1} + u_{k_{n-1}+2} + \ldots + u_{k_n}) + \ldots,$$

полученный из данного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *расстановкой скобок, то есть объединением членов данного ряда любым способом в группы без изменения порядка следования самих членов.*

Достаточные признаки сходимости положительных рядов

Ряд $\sum\limits_{n-1}^{\infty} u_n$ называется ***положительным***, если все его члены неотрицательны, то есть $u_n \geq 0$ для $\forall n \in \mathrm{N}$.

Теорема (критерий сходимости положительного ряда). *Положительный ряд сходится, если последовательность его частичных сумм* S_n *ограничена.*

Теорема (признак сравнения в обычной форме. *Пусть* $\sum\limits_{n-1}^{\infty} u_n$ *и* $\sum\limits_{n-1}^{\infty} v_n$ - *положительные ряды и* $u_n \leq v_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. *Если ряд* $\sum\limits_{n-1}^{\infty} v_n$ *сходится, то сходиться и ряд* $\sum\limits_{n-1}^{\infty} u_n$; *из расходимости ряда* $\sum\limits_{n-1}^{\infty} u_n$ *следует расходимость ряда* $\sum\limits_{n-1}^{\infty} v_n$.

Теорема (признак сравнения в предельной форме. *Пусть для положительных числовых рядов* $\sum_{n-1}^{\infty} u_n$ *и* $\sum_{n-1}^{\infty} v_n$ *существует конечный предел* $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = D$, *причем* $D \neq 0$. *Тогда оба ряда являются одновременно сходящимися или расходятся.*

Теорема (признак Даламбера). *Пусть для положительного ряда* $\sum_{n-1}^{\infty} u_n$ *существует* $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D$. *Тогда при* $D < 1$ *ряд сходится, при* $D > 1$ *ряд расходится, при* $D = 1$ *ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.*

Теорема (радикальный признак Коши). *Пусть для положительного ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *существует* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = K$. *Тогда при* $K < 1$ *ряд сходится, при* $K > 1$ *ряд расходится. При* $K = 1$ *ряд может быть как сходящимся, так и расходится.*

Теорема (интегральный признак Коши). *Пусть функция* $f(x)$ *неотрицательна, непрерывна и не возрастает на промежутке* $[1;+\infty)$. *Тогда ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *и несобственный интеграл* $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *одновременно сходятся или расходятся.*

Знакопеременные ряды

Ряд $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^{n+1} u_n + ...$, в котором $u_n > 0$ $(n = 1,2,...)$, называется ***знакопеременным***.

Теорема (признак Лейбница). *Пусть члены знакопеременного ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ *удовлетворяют условиям:*

1) $u_{n+1} \leq u_n \quad \forall n \in N$;

2) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Тогда этот ряд сходится.

Следствие. Сумма знакопеременного ряда, удовлетворяющего условиям признака Лейбница, не превышает величины первого члена этого ряда, то есть $S \leq u_1$.

Следствие. *Модуль* n*-го остатка знакопеременного ряда, удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, не превышает модуля* $(n+1)$*-го члена этого ряда, то есть* $|r_n| = |S - S_n| \le u_{n+1}$ $(n = 1,2,\ldots)$.

Ряды с произвольными членами. Абсолютно и условно сходящиеся ряды

Теорема (критерий Коши сходимости ряда). *Для сходимости ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *необходимо и достаточно, чтобы для любого числа* $\varepsilon > 0$ *существовал номер* $n_0(\varepsilon)$ *такой, что* $|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon$ *для всех* $n > n_0(\varepsilon)$ *и любого числа* $p \in N$.

Теорема. *Если сходится ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, *то сходится и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ..

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ из модулей членов данного ряда.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется ***условно сходящимся***, если он сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, составленный из модулей его членов, расходится.

Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов

Теорема. *Если ряды* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *сходятся абсолютно, то абсолютно сходятся и ряды* $\sum_{n=1}^{\infty} c u_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$.

