

Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Хоминська Олександра Анатоліївна

**ПІДТРИМКА ВИВЧЕННЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА
МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ В ШКОЛІ ЗАСОБАМИ ДИНАМІЧНОЇ
МАТЕМАТИКИ**

Спеціальність 014.04 Середня освіта (математика)

Галузь знань: 01. Освіта

Кваліфікаційна робота

На здобуття освітнього ступеню магістр

Науковий керівник ,

Друшляк Марина Григорівна,

кандидат педагогічних наук, доцент

«_____» _____ 2020 року

Виконавець

Хоминська Олександра Анатоліївна

«_____» _____ 2020 року

Суми 2020

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ.....	6
1.1 Методичні особливості вивчення теорії ймовірностей і математичної статистики в основній і старшій школі.....	6
1.2 Аналіз навчальних програм з теми дослідження.....	18
1.3 Аналіз підручників з теми дослідження.....	27
РОЗДІЛ 2. ВИКОРИСТАННЯ ПРОГРАМ ДИНАМІЧНОЇ МАТЕМАТИКИ ПРИ ВИВЧЕННІ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ В ШКОЛІ.....	40
2.1. Аналіз комп'ютерного інструментарію програм динамічної математики у контексті дослідження	40
2.2. Шляхи використання програми «Математичний конструктор» при вивченні теорії ймовірностей і математичної статистики в основній і старшій школі.....	62
2.3. Конспекти уроків з комп'ютерною підтримкою	71
ВИСНОВКИ	94
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	96

ВСТУП

Стохастична змістова лінія насамперед покликана розвинути один із спеціальних типів мислення – ймовірно-статистичний, який необхідний сучасній людині як у загальнокультурному плані, так і для професійного становлення. Адже розвинуте суспільство ставить до своїх членів досить високі вимоги, які відносяться до вміння аналізувати випадкові факти, оцінювати шанси, висувати гіпотези, прогнозувати розвиток ситуації і, нарешті, приймати рішення в ситуаціях, які мають ймовірнісний характер, у ситуаціях невизначеності. Тому головна мета вивчення елементів комбінаторики, теорії ймовірності й статистики полягає у формуванні розуміння детермінованості та випадковості, допомозі в усвідомленні того, що багато законів природи і суспільства мають ймовірнісний характер, що багато реальних явищ і процесів описуються ймовірнісними моделями.

З появою цієї нової змістової лінії виникло багато питань, суперечностей і проблем. Важко було погодитися з тим, що вивчення початків теорії ймовірностей передбачалося починати у другому півріччі 11-го класу. Адже, як справедливо зазначають фахівці, «практика показує, що людині, яка не зрозуміла ймовірнісних ідей у дитинстві, у зрілому віці вони даються нелегко, бо багато чого у теорії ймовірностей неначе суперечить життєвому досвіду, а з віком досвід накопичується і набуває статусу безумовності» [13].

Дана тема є актуальною, оскільки математична діяльність учнів обов'язково виходить за рамки готових ймовірнісних моделей. Виконання учнями завдань, які потім допомагають приймати рішення в реальних життєвих ситуаціях, відіграє величезну роль і вимагає правильного і досвідченого викладання матеріалу педагогом. Стохастична лінія є важливим розділом сучасного курсу шкільної математики. Оскільки ця тема складна з позиції візуалізації, то вчителі усіляко

намагаються залучити до її вивчення різні комп'ютерні засоби, в тому числі програми динамічної математики. Але, на жаль, на сьогодні існує досить обмежена кількість методичних матеріалів щодо використання комп'ютерних засобів при вивченні стохастичної змістової лінії, які б учителів могли використовувати у своїй професійній діяльності.

Об'єкт дослідження: процес навчання математики учнів основної та старшої шкіл.

Предмет дослідження: використання засобів динамічної математики при вивченні теорії ймовірностей та математичної статистики в школі.

Мета дослідження: розробка методичних рекомендацій щодо комп'ютерної підтримки вивчення теорії ймовірностей та математичної статистики засобами динамічної математики.

Завдання дослідження:

- 1) опрацювати науково-методичну та психолого-педагогічну літературу з теми;
- 2) проаналізувати навчальні програми та підручники з теми дослідження;
- 3) провести аналіз комп'ютерного інструментарію програм динамічної математики у контексті дослідження;
- 4) дослідити шляхи використання програми «Математичний конструктор» при вивченні теорії ймовірностей і математичної статистики в основній і старшій школі.

Методи дослідження:

- теоретичні: аналіз літератури з теми дослідження;
- емпіричні: самостійна робота з розв'язування завдань.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків та списку використаних джерел.

У вступі розглянуто актуальність роботи, визначено об'єкт, предмет, мету та завдання дослідження.

У першому розділі «Теоретичні основи дослідження» розглянуто методичні

особливості вивчення теорії ймовірностей і математичної статистики в основній і старшій школі; проаналізовано навчальні програм та підручники з теми дослідження.

У другому розділі «Використання програм динамічної математики при вивченні теорії ймовірностей і математичної статистики в школі» виокремлено шляхи використання програми *Математичний конструктор* при вивченні теорії ймовірностей і математичної статистики в основній і старшій школі; розроблено конспекти уроків за темами «Задача Бюффона», «Парадокс Бертрана» із використанням програми *Математический конструктор* для класів з поглибленим вивченням математики, матеріали яких також можна використовувати для факультативних занять.

Апробація результатів дослідження. За темою роботи опубліковано тези доповідей на Міжнародній науково-практичній конференції «Наукова діяльність як шлях формування професійних компетентностей майбутнього фахівця» (5-6 грудня 2019 р., м. Суми) [54], Всеукраїнській науково-методичній інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-2020 Форум молодих дослідників» (12 листопада 2020 р., м. Суми) [53] та стаття у збірнику студентських наукових робіт [52].

Загальний обсяг роботи 106 сторінок друкованого тексту. Список використаних джерел включає 54 одиниці. Текст містить 39 рисунків та 4 таблиці.

Робота буде корисною студентам педагогічних спеціальностей та вчителям математики закладів загальної середньої освіти.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Методичні особливості вивчення теорії ймовірностей і математичної статистики в основній і старшій школі

Початки теорії ймовірностей і елементи статистики вже багато років вивчаються в загальноосвітніх школах розвинутих країн світу. Головними причинами невключення даної змістової лінії у навчальну програму нашої країни були невідповідність більшості вчителів та відсутність науково-методичного забезпечення.

Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей, математичної статистики у шкільному курсі математики почали вивчати з 1996 року, коли ці питання було внесено до програм, затверджених Міністерством освіти і науки України [13].

Нова змістова лінія покликана розвинути один із типів мислення – ймовірнісно-статистичний, який необхідний сучасній людині як у загальнокультурному плані, так і для професійного становлення. Адже розвинуте суспільство ставить до своїх членів досить високі вимоги, які відносяться до вміння аналізувати випадкові факти, оцінювати шанси, висувати гіпотези, прогнозувати розвиток ситуації і, нарешті, приймати рішення в ситуаціях, які мають ймовірнісний характер, у ситуаціях невизначеності.

Досвід вивчення початків теорії ймовірностей на факультативних заняттях безумовно виявився корисним, але він не забезпечував потрібного рівня підготовки учнів, оскільки не давав повні відповіді на всі питання курсу, насамперед тому що факультативні заняття проводилися на базі невеликої кількості шкіл.

На сучасному етапі розвитку суспільства та освіти потреба у вивченні елементів теорії ймовірностей та математичної статистики зростає. Поняття і ідеї теорії ймовірностей і статистики відіграють велику роль у торгівлі, бізнесі, навіть

повсякденному житті кожної людини. Саме це зумовлює необхідність введення даної змістової лінії в план загальної математичної освіти.

Уведення стохастичної змістової лінії передбачає формування таких видів діяльності, як:

- перебирання або обчислення кількості конфігурацій елементів, які задовольняють заздалегідь задані властивості;
- побудова найпростіших ймовірнісних моделей реальних процесів і явищ;
- аналіз емпіричних даних, який включає самостійний збір даних, проведення експериментів, первісну обробку статистичного матеріалу, статистичні висновки.

Перелічені види діяльності, власне кажучи, стосуються комбінаторики, ймовірності, статистики. Ці види діяльності взаємопов'язані і спрямовані на навчання учнів аналізу даних.

Основною складністю у введенні даного розділу становить відбір змісту навчального матеріалу. З одного боку важливо не перетворити його вивчення на суто теоретичні міркування про випадкові події. З іншого, дуже важливо не перетворити заняття на розв'язування суто практичних не зв'язаних між собою задач. Обидві ці крайнощі перешкоджатимуть формуванню ймовірнісного та статистичного мислення [47].

Стохастична змістова лінія шкільного курсу математики передбачає вивчення комбінаторики, теорії ймовірності, елементів статистики.

Головною метою вивчення *елементів комбінаторики* в школі є формування спеціального типу мислення – комбінаторного, формування в учнів видів діяльності, пов'язаних з перебиранням та обчисленням конфігурацій елементів, які задовольняють певні умови.

У результаті вивчення цього розділу випускник школи має мати можливість навчитися:

- знаходити кількість варіантів вибору деякої кількості елементів із заданої сукупності, коли вибір здійснюється з повторенням або без повторення, коли результати вибору залежать від порядку витягування елементів або не залежать;
- визначати кількість способів розбиття сукупності різних або однакових предметів на задану кількість груп;
- використовувати найпростіші комбінаторні схеми для обчислення ймовірностей подій у класичній моделі;
- застосовувати головні комбінаторні ідеї для моделювання реальних процесів і явищ.

Головною метою вивчення *елементів теорії ймовірностей* є побудова та застосування математичних моделей явищ, що враховують вплив випадку, аналіз результатів, одержаних за допомогою ймовірнісних моделей.

У результаті вивчення цього розділу учень має вміти:

- оцінювати ймовірність події за її відносною частотою та навпаки;
- оцінювати числові характеристики випадкової величини за вибірковими характеристиками та навпаки; обчислювати ймовірність події, користуючись її означенням і найпростішими властивостями;
- обчислювати математичне сподівання випадкової величини за законом її розподілу;
- застосовувати ймовірнісні моделі в найпростіших випадках для оцінювання ризику, шансів в іграх, для прийняття рішення в ситуаціях, що залежать від випадку.

Головною метою вивчення *елементів статистики* в школі є формування навичок первинної обробки статистичних даних, зображення й аналіз кількісної інформації, представленої у різних формах (у вигляді таблиць, діаграм, графіків реальних залежностей), формування уявлень про важливі статистичні ідеї, а саме: ідеї оцінювання та ідеї перевірки статистичних гіпотез; формування навичок

порівняння ймовірностей настання випадкових подій із результатами конкретних статистичних експериментів.

У результаті вивчення цього розділу учень має вміти:

- зображати результати експериментів, спостережень, опитувань у вигляді таблиць, графіків, діаграм; інтерпретувати таблиці, схеми, діаграми, графіки;
- проводити нескладні опитування, спостереження, збирати кількісну інформацію;
- обчислювати та застосовувати різні вибіркові характеристики;
- оцінювати невідомі параметри за статистичними даними у найпростіших випадках;
- перевіряти у найпростіших випадках гіпотези за статистичними даними;
- порівнювати ймовірності випадкових подій, математичні сподівання випадкових величин з відповідними статистичними характеристиками.

На всіх етапах навчання фактично формуються ті самі види діяльності, але на різних рівнях і різними засобами.

Важливо також не виділяти штучно теорію ймовірностей від математичної статистики.

Предметом теорії є конструювання правил підрахунку шансів одержання тієї чи іншої кулі на основі заданої з самого початку інформації про кількість білих і чорних куль.

Якщо ж інформація про множину куль в урні є неповною, наприклад, відома кількість усіх куль, але невідома загальна кількість куль в урні, то метою методів математичної статистики є одержання достатньо обґрунтованої інформації про цю множину куль за допомогою певних, спеціально розроблених процедур, що ґрунтуються на багаторазовій виборці.

Елементи стохастики передбачено вивчати в школі в два етапи. На першому етапі – у 9 класі основної школи передбачено ввести поняття про статистику і способи подання даних, про гістограму розподілу значень, середнє значення та медіану, моду. Після вивчення комбінаторики можна ввести поняття про ймовірність, сприятливі випадки, розглянути найпростіші приклади підрахунку, дати ширшу систему знань початків теорії ймовірностей і елементів статистики [44].

Ще до введення перших понять і відомостей з початків теорії ймовірностей та елементів статистики на завершенні вивчення алгебри в 9 класі доцільно систематично проводити пропедевтику щодо вивчення елементів стохастики при вивченні звичайних дробів. В 5-6 класах є можливість ознайомити учнів з поняттями класичної ймовірності, розв'язуючи задачі на підрахунок «шансів на виграш», а при вивченні дій над звичайними дробами можна розв'язувати найпростіші задачі на додавання та множення ймовірностей.

Приклад. У кошику лежать кульки: 10 червоних, 7 чорних, 4 білі. З кошику тягнуть одну кульку. Яка ймовірність того що витягнута кулька буде:

- 1) червоною;
- 2) білою;
- 3) чорною;
- 4) червоною або чорною.

Розв'язання

Спочатку порахуємо кількість кульок у кошику $10+7+4=21$ (шт.).

- 1) Так як всього кульок 21 штука, а червоних 10, маємо $\frac{10}{21}$ – ймовірність витягти червону кульку.
- 2) $\frac{4}{21}$ – ймовірність витягти білу кульку.
- 3) $\frac{7}{21}$ – ймовірність витягти чорну кульку.

4) Щоб визначити ймовірність витягнути червону або чорну кульку, треба додати їх ймовірності $\frac{10}{21} + \frac{7}{21} = \frac{17}{21}$.

Програмою для класів з поглибленим вивченням математики у 8 класі в рамках вивчення теми «Множини. Елементи математичної логіки. Комбінаторика. Ймовірність» передбачено ознайомити учнів з теорією ймовірності як наукою; ввести поняття випадкової події та статистичної ймовірності події, вчити обчислювати статистичну ймовірність.

У 9 класі у темі «Множини. Комбінаторика. Ймовірність» передбачено розширити відомості про випадкові події і обчислювати статистичні ймовірності випадкових подій.

В 11 класі основною метою вивчення теми «Початки теорії ймовірностей» є сформулювати в учнів уявлення про основні поняття теорії ймовірностей і виробити вміння застосовувати їх до розв'язування простих задач.

Розглянемо зміст навчання для кожного етапу навчання (таблиця 1.1).

Таблиця 1.1

Зміст стохастичної лінії шкільного курсу математики

Початкова школа	
Елементи комбінаторики	Ігрові комбінаторні задачі, що розв'язуються безпосереднім перебором можливих варіантів.
Початки теорії ймовірностей	Формування таких понять, як «напевно», «ніколи», «можливо так, можливо ні». Якісна оцінка шансів настання тієї чи іншої події.
Елементи статистики	Проведення експериментів, реєстрація результатів цих експериментів, зображення їх, наприклад, у вигляді таблиць, і їх інтерпретація.

	Читання таблиць, зокрема таблиць розмірами 2x2.
5-6-й класи	
Елементи комбінаторики	Розв'язування комбінаторних задач перебором можливих варіантів.
Початки теорії ймовірностей	Достовірна, неможлива, випадкова події. Порівняння шансів настання випадкових подій на основі інтуїтивних міркувань, на класичній, статистичній засадах, за допомогою геометричних міркувань.
Елементи статистики	Збір, реєстрація статистичних даних, зображення їх у вигляді таблиць, діаграм. Читання таблиць і діаграм. Проведення експериментів.
7-9-й класи	
Елементи комбінаторики	Розв'язування комбінаторних задач на застосування правил множення і додавання. Трикутник Паскаля.
Початки теорії ймовірностей	Випадковий дослід, випадкова подія. Обчислення ймовірностей настання випадкових подій на класичній, статистичній засадах, за допомогою геометричних міркувань.
Елементи статистики	Первинна обробка статистичних даних. Графічне зображення статистичних даних. Вибіркові характеристики (середнє арифметичне, мода, медіана тощо).
10-11-й класи	
Елементи комбінаторики	Розміщення, перестановки, комбінації.

Початки теорії ймовірностей	Випадковий дослід і випадкова подія. Відносна частота події. Ймовірність події. Операції над подіями. Ймовірності суми та добутку подій. Дискретна випадкова величина, закон її розподілу. Числові характеристики дискретної випадкової величини та їх властивості. Вибіркові характеристики. Поняття про закон великих чисел.
Елементи статистики	Вибірковий метод у статистиці. Оцінювання невідомих параметрів. Перевірка гіпотез.

Стрижнем, який зв'язує стохастичну змістову лінію зі шкільним курсом математики, є метод математичного моделювання, оскільки ймовірнісно-статистичний матеріал може істотно використовуватися під час навчання учнів математичного моделювання – найважливішого виду математичної діяльності. Адже навіть звичайні навчальні задачі, які стосуються елементів теорії ймовірностей, розв'язуються за трьома відомими етапами. Так, задача на обчислення числових характеристик випадкових величин, що задані описово, передбачає:

- 1) побудову математичної моделі випадкового дослідження, тобто побудову закону розподілу випадкової величини;
- 2) розв'язування задачі в межах побудованої моделі, а саме, обчислення математичного сподівання чи дисперсії за означенням або з використанням властивостей;
- 3) статистичну інтерпретацію результатів.

Аналогічна ситуація має місце і в задачах на знаходження ймовірності події в досліді, що задається описово. Це загальний підхід. Слід підсилити увагу до аналізу даних, обробки статистичного матеріалу. Це можна робити у різних

розділах. Наприклад, у 5-му класі – формуючи поняття середнього арифметичного двох або кількох чисел, вивчаючи проценти; у 6-му класі – розглядаючи лінійні, стовпчасті та кругові діаграми, у 9-му – в розділі «Елементи прикладної математики», у 7-11-х класах – вивчаючи функції, табличний спосіб їх задавання, їх окремі класи тощо [46].

Однак загальні підходи не виключають і встановлення певних зв'язків. Наприклад, якщо у початковій школі розглядалось якісне оцінювання ймовірності подій, то можна підвести учнів до висновку про кількісне оцінювання ймовірності (у свій час це можна використати, разом з іншими, як мотив для вивчення дробових чисел). Основні комбінаторні схеми доцільно застосовувати під час розв'язування комбінаторних геометричних задач (знаходження кількості діагоналей многокутника, кількості точок перетину прямих, кількості прямих перетину площин тощо). Комбінаторні міркування можна використати під час доведення тотожностей. Статистичне тлумачення ймовірності можна застосувати, пояснюючи статистичний характер правил підрахунку цифр. Згадані питання можуть розглядатися на позакласних заняттях. Пошук таких застосувань може стати одним з напрямків дослідницької методичної роботи, значущість якої важко переоцінити.

Важливо на прикладах власної діяльності учнів переконати їх в тому, що в масових випадкових подіях існують закономірності, які і вивчає теорія ймовірностей.

В розвитку творчих можливостей дітей шкільного віку велику роль відіграють задачі комбінаторного характеру. Комбінаторика, як розділ математики розглядає задачу підрахунку кількості елементів в різних скінчених множинах.

Якщо задана скінченна множина $X = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ і n місць, на які можна переставляти елементи даної множини, зміщуючи їх по одному в кожній позиції,

то в задачі мова йде про визначення кількості перестановок, які можна утворити із множини X . Їх кількість обчислюється за формулою: $P=n!$

Приклад. Скількома способами можна розташувати на шаховій дошці 8 тур так, щоб вони не били одна одну.

Розв'язання

Для того щоб тури не могли бити одна одну, на кожній горизонталі та на кожній вертикалі має стояти тільки одна тура. Нехай a_1 – номер вертикалі, на якій стоїть тура з першої горизонталі, a_2 – номер вертикалі, на якій стоїть тура з другої горизонталі і так далі.

Тоді $(a_1; a_2; a_3; \dots; a_8)$ – деяка перестановка множини $\{1, 2, \dots, 8\}$. Кожній такій перестановці відповідає деяке розташування тур, яке задовольняє умову задачі, і навпаки, кожному припустимому розташуванню тур відповідає певна перестановка цієї множини.

Отже, шукана кількість способів дорівнює P_8 , тобто $8!$.

Відповідь: $8!$.

Якщо із заданої множини X вибирають групи по k елементів в кожній, то кількість таких підгруп – це кількість комбінацій із n елементів по k і обчислюється вона за формулою: $C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Якщо із заданої множини X вибирають підмножини по k елементів в кожній, а потім в кожній з таких підмножин здійснюють всі можливі перестановки елементів по k місцях, то кількість таких всіх підмножин це є кількість розміщень, що можна утворити із n елементів по k і обчислюється вона за формулою: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Приклад. Скільки існує правильних дробів, чисельник і знаменник яких – прості числа, менші 30?

Розв'язання

Множина $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ складається з усіх простих чисел, які менші від 30. Кількість 2-елементних упорядкованих підмножин цієї множини дорівнює кількості звичайних дробів, відмінних від одиниці, чисельник і знаменник яких — зазначені прості числа. Половина із цих дробів є правильними. Отже, шукане число дорівнює $\frac{1}{2}A_{10}^2 = 45$.

