

ФОРМУЛА ШНУРУВАННЯ В РОЗРІЗІ ПОЗАШКІЛЬНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ

Вікторія БРИДУН ✉

Львівський національний університет імені Івана Франка, Україна
Viktoriya.Brydun@lnu.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0003-3882-848X>

Андрій БРИДУН

Національний університет "Львівська Політехніка", Україна
andrii.m.brydun@lpnu.ua
<https://orcid.org/0000-0001-5634-0512>

THE SHOELACE FORMULA IN THE SCOPE OF OUT-OF-SCHOOL MATHEMATICAL EDUCATION

Viktoriia BRYDUN ✉

Ivan Franko National University of Lviv, Ukraine
Viktoriya.Brydun@lnu.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0003-3882-848X>

Andrii BRYDUN

Lviv Polytechnic National University, Ukraine
andrii.m.brydun@lpnu.ua
<https://orcid.org/0000-0001-5634-0512>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. Формула шнурівання, відома як формула Гаусса для обчислення площі багатокутника, важлива для позашкільного вивчення математики. Вона допомагає учням зрозуміти, як застосовувати математичні знання до реальних задач і демонструє практичне використання координатної геометрії для обчислення площі будь-якого багатокутника. Цей підхід стимулює розвиток просторового мислення, аналітичних навичок та дає можливість учням вирішувати задачі, які виникають у географії, фізиці чи архітектурі.

Матеріали і методи. Використані теоретичні та практичні методи. До теоретичних методів належать робота з відкритими джерелами, аналіз навчальних програм, аналіз освітніх програм спеціальності "Середня освіта. Математика". Практичними методами є розв'язування типових завдань і вправ з цієї тематики, розробка нових завдань, які можна пропонувати вчителям для позашкільної роботи з учнями. Окрім традиційних зошитів та олівця, для побудови багатокутників використовувалось динамічне математичне програмне забезпечення GeoGebra.

Результати. У роботі наведено формулу шнурівання для обчислення площі багатокутника з детальним поясненням та доведенням. Представлено огляд типових задач по цій тематиці та розроблено ряд задач, які вчителі можуть пропонувати учням в межах факультативного курсу математики. Також показано, як формулу шнурівання можна вивести методами лінійної алгебри та аналітичної геометрії, використовуючи визначники і векторний добуток, і застосувати для знаходження площ криволінійних фігур за допомогою теореми Гріна.

Висновки. Запропонована у роботі тематика може стати в нагоді вчителям математики в контексті підготовки до профільних олімпіад та проведенні факультативів чи гуртків. Взаємозв'язок шкільної математики та таких курсів як аналітична геометрія та математичний аналіз ілюструє необхідність фундаментальної базової підготовки майбутнього вчителя математики.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: площа; багатокутник; координати точки; розбиття; орієнтація; векторний добуток; формула шнурівання.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Бريدун В., Бريدун А. Формула шнурівання в розрізі позашкільної математичної освіти. *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 2. С. 6-13. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i2-01>.

ABSTRACT

Formulation of the problem. The shoelace formula, also known as Gauss' formula for calculating the area of a polygon, is important for extracurricular mathematics learning. It helps students understand how to apply mathematical knowledge to real-world problems and demonstrates the practical use of coordinate geometry to calculate the area of any polygon. This approach stimulates the development of spatial thinking and analytical skills, enabling students to solve problems that arise in geography, physics, or architecture.

Materials and methods. The study used theoretical and practical methods. Theoretical methods include working with open sources on this topic, analyzing mathematics curricula, and analyzing educational programs for the specialty "Secondary Education. Mathematics". Also, we used practical methods to solve typical problems and exercises on this topic and developed new issues that teachers can offer for extracurricular work with students. In addition to the traditional notebook and pencil, the dynamic mathematical software GeoGebra was used to construct polygons.

Results. The paper presents the shoelace formula for calculating the area of a polygon with a detailed explanation and proof. An overview of typical problems on this topic is given, and several issues are developed that teachers can offer students within an optional mathematics course framework. It also shows how the shoelace formula can be derived using linear algebra and analytic geometry methods, using determinants and the cross product, and applied to find the areas of curvilinear figures using Green's theorem.

Conclusions. The topics proposed in the work may be helpful to mathematics teachers in preparing for specialized Olympiads and conducting electives or math clubs. The relationship between school mathematics and such courses as analytical geometry and mathematical analysis illustrates the need for fundamental basic training for future mathematics teachers.

KEYWORDS: area; polygon; point coordinates; partition; orientation; cross product; the shoelace formula.

FOR CITATION: Brydun, V., & Brydun A. (2025). The shoelace formula in the scope of out-of-school mathematical education. *Physical and Mathematical Education*, 40(2), 6-13. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i2-01>.