Теорема. *Пусть задан числовой ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *с произвольными членами и пусть ряды* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ *составлены соответственно из всех неотрицательных и всех отрицательных членов ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *, взятых по модулю. Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится абсолютно, то ряды* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ *, сходятся, причем* $S = P - Q$ *, где* S, P, Q *- суммы рядов* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *,* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *,* $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ *соответственно.*

Теорема (о перестановке членов абсолютно сходящихся рядов). *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится абсолютно и его сумма равна* S *, то ряд, полученный из ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

перестановкой его членов, также абсолютно сходится, причем к тому же числу S*.*

Теорема (Римана). *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится условно, то для любого наперед заданного числа* S *можно так переставить его члены, что полученный в результате такой перестановки ряд будет иметь своей суммой именно это число* S*.*

Пусть имеем ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Ряд вида

$$u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_1) + \ldots + (u_1v_n + u_2v_{n-1} + \ldots + u_nv_1) + \ldots,$$

называется ***произведением Коши*** рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Теорема. *Если ряды* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *сходятся абсолютно и их суммы равны* U *и* V *соответственно, то их произведение Коши также сходится абсолютно к сумме* UV*.*

4.2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Сходимость и равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов

На множестве E задана ***функциональная последовательность*** $(f_n(x))$, если каждому натуральному числу n по некоторому закону поставлена в соответствие некоторая функция $f_n(x)$, определенная на некотором множестве E. При этом $f_n(x)$ называется ***общим членом*** заданной последовательности.

Последовательность можно считать заданной, если известна формула нахождения ее общего члена. Например, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$, $n \in N$.

Выберем точку $x = x_0 \in E$ и получим числовую последовательность $(f_n(x_0))$. Считают, что функциональная последовательность $(f_n(x))$ ***сходится (расходится) в точке*** $x = x_0 \in E$, если сходится (расходится) числовая последовательность $(f_n(x_0))$. Функциональная последовательность ***сходится (расходится) на множестве*** E, если она сходится (расходится) в каждой точке этого множества. Пределом сходящийся на некотором множестве E функциональной последовательности будет некоторая функция, определенная на этом множестве: $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x),\ x\in E$.

Сходимость функциональной последовательности $(f_n(x))$ на множестве E к функции $f(x)$ обозначает, что для любого наперед заданного числа $\varepsilon>0$ существует номер $n_0(\varepsilon,x)$, зависящий от ε и x, такой, что для всех $n>n_0(\varepsilon,x)$ и $x\in E$ выполняется неравенство $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

$$\Leftrightarrow\ f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x),\ x\in E.$$

Функциональная последовательность $(f_n(x))$ ***сходится*** к функции $f(x)$ ***равномерно на множестве*** E, если для некоторого наперед заданного числа $\varepsilon>0$ существует номер $n_0(\varepsilon)$, не зависящий от x, такой, что для всех $n>n_0(\varepsilon)$ справедливо неравенство $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ для любого $x\in E$.

Геометрическая интерпретация: если последовательность функций $(f_n(x))$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на множестве $E=[a;b]$, то для любого наперед заданного числа $\varepsilon>0$ существует номер $n_0(\varepsilon)$, не зависящий от x, и такой, что графики функций $f_n(x)$ для всех $n>n_0(\varepsilon)$ целиком лежат в полосе шириной 2ε, окружающей график функции $f(x)$.

Теорема (критерий равномерной сходимости функциональной последовательности). *Для равномерной сходимости на множестве X последовательности $(f_n(x))$ к функции $f(x)$ необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in X}|f(x)-f_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in X}|r_n(x)|=0.$$

Пусть задана последовательность функций $(f_n(x))$, $n\in N$, определенных на множестве E. Выражение вида $f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется ***функциональным рядом***.

Для каждого значения $x = x_0$ множества E этот ряд становится числовым. Множество всех тех $x \in E$, для которых функциональный ряд сходится, называется ***областью сходимости функционального ряда***.

Частичные суммы функционального ряда $S_1 = S_1(x), S_2 = S_2(x), \dots, S_n = S_n(x), \dots$ также будут функциями переменной x. ***Суммой*** функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называют предел последовательности частичных сумм $S_n(x)$ при $n \to \infty$: $S = S(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x)$.

Функциональный ряд называется ***равномерно сходящимся*** к функции $S(x)$ на множестве E, если на этом множестве равномерно сходится последовательность его частичных сумм $S_n(x)$.

Теорема (достаточный признак Вейерштрасса равномерной сходимости). *Функциональный ряд* $f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится абсолютно и равномерно на множестве* E*, если существует положительный сходящийся числовой ряд* $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ *такой, что* $|f_n(x)| \le a_n$ *для* $\forall n \in N$ *и* $\forall x \in E$

Числовой ряд $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ называется ***мажорантным*** или ***мажорантой***.

Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов и последовательностей

Теорема (о непрерывности суммы равномерно сходящегося функционального ряда). *Если функциональный ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *на отрезке* $[a;b]$ *сходится равномерно, а его члены* $f_n(x)$ *являются непрерывными функциями в точке* $x_0 \in [a;b]$, *то сумма* $F(x)$ *ряда также непрерывна в точке* x_0.