Відповідь: 45.

Це є основні поняття комбінаторики. Під час розв'язання комбінаторних задач вчитель повинен вміти встановлювати, в першу чергу для себе, вид комбінаторного об'єкту, про який йдеться в умові, а також вміти ним вільно оперувати, якщо комбінаторні об'єкти об'єднуються певним чином в умові, тобто, коли виникають складні сполучення.

Класична комбінаторика головну увагу приділяє підрахунку кількості комбінаторних об'єктів, залишаючи поза увагою задачу їх формування. Справа в тому, що навіть при невеликих значеннях n число перестановок, комбінацій, розміщень і інших комбінаторних об'єктів велике і сформулювати, записати кожен із них – задача нелегка. А тому комбінаторні задачі і не знаходили свого належного застосування в початковому курсі математики, незважаючи на їх велику роль в розвитку творчих здібностей дітей. Необхідність в одержанні конкретних комбінаторних об'єктів впливає із психологічних особливостей сприймання дітей шкільного віку: «Як можна рахувати ті об'єкти, яких я не бачу?» Формування умінь і навичок в учнів розв'язувати комбінаторні задачі залежить від готовності вчителя до організації роботи з ними. Для цього вчитель повинен:

1. Вміти правильно виявити теоретичну основу розв'язання комбінаторної задачі.
2. Провести специфічний для комбінаторних задач аналіз умови з учнями, який направлений на цілеспрямований перебір певним чином обмежених можливостей, що веде до розв'язку задачі.

3. Вибрати відповідний спосіб фіксації утворених комбінаторних об'єктів.
4. Вміти підбирати системи задач комбінаторного характеру.
5. Вміти застосовувати традиційні і нетрадиційні методи навчання.[29]

Формування комбінаторного мислення є важливим завданням впровадження ймовірнісно-статистичної змістової лінії у шкільну освіту. Воно має формуватися неперервно за такими етапами:

- 1) пропедевтичний етап, який охоплює початкову школу, 5-6-й класи;
- 2) основний етап – 7-9-й класи;
- 3) завершальний етап – старшу школу.

На першому етапі головним методом розв'язування комбінаторних задач є перебір варіантів. Суттєвим обмеженням методу перебору варіантів є невеликі значення параметрів, які розглядаються в комбінаторній задачі.

На перших порах, особливо у першому класі, під час розв'язування комбінаторних задач необхідні моделі, які б забезпечували дієве утворення комбінаторних об'єктів. Так, наприклад, в задачі: «Скількома способами можна одягти ляльку, якщо в неї є три платтячка і два капелюшки?», теоретичною основою якої є правило добутку, ми утворюємо упорядковані пари (платтячко, капелюшок) і кількість цих пар буде дорівнювати кількості елементів декартового добутку множин, тобто $3 \cdot 2 = 6$. Для учнів процес утворення пар при наявності моделі і їх підрахунок порівняно неважкий. В подальшому, розв'язуючи такі задачі в системі, учні самі відмовляються від діючої моделі і вводять певні способи запису можливих варіантів, як наприклад, графічну модель.

Але розв'язуючи задачі, теоретичною основою яких є знаходження числа перестановок, як наприклад «Скільки існує упорядкованих наборів із однієї червоної, однієї жовтої і однієї синьої фішок мозаїки?», учні відчують певні, труднощі. В цих задачах виділяємо такі «правила»:

- 1.Скласти набори із трьох фішок: червоної, жовтої, синьої.

2.Скласти набори так, щоб кожний наступний відрізнявся від попереднього порядком розміщення кольору.

3.Вказати всі можливі упорядкування фішок в таких наборах.

На початковому етапі розв'язування таких задач третє правило є для учнів непосильне. Але поступово вони навчаються здійснювати перебір скінченного числа варіантів, використовуючи звичайну дитячу мозаїку. Після цього перед ними постає більш складна задача, а саме: показати, що більше вже неможливо відшукати жодного набору, який би відрізнявся від попереднього.

Вирішальну роль для усвідомлення учнями навчального матеріалу цієї теми відіграє система раціонально відібраних задач, серед яких має бути значна кількість задач прикладного змісту.

1.2 Аналіз навчальних програм з теми дослідження

На рівні обов'язкових результатів навчання проект освітнього стандарту з математики для середньої школи передбачав такий зміст навчального матеріалу [41].

Початки теорії ймовірностей. Предмет і методи теорії ймовірностей. Стохастичний експеримент. Елементарна подія. Множина елементарних подій. Випадкова подія як підмножина множини елементарних подій. Операції над подіями, добуток, різниця подій. Протилежна подія. Геометрична інтерпретація операцій над подіями.

Поняття ймовірності випадкової події. Означення ймовірності. Дискретні і недискретні розподіли ймовірностей. Обчислення ймовірностей випадкових подій. Поняття про центр розподілу ймовірностей (математичне сподівання).

Умовні ймовірності. Залежні й незалежні події. Ймовірність добутку і суми подій. Повторні незалежні випробування. Формула Бернуллі. Закон великих чисел.

Елементи комбінаторики. Предмет і методи статистики. Набір експериментальних даних – вибірка. Частота появи елемента вибірки. Властивості частот. Початковий та інтервальний розподіли частот. Гістограма. Частота як наближене значення математичного сподівання. Статистичні оцінки розсіювання ймовірностей.

Програмою для класів з поглибленим вивченням математики у 8 класі в рамках вивчення теми «Множини. Елементи математичної логіки. Комбінаторика. Ймовірність» передбачено ознайомити учнів з теорією ймовірності як наукою; ввести поняття випадкової події та статистичної імовірності події, вчити обчислювати статистичну ймовірність.

Після завершення вивчення теми учні мають отримати уявлення про теорію ймовірностей як науку; подію, випадкову подію та статистичну ймовірність випадкової події; уміти розв'язувати найпростіші задачі на обчислення статистичних імовірностей.

У 9 класі у темі «Множини. Комбінаторика. Ймовірність» передбачено розширити відомості про випадкові події і обчислювати статистичні ймовірності випадкових подій.

При цьому учні мають уміти наводити приклади випадкових подій і розв'язувати найпростіші задачі на обчислення статистичних ймовірностей.

Порівняємо вивчення цієї теми у 9 класі за Навчальною програмою для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів, яку підготували М.І.Бурда, М.Ф.Городній, Д.А.Номіровський, А.В.Паньков, Н.А.Тарасенкова, М.В.Чемерис, В.О.Швець, М.С.Якір[37] та Навчальною програмою для 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів, над якою працювали М. І. Бурда, Б. В. Кудренко, О. Я. Біляніна, А. І. Азаренкова, О. І. Буковська, Т. С. Кіндюх, О. Є. Лисенко, А. В. Милянник, Н. В. Панова, А. В. Паньков [36].

Таблиця 1.2

**Порівняння навчальних програм з математики різних рівнів
5-9 класів**

Поглиблений рівень	Рівень стандарту
Тема 5. Елементи прикладної математики (25 год)	Тема 4. Основи комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики (8 год)
<p>Математичне моделювання. Відсоткові розрахунки. Формула складних відсотків. Комбінаторні правила додавання і множення. Основні формули комбінаторики. Розміщення, сполучення (комбінації), перестановки. Випадкова подія. Ймовірність випадкової події. Статистичне і класичне означення ймовірності. Обчислення ймовірностей за допомогою формул комбінаторики. Статистичні дані. Способи подання даних. Частота. Вибірка. Середні значення</p>	<p>Основні правила комбінаторики. Частота та ймовірність випадкової події. Початкові відомості про статистику. Способи подання даних та їх обробки</p>
<p>Учень/учениця: пояснює поняття: випадкова подія, ймовірність випадкової події, частота, середнє значення статистичних вимірювань; формулює</p>	<p>Учень/учениця: наводить приклади: випадкових подій, подання статистичних даних у вигляді таблиць, діаграм, графіків,</p>

<p>комбінаторні правила додавання і множення; означення понять: перестановка, сполучення (комбінації), розміщення, ймовірність випадкової події; розв'язує вправи, що передбачають: використання формули обчислення складних відсотків, формул для обчислення перестановок, сполучень і розміщень, знаходження ймовірності випадкової події, знаходження частоти, моди і медіани статистичної вибірки</p>	<p>застосування правил комбінаторики пояснює, що таке: частота випадкової події, ймовірність випадкової події знаходить, відбирає і впорядковує інформацію з доступних джерел розв'язує задачі, що передбачають: використання комбінаторних правил суми та добутку; знаходження ймовірності випадкової події; обчислення частоти випадкової події; подання статистичних даних у вигляді таблиць, діаграм, графіків</p> <p>Розв'язує сюжетні задачі на: розрахунок та аналіз фінансової спроможності родини; розрахунок обсягу сплачених податків; прийняття рішень стосовно особистих та колективних фінансових питань тощо</p>
---	---

Складові частини змісту поглибленого курсу математики включають відповідні частини загальноосвітнього курсу. Цей курс передбачає поглиблення і розширення знань, що набуваються в загальноосвітньому курсі, та їх застосування до розв'язування більш складних, змістовних задач, а також з метою

грунтовнішого вивчення властивостей математичних об'єктів загальноосвітнього курсу. Утім, до поглибленого курсу включено кілька тем, які в загальноосвітньому курсі вивчаються лише на найпростішому, оглядовому рівні і містять мінімум означень і основних фактів. Це множини і операції над ними; множини в теорії чисел; основні формули комбінаторики; метод математичної індукції; елементи аналітичної геометрії; застосування векторів і геометричних перетворень до розв'язування задач. Цей перелік тем спрямований насамперед на розширення і поглиблення математичного апарату, який використовується учнями, і є базою для подальшого вивчення курсу математики та інших шкільних предметів. Програмою передбачена можливість різного рівня поглибленого навчання. У ній виокремлено три рівні складності навчального матеріалу: такий, що вивчається в рамках загальноосвітнього курсу; матеріал для поглибленого вивчення; додаткові питання і теми. Це дозволяє вчителю гнучко враховувати навчальні можливості учнів та наявність часу для вивчення окремих тем у поточний момент [37].

Тема «Елементи прикладної математики» ілюструє практичне застосування теоретичного матеріалу курсу математики в різних сферах реального життя. Практичну значущість цієї теми мають усвідомити в першу чергу учні, орієнтовані на подальшу фахову діяльність в галузях, де математика відіграє прикладну роль (інформатиці, техніці, технологіях тощо), що має стати емоційним підкріпленням для поглибленого вивчення курсу математики. Математичні моделі, що вивчаються, мають бути побудовані на матеріалі з практичних життєвих ситуацій, що сприятиме кращому засвоєнню запропонованого математичного апарату. Продовжується вивчення на формальній основі елементів теорії ймовірностей, яке було розпочато в шостому класі. Необхідним підґрунтям для цього є вивчення елементів комбінаторики. У цій темі важливою є інтерпретація запропонованих імовірнісних і статистичних характеристик, їх тлумачення в практичному плані. Слід зауважити, що навчальний матеріал, пов'язаний з елементами

комбінаторики, початками теорії ймовірностей та елементами статистики, зазвичай є складним для сприймання. Тому дуже важливим є розгляд достатньої кількості прикладів, а також історичних відомостей із становлення теорії ймовірностей (задача Д'Аламбера, дослідження Б. Паскаля), в яких належну увагу слід приділити коректному формулюванню опису окремих результатів і, як наслідок, – правильному обчисленню загальної кількості результатів і кількості сприятливих подій.

В 11 класі основною метою вивчення теми «Початки теорії ймовірностей» є сформулювати в учнів уявлення про основні поняття теорії ймовірностей і виробити вміння застосовувати їх до розв'язування простих задач.

Після вивчення теми учні мають:

- отримати уявлення про стохастичний експеримент, елементарну подію та простір елементарних подій; випадкову подію як деяку підмножину множини елементарних подій та розуміти зміст висловлення «подія відбулася»; еквівалентність подій, неможливу подію, несумісні події; дискретний і неперервний розподіли статистичних ймовірностей на просторі елементарних подій; центр розподілу та величину розсіювання статистичних ймовірностей; умовні статистичні ймовірності; можливість передбачення усередненого результату великої серії випробувань; математичне сподівання та дисперсію;

- знати означення суми, добутку, різниці двох подій, протилежної події; основні властивості статистичних ймовірностей; правила обчислення статистичної ймовірності суми і добутку кількох подій; формулу повної ймовірності;

- уміти давати геометричну інтерпретацію операцій над подіями (за аналогією з операціями над множинами); обчислювати статистичні ймовірності випадкових подій; застосовувати правила обчислення суми і добутку ймовірностей кількох подій та формулу повної ймовірності до розв'язування простих задач.

Для гуманітарних класів тему «Елементи теорії ймовірностей» включено до додаткової частини програми, за якою передбачено розглянути предмет теорії ймовірностей; основні поняття; подію та її статистичну ймовірність; статистичну ймовірність суми і добутку подій.

Порівняємо вивчення цієї теми у 11 класі за навчальними програмою рівнів стандарту, поглибленого, профільного:

1) Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів рівень стандарту над якою працювали Є. П. Нелін, О. Є. Долгова, М. І. Бурда, Б. В. Кудренко, О. Я. Білянina, А. І. Азаренкова [38]

2) Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів профільний рівень над якою працювали М.І.Бурда, М.Ф.Городній, Д.А.Номіровський, А.В.Паньков, Н.А.Тарасенкова, М.В.Чемерис, В.О.Швець, М.С.Якір [40]

3) Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) загальноосвітніх навчальних закладів профільний рівень над якою працювали О. І. Буковська, Т. С. Кіндюх, О. Є. Лисенко, А. В. Милянник, Н. В. Панова, А. В. Паньков [39].

Таблиця 1.3

**Порівняння навчальних програм з математики різних рівнів
10-11 класів**

Рівень стандарту	Поглиблений рівень	Профільний рівень
Тема 3. Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної	Тема 9. Елементи теорії ймовірностей 36 годин	Тема 3. Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей 30 годин

статистики 10 годин		
<p>Елементи комбінаторики.</p> <p>Перестановки, розміщення, комбінації (без повторень).</p> <p>Класичне визначення ймовірності випадкової події.</p> <p>Вибіркові характеристики: розмах вибірки, мода, медіана, середнє значення.</p> <p>Графічне подання інформації про вибірку.</p>	<p>Біном Ньютона та трикутник Паскаля.</p> <p>Аксіоми теорії ймовірностей. Операції над подіями. Основні наслідки з аксіом теорії ймовірностей.</p> <p>Незалежні події. Умовна ймовірність. Випадкова величина та її математичне сподівання (у досліді зі скінченною множиною елементарних наслідків). Геометрична ймовірність.</p>	<p>Елементи комбінаторики.</p> <p>Перестановки, розміщення, комбінації.</p> <p>Аксіоми теорії ймовірностей. Операції над подіями. Основні наслідки з аксіом теорії ймовірностей.</p> <p>Незалежні події. Умовна ймовірність. Випадкова величина та її математичне сподівання (у досліді зі скінченною множиною елементарних наслідків).</p>
<p>Учень/учениця: розуміє що таке перестановки, розміщення, комбінації (без повторень), класичне визначення поняття ймовірності, що таке генеральна сукупність та вибірка,</p>	<p>Учень (учениця): обчислює ймовірність події, користуючись аксіомами теорії ймовірностей, наслідками з них, операціями над подіями, поняттям умовної</p>	<p>Учень (учениця): обчислює ймовірність події, користуючись аксіомами теорії ймовірностей, наслідками з них, операціями над подіями, поняттям умовної</p>

<p>означення середнього значення, моди та медіани вибірки</p> <p>обчислює відносну частоту події; кількість перестановок, розміщень, комбінацій; ймовірність події, користуючись її означенням і комбінаторними схемами;</p> <p>пояснює зміст середніх показників та характеристик вибірки; знаходить числові характеристики вибірки даних.</p> <p>застосовує ймовірнісні характеристики навколишніх явищ для прийняття рішень</p>	<p>ймовірності, незалежних подій, комбінаторними схемами, математичне сподівання випадкової величини;</p> <p>пояснює зміст понять умовна ймовірність, незалежні події, випадкова величина.</p>	<p>ймовірності, незалежних подій, комбінаторними схемами, математичне сподівання випадкової величини;</p> <p>пояснює зміст понять умовна ймовірність, незалежні події, випадкова величина;</p>
--	--	--

Математика займає особливе місце у системі знань людства, виконуючи роль універсального та потужного методу сучасної науки. Тому особливу увагу варто приділити з'ясуванню ролі математики в сферах її застосувань. Зокрема,

забезпечити засобами математики формування в учнів правильних уявлень про математичне моделювання та навчити школярів його застосуванню до розв'язування широкого кола прикладних задач, зокрема фізичних. Вивчаючи математику на поглибленому рівні, старшокласники мають усвідомити, що процес її застосування до розв'язування будь-яких прикладних задач розподіляється на три етапи:

- 1) формалізація (перехід від ситуації, описаної у задачі, до формальної математичної моделі цієї ситуації, та до чітко сформульованої математичної задачі);
- 2) розв'язування задачі у межах побудованої моделі;
- 3) інтерпретація одержаного розв'язку задачі та його застосування до вихідної ситуації.

Час, визначений на вивчення алгебри і початків аналізу, дає можливість поглибити рівень опанування предметом за рахунок розгляду на уроках прикладних задач зі сфери техніки, енергетики, ядерної фізики, екології, економіки тощо, методи розв'язування яких опираються на вивчений матеріал.

1.3 Аналіз підручників з теми дослідження

Важливу роль у навчанні математики відіграє систематичне використання історичного матеріалу, який підвищує інтерес до вивчення математики, стимулює потяг до наукової творчості, пробуджує критичне ставлення до фактів, дає учням уявлення про математику як невід'ємну складову загальнолюдської культури. На зрозумілих змістовних прикладах слід показувати учням, як розвивалися математичні поняття і відношення, теорії й методи. Ознайомлювати учнів з іменами та біографіями видатних учених, які створювали математику, зокрема видатних українських математиків, що сприятиме національному і патріотичному вихованню [16].

Проаналізуємо підручники з алгебри та початків аналізу для 9 класу.

1. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М.С. Алгебра 9 клас. (рівень стандарту) [35]

Стиль підручника є абстрактно-дедуктивним. Наочність використано доцільно. Підручник розділено на три параграфи, кожен з яких складається з пунктів, та розділ «Для тих, хто хоче знати більше» в якому викладена досліджувана нами тема. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Важливі факти виділені жирним шрифтом, але потрібно звертати увагу і на факти виділені курсивом, вони також важливі. Виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати і як спосіб оформлення задач. Також до кожного пункту запропоновані задачі для самостійного опрацювання, але до них доцільно приступати лише після вивчення теоретичного матеріалу. У підручнику підібрано досить широкий і різноманітний дидактичний матеріал. У підручнику запропоновано велику кількість різноманітних завдань, тому у вчителя є можливість вибрати найбільш доцільні завдання з певної теми.

Тема «Основи комбінаторики, теорії ймовірності та статистики» виділена в розділі «Для тих хто хоче знати більше».

Підтеми виділено наступним чином:

- 1) Основні правила комбінаторики.
- 2) Частота та ймовірність випадкової події.
- 3) Класичне означення ймовірності.
- 4) Початкові відомості про статистику.

Приклади розв'язування задач наведені після викладення теоретичного матеріалу. До кожного параграфу підібрані завдання для самостійного розв'язування. Наведені вправи трьох рівнів складності: (°) – початковий та середній; (•) – достатній, (••) – високий. Завдання різних рівнів складності, вправи

для повторення, велика кількість прикладних задач, номери вправ виділені різними кольорами: зеленим – рекомендовані для домашнього завдання, чорним – завдання які потрібно розв'язати в класі.

Перший пункт «Основи комбінаторики» містить 20 задач на застосування правил суми та добутку. Задачі ускладнюються за рівнями складності.

Другий пункт «Частота та ймовірність випадкової події» складається з 15 задач на визначення випадкової події, її ймовірності та частоти, розподілених по рівням складності. Більшість з представлених задач початкового та середнього рівня, і лише декілька достатнього. Учням пропонується оцінити яка з поданих подій більш ймовірна.

Третій пункт «Класичне означення ймовірності» містить 37 задач на обчислення ймовірності випадкової події. Представлено велику кількість однотипних задач, що сприяє виробленню навички обчислення ймовірностей.

У четвертому пункті «Початкові відомості про статистику» подано 16 задач на обчислення частоти, відносної частоти, розмаху вибірки, моди, медіани, середнього значення та побудову гістограм і частотних таблиць.

Отже, досліджуваний підручник має достатню кількість задач та пояснень до теми, але недоліком є те, що тема виділена в основних параграфах.

2. Істер О.С. Алгебра 9 клас (рівень стандарту) [27].

Навчальний матеріал підручника відповідає чинній програмі з математики, містить достатню кількість диференційованих вправ і прикладних задач.

Після кожного параграфа відповідними рубриками виокремлено вправи для повторення, нестандартні задачі та задачі на застосування математики в повсякденному житті. У кінці кожного розділу наведено вправи для його повторення, а в кінці підручника – задачі підвищеної складності. Для підготовки до контрольної роботи передбачено вправи з рубрик «Домашня самостійна робота» та «Завдання для перевірки знань».