ВСТУП

Постановка проблеми. У цій статті показано взаємозв'язок між координатами вершин багатокутника та його площею. Сумування добутків координат, взятих за певним правилом визначає площу довільного багатокутника без самоперетинів. Ця, на перший погляд, проста формула демонструє як математичні методи можуть бути застосовані до практичних задач у реальному житті, наприклад у геодезії, картографії чи сільському господарстві. Цю формулу можна застосовувати до неправильних багатокутників, площі яких доволі складно обчислювати традиційними методами.

Вивчення формули шнуровання допомагає учням розвивати навички роботи з координатами, тренує їхню уважність і аналітичне мислення, підтверджує красу математики через елегантність і простоту обчислень.

Формула шнуровання здатна мотивувати учнів, адже вони можуть бачити результати своїх обчислень у прикладних завданнях, таких як визначення площі земельної ділянки або складних фігур (Braden, 1986; Bierwirth & Meisel, 2010; Lee & Lim, 2017; Misiurewicz, 1996). Використання програмних інструментів (GeoGebra та ін.) робить навчання цікавим і сучасним. Крім того, вивчення формули шнуровання підсилює зв'язок між геометрією та алгеброю, оскільки учні працюють із числами, координатами та геометричними об'єктами одночасно. Це робить її важливою частиною курсу для поглибленого вивчення математики.

Аналіз актуальних досліджень. Попри те, що формула шнуровання була встановлена у 1769 році, тематика статті є актуальною у розрізі позашкільної математичної освіти, позаяк відображає нестандартний підхід до обчислення площі та взаємозв'язок з дисциплінами, які вивчають значно пізніше вже не у шкільному курсі математики.

Є кілька цікавих методів інтерпретації та доведення формули шнуровання (Halton, 1995; Polster, 2006; Ross, 2015), що робить цю тему ще більш вартісною для розгляду на математичних гуртках і факультативах (Burkard, 2006; Deineko & Woeginger, 2014; Gale, 1998).

У цій статті авторами запропоновано один з методів доведення формули шнуровання, розглянуто кілька базових прикладів її застосування та запропоновано ряд цікавих практичних завдань для самостійної роботи.

Мета статті. Метою написання статті про використання формули шнуровання є популяризація описаного методу як практичного інструмента для розв'язання геометричних задач, а також мотивація учнів і студентів до вивчення геометрії. Стаття містить покрокові інструкції, приклади розв'язання задач та методи візуалізації, що робить формулу доступною для широкої аудиторії, зокрема вчителів, учнів і інших фахівців. Крім того, в статті на прикладі формули шнуровання наведено взаємозв'язок шкільної математики з такими дисциплінами як аналітична геометрія, лінійна алгебра та математичний аналіз.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У дослідженні використовувалися теоретичні методи – вивчення літератури, наукових статей, підручників та історичних джерел, які описують походження, принципи та застосування формули шнуровання; практичні методи – розв'язання задач із використанням формули для обчислення площі різних багатокутників із заданими координатами; моделювання – використання комп'ютерних таких програм як GeoGebra для візуалізації роботи формули та автоматизації обчислень; емпіричні – спостереження під час роботи з учнями під час позаурочної роботи (на засіданнях математичного гуртка МАН, під час підготовки до математичних конкурсів) та студентами спеціальності “Середня освіта. Математика”.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Формула шнуровання, більш відома як формула Гаусса для знаходження площі багатокутника, вершини якого задані своїми координатами, була доведена в 1769 році Альбрехтом Мейстером. Проте авторство цієї формули приписують Карлу Фрідріху Гауссу, який довів цю формулу у віці 18 років у 1795 році, присвятивши дослідженню властивостей багатокутників доволі багато часу. В літературі можна одночасно зустріти обидві назви цієї формули: формула шнуровання (the shoelace formula) та формула Гаусса.

Перевірити достовірність цієї формули можна методом розбиття довільного багатокутника без самоперетинів на трикутники, показавши, що площа трикутника визначається за допомогою алгоритму шнуровання і насправді є визначником другого порядку, утвореним з координат вершин трикутника.

Перейдемо безпосередньо до формулювання та доведення формули шнуровання.

Формула шнуровання: Нехай в декартовій системі координат задано n вершин $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ деякого багатокутника $A_1A_2\dots A_n$ без самоперетинів, причому напрямком нумерації вершин здійснюється проти годинникової стрілки. Тоді площу цього багатокутника можна обчислити за формулою

$$S = \frac{1}{2} (x_1y_2 + x_2y_3 + \dots + x_ny_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - \dots - x_1y_n)$$

На перший погляд не цілком зрозуміло, де в цій формулі заховане шнуровання. Проте це можна дуже добре уявити, візуалізуючи формулу в графічну ілюстрацію. Розмістимо x -координати вершин у порядку їх нумерації у вертикальний стовпчик ліворуч та y -координати у вертикальний стовпчик праворуч (див. рис. 1). З'єднаємо координати, зазначені у кожному з добутків зі знаком “+”, синіми відрізками та координати, зазначені у кожному з добутків зі знаком “-”, зеленими відрізками. Таким чином, ми отримаємо візерунок, схожий на класичне шнуровання взуття.