Теорема (об интегрировании равномерно сходящегося функционального ряда). *Если функциональный ряд* $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *на отрезке* $[a;b]$ *сходится равномерно, а его члены* $f_n(x)$ *являются непрерывными функциями на этом отрезке, то справедливо равенство*

$$\int_a^b F(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx,$$

то есть ряд можно почленно интегрировать.

Теорема. *Пусть функции* $f_n(x), n \in N$ *непрерывны на отрезке* $[a;b]$ *вместе со своими производными первого порядка и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ *на отрезке* $[a;b]$ *сходится равномерно. Тогда, если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится хотя бы в одной точке* $c \in [a;b]$, *то он сходится на отрезке* $[a;b]$, *а его сумма* $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *на этом отрезке имеет непрерывную производную, при чем* $F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$.

4.3. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Степенным рядом называется ряд вида

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n, \quad (*)$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots \in R$ называются ***коэффициентами*** этого ряда.

Степенным рядом называют и ряд более общего вида

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n,$$

который сводится к предыдущему случая в результате замены $x - a = z$.

Теорема Абеля. *Если ряд (*) сходится при некотором значении* $x_0 \neq 0$, *то он абсолютно сходится при* $\forall x$, *удовлетворяющем неравенство* $|x| < |x_0|$. *Если ряд (*) расходится в точке* x_1, *то он расходится при* $\forall\ |x| > |x_1|$.

Теорема (достаточный признак для нахождения радиуса сходимости). *Если для степенного ряд (*) существует конечный предел* $\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = L$, *то* $R = \frac{1}{L}$. *Если* $L = \infty$, *то* $R = 0$ *и при* $L = 0$ $R = \infty$.

Теорема (о равномерной сходимости степенного ряда). *Степенной ряд равномерно сходится на каждом отрезке, целиком принадлежащем его интервалу сходимости.*

Следствие. *Сумма* $f(x)$ *степенного ряду (*) является непрерывной функцией в его интервале сходимости.*

Следствие. *Степенной ряд можно почленно интегрировать на произвольном отрезке, целиком принадлежащем его интервалу сходимости.* $\int\limits_a^b f(x)dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^b c_n x^n dx$.

Следствие. *Степенной ряд можно почленно дифференцировать в его интервале сходимости и* $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$.

Ряди Тейлора и Маклорена

Говорят, что функция $y = f(x)$ ***раскладывается в степенной ряд*** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ на интервале $(-R;R)$, если на этом интервале ряд сходится и его суммой является функция $f(x)$: $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

Теорема (о единственности разложения функции в степенной ряд). *Пусть функция* $y = f(x)$ *на* $(-R;R)$ *имеет производные всех порядков и раскладывается в степенной ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. *Тогда все его коэффициенты находятся по формулам* $c_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$, $n = 0,1,2,\ldots$

Следствие. Если функцию можно разложить в степенной ряд, сходящейся к этой же функции, то такое разложение единственно и имеет вид:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots .$$

Этот ряд называют ***рядом Маклорена*** функции $f(x)$.

В более общем виде функция может быть представлена по степеням $(x-a)$:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

Такой ряд называется ***рядом Тейлора*** функции $f(x)$.

Теорема (достаточное условие). *Если все производные* $f^{(n)}(x)$, $n = 0,1,2,..,$ *для* $\forall x \in (-R;R)$ *ограничены одним и тем же числом* M *, то функция* $y = f(x)$ *может быть представлена рядом Тейлора на* $(-R;R)$.

Разложение в ряд Маклорена некоторых функций:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,\ x \in R$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,\ x \in R$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,\ x \in R.$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n},\ \forall x \in (-1;1)$$

$$arctgx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ x \in [-1;1].$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1},\ x \in (-1;1]).$$

$$(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1!}x + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n + \ldots =$$
$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n,\ x \in [-1;1]$$

4.4. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД ФУРЬЕ

Тригонометрическим рядом называется функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx\ ,\ (*)$$

где a_0, a_n, b_n $(n = 1,2,\ldots)$ - некоторые действительные числа, которые называются ***коэффициентами*** тригонометрического ряда.