Досліджувана нами тема викладена у четвертому розділі «Основи комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики». Вона розділена на чотири параграфи.

У першому параграфі «Комбінаторні задачі. Комбінаторні правила суми і добутку» учні розглядають правило суми та правило добутку, для засвоєння запропоновано 7 прикладів. У пункті подано 27 задач на застосування вивчених правил, які розділені на чотири рівні: початковий, середній, достатній, високий.

Другий параграф «Випадкова подія. Частота та ймовірність випадкової події» містить означення випадкової події, вірогідної та неможливої події, частоти події та відносної частоти події, статистичної ймовірності події. Всі означення виділені та мають відповідні приклади. У другому пункті міститься 21 задача на закріплення теоретичного матеріалу.

Третій параграф «Класичне означення ймовірності» складається з теоретичного матеріалу, у якому подано класичне означення ймовірності та відповідну формулу, та 28 різнорівневих задач на обчислення ймовірності випадкової події.

У четвертому параграфі «Початкові відомості про статистику. Статистичні дані. Способи подання даних та їх обробки» подано означення математичної статистики, з відповідними прикладами, середнього значення систематичних вимірювань, обсягу вибірки, частотою, відносною частотою вибірки, гістограми та способи її побудови, і 8 задач для закріплення. Недоліком цього пункту є те що не всі статистичні вимірювання подані до розгляду.

Отже, задачі у підручнику підбрано і за змістом, і за сюжетами так, щоб вони відповідали віковим особливостям школярів. Загальна кількість задач у підручнику достатня для відпрацювання учнями відповідних навичок та вмінь і на кожному уроці, і для домашньої самостійної роботи.

3. Тарасенкова Н. А., Богатирьова І. М., Коломієць О. М., Сердюк З. О. Алгебра 9 клас, рівень стандарту [48].

Весь матеріал підручника поділено на три розділи, а розділи – на параграфи. У кожному параграфі є теоретичний матеріал і задачі. Найважливіші формулювання виділено жирним шрифтом. Курсивом виділено терміни.

Задачі підручника мають чотири рівні складності. Номери задач початкового рівня складності позначено штрихом ('). Це підготовчі вправи для тих, хто не впевнений, що добре зрозумів теоретичний матеріал. Номери з кружечками (°) позначають задачі середнього рівня складності. Номери задач достатнього рівня складності не мають позначок біля номера. Зірочками (*) позначено задачі високого рівня складності.

Тема «Основи комбінаторики, теорії ймовірності та статистики» розділена на три параграфи.

У першому параграфі «Основні правила комбінаторики» подані правила додавання та множення. Поняття вводяться через приклади. Для закріплення автори підручника пропонують до розв'язання 46 задач різних рівнів складності.

Другий параграф «Частота та ймовірність випадкової події» містить 27 задач на обчислення ймовірності випадкової події, завдання різних рівнів складності, не одноманітні.

У третьому параграфі «Початкові відомості про статистику. Способи подання даних та їх обробки» подано визначення статистики та статистичного спостереження, і чисельні характеристики вибірки, способи подання даних. Також, представлено 33 різнорівневих задачі на засвоєння матеріалу.

Отже, у підручнику міститься більша кількість завдань ніж у попередніх, що допомагає учням краще засвоїти матеріал.

4. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М.С. Алгебра 9 клас, поглиблений рівень [34].

Підручник поділено на сім параграфів, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. У книзі виділено означення, правила та найважливіші математичні твердження. Виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. До кожного пункту дібрано задачі для самостійного розв'язування. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі.

Досліджувана нами тема подана у розділі «Елементи комбінаторики та теорії ймовірностей». На неї виділено 8 пунктів. У підручнику подана велика кількість різноманітних та різнорівневих завдань.

У першому пункті під назвою «Метод математичної індукції» учні вивчають використання методу математичною індукції для розв'язання задач, навчаються висувати припущення та доводити справедливості твердження для $n=1$, вивчають поняття база індукції та індуктивний перехід. У пункті представлено 28 завдань різних рівнів складності для закріплення вивченого матеріалу.

У другому пункті «Основні правила комбінаторики. Перестановки» учням пропонується 32 задачі для закріплення правила суми та правила добутку, а також понять упорядкована множина та перестановки та їх застосування.

У третьому пункті «Розміщення» учні вивчають поняття розміщення та застосовують вивчену формулу при розв'язуванні 13 поданих у підручнику різнорівневих завдань.

Четвертий пункт «Сполуки(комбінації)» містить 31 різнорівневу задачу на застосування формули на обчислення сполук з n елементів по k елементів.

П'ятий пункт «Частота та ймовірність випадкової події» містить 15 завдань на визначення ймовірності випадкової події та частоту спостережень, а також на вдосконалення вмінь працювати з таблицею.

У шостому пункті «Класичне означення ймовірності» подано 37 різноманітних завдань для закріплення використання формули обчислення ймовірності випадкової події.

У сьомому пункті «Обчислення ймовірностей за допомогою правил комбінаторики» за допомогою 21 задачі учні навчаться використовувати вивчені раніше правила суми, добутку, перестановки, розміщення та сполук при обчисленні ймовірності випадкової події.

Восьмий пункт «Початкові відомості про статистику» містить 16 задач на закріплення визначення статистики та статистичного спостереження, і чисельні характеристики вибірки, способи подання даних.

Отже, задачі у підручнику підібрано так, щоб вони відповідали віковим особливостям школярів. Загальна кількість задач у підручнику достатня для відпрацювання учнями відповідних навичок та вмінь і на кожному уроці, і для домашньої самостійної роботи.

Проаналізуємо підручники з математики 11 класу рівнів: стандарту, поглибленого і профільного.

1. Істер О.С. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти [28]

Для зручності матеріал підручника структуровано за допомогою розділів, параграфів, рубрик. Кожен параграф містить теоретичний матеріал, зразки розв'язування задач і виконання вправ, запитання до теоретичного матеріалу, завдання для класної та домашньої робіт тощо. Теоретичний матеріал підручника автор намагався викласти простою, доступною мовою, проілюструвати малюнками та прикладами застосування математики в повсякденному житті.

Досліджувана нами тема подана у розділі «Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики». У цьому розділі учні згадують поняття множини, означення ймовірності, випадкової події, елементи математичної статистики,

ознайомлюються з елементами комбінаторики та навчаються знаходити ймовірність випадкової події, вибіркової характеристики. Розділ містить 5 параграфів та Домашню самостійну роботу.

У першому параграфі «Множина та її елементи» учні розширюють знання про поняття множини, вивчають такі поняття як підмножини, рівність множин, впорядковані множини. Та закріплюють вивчене за допомогою розв'язування поданих у підручнику 22 задач різних рівнів складності.

Другий параграф «Елементи комбінаторики. Розміщення, перестановки, комбінації» містить 54 задачі на закріплення вивченого та поглиблення знань учнів з комбінаторики.

У третьому параграфі «Випадковий дослід і випадкова подія. Відносна частота події. Ймовірність події» учні ознайомлюються з такими поняттями як випадковий дослід, випадкова подія, вірогідна подія, неможлива подія, відносна частота події, статистична ймовірність події, ймовірність вірогідної, неможливої та довільної випадкової події. Для закріплення вивченого у підручнику міститься 22 задачі різного рівня складності.

Четвертий параграф «Класичне означення ймовірності» містить 40 задач на закріплення понять несумісні події, повна група подій, рівноймовірні події, класичне означення ймовірності.

У п'ятому параграфі «Елементи математичної статистики» учні вивчають поняття математична статистика, генеральна сукупність, вибірка, вибіркового метод, розмах вибірки, мода, медіана, середнє значення, вчать графічно зображувати інформацію про вибірку. Для закріплення у параграфі подано 24 завдання різного рівня складності.

2. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. [31]

Текст підручника поділено на сім параграфів, кожний з яких складається з пунктів. Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв'язання. До кожного пункту дібрано завдання для самостійного розв'язування. Серед завдань є як прості й середні за складністю, так і важкі, особливо ті, що позначено зірочкою (*).

Досліджувана тема подана у параграфі «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики» та розподілена на 4 параграфи.

У першому пункті «Комбінаторні правила суми та добутку» учні ознайомлюються з поняттям комбінаторика, правило добутку, правило суми, факторіал та закріплюють вивчене розв'язуючи задачі з 24 наданих у підручнику.

У другому пункті «Перестановки. Розміщення. Комбінації» містяться 16 завдань для закріплення вивчених раніше формул перестановки, розміщення та комбінації та поглиблення знань набутих раніше.

Третій пункт «Класичне визначення ймовірності випадкової події» містить 18 задач на обчислення ймовірності випадкової події та визначення достовірних і неможливих подій.

У четвертому пункті «Елементи математичної статистики» учні вивчають означення статистики, вибірки, розмаху, середнього значення, медіани та моди, ознайомлюються зі способами збирання інформації та закріплюють вивчене розв'язуючи різнорівневі задачі з 15 поданих.

3. Алгебра і початки аналізу: профільний рівень: підручник для 11-го кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та інші. [33]

Текст підручника поділено на п'ять параграфів, кожний з яких складається з пунктів. Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один з можливих зразків

оформлення розв'язання. До кожного пункту підібрано завдання для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю, так і важкі, особливо ті, що позначено зірочкою (*).

Досліджувана нами тема подана у параграфі «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики» і поділена на 8 пунктів.

У першому пункті «Комбінаторні правила суми та добутку» учні вивчають поняття комбінаторика, правило суми, правило добутку та вчать їх застосовувати при розв'язуванні задач із 37 поданих.

Другий пункт «Перестановки, розміщення, комбінації» містить 23 задачі для застосування формул перестановок, розміщень, комбінацій при розв'язуванні прикладних задач.

У третьому пункті «Аксіоми теорії ймовірностей» учні ознайомлюються з поняттям елементарний наслідок, простір елементарних наслідків, випадкова подія, ймовірність випадкової події, достовірна подія, неможлива подія, несумісні події, об'єднання подій, операції над подіями, перетин подій, доповнення події, ймовірність об'єднання двох несумісних подій, ймовірність достовірної події, ймовірнісний простір, та закріплюють вивчене розв'язуючи задачі з 33 поданих.

Четвертий пункт «Умовна ймовірність» містить 23 задачі за допомогою яких учні закріплюють вивчені поняття умовної ймовірності, дендрограми, формули повної ймовірності.

У п'ятому пункті «Незалежні події» учні вивчають поняття незалежних подій, залежних подій, рівність при якій події деякого досліду називають незалежними та закріплюють їх розв'язуючи задачі з 19 поданих.

Шостий пункт «Випадкова величина» містить 22 завдання на закріплення понять випадкова величина, розподіл ймовірностей випадкової величини, сума випадкових величин, добуток випадкових величин.

У цьому пункті «Математичне сподівання випадкової величини» подано 22 різнорівневі задачі на закріплення понять математичне сподівання випадкової величини, математичне сподівання випадкової величини, що дорівнює константі, математичне сподівання суми випадкової величини та константи, математичне сподівання добутку випадкової величини та константи.

Восьмий пункт «Статистичний аналіз даних» містить 17 задач за допомогою яких учні закріплюють вивчені поняття статистики, вибірки, генеральної сукупності, розмаху, середнього значення, медіани та моди вибірки.

4. Алгебра : підруч. для 11 кл. з поглибленим вивченням математики : 2 ч. / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Болонський, М. С. Якір. [32]

У книзі дібрано обширний і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації. Особливу увагу звернемо на задачі для математичних гуртків і факультативів, які помічено (*). Ці задачі складні. Радимо використовувати їх з особливою обережністю, керуючись принципом індивідуального підходу в навчанні. Червоним кольором позначено номери задач, що рекомендуються для домашньої роботи, синім кольором — номери задач, які з урахуванням індивідуальних особливостей учнів класу на розсуд учителя можна розв'язувати усно.

Досліджувана нами тема подана у параграфі під назвою «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики» та розділена на 6 пунктів.

Перший пункт «Елементи комбінаторики та біном Ньютона» містить 53 задачі за допомогою яких закріплюють поняття перестановка, розміщення, сполука(комбінація), формула бінома Ньютона, біноміальний коефіцієнт.

У другому пункті «Частота та ймовірність випадкової події» учні вивчають поняття елементарний наслідок, простір елементарних наслідків, випадкова подія, неможлива подія, достовірна(вірогідна) подія, ймовірність випадкової події, частота випадкової події, статистична оцінка ймовірності випадкової події та закріплюють вивчене за допомогою 30 задач.

Третій пункт «Класичне визначення ймовірностей» містить 57 задач на закріплення поняття рівноможливі елементарні наслідки, класичне означення ймовірності.

У четвертому пункті «Операції з випадковими подіями» учні вивчають поняття перетин випадкових подій, об'єднання випадкових подій, доповнення події, різниця випадкових подій, несумісні випадкові події, та закріплюють їх розв'язуючи задачі з 46 поданих у підручнику.

П'ятий пункт «Геометрична ймовірність» містить 28 завдань на закріплення формул знаходження ймовірності потрапляння точки X до фігури A з площею S_A , у плоскій фігурі U з площею S , ймовірності того, що точка X потрапить до проміжку A , та інші види геометричної ймовірності.

У шостому пункті «Статистичний аналіз даних» учні вивчають поняття вибірка, розмах, середнє значення, медіана, мода, середнє зважене значення, вагові коефіцієнти, та закріплюють вивчене на 19 задачах поданих у підручнику.

Висновок: підручники повністю відповідають вимогам навчальної програми щодо даної теми та містить достатню кількість завдань практичного характеру. Послідовність викладу матеріалу є логічною, теоретичного матеріалу щодо теорії ймовірностей та математичної статистики достатньо, крім того, у підручниках є задачі за готовими рисунками.

Таким чином, можна зробити висновок, що методичний апарат підручників [31-35, 27-28, 48] розроблений добре:

- для вчителів (не потребують значної додаткової літератури, є орієнтиром для викладу нового матеріалу, містить достатньо різнорівневих задач та вправ, щоб організувати диференційоване навчання);

- для батьків (містять всю необхідну інформацію для того, щоб зрозуміти суть та допомогти дитині).

РОЗДІЛ 2. ВИКОРИСТАННЯ ПРОГРАМ ДИНАМІЧНОЇ МАТЕМАТИКИ ПРИ ВИВЧЕННІ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ В ШКОЛІ

2.1. Аналіз комп'ютерного інструментарію програм динамічної математики у контексті дослідження

Саме ознайомлення учнів з елементами стохастики відкриває широкі можливості для ілюстрації значущості математики в розв'язанні прикладних задач. Володіння азами комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики дає змогу на змістовних (як у математичному, так і в прикладному аспектах) прикладах вивчати різні процеси, показувати відому універсальність математичних методів, демонструвати основні етапи розв'язання прикладних задач засобами стохастики. Ймовірно-стохастична лінія шкільного курсу математики складна з позиції візуалізації, тому вчителі намагаються залучити до її вивчення різні комп'ютерні засоби, в тому числі програми динамічної математики. [19]

Наразі розроблено вже значну кількість програмних засобів, використання яких дозволяє розв'язувати досить широке коло математичних задач різних рівнів складності за допомогою комп'ютера.

Найбільш придатними для підтримки вивчення теорії ймовірностей та математичної статистики в навчальних закладах видаються *Gran1*, *GeoGebra*, *Математичний конструктор*. Названі програмні засоби прості у використанні, оснащені досить зручним інтерфейсом. Від користувача не вимагається значний обсяг спеціальних знань з інформатики, основ обчислювальної техніки, програмування тощо, за винятком найпростіших понять, цілком доступних для учнів.

Проаналізуємо комп'ютерний інструментарій програм динамічної математики *Gran1*, *GeoGebra*, *Математичний конструктор*, який доцільно використовувати при вивченні стохастичної змістової лінії шкільного курсу математики.

GRAN1 (G*raphic AN***alysis).** Комп'ютерний інструментарій даної програми динамічної математики якнайкраще реалізується при розв'язуванні задач математичної статистики. Перед початком введення набору спостережених значень слід встановити у вікні *Список об'єктів* тип задання залежності *Статистична вибірка* і звернутися до кнопки *Об'єкт/Створити*. З'являється допоміжне вікно *Дані статистичної вибірки* (рис. 2.1), вигляд якого може змінюватись в залежності від типу розподілу (дискретний чи неперервний) і способу задання даних (частоти, відносні частоти, варіанти).

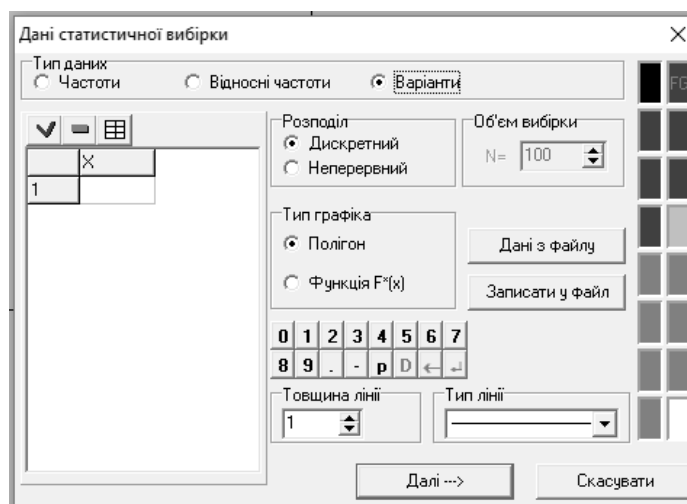


Рис. 2.1. Допоміжне вікно *Дані статистичної вибірки* програми *GRAN1*

Тип даних необхідно вказати перед початком введення самих даних, оскільки при зміні типу даних таблиця, що їх містить, очищується. Наприклад, у випадку дискретного розподілу і типу даних «Частоти» необхідно вказувати окремі можливі значення досліджуваної величини і частоти появи цих значень.

При цьому неможливо буде побудувати гістограму і неперервну функцію розподілу частот. При виборі неперервного розподілу неможливо буде побудувати полігон частот і ступінчасту кусково-сталу функцію розподілу, а при введенні даних необхідно вказувати рівновіддалені середини інтервалів однакової довжини і частоти попадання у ці інтервали. Набір спостережених значень у обох випадках вводиться однаково.

Розглянемо на прикладі можливості використання комп'ютерного інструментарію програми *Gran1* при розв'язуванні задач математичної статистики.

Задача 1. Для вивчення попиту на розмір чоловічих сорочок продавець записував, які розміри було продано протягом тижня. І отримав таку послідовність чисел: 38, 41, 39, 41, 44, 43, 42, 40, 39, 41, 38, 44, 43, 40, 41, 42, 38, 41, 43, 38, 44, 39, 40, 39, 42, 38, 43, 40, 41, 42, 38, 38, 43, 39, 40, 44, 42, 39, 43, 39, 44, 40, 41, 42, 39, 40, 39, 40, 44, 43, 41, 42, 40, 41, 40, 41, 42, 40, 40, 41, 42.

Розрахувати кількість сорочок 42 розміру; сорочок більше 39 розміру; загальну кількість сорочок.

Для введення статистичних даних обираємо спочатку тип розподілу – дискретний. При введенні безпосередньо даних можливі два варіанта – частоти та варіанти. Але при виборі першого способу введення даних потрібно попередньо побудувати ряд розподілу частот, що вимагає додаткових обчислень. Тому найраціональнішим способом буде вибір такого способу введення даних як варіанти. Частоти та відносні частоти дає змогу автоматично обчислити команда *Операції/Статистика/Частотна таблиця* (рис.2.2).

x	n	Накопич. n	Pn*	Накопич. Pn*
38	7	7	0.1148	0.1148
39	9	16	0.1475	0.2623
40	12	28	0.1967	0.459
41	11	39	0.1803	0.6393
42	9	48	0.1475	0.7869
43	7	55	0.1148	0.9016
44	6	61	0.09836	1

Рис. 2.2. Частотна таблиця до задачі 1

Маючи частотну таблицю, відповідаємо на запитання задачі.

Відповідь: 1) 9; 2) 45; 3) 61.

Оскільки частотна таблиця для статистичної вибірки будується автоматично після виклику команди “*Операції/Статистика/Частотна таблиця*”, основна мета таких задач – сформувати у учнів навички введення статистичних вибірок, заданих у різний спосіб, правильно визначивши тип даних та модель даних (дискретну чи неперервну) для них.

Задачі 2-5 подамо без детально розв’язання, лише із зауваженнями щодо формування статистичної вибірки та проведення необхідних вимірювань чи експериментів.

Задача 2. З колоди карт навмання вибирають карту і записують її масть. Необхідно скласти частотну таблицю випадання мастей карт на основі 30 карт, що вибрано.[17]

Зауваження. У цій задачі модель даних дискретна (4 масті). Оскільки програма *Gran1* працює тільки з числовими вибірками, необхідно пронумерувати кожну масть, наприклад 1 – пікові, 2 – хрестові, 3 – червові, 4 – бубнові і працювати далі уже з числовою вибіркою. Тип даних в цій та інших експериментальних задачах – варіанти, оскільки інші типи можна отримати тільки після початкового опрацювання експериментальних даних шляхом групування варіант.[17]

Задача 3. Гральний кубик кидають 50 разів. Скласти частотну таблицю випадання граней кубика.[17]

Зауваження. Як і у попередній задачі модель даних – дискретна, тип даних – варіанти.