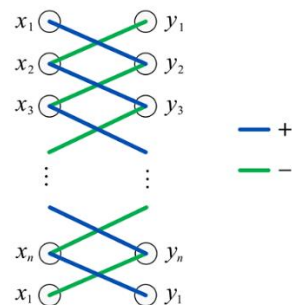


Рис. 1. Візуалізація формули шнуровання
Джерело: авторська розробка.

Доведення формули шнурування: Доведення проведемо, здійснивши кілька кроків.

Крок 1: Покажемо, що формула шнурування справедлива для трикутників, одна з вершин якого розташована у початку координат, а координати двох інших вершин пронумеровані у напрямку проти годинникової стрілки (див. рис. 2а).

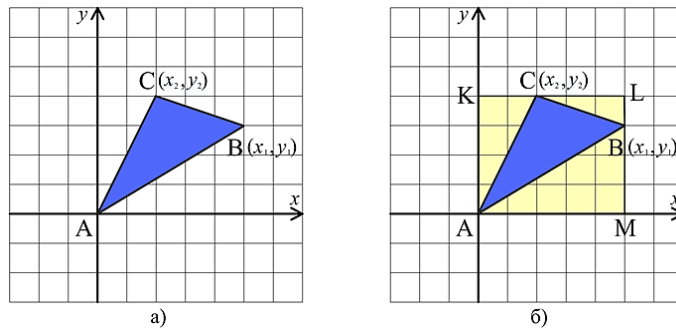


Рис. 2. Трикутник з вершиною в початку координат

Джерело: авторська розробка.

Доповнимо трикутник ABC трьома прямокутними трикутниками ABM, BLC та CKA до прямокутника AMLK та знайдемо площу трикутника ABC методом відрізання трикутників ABM, BLC та CKA від прямокутника AMLK (див. рис. 2б).

$$S_{ABC} = S_{AMLK} - S_{AMB} - S_{BLC} - S_{CKA} = x_1 y_2 - \frac{1}{2} x_1 y_1 - \frac{1}{2} (x_1 - x_2)(y_2 - y_1) - \frac{1}{2} x_2 y_2 = \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

Враховуючи нульові координати точки А, бачимо, що в цьому випадку формула шнурування виконується.

Застосувавши аналогічні міркування, нескладно переконатись, що формула шнурування справедлива й для трикутників, вершини яких попарно належать іншим координатним чвертям. Якщо ж вершини належать різним чвертям, тоді трикутник можна розбити на два або три трикутники, деякі вершини яких належатимуть координатним осям, і обчислити площу вихідного трикутника як суму площ отриманих трикутників розбиття.

Крок 2: Покажемо, що формула шнурування справедлива для довільного трикутника (див. рис. 3а).

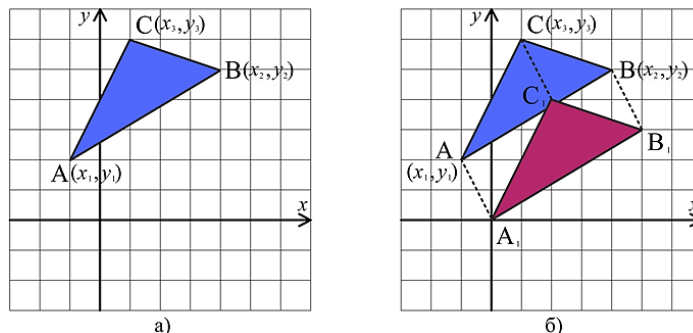


Рис. 3. Перенесення трикутника у початок координат

Джерело: авторська розробка.

Виконаємо паралельне перенесення вихідного трикутника ABC так, щоб одна з вершин потрапляла у початок координат. Не зменшуючи загальності, вважаємо, що вершина А потрапляє в початок координат. Отриманий трикутник $A_1B_1C_1$ має вершини у точках $A_1(0;0)$, $B_1(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ та $C_1(x_3 - x_1, y_3 - y_1)$ (див. рис. 3б). Використовуючи попередній крок, площа трикутника $A_1B_1C_1$ буде

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} ((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)) = \frac{1}{2} (x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_2 y_1 - x_3 y_2 - x_1 y_3)$$

Крок 3: Покажемо, що формула шнурування справедлива для довільного опуклого багатокутника, який містить початок координат (див. рис. 4а).