Пусть ряд (*) сходится равномерно на $[-\pi;\pi]$, тогда его суммой $f(x)$ будет 2π-периодическая функция, непрерывная на всей числовой прямой, и его коэффициенты определяются формулами

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\ (n=1,2,...),\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx. \quad (**)$$

Пусть $f(x)$ - функция, интегрируемая на $[-\pi;\pi]$. Числа a_0, a_n, b_n, которые находятся по формулам (**), называются ***коэффициентами Фурье*** функции $f(x)$. Тригонометрический ряд (*), коэффициенты которого являются коэффициентами ряда Фурье функции $f(x)$, называют ***рядом Фурье*** этой функции и записывают в виде

$$f(x)\approx\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx.$$

Теорема. *Если функцию $f(x)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$ можно представить в виде суммы равномерно сходящегося тригонометрического ряда (*), то этот тригонометрический ряд будет рядом Фурье функции $f(x)$.*

Достаточное условие разложения функции в ряд Фурье

Соотношение $f(x)\approx\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$ оставляет открытым вопрос о том, сходится ли ряд Фурье функции $f(x)$ на $[-\pi;\pi]$, и, если сходится, то к какой функции.

Функция $y=f(x)$ называется ***кусочно-непрерывной*** на отрезке $[a;b]$, если она непрерывна на этом отрезке, возможно, кроме конечного числа точек разрыва первого рода, и односторонние пределы $f(a+0)$, $f(b-0)$ существуют и конечны.

Кусочно-непрерывная на $[a;b]$ функция называется ***кусочно-гладкой***, если она имеет производную в каждой точке непрерывности.

Теорема (Дирихле). *Если функция $y=f(x)$ кусочно-гладкая на $[-\pi;\pi]$, то ее ряд Фурье сходится к сумме $S(x)$, при этом:*

1) $S(x)=f(x)$ в каждой точке $x\in(-\pi;\pi)$, где функция непрерывна;

2) $S(x)=\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ в каждой точке $x\in(-\pi;\pi)$, где функция имеет разрыв первого рода;

3) $S(-\pi)=S(\pi)=\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

Условие кусочной гладкости функции в теореме Дирихле можно заменить другим, а именно, что отрезок $[-\pi;\pi]$ можно разбить на конечное число частей, на которых $f(x)$ монотонна (***кусочная монотонность***).

Отдельные случаи ряда Фурье

Пусть функция $f(x)$ - четная, тогда $a_0=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)dx$, $a_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)\cos nxdx$, $b_n=0$, то есть четная функция раскладывается в ряд Фурье только ***по косинусам***.

Пусть функция $f(x)$ - нечетная, тогда $a_0=a_n=0$, $b_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)\sin nxdx$, то есть, если нечетная функция раскладывается в ряд Фурье, то только ***по синусам***.

Если функция $y=f(x)$ задана на $[0;\pi]$, то в зависимости от типа разложения (по косинусам или по синусам) ее можно доопределить либо четным, либо нечетным образом на $[-\pi;0]$ и периодически продолжить на всю числовую ось. Потом эту новую периодическую функцию мы можем разложить в ряд Фурье, который на $[0;\pi]$ будет совпадать с заданной функцией.

Если функция интегрируема на $[-l;l]$ и представлена равномерно сходящимся тригонометрическим рядом, то он и будет ее рядом Фурье вида $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$, где коэффициенты Фурье вычисляются по формулам

$$a_0=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx\ ,\ \ a_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\ ,\ \ a_0=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\ .$$

Если функция $y=f(x)$ задана на отрезке $[a;b]$, то периодически продляем ее на всю числовую ось и полученную функцию раскладываем в ряд Фурье, который на $[a;b]$ совпадает с данной функцией, где $T=b-a,\ l=\frac{b-a}{2}$.

4.5. АППРОКСИМАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ

Аппроксимация (от латинского approximare - приближаться) - замена одних (математических) объектов другими, в том или ином смысле близкими к исходным.

Теорема Вейерштрасса (о равномерном приближении непрерывных функций алгебраическими многочленами). *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a;b]$, *то существует последовательность многочленов* $P_n(x)$, *равномерно сходящаяся к функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a;b]$, *то есть для любого числа* $\varepsilon > 0$ *существует многочлен* $P_n(x)$, *для которого оценка* $|P_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ *справедлива сразу для всех* $x \in [a;b]$.

Теорема Вейерштрасса (о равномерном приближении тригонометрическими многочленами непрерывной на отрезке функции). *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[-\pi;\pi]$ *и удовлетворяет условию* $f(-\pi) = f(\pi)$, *то эту функцию на этом отрезке можно равномерно приблизить тригонометрическими многочленами, то есть для любого* $\varepsilon > 0$ *найти тригонометрический многочлен* $T(x)$ *такой, что* $|f(x) - T(x)| < \varepsilon$ *для всех* $x \in [-\pi;\pi]$.

АЛФАВИТНЫЙ ПОКАЗАТЕЛЬ