Задача 4. Виміряти довжину долоні 30 учнів і скласти частотну таблицю довжин.[17]

Задача 5. Виміряти зріст 30 учнів і скласти частотну таблицю зростів.

Задача 6. Виміряти масу 40 учнів і скласти частотну таблицю, визначивши довжину інтервалу самостійно.[17]

Зауваження. У задачах 4-6 досліджувана величина може набувати довільних значень з певного діапазону, тому модель даних – неперервна; тип даних – варіанти. У такому випадку програма при створенні вибірки запитає у додатковому вікні кількість підвідрізків, на які буде поділено відрізок задання вибірки. Тут доцільно буде скористатися формулою Стерджеса, натиснувши відповідну кнопку у додатковому вікні введення статистичної вибірки.[17]

Задачі 7-8 більш складні, оскільки в них учні повинні робити висновки про генеральну сукупність на основі запропонованої вибірки шляхом виконання певних обчислень.

Задача 7. Коректор вибрав 40 сторінок з 400-сторінкового рукопису книги і перевіряв ці сторінки на помилки. Кількість помилок на кожній сторінці така:

0	1	1	3	0	0	1	1
3	2	0	2	1	0	2	0
0	0	0	2	1	0	2	0
0	1	0	1	0	2	3	0
1	0	0	2	1	0	1	0

- 1) Потрібно побудувати частотну таблицю для кількості помилок на сторінці.
- 2) Для досліджуваної книги розрахувати наближену кількість:
 - a) сторінок без помилок;
 - b) сторінок з 3 і більше помилками;
 - c) сторінок з 2 і менше помилками;
 - d) загальну кількість помилок.

Зауваження. Модель даних – дискретна, тип даних – варіанти. Для розрахунків можна скористатися послугою “Операції/Калькулятор”.

Відповідь.

x	n	Накопич. n	P_n^*	Накопич. P_n^*
0	19	19	0.475	0.475
1	11	30	0.275	0.75
2	7	37	0.175	0.925
3	3	40	0.075	1

Рис.2.3. Частотна таблиця до задачі 7

Для визначення кількості сторінок без помилок необхідно перемножити відносну частоту сторінок без помилок ($P_n^*(0)$) на об’єм генеральної сукупності (n), тобто $0.475 \cdot 400 = 190$.

Сторінок з 3 і більше помилками – $P_n^*(3) \cdot n$, тобто $0.075 \cdot 400 = 30$

Сторінок з 2 і менше помилками. Накопич. $P_n^*(2) \cdot n$, тобто $0.925 \cdot 400 = 370$.

Загальну кількість помилок: $(0.275 + 0.175 \cdot 2 + 0.075 \cdot 3) \cdot 400 = 340$.

Задача 8. Контейнер містить 5000 піддонів з яйцями (у кожному піддоні 20 яєць). На перевірку взято 100 піддонів і підраховано кількість розбитих яєць. Отримана вибірка:

0	0	0	1	0	20	0	0	0	20
0	1	2	1	0	0	3	20	1	0
1	0	1	1	0	0	1	0	0	0
0	0	20	0	2	3	1	2	0	0
2	0	0	3	0	0	2	0	3	0
1	1	0	0	0	3	3	2	0	0
0	0	0	1	0	0	2	2	0	20
0	0	1	2	2	20	20	1	0	0
0	0	0	1	1	0	0	20	0	1
1	0	0	0	20	1	2	0	0	0

Потрібно:

- 1) побудувати частотну таблицю;
- 2) розрахувати:
 - a) кількість піддонів без розбитих яєць;
 - b) кількість піддонів з всіма розбитими яйцями;
 - c) кількість піддонів з більш ніж одним розбитим яйцем;
 - d) прогнозовану загальну кількість цілих яєць у контейнері.

Зауваження. Модель даних – дискретна, тип даних – варіанти.

Відповідь.

x	n	Накопич. n	Pn*	Накопич. Pn*
0	55	55	0.55	0.55
1	19	74	0.19	0.74
2	11	85	0.11	0.85
3	6	91	0.06	0.91
20	9	100	0.09	1

Рис.2.4. Частотна таблиця до задачі 8

Кількість піддонів без розбитих яєць – 55, кількість піддонів з всіма розбитими яйцями – 9, кількість піддонів з більш ніж одним розбитим яйцем – $11+6+19=36$, прогнозовану загальну кількість цілих яєць у контейнері: $(0.55*20+0.19*19+0.11*18+0.06*17)*5000=88050$.

Для ознайомлення з різними видами статистичних графіків можна запропонувати учням побудувати такі графіки для вибірок, розглянутих раніше.[17]

Задача 9. Для порівняння двох добрив при вирощуванні соняхів вибрали двісті ділянок однієї площі і на перших ста з них застосували перший вид добрив, а на інших ста ділянках – другий вид добрив. Обчислили кількість соняшникової олії, отриманої з кожної ділянки і отримали наступну таблицю:

Мітка класу	600	800	1000	1200	1400	1600	1800
1-ше добриво	3	9	19	39	21	9	0
2-ге добриво	3	2	11	32	30	20	2

Необхідно:

1) За допомогою гістограм, побудованих в одній системі координат, відповісти, яке з добрив дозволяє отримати більшу кількість олії.

2) За допомогою функцій розподілу, побудованих в одній системі координат, порівняти для кожного виду добрив процент ділянок, де кількість олії більша за 1200 л.[17]

Зауваження. Модель даних – неперервна, тип даних – частоти. Вводити потрібно мітки класу (тобто середини інтервалів, на які поділено відрізок задання вибірки) та відповідні їм частоти. Вид графіка для кожної вибірки встановлюють

при її створенні або зміні. Функція розподілу в програмі називається “Функція $F^*(x)$ ”. [17]

Відповідь.

1) З побудованих в одній системі координат гістограм видно, що гістограма для другого виду добрив має стовпчики, нижчі для малих врожаїв і вищі для великих (у порівнянні з іншою гістограмою), тому можна робити висновок про більшу ефективність саме другого добрива.

2) Для аргументу 1200 функції розподілу для першого і другого добрив мають значення 0.51 та 0.32 відповідно (ці значення можна отримати за допомогою курсору). Це означає, що 51% ділянок для першого виду добрив і 32% ділянок для другого дають олії менше за 1200 л., тому процент ділянок з більшою за 1200 л. врожайністю буде відповідно 49% та 68%. [17]

Оскільки числові характеристики вибірки програма *Gran1* визначає автоматично і записує їх у вікні властивостей вибірки, немає сенсу розв’язувати велику кількість задач для формування навичок знаходження цих чисел. Краще розглянути більш цікаві задачі, в яких результати обчислень за програмою числових значень вибірки є джерелом для подальших роздумів учнів щодо розв’язування задачі. [17]

Задача 10. В таблиці наведено дані про зарплати співробітників певної фірми.

Зарплата (грн.)	230	380	560	2000	3000
Кількість співробітників	20	7	4	2	1

Необхідно визначити, яка “в середньому” є зарплата співробітників.

Зауваження. В задачі потрібно визначити міру центральної тенденції для наведеної вибірки. Для дискретної моделі даних програма *Gran1* визначає дві

таких характеристики: середнє арифметичне (в програмі це число називається математичним сподіванням) та моду – 485.29 та 230 відповідно. Якщо побудувати для вибірки полігон, можна помітити, що він є дуже асиметричним, тому в цьому випадку досліджувану величину краще характеризує мода (тобто число 230). Такий же висновок можна зробити і з наступних міркувань: оскільки декілька співробітників фірми мають дуже високу зарплату у порівнянні з іншими, значення середнього арифметичного значно відрізняється в сторону збільшення від зарплати основної маси співробітників і не може бути використане в якості відповіді.[17]

Задача 11. У таблиці, наведеній нижче, дано округлений до одного см розмір ноги учнів трьох класів.

см	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
n	1	3	5	6	5	4	6	8	7	6	5	3	2	1

Необхідно визначити моду.

Зауваження. При формальному підході до розв'язування задачі відповіддю буде число 22, запропоноване програмою. Але тут потрібно задуматись, наскільки така характеристика має реальне значення. Насправді, відомо, що розмір ноги хлопців і дівчат значно відрізняється. Якщо за допомогою послуги “Графік/Побудувати” побудувати полігон частот для цієї вибірки, ми побачимо два локальних максимуми; тому такі вибірки називають бімодальними. За допомогою полігону можна визначити і значення цих двох мод; це будуть числа 18 та 22, вони і будуть відповіддю задачі. На основі вищезгаданого також можна зробити висновок про те, що такі вибірки, якщо це можливо, краще розділяти на дві і кожен з них розглядати окремо.[17]

GeoGebra. Для роботи з випадковими величинами у програмі *GeoGebra* передбачено вікно зі спеціальним набором інструментів, який зосереджено у вкладці *Таблицы и графики* бічної панелі *Перспективи*. Також це вікно доступне через меню інтерфейсу за шляхом *Вид/ Таблица*. Таблиця подібна до електронних таблиць *Excel*. Імена комірок можна використовувати у виразах та командах. У комірки можна вводити не лише числа, але й інші типи математичних об'єктів, які підтримує *GeoGebra* (наприклад, координати точок, функції, команди). Якщо це можливо, *GeoGebra* відразу виводить на екран графічне представлення об'єкта. Більш детально про інструменти програми можна дізнатись із меню допомоги.

Розглянемо на прикладі можливості використання комп'ютерного інструментарію програми *GeoGebra* при розв'язуванні задач теорії ймовірності.[45]

Задача 12. На відрізку $[-2;2]$ навмання обирають число x . Яка ймовірність того, що $|x| < 1$?

Нехай a – параметр точки на відрізку, $a \in [-2; 2]$. Подія відбудеться за умови $(-1 < a < 1)$. Побудуємо точку з координатами $(a;0)$ (рис. 2.5). Вкажемо у властивостях точки *Оставляют след* і анімуємо параметр a . Отримаємо результат, який наочно показує, де має знаходитися точка a . Через командний рядок задамо логічну функцію, яка дорівнює 1, якщо виконуються умова $(-1 < a < 1)$, і яка дорівнює 0, якщо умова не виконується – *Если* $[-1 < a < 1,1,0]$. Далі у властивостях даної функції оберемо послугу *Запись в таблицу* для запису експериментальних даних у електронну таблицю. При анімації параметру a значення цієї функції будуть заноситися у перший стовпчик таблиці.[45]

Потім виділимо усі отримані значення і обчислимо відносну частоту того, що умова виконується, тобто відносну частоту значень 1 для заданої функції. Для цього скористаємося інструментом *Среднее арифметическое* на панелі вікна *Таблица*. [45]

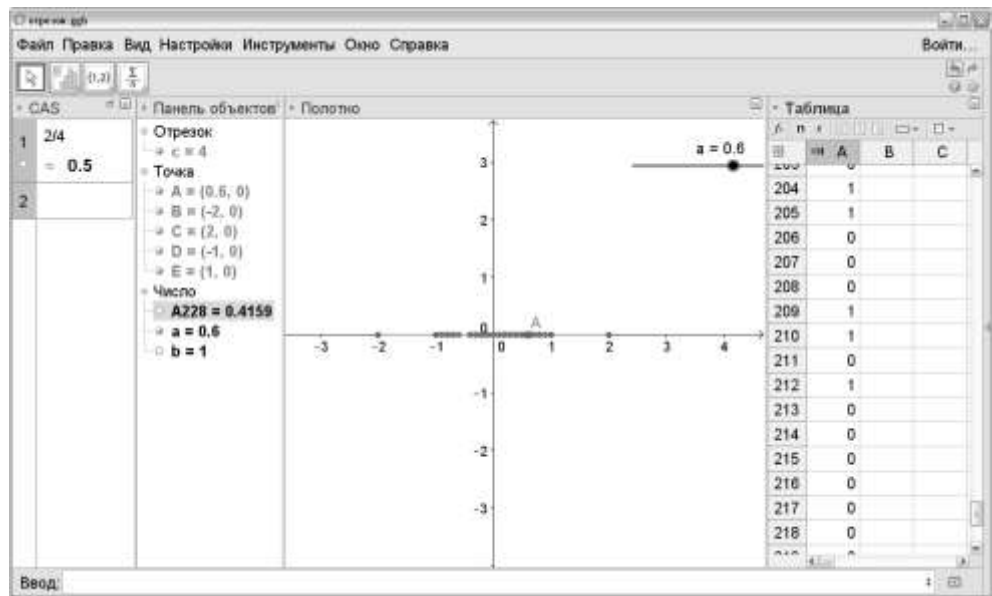


Рис. 2.5. Слід точки x за умови $|x| < 1$

Якщо провести 408 експериментів, то тримаємо відносну частоту значень; при кількості експериментів 594 – відносну частоту значень, при 806; при 1041. Як бачимо, при збільшенні кількості випробувань ймовірність того, що $|x| < 1$ прямує до 0,5.

Задача 13 (задача про зустріч). Юнак та дівчина домовилися про побачення з 15.00 до 16.00. Відомо, що кожен з них приходить у будь-який момент з 15.00 до 16.00 незалежно від іншого. Якщо юнак прийде і не зустрінє дівчину, то він буде чекати її ще протягом 20 хв. Дівчина в аналогічній ситуації буде чекати юнака протягом лише 10 хв. Яка ймовірність того, що побачення відбудеться? Це класична задача на застосування геометричного тлумачення ймовірності, аналітичне розв’язання якої можна знайти в [32]. Ми приведемо розв’язання задачі з використанням статистичного означення ймовірності на основі серії випадкових випробувань.

Нехай a та b – час (у хвилинах) приходу на побачення юнака і дівчини відповідно, відраховані від 15.00. Задамо відповідні параметри a та b , використовуючи інструмент *Ползунок*. За умовою $a \in [0; 60]$, $b \in [0; 60]$, а також

при їх заданні поставимо позначку *Случайное число*. У квадраті, побудованому на осях з вершиною в початку координат і довжиною сторони 60, координати точки $(a;b)$ можуть характеризувати час приходу юнака і дівчини відповідно. [45]

За умовою задачі побачення відбудеться, якщо виконуються аналітичні умови $(a < b \leq a + 20) \vee (b \leq a \leq b + 10)$. Побудуємо точку з координатами $(a;b)$. У властивостях точки у вкладці *Дополнительно* зазначимо *Условия отображения объекта* $(a < b \leq a + 20) \vee (b \leq a \leq b + 10)$, тобто умову, за якої відбудеться побачення (рис. 2.6).

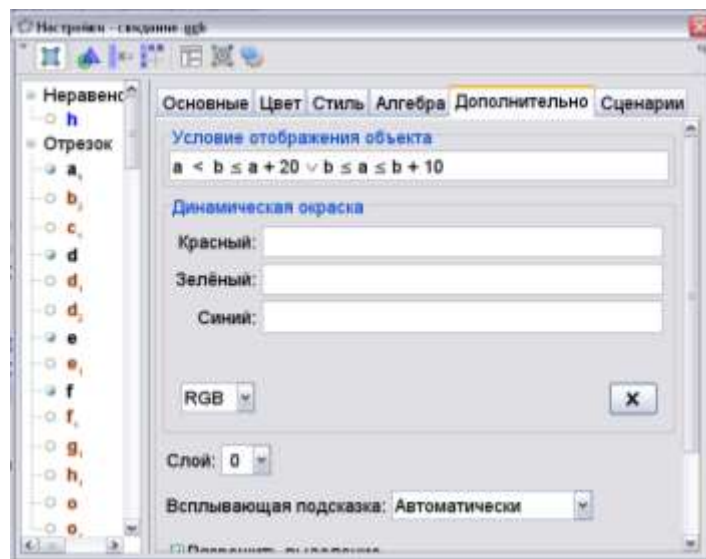


Рис. 2.6. Встановлення умов відображення точки з координатами $(a;b)$

Вкажемо у властивостях точки *Оставляют след* і анімуємо параметри a та b . Отримаємо результат, який наочно показує, де має знаходитися точка $(a;b)$ для того, щоб зустріч відбулась (рис. 2.7).

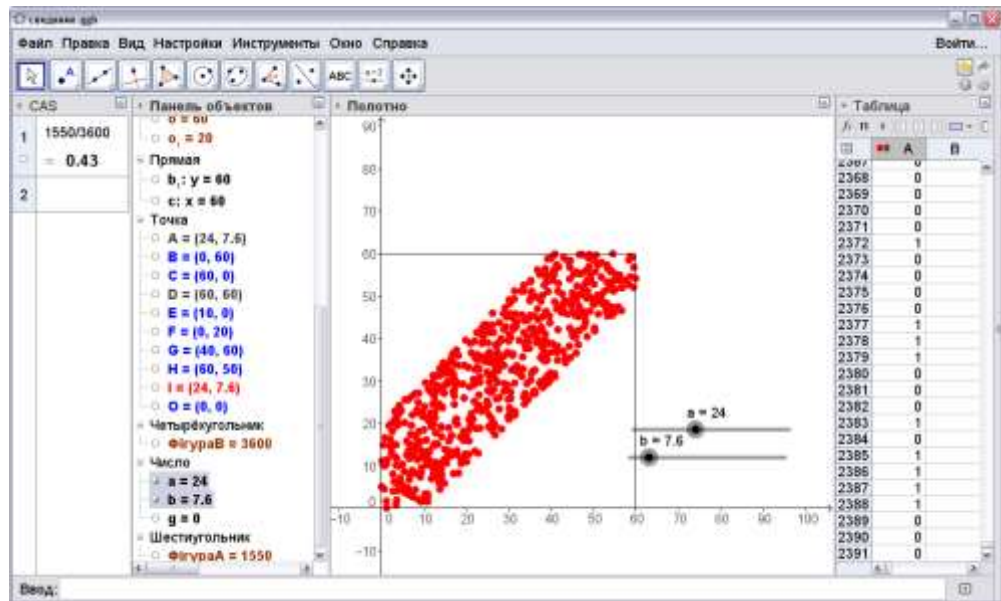


Рис. 2.7. Слід точки з координатами $(a;b)$ за умови, що зустріч відбулася

Через командний рядок задамо логічну функцію, яка дорівнює 1, якщо виконуються умови для побачення, і яка дорівнює 0, якщо побачення не відбудеться – $\text{Если}[a < b \leq a + 20 \vee b \leq a \leq b + 10, 1, 0]$. Далі у властивостях даної функції оберемо послугу *Запись в таблицу* для запису експериментальних даних у електронну таблицю. При анімації параметрів a та b значення цієї функції будуть заноситися у перший стовпчик таблиці.[45]

Потім виділимо усі отримані значення і обчислимо відносну частоту того, що зустріч відбудеться, тобто відносну частоту значень 1 для заданої функції. Для цього скористаємося інструментом *Среднее арифметическое* на панелі вікна *Таблица*.

Якщо провести 408 експериментів, то тримаємо відносну частоту значень або ймовірність зустрічі 0,4606; при кількості експериментів 594 – 0,4476; при 806 – 0,4353; при 1041 – 0,4306. Як бачимо, при збільшенні кількості випробувань ймовірність зустрічі прямує до 0,4306.

Після одержання результатів комп'ютерного експерименту розв'яжемо задачу класичним способом, використовуючи геометричне означення ймовірності.[45]

Побудуємо фігуру A , точки якої задовольняють нерівності $x < y \leq x + 20 \vee y \leq x \leq y + 10 \vee 0 \leq x \leq 60 \vee 0 \leq y \leq 60$. Побудуємо також квадрат B зі сторонами на осях координат, вершиною в початку координат і довжиною сторони 60. Юнак і дівчина зустрінуться тоді і лише тоді, коли навмання вибрана в квадраті точка належатиме фігурі A .