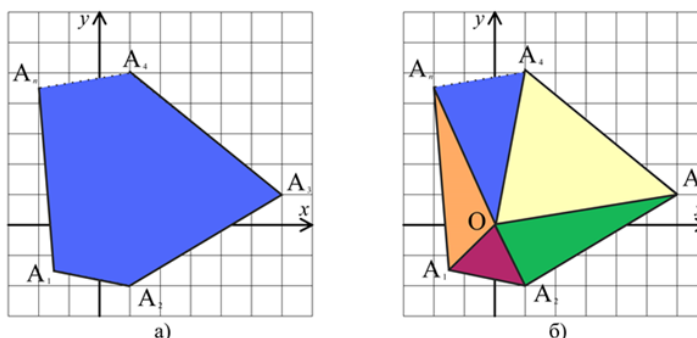


Рис. 4. Опуклий багатокутник, який містить початок координат

Джерело: авторська розробка.

Сполучивши початок координат з усіма вершинами багатокутника $A_1A_2\dots A_n$ (див. рис. 4б), ми отримуємо розбиття цього багатокутника на трикутники, для кожного з яких справедлива формула шнурування. Додавши площі усіх трикутників, отримуємо площу багатокутника

$$S = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) + \frac{1}{2}(x_2y_3 - x_3y_2) + \dots + \frac{1}{2}(x_ny_1 - x_1y_n) = \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + \dots + x_ny_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - \dots - x_1y_n)$$

Крок 4: Зазначимо, що формула шнурування справедлива для довільного опуклого багатокутника. Це легко побачити, застосувавши до багатокутника аналогічні міркування як у кроці 2.

Крок 5: Формула шнурування справедлива для будь-якого багатокутника без самоперетинів. Продемонструємо хід міркувань на довільному неопуклому чотирикутнику без самоперетинів (див. рис. 5а), що дасть нам можливість узагальнити цей підхід на будь-який багатокутник.

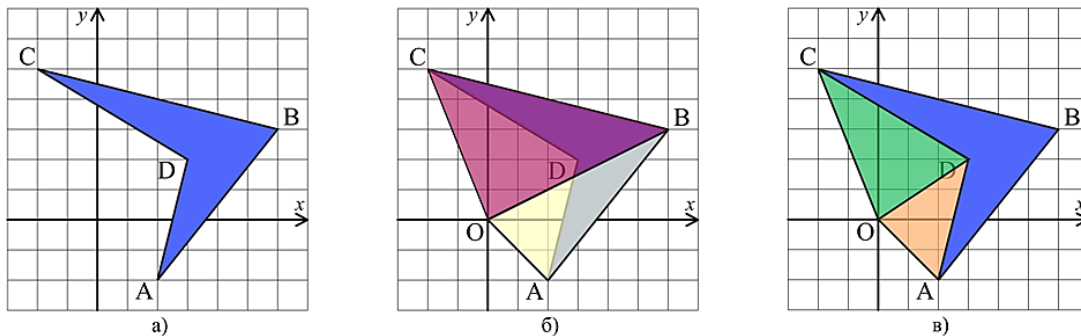


Рис. 5. Розбиття довільного багатокутника без самоперетинів

Джерело: авторська розробка.

Сполучимо усі вершини з початком координат та просумуємо площі утворених трикутників, зважаючи на орієнтацію нумерації вершин у кожному трикутнику. Трикутники OAB та OBC разом утворюють чотирикутник OABC (див. рис. 5б), трикутники OCD та ODA разом утворюють чотирикутник OCDA (див. рис. 5в). Площа чотирикутника ABCD є різницею площ чотирикутників OABC та OCDA.

Зауважимо, що нумерація вершин трикутника за годинниковою стрілкою визначає число, протилежне до площі трикутника. Вважаючи, що вершини чотирикутника A, B, C і D мають відповідно координати $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$, отримуємо, що площа чотирикутника ABCD дорівнює

$$S_{ABCD} = S_{OAB} + S_{OBC} - S_{OCD} - S_{ODA} = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) + \frac{1}{2}(x_2y_3 - x_3y_2) - \left(-\frac{1}{2}(x_3y_4 - x_4y_3)\right) - \left(-\frac{1}{2}(x_4y_1 - x_1y_4)\right) = \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_4y_3 - x_1y_4)$$

Для повноти доведення нам залишилось зауважити, що в довільному багатокутнику без самоперетинів можна застосувати алгоритм додавання площ трикутників, зважаючи на орієнтацію нумерації їхніх вершин.

В процесі доведення формули шнурування ми помітили кілька важливих фактів, які сформулюємо у вигляді зауважень.

Зауваження 1: Площа трикутника у кроці 1 задається формулою $S = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$. Насправді число в дужках можна задати як визначник другого порядку, а саме

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Зауваження 2: Враховуючи попереднє зауваження, формулу шнурування інколи записують у такому вигляді

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \dots & \dots \\ x_n & y_n \end{vmatrix}$$

до якого застосовують принцип обчислення визначника другого порядку, продовжений на n рядків.