Обчислимо площі фігур A та B : площа фігури A – 1550, площа фігури B – 3600. Використовуючи геометричне означення ймовірності, за допомогою полотна CAS отримаємо – $\frac{1550}{3600} \approx 0,4306$ (рис. 2.8). Цей результат співпадає з результатом, одержаним завдяки випадковому вибору точок у квадраті і визначенню відносної частоти появи зустрічі.[45]

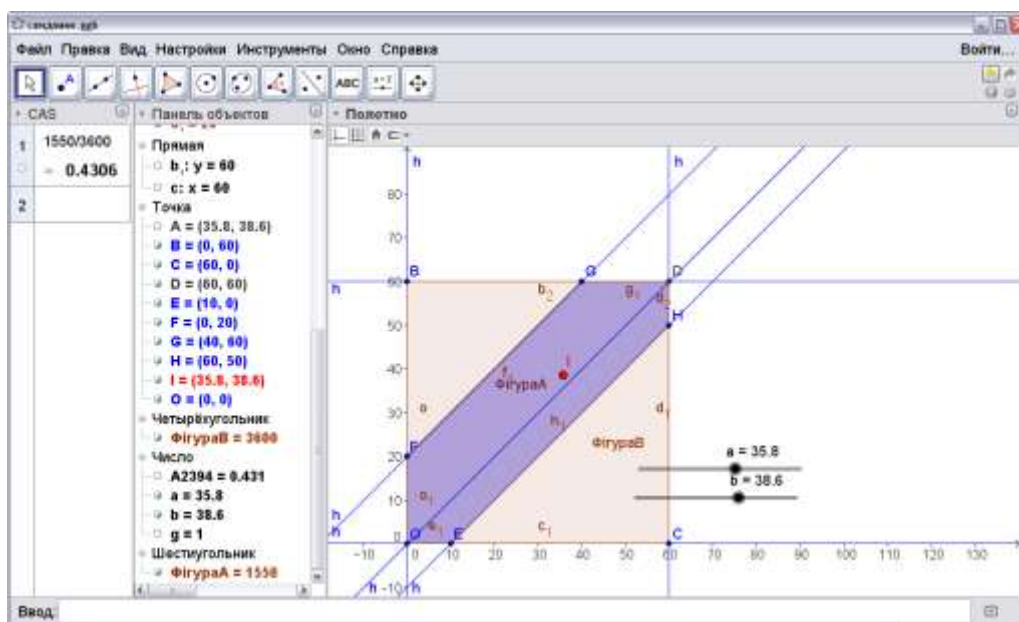


Рис. 2.8. Розв'язання задачі про зустріч, використовуючи геометричне означення ймовірності

Наступні задачі можна пропонувати для закріплення ідеї візуалізації експериментальних випробувань у середовищі *GeoGebra*. Ми наведемо лише їх умови та можливі вказівки для самостійного розв'язування.[45]

Задача 14. У кулю радіуса 2 вписали куб. Яка ймовірність того, що точка, навмання обрана в кулі, потрапить до вписаного куба? [32, с.151]

Вказівка. Побудуємо кулю радіуса 2 з центром в початку координат. Для того, щоб точка завжди була всередині кулі, пропонуємо скористатися сферичними координатами – потрібно, щоб сферичні координати (r, θ, φ) точки задовольняли умови $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 180^\circ$, $0 \leq \varphi \leq 360^\circ$. Саме ці межі будемо ототожнювати з межами параметрів r , θ , φ . У середовищі *GeoGebra* можна побудувати точку лише за декартовими координатами через командний рядок. Тому потрібно задати точку з координатами (a, b, c) , де $a = r \sin\theta \cos\varphi$, $b = r \sin\theta \sin\varphi$, $c = r \cos\theta$. [45]

Наступним кроком впишемо в кулю куб. Ребро куба дорівнює $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. Куб можна побудувати за двома його вершинами. Отже, будуємо, наприклад, точки-вершини $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3})$ та $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3})$. Тепер будуємо куб за цими двома вершинами.[45]

Точка, яка навмання обрана в кулі, потрапить до вписаного куба за умови, що $(-\frac{2\sqrt{3}}{3} < a < \frac{2\sqrt{3}}{3}) \wedge (-\frac{2\sqrt{3}}{3} < b < \frac{2\sqrt{3}}{3}) \wedge (-\frac{2\sqrt{3}}{3} < c < \frac{2\sqrt{3}}{3})$. Отже, потрібно задати логічну функцію – *Если* $[(-\frac{2\sqrt{3}}{3} < a < \frac{2\sqrt{3}}{3}) \wedge (-\frac{2\sqrt{3}}{3} < b < \frac{2\sqrt{3}}{3}) \wedge (-\frac{2\sqrt{3}}{3} < c < \frac{2\sqrt{3}}{3})], 1, 0]$ (рис. 2.9).

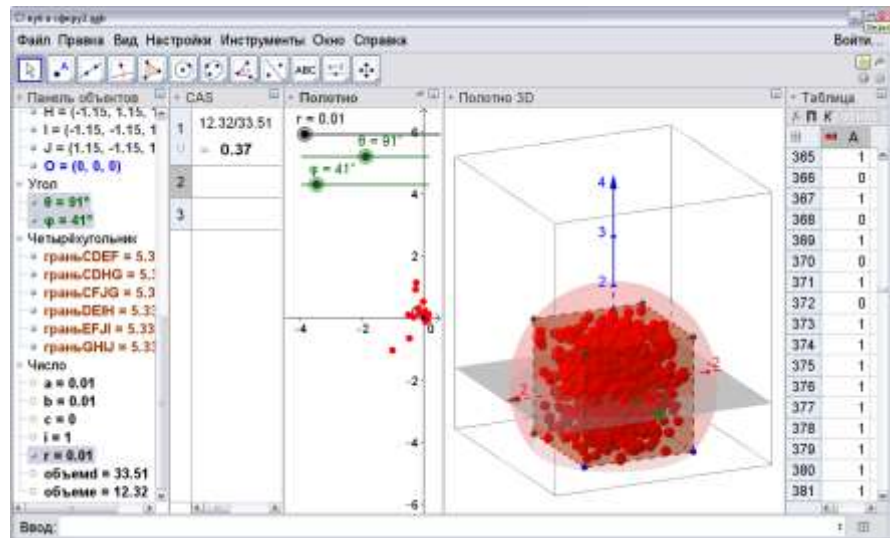


Рис. 2.9. Слід точки з координатами $(a;b;c)$ за умови, що вона потрапить до вписаного в кулю куба

Задача 15. Завод відправив на базу 500 виробів. Ймовірність зіпсованості виробу по дорозі дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що по дорозі буде зіпсовано більше трьох. [22]

Розв'язання (GeoGebra 5.0). Обираємо пункт меню *Вид/Калькулятор вероятностей*. Виберемо тип розподілу – *Пуассона* і введемо його дані – $\mu = n \cdot p = 500 \cdot 0,002 = 1$. Відразу у вікні калькулятора справа з'явиться закон розподілу. Ймовірність зіпсувати по дорозі більше 3 приладів дорівнює $P(4 \leq X) = 0,9197$ (рис. 2.10).

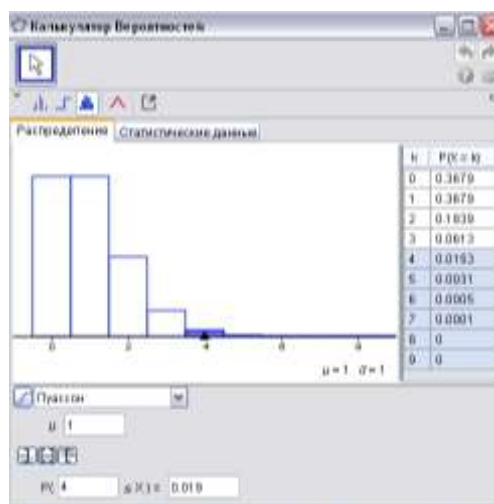


Рис. 2.10. Калькулятор ймовірностей

Порівнюючи можливості програм *Gran1* та *GeoGebra 5.0*, зазначимо, що на відміну від *GeoGebra 5.0*, де дані потрібно увести у таблицю і використати інструменти аналізу, у середовищі *Gran1* пропонується обрати тип розподілу (дискретний чи неперервний) і тип даних (частоти, відносні частоти, варіанти). Також варто пам'ятати, що у *Gran1* для неперервного розподілу потрібно власноруч вводити рівновіддалені середини інтервалів і частоти попадання у ці інтервали. У *GeoGebra 5.0* можна вводити частоти, а потім в автоматизованому режимі задати ширину карманів і значення варіант. [45]

В обох програмах передбачено можливість побудови полігону частот, але графік функції розподілу розраховується в автоматичному режимі лише у *Gran1*. В обох програмах обчислюється математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення. У *Gran1* для дискретного розподілу автоматично визначиться мода, для неперервного – медіана. При використанні *GeoGebra 5.0* моду можна визначити додатково через командний рядок, а медіану програма обчислить автоматично.[45]

Математический конструктор. Розглянемо комп'ютерний інструментарій програми динамічної математики *Математический конструктор*.

Розробники пропонують наступні комп'ютерні інструменти у розділі Статистика: *Случайное испытание*, *Плеер случайных испытаний*, *Вычисление статистик*, *Временной ряд (таблица)*, *Временной ряд (график)*, *Полигон частот*, *Гистограмма частот*.

Розглянемо детальніше інструмент *Случайное испытание*. При виборі даного інструменту можна задати тип випробування: випадкове кидання чи випадковий вибір. Якщо обрати у якості випробування *Случайное бросание*, то потрібно обрати число предметів, які кидаються одночасно; предмети, що використовуються (монета, кнопка, гральний кубик), при цьому вказуються чисельні значення результатів випробування. Оскільки кнопка не є симетричним предметом і результати її кидання не є рівноможливими подіями, то потрібно додатково вказати ймовірність, з якою кнопка впаде вістрям догори (рис. 2.11).

Якщо ж у якості випробування обрати *Случайный выбор*, то потрібно додатково вказати число предметів, які дістаються з корзини одночасно; яким чином ці предмети дістаються з корзини – з поверненням, без повернення чи одночасно; предмети, що використовуються (кулі, гральні карти, цифри, російські літери, англійські літери, люди, рукавички, черевики, руки, різні предмети, грані грального кубика, різні боки монети євро, російського рубля, кнопки, шкарпетки, випробування Бернуллі (успіх чи невдача), причому перед початком випробування потрібно помістити предмети з каталогу у корзину (рис. 2.12).

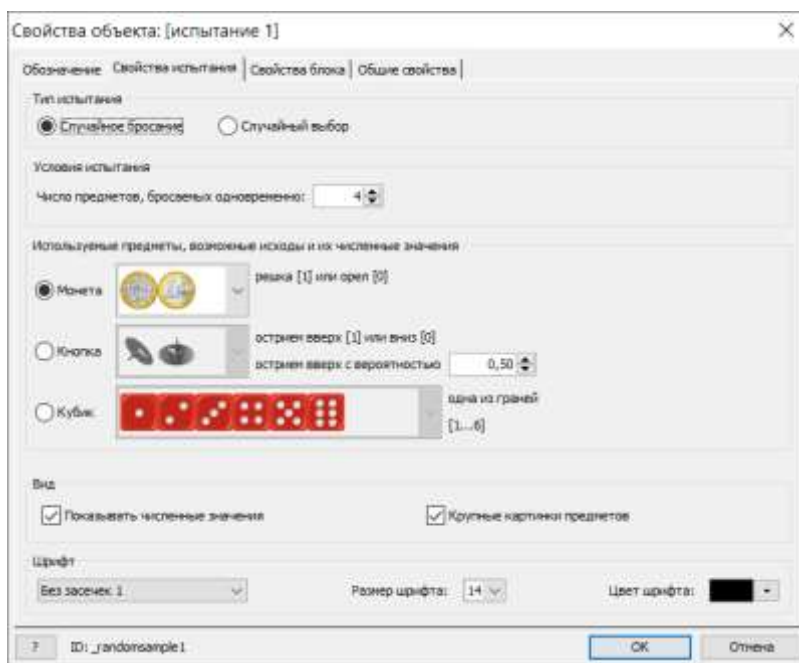


Рис.2.11. Вибір предметів, що задіяні у випробуванні *Случайное бросание*

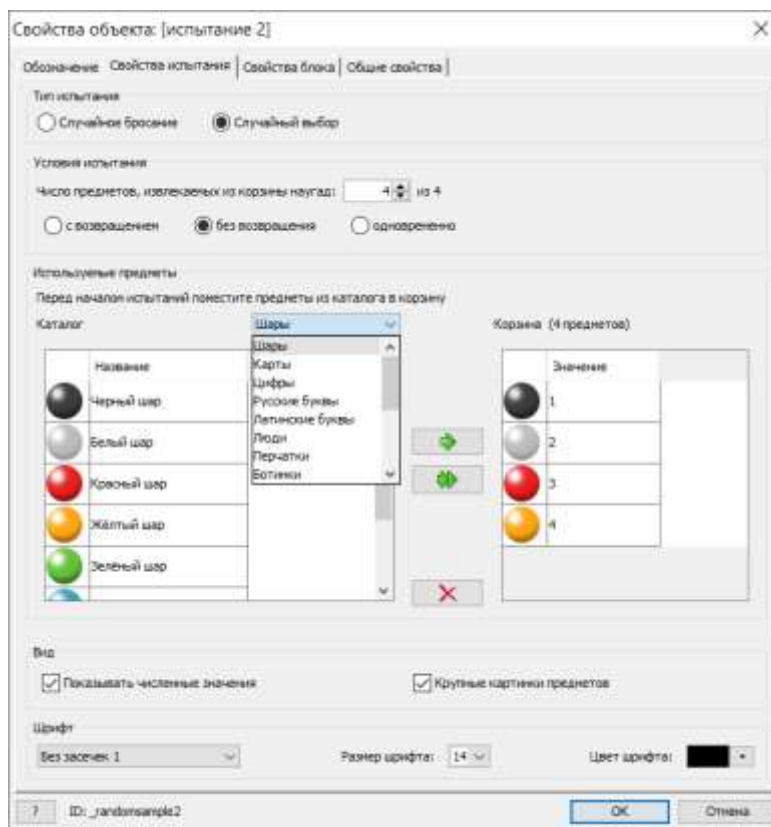


Рис.2.11. Вибір предметів, що задіяні у випробуванні *Случайный выбор*

Інструмент *Вычисление статистик* дозволяє обчислити кількість повторів значень, суму значень у випробуванні, мінімальне та максимальне значення у випробуванні, значення елемента з номером (рис. 2.13).

Інструмент *Временной ряд (или ряд динамики)* дозволяє заносити значення випадкової величини, зібрані в послідовні дискретні моменти часу, до таблиці, а *Временной ряд (график)* будує графік залежності однієї із функцій, зазначених у статистиках, від номера випробування.

Інструмент *Полигон частот* побудує полігон частот за даними одного із стовпців таблиці, а інструмент *Гистограмма частот* – відповідно гістограму частот (рис. 2.14).

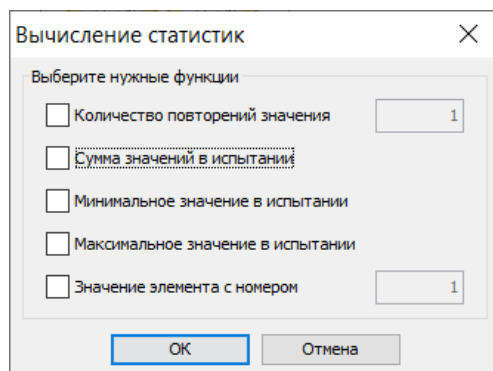


Рис.2.13.

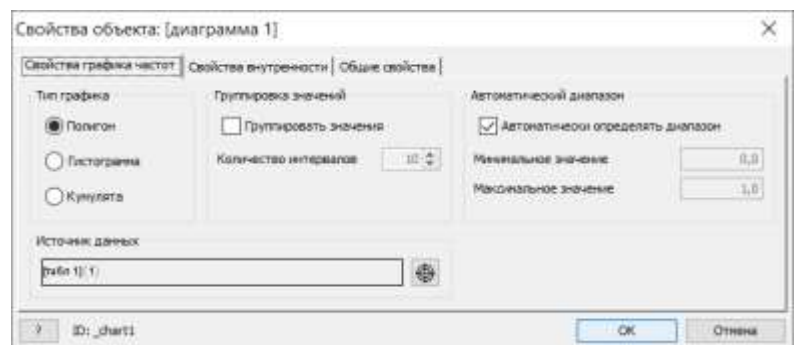


Рис.2.14.

Плеер случайных испытаний – це інструмент, який проводить одне випадкове випробування або автоматично запускає цілу серію таких випробувань. На плеєрі є три кнопки: *Пуск* – запускає серію випробувань; *Шаг* – виконує одне (або декілька) випробувань за один крок; *Сброс* – скидає всю серію на початок. *Статистика* – це не тільки назва галузі знань, що займається збором і обробкою даних. Друге, більш вузьке, значення цього слова – функція від результатів випадкового випробування, випадкова величина. Наприклад, кількість "гербів", що випали при підкиданні трьох монет. [1]

Більш детально про шляхи використання програми *Математичний конструктор* при вивченні теорії ймовірностей і математичної статистики в основній і старшій школі буде висвітлено у підрозділі 2.2.

Таким чином, візуалізація випадкових подій під час розв'язування задач теорії ймовірності дозволяє вирішити одночасно кілька навчальних завдань.

1. Продемонструвати шляхи використання інформаційних технологій та спеціалізованого програмного забезпечення для розв'язування ймовірнісних задач.

2. Забезпечити емпіричне підґрунтя навчального процесу, яке дозволить говорити про усвідомлення суб'єктом навчання проблеми, яка сформульована умовою задачі, та адекватність моделювання цієї умови і пошуку її розв'язків.

3. Продемонструвати різні підходи до одержання чисельного розв'язку задачі і його «однаковість» при використанні цих способів.

4. Сформулювати додаткові задачі, серед яких – обґрунтування «обов'язкового» наближення одержаних результатів до точного розв'язку зі збільшенням кількості випадкових подій, яке неможливе без розуміння суті ймовірнісних подій, що ототожнюються з дискретними чи неперервними законами розподілів.

5. Посилити прикладну спрямованість математики і сформувати асоціативні зв'язки між формальною математикою і життєвими задачами (проблемами) через візуалізацію експерименту з випадковими величинами та їх появою. Іншими словами, можна продемонструвати використання математичних методів і доцільність побудов математичних моделей різних ситуацій у реальному житті. Зауважимо, що традиційними методами або через власну уяву моделювання цієї задачі (на основі випадкових подій) важко уявити і відтворити.

6. Використання програм динамічної математики формує підґрунтя для спрощення побудови математичної моделі задачі, організації достатньої кількості

випадкових випробувань, візуалізації цих випадкових подій і дозволяє надати навчальному процесу дослідницького характеру.

7. Разом з цим вважаємо потрібним зазначити, що динамічна візуалізація не завжди має дидактичні переваги перед статичним поданням навчального матеріалу. Питання про доцільність динамічної візуалізації тої чи іншої статичної моделі є контекстно залежним, і у разі використання ідеї унаочнення експерименту з випадковими величинами на вибір форм та засобів динамізації, характер та ступінь інтерактивності обов'язково вплине досвід вчителя, рівень його володіння комп'ютерними засобами математичного спрямування, відчуття навчальної аудиторії тощо.

8. Програми динамічної математики та використання їх інструментарію надають вчителю можливість зробити своє спілкування з учнями ще більш інтенсивним, більше уваги приділити логічному аналізу умов задач, перекласти на комп'ютер рутинні технічні обчислення, візуалізувати складні для сприймання поняття стохастичної змістової лінії шкільного курсу математики.

2.2. Шляхи використання програми «Математичний конструктор» при вивченні теорії ймовірностей і математичної статистики в основній і старшій школі

Основи теорії ймовірностей потрібно знати кожній людині для формування правильного світогляду. Людині слід усвідомити те, що ми живемо в світі, де відбуваються випадкові події, і те, що закономірності пробиваються через масу випадковостей [42]. Через це теорію ймовірностей не можна не використовувати в повсякденному житті, до того ж вона має різні області застосування. Люди застосовують її як свідомо, так і несвідомо, що проявляється в звичайних повсякденних фразах і діях. Розумна людина повинна прагнути мислити, виходячи із законів ймовірностей.

Стохастика виявляється однією з найскладніших змістових ліній шкільного курсу математики. Полегшити її сприймання, на нашу думку, допоможе візуалізація результатів випадкових випробувань, що можна реалізувати із використання спеціалізованого програмного забезпечення. Подібне програмне забезпечення представлено досить широко, але проведений аналіз наявних комп'ютерних інструментів та можливостей з точки зору застосування в освітньому процесі (підрозділ 2.1) дозволяє вивести на перше місце програму динамічної математики *Математический конструктор*.

Наведемо приклади експериментів, результати яких можна візуалізувати у програмі *Математический конструктор* [1].

Експеримент 1. У кошику 2 червоні та 2 зелені кулі. З нього виймають 2 кулі. Яка ймовірність того, що вони будуть однакового кольору (рис.2.15)?

Задамо тип випробування – *Випадковий вибір*, а саме з чотирьох куль витягуємо дві. Занесемо результати випробування у таблицю. Для визначення ймовірності випадання куль однакового кольору скористаємося даними таблиці. Визначивши частоту випадання куль різного кольору, ми підраховали, що ймовірність випадання куль однакового кольору складає приблизно 0,333, що не суперечить результатам аналітичного розв'язання. Додатково існує можливість візуалізувати за допомогою графіку, коли зелена лінія – це ймовірність випадання куль різних кольорів, а синя – однакових.