Зауваження 3: Площу трикутника можна визначити як половину площі паралелограма, побудованого на векторах, що виходять з однієї вершини. А це, в свою чергу, є половиною довжини векторного добутку двох тривимірних векторів, що виходять зі спільної вершини трикутника (Бокало та ін., 2016). Скажімо у кроці 1 такими векторами можна взяти вектори $\vec{OA} = (x_1, y_1, 0)$ та $\vec{OB} = (x_2, y_2, 0)$. Тоді векторним добутком є вектор

$$\vec{v} = [\vec{OA}, \vec{OB}] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, x_1y_2 - x_2y_1)$$

і площею трикутника є

$$S = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$$

Продемонструємо використання формули шнурування на деяких практичних задачах.

Задача 1. Обчисліть площу чотирикутника ABCD, зображеного на рисунку 6.

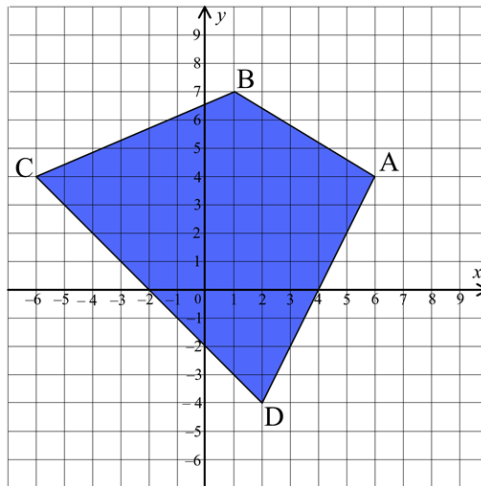


Рис. 6. Чотирикутник ABCD

Джерело: авторська розробка.

Розв'язання. З рисунка визначимо координати вершин чотирикутника: $A(6, 4)$, $B(1, 7)$, $C(-6, 4)$ та $D(2, -4)$. Бачимо, що нумерація вершин відбувається проти годинникової стрілки. Застосувавши формулу шнуровання, отримаємо, що площа чотирикутника дорівнює

$$S = \frac{1}{2}(6 \cdot 7 + 1 \cdot 4 + (-6) \cdot (-4) + 2 \cdot 4 - 1 \cdot 4 - (-6) \cdot 7 - 2 \cdot 4 - 6 \cdot (-4)) = 66 \text{ од}^2.$$

У цій конкретній задачі дуже легко перевірити коректність обчислень іншим способом. Розбивши чотирикутник ABCD на два трикутники ABC та ACD зі спільною основою AC, отримуємо площу чотирикутника як суму площ трикутників, а саме

$$S = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 66 \text{ од}^2.$$

Попередня задача містить такі дані, для яких обчислення площі чотирикутника є зручним обома запропонованими способами. Наведемо приклад задачі, в якій обчислення традиційними методами стають доволі громіздкими.

Задача 2. Обчисліть площу шестикутника ABCDEF, вершини якого розташовані у точках $A(1, -5)$, $B(8, 1)$, $C(4, 5)$, $D(3, 1)$, $E(-4, 3)$ та $F(2, -1)$.

Розв'язання. Використавши графічний калькулятор GeoGebra, можна легко перекопатись, що вершини задані в порядку проти годинникової стрілки, а це нам дозволяє відразу застосувати формулу шнуровання:

$$S = \frac{1}{2}(1 \cdot 1 + 8 \cdot 5 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + (-4) \cdot (-1) + 2 \cdot (-5) - (-5) \cdot 8 - 1 \cdot 4 - 5 \cdot 3 - 1 \cdot (-4) - 3 \cdot 2 - (-1) \cdot 1) = 34 \text{ од}^2.$$

Задачі на використання формули шнуровання можна урізноманітнити, спонукаючи учнів знайти невідомі координати однієї з вершин багатокутника при заздалегідь відомій площі.

Задача 3. В п'ятикутнику ABCDE задано координати вершин $A(-6, -8)$, $B(4, -6)$, $C(7, 3)$, $D(-8, 6)$ та $E(-2, a)$.

а) При якому значенні параметра a площа п'ятикутника ABCDE дорівнює 105 од^2 ?

б) Які умови потрібно накласти на y -координату точки E , щоб площа п'ятикутника не перевищувала 105 од^2 ?

Розв'язання. Використавши графічний калькулятор GeoGebra, можна побудувати відомі вершини і за допомогою повзунка задати координати вершини E . Це дозволяє нам побачити, що значення параметра a змінюється в межах від $-7,2$ до $4,8$. У випадку, якщо $a \in (-\infty, -7,2] \cup [4,8, +\infty)$, п'ятикутник матиме самоперетини.