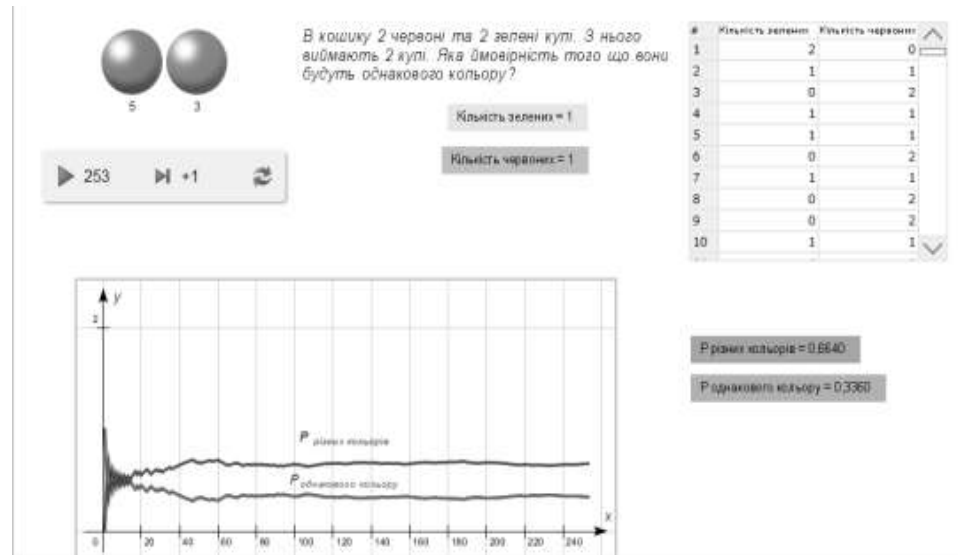


Рис. 2.15. Виймання куль із кошика

Розв'язуючи дану задачу аналітично, отримаємо аналогічний результат. Пронумеруємо всі кулі і витягуватимемо по дві кулі. Якщо пронумерувати всі кулі, і витягувати їх один за іншим, то досвід, як видно з таблиці, буде мати $(16-4)=12$ рівно можливих випадків (виключаються 4 пари з однаковими числами). Будемо вважати, що кулі 1 і 2 – зеленого кольору, а 3 і 4 – червоного. Тоді неважко виділити все сприятливі для нашого події результати і переконатися, що їх 8. Отже, ймовірність, що кулі будуть різного кольору дорівнює $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, а ймовірність того що кулі будуть однакового кольору дорівнює $\frac{1}{3}$.

Експеримент 2. Підкидання монети. Обчислити кількість, частоту, ймовірність випадання гербів та чисел. Обчислити відхилення частоти від ймовірності (рис. 2.16).



Рис. 2.16. Підкидання монети

Експеримент 3. Підкидання двох монет (монети не нумеруємо). Обчислити частоту випадіння двох орлів, орла і решки, двох решок. Обчислити ймовірність того, що дві монети випадуть однаковими сторонами, різними сторонами (рис. 2.17).

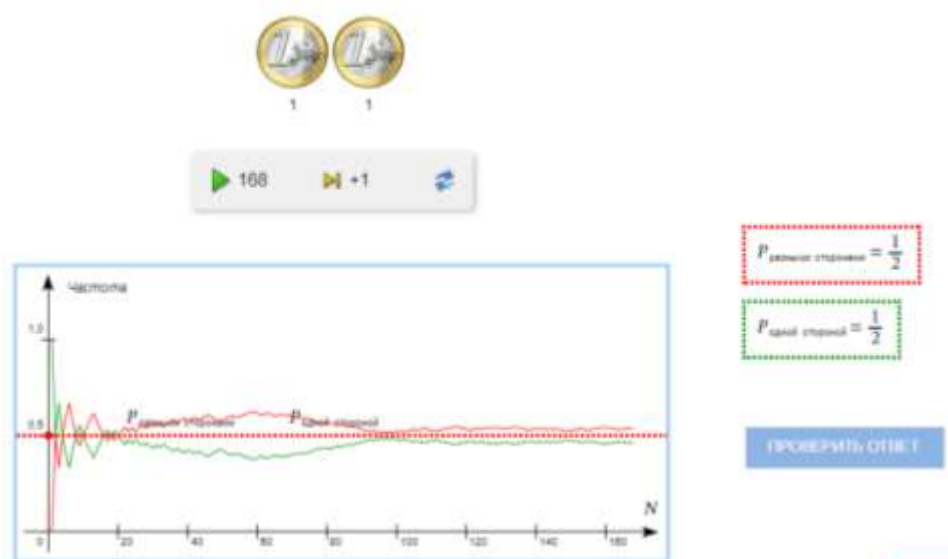


Рис. 2.17. Підкидання двох монет

Експеримент 4. Підкидання грального кубика. Обчислити частоту випадання кожної грані кубика. Обчислити ймовірність того, що випаде парна кількість очок. Обчислити відхилення частоти від ймовірності випадіння певної грані (рис. 2.18).



Рис.2.18. Підкидання грального кубика

Експеримент 5. В корзині лежать два яблука і одна груша, з корзини навмання виймають два фрукти (без повернення). Обчислити ймовірність того, що два фрукти будуть однакові, різні (рис. 2.19).

Аналітичне розв'язання. Два фрукти з трьох можна витягнути $C_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3$. Неважко виділити всі сприятливі для нашої події результати і переконатися, що їх 1. Отже, ймовірність, що фрукти будуть однакові дорівнює $\frac{1}{3}$, а ймовірність того що фрукти будуть різні дорівнює $\frac{2}{3}$.

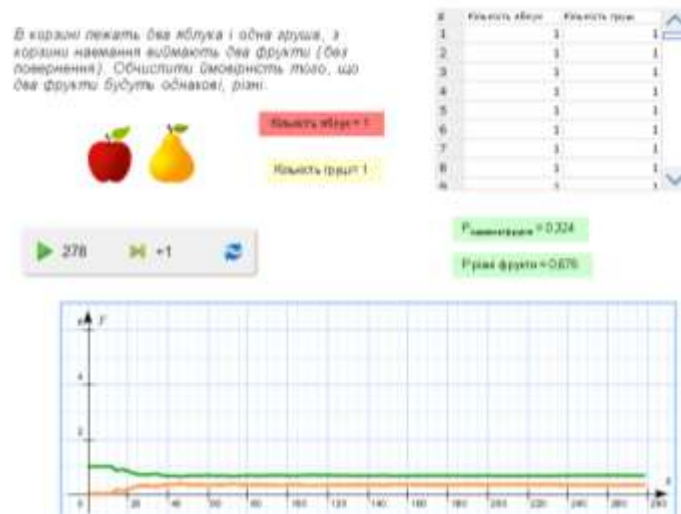


Рис. 2.19. Виймання фруктів із корзини

Експеримент 6. У шафі стоять п'ять пар черевиків (розміри від 41-го до 45-го), з шафи навмання виймають 4 черевики. Обчислити ймовірність того, що серед обраних черевиків відсутні парні (рис. 2.20).

Аналітичне розв'язання. Загальна кількість способів обрати черевики $C_{10}^4 = \frac{10!}{6!4!} = 210$ способів. Щоб обрати непарні потрібно обчислити $2^4 \cdot C_5^4 = 16 \cdot 5 = 80$ способів.

Отже, ймовірність витягнути непарні черевики становить $P(A) = \frac{2^4 \cdot C_5^4}{C_{10}^4} = \frac{80}{210} \approx 0,381$.



Рис.2.20. Вибір черевиків

Експеримент 7. У маленької Варі дві однакові пари рукавичок. Збираючись на прогулянку, вона навмання бере дві рукавички. Обчислити ймовірність того, що Варя обрала пару (рис. 2.21).



Рис.2.21. Вибір рукавичок

Аналітичне розв'язання. Існує $C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$. Обрати пару Варя може 2 способами. Отже, ймовірність того, що Варя обере пару $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Експеримент 8. Провести експерименти з підкиданням канцелярської кнопки (два результати: кнопка може впасти на підлогу вістрям вгору, або вістрям вниз) (рис. 2.22). Порівняти із результатами експерименту з підкидання монети (два результати: випаде «герб» або «число»).

Однить вероятности этих исходов можно только с помощью статистического эксперимента. Попробуйте это сделать: выразите вероятности p_0 и p_1 через N , n_0 и n_1 .

Вероятность упасть острием вниз:

$$p_0 = \frac{87}{125} = 0,696$$

Вероятность упасть острием вверх:

$$p_1 = \frac{38}{125} = 0,304$$

ПРОВЕРИТЬ ОТВЕТ

Рис. 2.22 (а). Підкидання канцелярської кнопки

Понаблюдайте, как быстро частоты исходов "острием вниз" и "острием вверх" приближаются с ростом числа опытов N к своим вероятностям, которые в данном опыте равны, соответственно, **0,3** и **0,7**.

Значение = 1

0 - острием вниз
1 - острием вверх

#	Значения
120	1
121	1
122	0
123	1
124	1
125	1

Частота

p_1

p_0

$\eta_1 = 0,728$

$\eta_0 = 0,272$

Показать вероятности

Рис. 2.22 (б). Підкидання канцелярської кнопки

Під час обговорення даної моделі можна зробити наступні важливі зауваження.

1. Ймовірність закладена «в природі речей»: якщо дослід з тією ж кнопкою повторити через тиждень, частота буде прямувати до того ж числа (для кнопки, зробленої за іншою технологією, це число може бути вже іншим).

2. Значні відхилення частоти від ймовірності можливі навіть за великої кількості дослідів, але чим більше дослідів, тим менш ймовірні такі відхилення (питання про їх кількісну оцінку виходить за рамки шкільного курсу).

3. У деяких випадках можна «передбачити» ймовірність (тобто майбутню частоту) без проведення експерименту.

4. У прикладі з монетою ми мали справу з симетричним предметом, тому всі результати досліду були рівно можливими. При підкиданні монети було два рівноможливі результати – «герб» і «число». В силу симетрії не було ніяких підстав вважати один з таких випадків більш імовірним. Тому у цьому випадку можна сформулювати наступне означення (воно називається класичним визначенням ймовірності).

Означення. Нехай випадковий експеримент може завершитися одним з n рівноможливих результатів; і нехай рівно m з цих випадків цьому сприяють, тобто призводять до настання випадкової події A . Тоді ймовірність цієї події може бути обчислена за формулою $P(A)=m/n$.

5. Але у досліді з кнопкою цим означенням користуватися не можна, оскільки предмет не симетричний, і результати випробування не є рівноможливими.

В умовах інформаційного суспільства математичну освіту стає важливим фактором адаптації особистості до існуючих реалій, що, відповідно ініціює необхідність постановки таких цілей математичної підготовки школярів, які будуть адекватні новим вимогам.

Особливу роль в цьому процесі відіграють інформаційно-комп'ютерні технології. Вчителі математики в практиці своєї роботи використовують

програмні продукти фірми 1С, зокрема, інтерактивне творче середовище *Математический конструктор*. Можливості, якими володіє дана програмне середовище, дозволяють розширити дидактичну і методичну базу викладання математики, значно полегшити підготовку до організації та проведення уроку.

Інтерактивне творче середовище надає вчителю широкі можливості для впровадження у викладання математики діяльнісного підходу, заснованого на включенні в освітній процес елементів математичного експерименту і дослідження. Використання програми *Математический конструктор* на уроках і позаурочній діяльності стимулює творчий потенціал учнів, розвиває в них навички бачити, формулювати і розуміти математичні закономірності, істотно впливає на успішність засвоєння навчального матеріалу, підвищення мотивації навчання і ступінь емоційної залученості учнів в процес пізнання.

Програми динамічної математики та використання їх інструментарію надають вчителю можливість зробити своє спілкування з учнями більш інтенсивним, більше уваги приділити логічному аналізу умов задач, перекласти на комп'ютер рутинні технічні обчислення, візуалізувати складні для сприймання поняття стохастичної змістової лінії шкільного курсу математики.

2.3. Конспекти уроків з комп'ютерною підтримкою

Конспект уроку на тему «Задача Бюффона»

Мета:

предметна компетентність: сформувати поняття геометрична ймовірність; сформувати вміння розв'язувати задачу Бюффона;

спілкування державною мовою: доречно та коректно вживати в мовленні математичну термінологію, чітко, лаконічно та зрозуміло формулювати думку;

уміння вчитися впродовж життя: усвідомлювати власні освітні потреби та цінність нових знань і вмінь;

соціальна та громадянська компетентності: аргументувати та відстоювати свою позицію;

Тип уроку: комбінований.

Обладнання та наочність: підручник «Алгебра та початки аналізу 11 клас» (автори Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Болонський В. Б., Якір М. С.), програма *Математический конструктор*, мультимедійна дошка.

План уроку

- I. Організація початку уроку
- II. Актуалізація опорних знань
 1. Фронтальне опитування
- III. Повідомлення теми і мети уроку
- IV. Вивчення нового матеріалу
 1. Історична довідка
 2. Задача Бюффона. Аналітичне розв'язання
 3. Розв'язання задачі у програмі «*Математический конструктор*»
 4. Самостійна робота
- V. Підсумок уроку. Рефлексія

Хід уроку

- I. Організація початку уроку
- II. Актуалізація опорних знань
 1. Фронтальне опитування

Спочатку давайте пригадаємо те що ви вивчили на минулих уроках.

1. Що вивчає теорія ймовірностей?
2. Назвіть основні поняття теорії ймовірностей? Наведіть приклади.

3. Які види подій ви знаєте? Наведіть приклади.
4. Що називають випадковою подією? Як вона позначається?
5. Сформулюйте класичне означення ймовірності.
6. Сформулюйте означення геометричної ймовірності.

III. Повідомлення теми і мети уроку

Жорж Бюфон (1707–1788), видатний французький учений, у своїй роботі, що була написана 1733 року, а опублікована в 1777, заклав новий напрямок у теорії ймовірностей. Розв'язання відомої "задачі про голку", що викладалося в цій статті, вимагало швидше геометричного, а не комбінаторного методу вирішення. У задачах такого типу вважають, що випадкові точки рівномірно розподілені в деякій області. Імовірність потрапити в довільну частину цієї області пропорційна площі цієї частини (довжині, обсягу). Таким чином, для визначення ймовірності достатньо знайти відношення площі "сприятливої" множини до площі (довжини, обсягу) усієї множини.

IV. Формування вмінь і навичок

1. Історична довідка

Історія науки показує, що всі її галузі в міру свого розвитку приходять до необхідності враховувати випадкові відхилення від закономірностей і використовувати їх вплив на перебіг досліджуваних процесів. Випадковість в навколишньому світі існує об'єктивно, внаслідок принципової неможливості врахувати всі причинні зв'язки досліджуваних явищ з безліччю інших явищ. При розвитку науки кордону між випадковістю і закономірністю змінюються в міру розширення людських знань: то, що було випадковістю на одному етапі науки, може стати закономірністю на іншому її етапі і, навпаки, в явищах, які вважалися строго закономірними, внаслідок вдосконалення теорії і техніки експерименту, підвищення точності визначення закономірностей виявляються випадкові відхилення від них і виникає необхідність враховувати ці випадкові

відхилення.

Задача Бюффона про голку була сформульована в 1733 році, а опублікована разом з рішенням тільки в 1777. Це класична задача теорії геометричних ймовірностей, по праву вважається вихідним пунктом розвитку цієї теорії. Поява геометричних ймовірностей стало визначною подією в науці. Воно сприяло формуванню нової мови, стилю і вигляду теорії ймовірностей. Завдяки геометричним можливостям виникла і бурхливо розвивається інтегральна геометрія. Класичні результати Бюффона лежать в основі сучасного і досить універсального методу статистичного моделювання. В останні роки геометричні ймовірності успішно застосовуються в кінцево-елементному аналізі.



Рис.2.23 Портрет Бюффона

Народився 7 вересня 1707 року в Монбара (Бургундія). Батько, Бенжамен Леклер, колишній радник парламенту в Діжоні, дав синові блискучу виховання.

В юності Бюффон разом з молодим герцогом Кінгстоном подорожував по Франції та Італії. Потім відправився в Англію, де переклав «Теорію функцій» І. Ньютона.

Він виступав і з власними статтями математичного змісту. У 1733 р Бюффона обрали членом Королівської Академії природничих наук. У 1739 р учений був призначений інтендантом королівського ботанічного саду. Найбільш помітним працею натураліста стала багатотомна «Природна історія тварин» (1749-1783 рр.), де крім описів ссавців, птахів, риб (здебільшого систематизованих за літературними джерелами) наведені гіпотези, що стосуються походження Землі, міркування по антропології і т. Д. Цей фундаментальну працю, що має зараз в основному історичну цінність, був свого часу досить популярний в науковому світі і переведений майже на всі європейські мови.

Бюффон помер 16 квітня 1788 року в Парижі. До кінця життя він користувався прихильністю монархів – французький король Людовик XV звів вченого в графський титул, а Людовик XVI ще за життя Бюффона вшанував його бюстом, який був поставлений біля входу в королівський природно-історичний кабінет.

2. Задача Бюффона. Аналітичне розв'язання.

Нехай на площині проведено нескінченну кількість паралельних прямих. Відстань між сусідніми прямими дорівнює 4. На площину кидають голку завдовжки 2. Знайдіть ймовірність того, що голка перетне одну з прямих.

Розв'язання

Положення голки будемо визначати кутом x між прямою, що містить голку, і проведеними прямими, а також відстанню y від середин голки до найближчої прямої (рис.2.24)

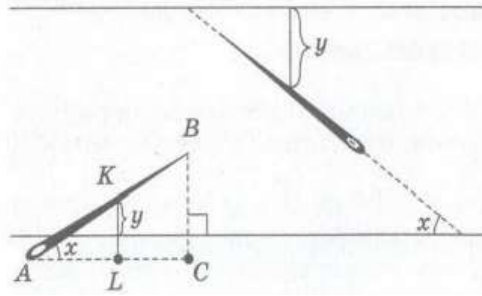


Рис. 2.24. Положення голки

Зрозуміло, що $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ і $y \in [0; 2]$. Можна вважати, що кут x і відстань y обирають навмання як координати точки $Q(x; y)$ прямокутника $OFGH$ зі сторонами $\frac{\pi}{2}$ і 2 (рис. 2.25).

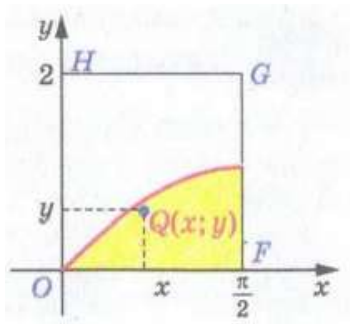


Рис.2.25. Геометрична інтерпретація положення голки

Розглянемо прямокутний трикутник ABC , катет AC якого паралельний даним прямим (рис. 2.24). Оскільки голка AB має довжину 2, то середня лінія KL трикутника ABC дорівнює $KL = \frac{BC}{2} = \frac{AB \cdot \sin x}{2} = \sin x$. Легко зрозуміти, що голка перетне проведену пряму тоді і тільки тоді, коли $y \leq KL$, тобто при $y \leq \sin x$. Іншими словами, голка перетне пряму тоді, коли взята навмання точка $Q(x; y)$ належатиме фігурі A , що розташована в прямокутнику $OFGH$ нижче від графіка функції $y = \sin x$ (рис.2). Обчислимо площу фігури A . Маємо $S_A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx =$

– $\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$. Площа прямокутника $OFGH$ дорівнює $S = \frac{\pi}{2} \cdot 2 = \pi$. Тому $p(A) = \frac{1}{\pi}$.
Звідси $\pi = \frac{1}{p(A)}$.

Отже, величина, обернена до ймовірності того, що голка перетне проведені прямі, дорівнює π .

Базуючись на отриманому висновку, науковці проводили експериментальне визначення числа π . Їх результати наведено в таблиці.

Таблиця 2.1

Результати експериментального визначення числа π

<i>Дослідник</i>	<i>Кількість випробувань</i>	<i>Наближене значення числа π</i>
Вольт	5000	3,1596
Сміт	3204	3,1553
Фокс	1120	3,1419

3. Розв'язування задачі Бюффона із використанням програми *Математический конструктор*

Якщо змоделювати на комп'ютері випадкове кидання голки, то, провівши велику кількість таких «випробувань», можна знайти декілька десяткових знаків числа π (рис. 2.26).

На розграфлений паралельними рівновіддаленими прямими аркуш паперу кидається голка. Якщо довжина голки L менше відстані між лініями d («коротка» голка), то ймовірність події «Голка перетне лінію» буде дорівнювати $P = \frac{2L}{\pi d}$. Проводячи такий досвід багаторазово, і замінюючи ймовірність P частотою F , можна отримати наближене значення числа « π »: $\pi \approx \frac{2L}{Fd}$.

Після кожного випробування обчислюється випадкова величина f , рівна кількості пересічених голкою ліній (для «короткої» голки вона приймає лише два

значення – 0 і 1); отримані результати заносяться в таблицю. По таблиці обчислюється F – частота події «Голка перетнула лінію», а по частоті – наближене значення числа π . Будується графік зміни цього наближення.