а) Обчислимо площу п'ятикутника:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}((-6) \cdot (-6) + 4 \cdot 3 + 7 \cdot 6 + (-8) \cdot a + (-2) \cdot (-8) - \\ &- (-8) \cdot 4 - (-6) \cdot 7 - 3 \cdot (-8) - 6 \cdot (-2) - a \cdot (-6)) = \frac{1}{2}(36 + 12 + 42 - 8a + 16 + 32 + 42 + 24 + 12 + 6a) = \\ &= \frac{1}{2}(216 - 2a) = 108 - a \end{aligned}$$

Розв'язавши рівняння $108 - a = 105$, отримуємо, що $a = 3$.

б) Щоб площа п'ятикутника не перевищувала 105 од^2 , потрібно розв'язати нерівність $108 - a \leq 105$.

Таким чином, отримуємо, що $a \geq 3$. Враховуючи зазначені допустимі значення параметра a , зазначимо, що $a \in [3, 4,8)$.

Зауваження: Обмеження параметра a можна знайти аналітичними методами, записавши рівняння відповідних сторін і знайшовши точки перетину цих сторін з вертикальною прямою $x = -2$, позаяк усі можливі точки E належать цій прямій.

Задачі для самостійної роботи.

Задача 1. Обчисліть площі фігур, зображених на рисунку 7.

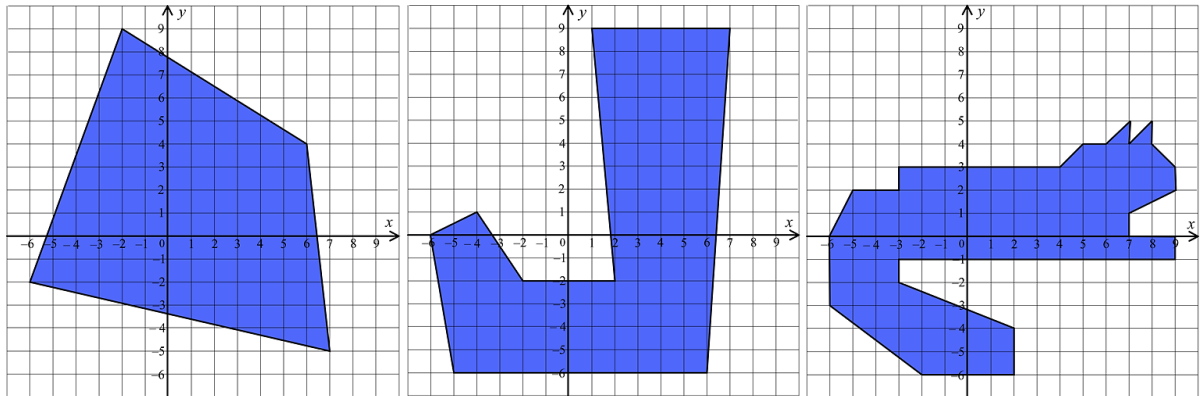


Рис. 7. Складені фігури
Джерело: авторська розробка.

Задача 2. Обчисліть площі фігур, заданих координатами вершин.

- а) трикутника ABC з вершинами у точках A(9, -2), B(1, 8), C(-4, 5).
- б) трикутника ABC з вершинами у точках A(-3, 8), B(2, -6), C(-1, -4).
- в) чотирикутника ABCD з вершинами у точках A(-2, 10), B(-6, -1), C(1, -4), D(5, 12).
- г) дев'ятикутника ABCDEFGHI з вершинами у точках A(-6, -4), B(0, -6), C(2, 0), D(8, -2), E(10, 4), F(0, 8), G(-8, 6), H(-10, 2), I(-2, 4).

Спробуйте у кожному з випадків обчислити площу фігури традиційними методами і порівняти складність знаходження розв'язку.

Задача 3. В шестикутнику ABCDEF задано координати вершин A(5, -6), B(9, -2), C(a, 2), D(5, 6), E(-4, 4) та F(-8, 8).

- а) При якому значенні параметра a площа шестикутника ABCDEF дорівнює 83 од^2 ?
- б) Які умови потрібно накласти на x -координату точки C, щоб площа шестикутника не перевищувала 83 од^2 ?

Задача 4. В яких межах знаходиться площа чотирикутника ABCD заданого координатами його вершин A(2, -3), B(4, 5), C(13, -5), D(5, a)?

Зв'язок формули шнуровання з теоремою Гріна. Зважаючи на те, що поняття площі тісно пов'язане з поняттям інтеграла, наглядно на прикладі кардіоїди продемонструємо як відбувається перехід від формули шнуровання до криволінійних інтегралів.

Кардіоїда — це плоска крива, яка має форму серця і отримується як траєкторія точки на колі, що котиться по іншому колу того ж радіуса. Побудуємо кардіоїду, обертаючи коло одиничного радіуса навколо такого ж кола (див. рис. 8а).

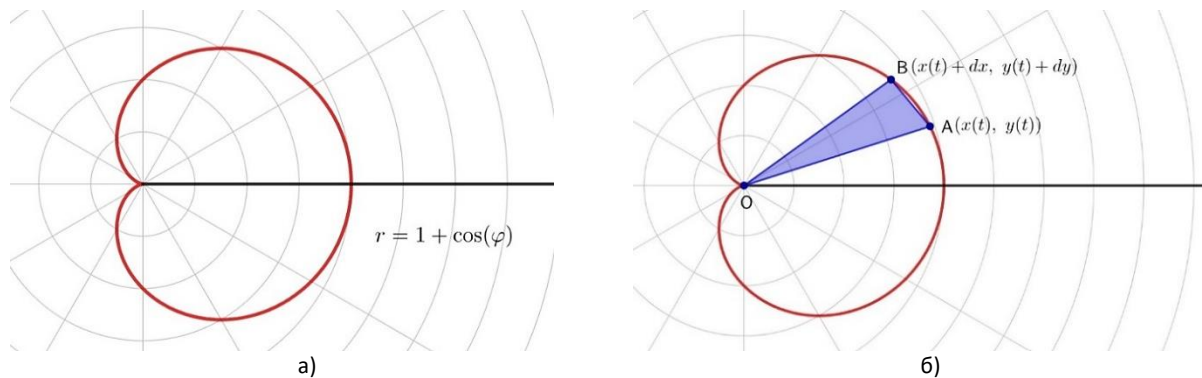


Рис. 8. Кардіоїда
Джерело: авторська розробка.

Апроксимуємо криву відрізками прямих, що сполучають точки кардіоїди. Отримаємо наближене значення площі фігури, обмеженої кардіоїдою. Збільшуючи кількість точок на кардіоїді, отримуватимемо ближче до точного значення площі. Здійснивши граничний перехід, матимемо класичну формулу для обчислення площі криволінійної фігури.

Кардіоїду, задану полярним рівнянням $r = 1 + \cos \varphi$, можна також подати параметричним рівнянням

$$\begin{cases} x(t) = (1 + \cos t) \cos t \\ y(t) = (1 + \cos t) \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Застосувавши формулу шнуровання до трикутника OAB, отримаємо, що його площа дорівнює

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}(x(t) \cdot (y(t) + dy) - (x(t) + dx) \cdot y(t)) = \frac{1}{2}(x(t) \cdot dy - y(t) \cdot dx)$$

Зауважимо, що $dx = x'(t)dt$, $dy = y'(t)dt$, де $x'(t) = -\sin t - \sin 2t$, $y'(t) = \cos t + \cos 2t$. Тоді

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x(t) \cdot y'(t)dt - y(t) \cdot x'(t)dt) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x(t) \cdot y'(t) - y(t) \cdot x'(t))dt$$

Просумувавши площі усіх трикутників розбиття, для яких t змінюється в межах від 0 до 2π , отримуємо, що площа кардіоїди дорівнює

$$S = \frac{1}{2} \oint (x(t) \cdot y'(t) - y(t) \cdot x'(t))dt$$

Застосувавши теорему Гріна, маємо

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x(t) \cdot y'(t) - y(t) \cdot x'(t))dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ((1 + \cos t) \cos t \cdot (\cos t + \cos 2t) - (1 + \cos t) \sin t \cdot (-\sin t - \sin 2t))dt = \frac{3\pi}{2} \text{ од}^2.$$

Отже, площа кардіоїди становить $\frac{3\pi}{2}$ од².

Сучасний вчитель математики повинен цікавитись різними напрямками математичної діяльності. Поруч з досконалим знанням шкільного курсу математики, він має розуміти, що в математиці не існує чіткої лінії, яка розмежовує математику, яку вивчають у школі, з математикою, яку вивчають у вищих навчальних закладах чи досліджують науковці. Ба більше, математика не існує відірвано від інших галузей науки і часто практичне застосування тих чи інших фактів є цілком несподіваним на перший погляд, як-от, наприклад, застосування формули шнурування у геодезії, радіолокації та радіозв'язку.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

У 1899 році Георг Пік запропонував метод обчислення площ багатокутників заданих на координатній площині, вершини яких є ґратковими точками, тобто точками з цілочисельними координатами. Він показав, що площу багатокутника можна обчислити просумувавши кількість ґраткових точок всередині багатокутника з половиною кількості ґраткових точок на межі багатокутника і віднявши від цієї суми одиницю.

Подальші дослідження стосуватимуться ґрунтовного вивчення теореми Піка для знаходження площ багатокутників та вивченню взаємозв'язків між обома методами обчислення площ. Учням, які спрямовані на програмування, можна пропонувати розробку програмного забезпечення чи інтерактивних онлайн-інструментів, які дозволять швидко застосовувати формулу до складних багатокутників без самоперетинів та з можливими порожнінами всередині.