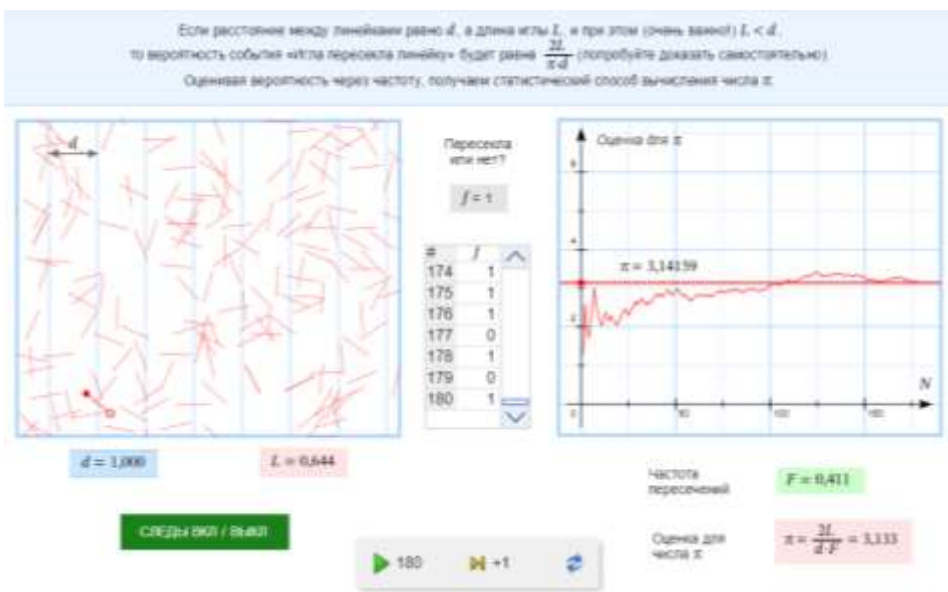


Рис. 2.26. Експериментальне визначення десяткових знаків числа π якщо довжина голки менше за відстань між лініями

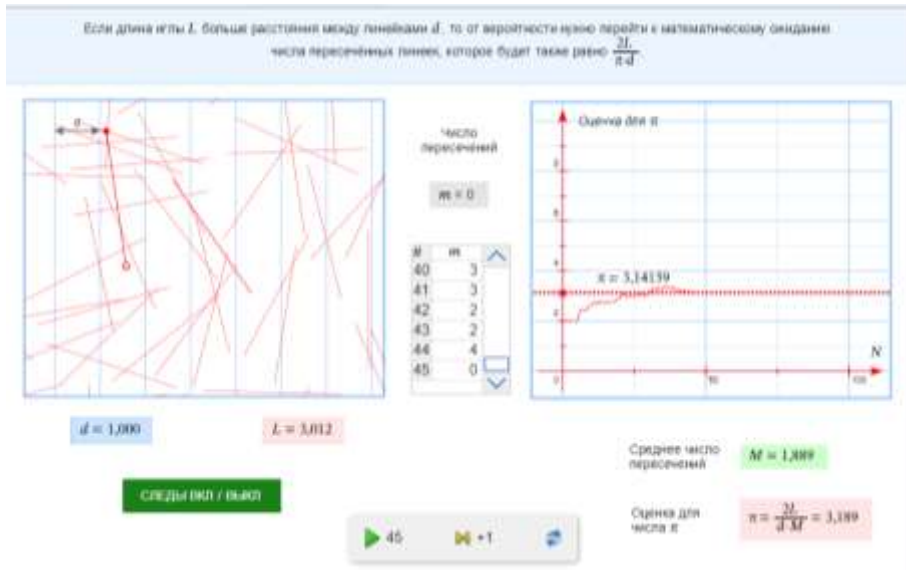


Рис. 2.27. Експериментальне визначення десяткових знаків числа π якщо довжина голки більше за відстань між лініями

Якщо довжина голки буде більше відстані між лініями, то отримана в досліді Бюффона формула для ймовірності стає невірною – це легко перевірити, якщо збільшити голку на аркуші 2. Однак результат Бюффона можна легко підправити: потрібно враховувати не ймовірність події «Голка перетнула лінію», а математичне очікування випадкової величини m , рівній кількості ліній, що перетинаються голкою: $E(m) = \frac{2L}{\pi d}$. Замінюючи математичне сподівання на вибіркоче середнє $M = \bar{m}$, знову отримуємо наближену оцінку для числа π .

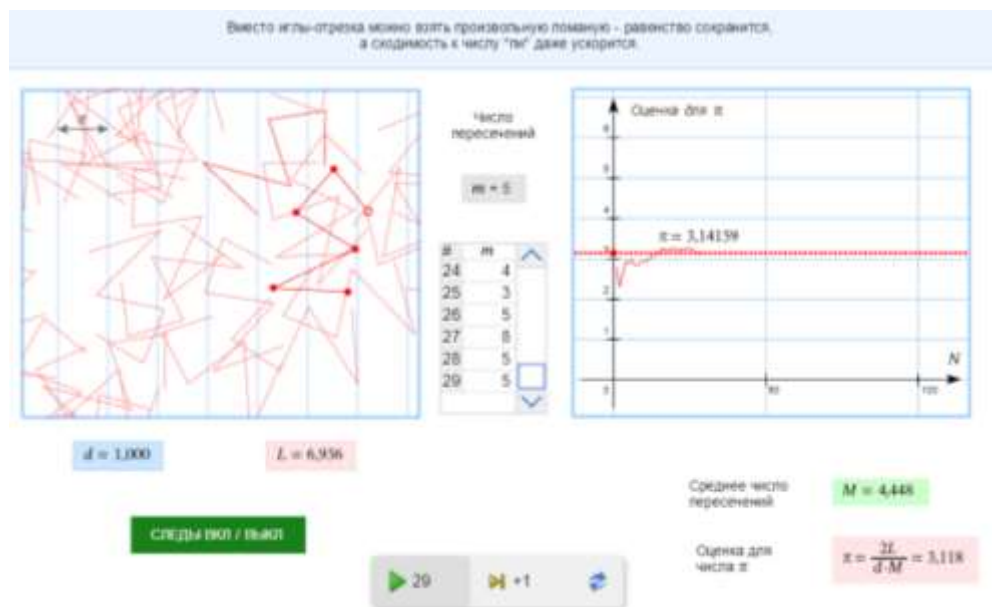


Рис. 2.28. Експериментальне визначення десяткових знаків числа π якщо замість голки є ламана

Цікавим узагальненням досліді Бюффона служить модель, наведена на (рис. 2.28): виявляється, замість голки на папір можна кидати будь-яку ламану (а насправді, навіть *будь-яку криву!*). Результат залишиться тим самим: середнє число ліній, що перетне ламана (або крива) дорівнюватиме $\frac{2L}{\pi d}$, де L – довжина ламаної (кривої). Чудовий доказ цього факту належить С. Уламу. Якщо розбити

криву на частини, то загальне число її перетинів з лініями дорівнює сумі числа перетинів частин з цими лініями. Те ж саме справедливо і для математичного сподівання числа перетинів. Отже, для хороших (точніше, *спрямлюваних*, що мають довжину) кривих математичне сподівання числа перетинів за одне кидання пропорційно довжині кривої. Для знаходження нормування залишилося взяти криву, для якої відповідь очевидна: коло діаметра d (завжди дві точки перетину з лініями).

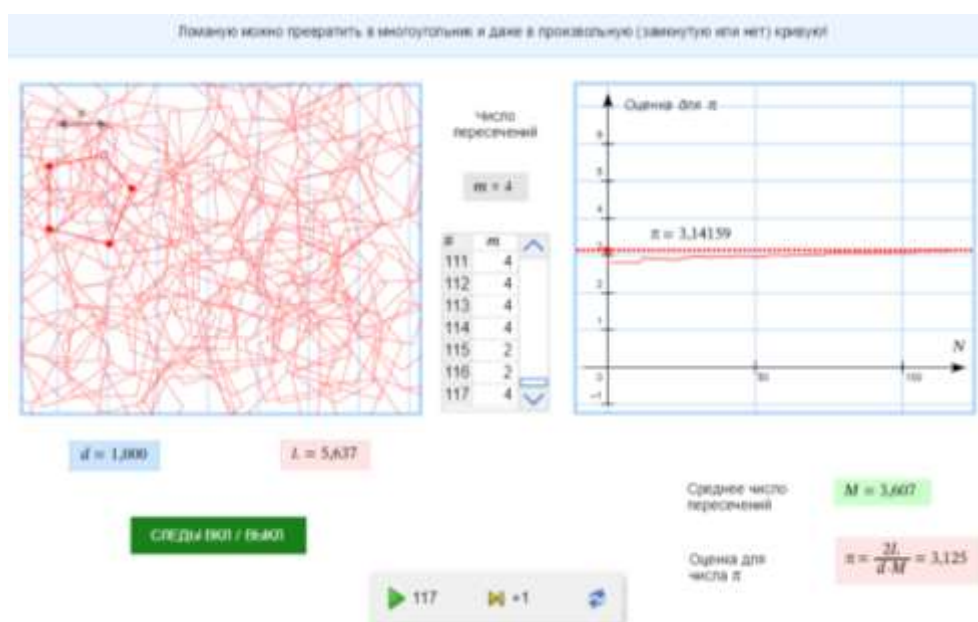


Рис. 2.29. Експериментальне визначення десяткових знаків числа π , якщо замість голки багатокутник

4. Самостійна робота

1. (16) Скількома способами із 30 учнів класу можна вибрати чотирьох для участі в математичній олімпіаді?
2. (16) У класі 10 хлопців і 5 дівчат. Скількома способами можна вибрати одного учня з цього класу?

3. (16) У коробці лежать 12 кольорових олівців, з яких 2 – сині. Яка ймовірність того, що навмання взятий із коробки олівець буде синім?

4. (46) Обчислити:

$$1) \frac{P_{10} - P_9}{9P_8} \quad 2) C_6^2 + C_6^0 \quad 3) \frac{A_{15}^4 + A_{14}^5}{A_{15}^3} \quad 4) C_9^3 + P_3 + A_{10}^2$$

5. (26) Для польоту в космос необхідно сформувати екіпаж, до складу якого входить командир корабля, перший та другий помічники, два бортінженери та один лікар. Командна трійка обирається з 25 льотчиків, бортінженери – з 20 спеціалістів, а лікар – з 8 медиків. Скількома способами можна сформувати екіпаж? (формулу обчислення)

6. (36) Скільки можна скласти із цифр 2; 0; 1; 5; 3; 4:

- 1) різних трицифрових чисел;
- 2) різних трицифрових чисел, якщо цифри в них не повторюються;
- 3) різних трицифрових чисел, що діляться на 5?

V. Підсумок уроку

За своєю простотою цей дослід доступний кожному. Варто кинути голку кілька сотень разів, щоб отримати для π досить близьке значення. Зауважимо, що площиною з нанесеними на ній паралелями повинна бути горизонтальна і падінню голки треба надати випадковий характер, для чого кидати її вгору потрібно так, щоб вона падала майже вертикально на один зі своїх кінців. Зараз, звичайно, ніхто голку не пускає, а число π обчислено вже далеко за 10 трильйонів знаків. Цікаво, що така точність і близько не потрібна для практичних обчислень - за оцінками, досить знати π приблизно до 40-го знака після коми, щоб точно розрахувати обсяг видимого Всесвіту з точністю до одного атома. Так що обчислення π з такою точністю - це, скоріше, гонка за рекордами і змагання суперкомп'ютерів.

Конспект уроку на тему «Парадокс Бертрана»

Мета:

предметна компетентність: сформувати поняття парадокс Бертрана; сформувати вміння статистичного аналізу даних;

спілкування державною мовою: доречно та коректно вживати в мовленні математичну термінологію, чітко, лаконічно та зрозуміло формулювати думку;

уміння вчитися впродовж життя: усвідомлювати власні освітні потреби та цінність нових знань і вмінь;

соціальна та громадянська компетентності: аргументувати та відстоювати свою позицію;

Тип уроку: комбінований.

Обладнання та наочність: підручник «Алгебра та початки аналізу 11 клас» (автори Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Болонський В. Б., Якір М. С.), програма *Математический конструктор*, мультимедійна дошка.

План уроку

I. Організація початку уроку

II. Актуалізація опорних знань

1. Тестування

III. Повідомлення теми і мети уроку

IV. Вивчення нового матеріалу

1. Історична довідка

2. Парадокс Бертрана. Аналітичне розв'язання

3. Розв'язання задачі у програмі «*Математический конструктор*»

V. Підсумок уроку. Рефлексія

Хід уроку

I. Організація початку уроку

II. Актуалізація опорних знань

1. Тестування

1) У сукупних витратах деякої української родини 33% займають витрати на продукти харчування, 25% комунальні платежі, 42% решта витрат. Яка з наведених кругових діаграм відповідає структурі витрат цієї родини?



- 2) У якому випадку подію А називають достовірною?
- $P(A)=0$
 - $P(A)>0$
 - $P(A)>0.99$
 - $P(A)=1$
- 3) Чому дорівнює медіана сукупності даних 2,2,3,4,5,6,13?
- 5
 - 4
 - 3
 - 2
- 4) Монету підкидають доти, доки не випаде герб. Знайдіть таке натуральне значення К, що ймовірність підкинути монету К разів дорівнює $1/8$?
- 1
 - 2
 - 3
 - 4
- 5) Набираючи номер телефону, абонент забув другу цифру номеру. яка ймовірність того, що він з першої спроби набере вірний номер телефону?
- 0.01
 - 0.1

- c) 0.5
- d) 1
- 6) Ймовірність купити браковану пару чобіт деякої деякої відомої фірми складає 0.023. скільки бракованих пар взуття гарантовано містить партія з 1000 пар чобіт цієї фірми
- a) менше 23
- b) більше 23
- c) рівно 23
- d) відповідь дати неможливо
- 7) У коробці лежить 15 кульок: 10 синіх та 5 зелених. яка ймовірність того, що навмання взята з коробки кулька виявиться жовтою?
- a) 1
- b) 0.50
- c) 0
- d) -1
- 8) Картки з числами 1, 2, 3, 5, 7 навмання послідовно викладають у ряд. Яка ймовірність того, що останньою покладуть картку з числом 5?
- a) $1/24$
- b) $1/12$
- c) $1/6$
- d) $1/4$
- 9) Гральний кубик кидають два рази. Яка ймовірність того, що випадуть числа, сума яких дорівнює 8?
- a) $1/36$
- b) $3/36$
- c) $5/36$
- d) $7/36$

10) При підкиданні монети 20 разів поспіль випав герб, Яка ймовірність того , що при наступному підкиданні знову випаде герб?

- a) 0.5
- b) $1/21$
- c) $1/2*21$
- d) 0

11) Футболіст з ймовірністю 0.95 влучає у ворота при виконанні 11метрового штрафного удару . Яка ймовірність того , що при виконанні такого удару футболіст не влучить у ворота?

- a) 0
- b) 0.05
- c) $1/0.95$
- d) $(0.95)*2$

12) Одночасно підкинули три монети, Яка ймовірність того, що рівно на двох із цих монет випаде герб?

- a) $2/3$
- b) $1/8$
- c) $3/8$
- d) $1/3$

III. Повідомлення теми і мети уроку

У 1889 році французький математик Жозеф Луї Франсуа Бертран написав дивну наукову роботу. У ній він запропонував задачу та навів декілька розв'язань. Проте розв'язання приводили науковця до різних відповідей. Цю задачу назвали парадоксом Бертрана. Саме її ми сьогодні і розглянемо.

IV. Вивчення нового матеріалу

I. Історична довідка

Жозеф Луї Франсуа Бертран (фр. Joseph Louis François Bertrand, 11 березня

1822р. – 5 квітня 1900р.) – французький математик, який працював в області теорії чисел, диференціальної геометрії, теорії ймовірності та термодинаміки. Син фізика Олександра Жака Франсуа Бертрана і брат археолога Олександра Бертрана.



Рис.2.30. Портрет Жозефа Бертрана

Був професором Політехнічної школи і Коледжу Франції. Був членом Паризької академії наук і її беззмінним секретарем протягом 26 років.

У 1845 році висунув гіпотезу про існування принаймні одного простого числа між числами n і $n+1$ для будь-кого n . Це твердження, зване постулатом Бертрана, було доведено П. Л. Чебишева в 1850 році.

Бертран також відомий формулюванням парадоксів теорії ймовірності, які стимулювали плідну дискусію з обґрунтування цієї науки. Отримали популярність також парадокси Бертрана в економіці.

В економіці їм була переглянута теорія олігополії, зокрема, модель конкуренції по Курно. Сформульована ним модель конкуренції показує, що в

умовах цінової конкуренції висновки Курно не виконуються. Рівновага в даній моделі досягається на рівні ціни досконалої конкуренції.

2. Парадокс Бертрана. Аналітичне розв'язання

Парадокс Бертрана – це задача в класичному означенні ймовірності. Жозеф Бертран вперше описав її в своїй праці *Calcul des probabilités* (1889) як приклад того, що ймовірність не може бути чітко означена, поки чітко не описаний механізм отримання випадковостей.

У коло з центром у точці O вписано рівносторонній трикутник. Яка ймовірність того, що довжина вибраної навмання хорди кола більша за сторону цього трикутника?

Парадокс стверджує, що ця ймовірність визначається неоднозначно залежно від методу.

Перше розв'язання. Зафіксуємо деякий радіус OM . Оскільки кожна хорда перпендикулярна до деякого радіуса, то, не обмежуючи загальності міркувань, будемо вважати, що навмання обирають хорду, перпендикулярну до радіуса OM . Обрати навмання таку хорду означає обрати навмання всередині відрізка OM точку N і провести через неї хорду XU , перпендикулярну до OM (рис.2.31).

Впишемо в дане коло рівносторонній трикутник ABC так, щоб сторона BC була перпендикулярна до радіуса OM (рис.2.32). Позначимо через K точку перетину відрізків BC і OM . Оскільки $\angle OBK = 30^\circ$, то $\frac{OK}{OB} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$; звідси випливає, що K – середина OM .

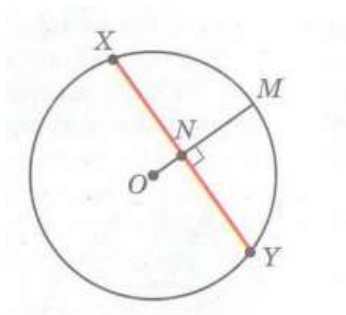


Рис.2.31. Перше розв'язання (1)

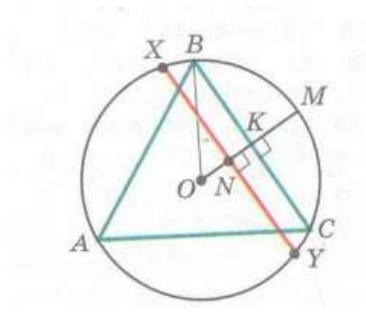


Рис.2.31. Перше розв'язання (2)

Довжина хорди XU буде більшою за сторону BC , якщо точка N належатиме внутрішності відрізка OK . Використовуючи геометричне визначення ймовірності, стверджуємо, що ймовірність обрати хорду XU , більшу за сторону BC , дорівнює відношенню $\frac{OK}{OM}$. Оскільки $\frac{OK}{OM} = \frac{1}{2}$, то така ймовірність дорівнює $\frac{1}{2}$.

Друге розв'язання. Зафіксуємо на колі деяку точку X і діаметрально протилежну до неї точку X_1 (рис. 2.33). Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що навмання обирають хорду з кінцем у точці X . Оберемо навмання на колі іншої кінець хорди – точку Y . Впишемо в коло рівносторонній трикутник XAC .

Зрозуміло, що довжина хорди XU буде більшою за сторону вписаного рівностороннього трикутника, якщо точка Y належатиме дузі AX_1C кола і буде відмінною від точок A, X_1, C (рис. 2.33). Використовуючи геометричне означення ймовірності, стверджуємо, що ймовірність обрати хорду XU , більшу за сторону трикутника XAC , дорівнює відношенню довжини дузі AC до довжини всього кола. Оскільки точки X, A, C розбивають коло на три рівні дуги, то така ймовірність дорівнює $\frac{1}{3}$.

Третє розв'язання. Нехай N – довільна точка внутрішності круга, відмінна від точки O . Побудуємо таку хорду XU , що точка N є її серединою (рис. 2.34). Оскільки трикутник OXU рівнобедрений, то ON є не лише його медіаною, а й

висотою. Отже, для побудови шуканої хорди XU треба через точку N провести хорду, перпендикулярну до ON . Зрозуміло, що така хорда єдина. Таким чином, обрати навмання хорду XU означає обрати в крузі навмання точку N , відмінну від точки O , і провести таку хорду XU , що точка N є її серединою.

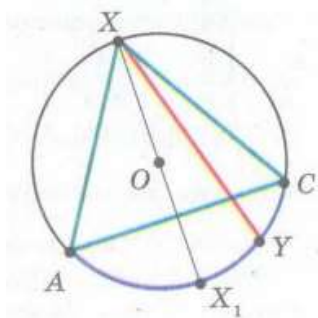


Рис.2.33. Друге розв'язання

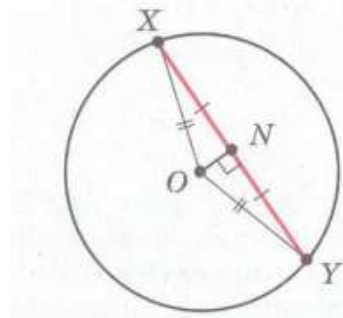


Рис.2.34. Третє розв'язання (1)

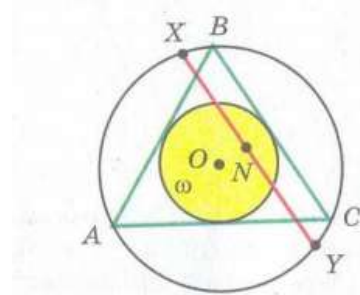


Рис.2.35. Третє розв'язання (2)

Впишемо в коло рівносторонній трикутник ABC і розглянемо вписане коло ω цього трикутника (рис. 2.35). Неважко переконатися, що радіус r вписаного кола ω дорівнює $\frac{R}{2}$, де R – радіус даного в умові задачі кола.