Також заплановані аналіз зв'язку формули шнурування з іншими геометричними методами, наприклад, методом трикутників чи обчисленням площі за допомогою інтегралів; вивчення можливості поширення формули шнурування на тривимірний випадок; розгляд інших способів шнурування та їхніх геометричних чи топологічних властивостей.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бокало, Б.М., Бريدун, В.Л., Гуран, І.Й., & Колос, Н.М. (2016). *Аналiтична геометрiя в прикладах i задачах: навчальний посiбник*. Львiв: Видавець I.E. Чижиков.
2. Bierwirth, C., & Meisel, F. (2010). A survey of berth allocation and quay crane scheduling problems in container terminals, *European Journal of Operational Research*, 202, 615–627. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2009.05.031>.
3. Braden, B. (1986). The Surveyor's Area Formula. *The College Mathematics Journal*, 17(4), 326–337. <https://doi.org/10.1080/07468342.1986.11972974>.
4. Burkard, Polster (2006). *The Shoelace Book: A Mathematical Guide to the Best (and Worst) Ways to Lace Your Shoes*. AMS, Mathematical world, 24, 125. <http://dx.doi.org/10.1090/mawrld/024>.
5. Deineko, V.G., & Woeginger, G.J. (2014). Another Look at the Shoelace TSP: The Case of Very Old Shoes. In: Ferro, A., Luccio, F., Widmayer, P. (eds) Fun with Algorithms. FUN 2014. *Lecture Notes in Computer Science*, 8496. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-07890-8_11.
6. Gale, D. (1998). The Shoelace Problem. In: Gale, D. (eds) *Tracking the Automatic ANT*. Springer, New York, NY. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2192-0_19.
7. Halton, J.H. (1995). The shoelace problem. *The Mathematical Intelligencer*, 17, 36–41.
8. Lee, Y., & Lim, W. (2017). Shoelace formula: Connecting the area of a polygon and vector cross product. *Mathematics Teacher*, 110, 8, 631–636. <https://doi.org/10.5951/mathteacher.110.8.0631>.
9. Misiurewicz, M. (1996). Lacing irregular shoes. *The Mathematical Intelligencer*, 18, 32–34.
10. Polster, B. (2002). What is the best way to lace your shoes? *Nature*, 420, 476. <https://doi.org/10.1038/420476a>.
11. Pure, R. (2015). Computing Exact Closed-Form Distance Distributions in Arbitrarily Shaped Polygons with Arbitrary Reference Point. *The Mathematica Journal*. Wolfram Media, Inc.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Bokalo, B.M., Brydun, V.L., Huran, I.I., & Kolos, N.M. (2016). *Analytical Geometry in Examples and Problems: Textbook*. Lviv: Publisher I.E. Chizhykov. (in Ukrainian)
2. Bierwirth, C., & Meisel, F. (2010). A survey of berth allocation and quay crane scheduling problems in container terminals, *European Journal of Operational Research*, 202, 615–627. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2009.05.031>.
3. Braden, B. (1986). The Surveyor's Area Formula. *The College Mathematics Journal*, 17(4), 326–337. <https://doi.org/10.1080/07468342.1986.11972974>.

4. Burkard, Polster (2006). *The Shoelace Book: A Mathematical Guide to the Best (and Worst) Ways to Lace Your Shoes*. AMS, Mathematical world, 24, 125. <http://dx.doi.org/10.1090/mawrld/024>.
5. Deineko, V.G., & Woeginger, G.J. (2014). Another Look at the Shoelace TSP: The Case of Very Old Shoes. In: Ferro, A., Luccio, F., Widmayer, P. (eds) Fun with Algorithms. FUN 2014. *Lecture Notes in Computer Science*, 8496. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-07890-8_11.
6. Gale, D. (1998). The Shoelace Problem. In: Gale, D. (eds) *Tracking the Automatic ANT*. Springer, New York, NY. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2192-0_19.
7. Halton, J.H. (1995). The shoelace problem. *The Mathematical Intelligencer*, 17, 36–41.
8. Lee, Y., & Lim, W. (2017). Shoelace formula: Connecting the area of a polygon and vector cross product. *Mathematics Teacher*, 110, 8, 631-636. <https://doi.org/10.5951/mathteacher.110.8.0631>.
9. Misiurewicz, M. (1996). Lacing irregular shoes. *The Mathematical Intelligencer*, 18, 32–34.
10. Polster, B. (2002). What is the best way to lace your shoes? *Nature*, 420, 476. <https://doi.org/10.1038/420476a>.
11. Pure, R. (2015). Computing Exact Closed-Form Distance Distributions in Arbitrarily Shaped Polygons with Arbitrary Reference Point. *The Mathematica Journal*. Wolfram Media, Inc.

| Матеріал надійшов до редакції: 06.02.2025 р. | Прийнято до друку: 15.03.2025 р. | Опубліковано: 29.04.2025 р. |