Зрозуміло, що довжина хорди XU буде більшою за сторону трикутника ABC , якщо точка N , відмінна від точки O , належатиме внутрішності круга ω . Використовуючи геометричне означення ймовірності, стверджуємо, що ймовірність обрати хорду XU , більшу за сторону трикутника ABC , дорівнює відношенню площ вписаного та описаного кругів трикутника ABC . Оскільки $\frac{\pi r^2}{\pi R^2} =$

$$\left(\frac{r}{R}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \text{ то така ймовірність дорівнює } \frac{1}{4}.$$

У результаті ми отримали, що ймовірність однієї випадкової події може дорівнювати і $\frac{1}{2}$, і $\frac{1}{3}$, і $\frac{1}{4}$. Яке ж з трьох наведених міркувань є правильним, і де помилка в інших двох?

Відповідь на поставлені запитання надзвичайно несподівана – усі запропоновані розв'язання є *правильними*. Кожне з наведених міркувань коректно розв'язує свою окрему задачу. Власне, ідеться про три різні задачі і відповідно про три коректні розв'язання.

Для того щоб детальніше розібратися в сказаному, нам доведеться краще проаналізувати умови ймовірнісних задач.

Згадаємо, що інколи при словесному описі умови задачі не вдається абсолютно точно уявити, як фактично відбувається випробування, а отже, неможливо коректно описати простір елементарних наслідків, довести їх рівноможливість.

3. Розв'язання задачі із використанням програми *Математический конструктор*

Побудуємо модель, яка демонструє парадокс Бертрана. Розглядається питання: наскільки ймовірним є, що випадково обрана хорда кола буде довшою за сторону вписаного в нього правильного трикутника? (рис. 2.36).

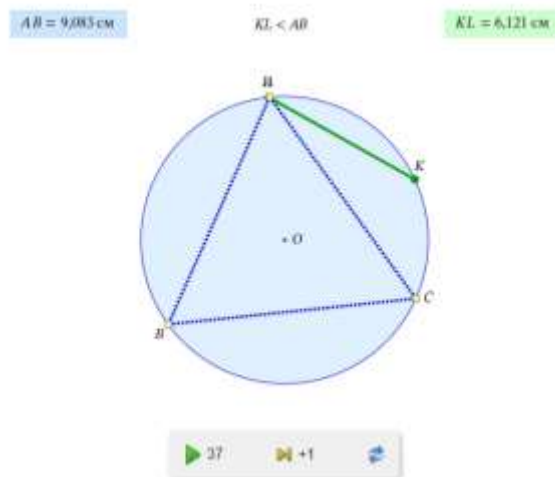


Рис.2.36. Постановка задачі

Випадкова хорда будується методом «випадкових решт»: вибираються дві випадкові точки на колі, які з'єднуються відрізком. обчислюється частота події

«Довжина хорди більше сторони правильного трикутника», будується графік її зміни (рис.2.37).

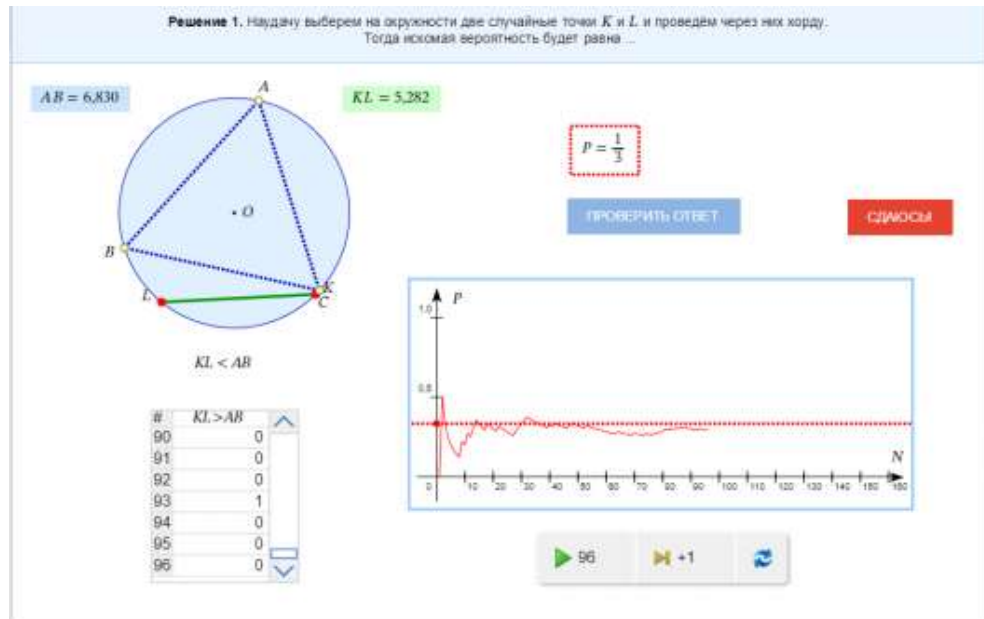


Рис.2.37. Перше розв'язання

Випадкова хорда будується методом «випадкового радіусу»: вибирається випадкова точка на колі, через неї проводиться радіус. На радіусі вибирається випадкова точка, через яку проводиться хорда, перпендикулярна радіусу. Обчислюється частота події «Довжина хорди більше сторони правильного трикутника», будується графік її зміни (рис. 2.38).

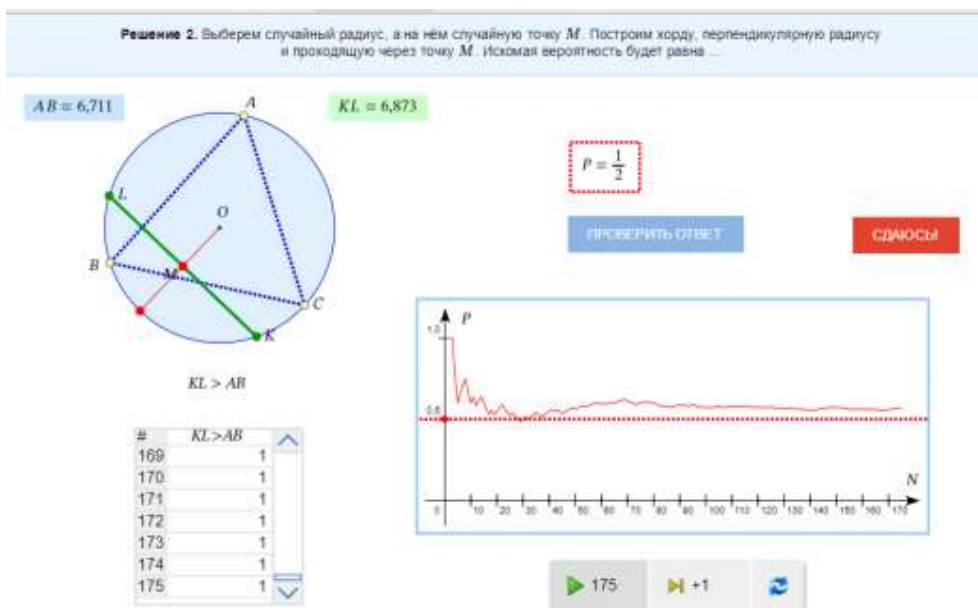


Рис.2.38. Друге розв'язання

Випадкова хорда будується методом «випадкової середини»: вибирається випадкова точка всередині кола і будується хорда з серединою в цій точці. Обчислюється частота події «Довжина хорди більше сторони правильного трикутника», будується графік її зміни (рис. 2.39).

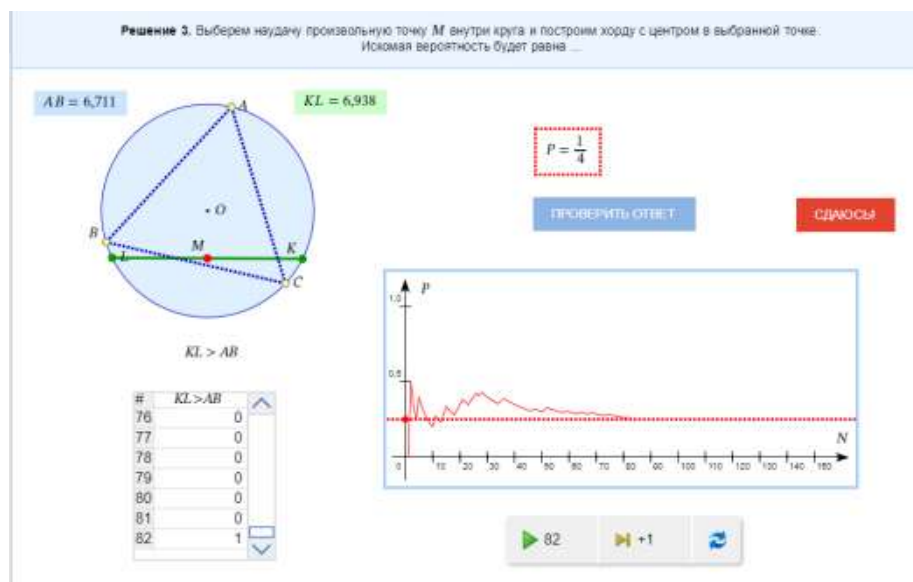


Рис.2.39. Третє розв'язання

V. Підсумок уроку. Рефлексія

Парадокс зайвий раз показує, що поняття «випадковий» завжди потребує уточнення – про який розподіл ймовірностей йде мова. Взагалі, теорія ймовірностей – це «математична наука, що дозволяє по можливостям одних випадкових подій знаходити ймовірності інших випадкових подій, пов'язаних будь-яким чином з першими» (А.Н. Колмогоров).

А ось як задавати ці початкові ймовірності – це вже не її компетенція. Найчастіше розумні припущення про них, засновані на досвідчених даних, дає інша, споріднена теорії ймовірностей дисципліна – математична статистика.

ВИСНОВКИ

Предметом теорії ймовірностей є вивчення вірогідних закономірностей масових однорідних випадкових подій. Знання закономірностей, яким підкоряються масові випадкові події, дозволяє передбачати, як ці події будуть протікати.

Методи теорії ймовірностей широко застосовуються в різних галузях природознавства і техніки. Теорія ймовірностей служить також для обґрунтування математичної і прикладної статистики, що у свою чергу використовується при плануванні й організації виробництва, при аналізі технологічних процесів, попереджувальному і приймальному контролю якості продукції і для багатьох інших цілей.

Стохастична грамотність є необхідною складовою загальнокультурної, загальноосвітньої підготовки сучасної людини. Стохастика має пронизувати шкільний курс математики з початкової школи до випускних класів. Адже йдеться не про вивчення кількох понять і фактів, а про формування окремого типу мислення. У дослідженнях психологів показано, що людина за природою погано пристосована до ймовірнісної оцінки, до усвідомлення і правильної інтерпретації ймовірнісно-статистичної інформації. Для цього потрібна систематична і цілеспрямована робота. Якість знань учнів перш за все залежить від рівня математичної та методичної підготовки вчителя, особливо у умовах складності візуалізації стохастичної змістової лінії.

Сьогодні учителі математики у своєму арсеналі мають достатню кількість потужних комп'ютерних засобів, але вивчення питання щодо їх методичного супроводу і особливостей застосування є і досі актуальним через постійне оновлення програмного забезпечення, вдосконалення комп'ютерного інструментарію та потужностей інформаційних систем. Проаналізувавши закордонний та вітчизняний досвід і зробивши власні припущення, нами виділено

саме програму динамічної математики *Математический конструктор* з позиції її переваг щодо візуалізації навчального матеріалу стохастичної змістової лінії.

Зазначені ідеї реалізовано у авторських розроблених конспектах уроків за темами «Задача Бюффона», «Парадокс Бертрана» із використанням програми *Математический конструктор* для класів з поглибленим вивченням математики, матеріали яких також можна використовувати для факультативних занять.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. «1С:Математический конструктор» – программная среда для создания интерактивных математических моделей [Электронный ресурс]- Режим доступа: <http://obr.1c.ru/mathkit>.
2. Dottori D., Knill G., Seumour J. Applied mathematics for today: senior si metric edition.- McGraw –Hill Ryerson Limited, 1977. – 486 с.
3. Hanwell A., P.Bye M., J.Grifiths Th.. Holt mathetatics 4. – Holt, Rinechart and Winston of Canada, Limited, 1980. – 470 с.
4. Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К. Теорія ймовірностей та математична статистика. – Київ : ЦУЛ, 2002. – 448 с.
5. Беспасова Л.О., Селютин В.Д. Об изучении вероятностей и статистики в школе // Математика в школе. – № 6. – 1991. – С. 24-32.
6. Бобик О.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: підручник / О.І. Бобик, Г.І. Берегова, Б.І. Копитко. – К.: ВД «Професіонал», 2007. – 560 с.
7. Бродский Я.С Комбинаторика без формул. – Донецк: ДонНУ, 2002. – 36 с.
8. Бродский Я.С. Знакомство с вероятностью и статистикой. Пособие для учащихся. – Донецк: ДонНУ, 2003. – 32 с.
9. Бунимович Е. А. Вероятностно-статистическая линия в базовом школьном курсе математики // Математика в школе. – 2002. – № 4. – С. 15-25.
10. Вивальнюк Л.М. Посібник для шк. та кл. з поглибл. вивченням математики / Л.М. Вивальнюк, М.М. Мурач, О.І. Соколенко та ін. – К.: Освіта. – 1998.– 301 с.
11. Волков Ю. І. Початки стохастики: Навчальний посібник / Ю. І. Волков, Н.М. Войналович. – Кіровоград, 2008. – 168 с.
12. Волощенко А.Б. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навч.-метод. посібник [для самот. вивч. дисц.] / Київ: КНЕУ, 2003. – 256 с.

13. Геделевич Є. В. Методичні особливості вивчення теорії ймовірностей та математичної статистики в курсі шкільної математики // Збірник наукових праць Хмельницького інституту соціальних технологій Університету «Україна» - 2016. – Вип. 12.
14. Глеман М., Варга Т. Вероятность в играх и развлечениях: Элементы теории вероятностей в курсе средней школы Пособие для учителя // Пер. с фр. А.К.Звонкина. – М.: Просвещение, 1979. – 176 с.
15. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие для вузов / В.Е. Гмурман. – Москва: Высш. шк., 2003. – 479с.
16. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учебн. Пособ. [для студ. вузов] / В.Е. Гмурман. – Москва: Высш. шк., 2004. – 404 с.
17. Горошко Ю.В. Розв'язування задач з математичної статистики з використанням програми Gran1 // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. - 2003. - Вип. 7. - Режим доступу: <https://sj.npu.edu.ua/index.php/kosn/article/view/601>.
18. Грабарь М.И., Краснянская К.А. Применение математической статистики в педагогических исследованиях. – Москва – 1977. – 346 с.
19. Друшляк М.Г., Семеніхіна О.В. Комп'ютерно орієнтовані системи навчання математики: Навчальний посібник. Суми: СумДПУ ім. А.С. Макаренка, 2017. – 144 с.
20. Дубровский В. Н., Булычев В. А. Математика 5-11 классы. Методические рекомендации по использованию МК в учебном процессе. – Москва: «1С-Публишинг», 2019. – 427с.
21. Єжов С.М. Теорія ймовірностей, математична статистика і випадкові процеси: Навчальний посібник. – Київ: ВПЦ "Київський університет", 2001. – 140 с.

22. Жалдак М. І. Стохастика. Посібник для вчителів / М. І. Жалдак, І. М. Біляй. – К. : НПУ імені М.П. Драгоманова, 2013. – 304 с
23. Жалдак М.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: підручник [для студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів]. – Полтава : "Довкілля-К", 2009. – 500 с.
24. Жалдак М.І., Горошко Ю.В. Комп'ютер і елементи стохастики у шкільному курсі математики / Комп'ютер у школі та сім'ї. – 1998. – №3. – С.16-20.
25. Жалдак М.І., Горошко Ю.В. Комп'ютер і елементи стохастики у шкільному курсі математики / Комп'ютер у школі та сім'ї. – 1998. – №4. – С.22-27.
26. Жалдак М.І., Кузьміна Н.М., Михалін Г.О.. Збірник задач і вправ з теорії ймовірностей і математичної [для студ. ф.-м. спец. педаг. універс.] /– Полтава. «Довкілля-К», 2010. – 728 с.
27. Істер О.С. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів – Київ : Генеза, 2017. – 264 с.
28. Істер О.С. Математика : (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти. — Київ : Генеза, 2019. – 304 с.
29. Кармелюк Г. І. Теорія ймовірностей та математична статистика. Посібник з розв'язування задач: Навч. посібник. – Київ.: Центр учбової літератури, 2007 – 576 с.
30. Кушлик-Дивульська О.І , Кушлик Б.Р. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт (комп'ютерного практикуму) з дисципліни «Теорія ймовірностей і математична статистика». – К.:НТУУ «КПІ». – 2016. – С.8-9.
31. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б. та ін Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. –Х. : Гімназія, 2019. — 208 с.

32. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підруч. для 11 кл. з поглибленим вивченням математики : у 2 ч. – Харків: Гімназія, 2011. – Ч. 2. – 272 с.

33. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б. та інші. Алгебра і початки аналізу: профільний рівень: підручник для 11-го кл. закладів загальної середньої освіти. – Харків : Гімназія, 2019. – 352 с.

34. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. – Харків : Гімназія, 2017. – 416 с.

35. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. – Харків: Гімназія, 2017. – 272 с.

36. Навчальна програма для 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів. – Режим доступу: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas>.

37. Навчальна програма для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів. – Режим доступу: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-5-9-klas/matematika-algebra-geometriya.pdf>

38. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів рівень стандарту. – Режим доступу: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika.-riven-standartu.pdf>

39. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) загальноосвітніх навчальних закладів профільний рівень. – Режим доступу: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-poglibl-rivenfinal.pdf>.

40. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів профільний. – Режим доступу: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-profilnij-rivenfinal.pdf>

41. Проект державного стандарту базової середньої освіти. – Режим доступу: <https://mon.gov.ua/ua/news/ministerstvo-osviti-i-nauki-ukrayini-proponuye-dlya-gromadskogo-obgovorennya-proyekt-derzhavnogo-standartu-bazovoyi-serednoyi-osviti>

42. Савельева Р. Ю. Основы теории вероятностей и математической статистики [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://открытыйурок.рф/статьи/526665/> (дата обращения – 03.11.2020)

43. Селютин В. Д. Компоненты методической готовности учителя к обучению детей стохастике // Школьные технологии. – 2004. – № 2. – С. 10-15.

44. Селютин В. Д. О формировании первоначальных стохастических представлений // Математика в школе. – 2003. – № 3. – С. 32-44.

45. Семеніхіна О.В., Друшляк М.Г. Візуалізація експериментальних випробувань на основі випадкових подій у середовищі GeoGebra 5.0// Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 3. Фізика і математика у вищій і середній школі. – 2014. – № 14. – С. 94-103.

46. Скороход А.В. Особливий характер теорії ймовірностей в математичних науках // У світі математики. – 1997. – Т. 3, Вип. 2. – С. 24-43.

47. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник для студентів математичних спеціальностей педагогічних вузів. – Київ.,2000. – 512с.
48. Тарасенкова Н. А., Богатирьова І. М., Коломієць О. М., Сердюк З. О. Алгебра : підруч. для 9 класу загальноосвіт. навч. закл. – К. : УОВЦ «Оріон», 2017. – 272 с.
49. Тичинська Л. М. Теорія ймовірностей. Ч. 1. Історичні екскурси та основні теоретичні відомості : навчальний посібник. – Вінниця : ВНТУ, 2010. – 112 с.
50. Тичинська Л.М. Теорія ймовірностей [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://posibnyky.vntu.edu.ua/t_i/z.htm
51. Фройденталь Г. Математика как педагогическая задача. Ч. II. Пособие для учителей /Под ред. Н. Я. Виленкина; Сокр. пер. с нем. А. Я. Халамайзера. – М.: Просвещение, 1983. – 192 с.
52. Хоминська О. Аналіз комп'ютерного інструментарію програм динамічної математики (теорія ймовірностей та математична статистика) // Студентська звітна конференція. – 2020. – Вип.14. – С. 69-83.
53. Хоминська О. Візуалізація результатів випадкового випробування із використанням програми «Математичний конструктор» // Всеукраїнська науково-методична інтернет-конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-2020 Форум молодих дослідників». – 12 листопада 2020 р. – м. Суми. – 2020. – С.
54. Хоминська О. Комп'ютерний інструментарій програми математический конструктор для підтримки вивчення ймовірно-стохастичної лінії шкільного курсу математики // Міжнародна науково-практична конференція «Наукова діяльність як шлях формування професійних компетентностей майбутнього фахівця». – 5-6 грудня 2019 р. – м. Суми. – 2019. – С. 31-32.

55. Чибисов Д.М., Пагурова В.И. Задачи по математической статистике. – Издво Моск. Ун-та, 1990. – 171 с.
56. Шефтель З. Г. Теорія ймовірностей / З. Г. Шефтель. – К.: Вища шк., 1977. – 192 с.

