Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Скороход Г.І. Пошук методу розв'язання навчальної задачі на базі її типу// Фізико-математична освіта : науковий журнал. – 2017. – Випуск 4(14). – С. 289-292.

Skorokhod Georgiy. Search For A Solution To A Learning Problem Based On Its Type // Physical and Mathematical Education : scientific journal. – 2017. – Issue 4(14). – P. 289-292.

УДК 372.851

Г.І. Скороход
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Україна
gskorokhod@yahoo.com

ПОШУК МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ НАВЧАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ НА БАЗІ ЇЇ ТИПУ

Анотація. *У роботі розглядається один тип задач, а також пропонується структура база даних для допомоги у розв'язанні навчальних задач, основана на визначенні типу задачі, та методика користування цією базою.*

Тип задач: дані два різних представлення одного й того самого об'єкту, одне з представлень (або обидва) містить невідомий елемент, який і треба визначити.

Методи розв'язання такої задач такого типу:

метод 1. Звести одну з форм до іншої і шляхом зіставлення визначити невідомий елемент,

метод 2. Визначити властивість тієї форми запису числа, яка не має невідомого елементу, і перенести цю властивість на другу форму. На базі того, що друга форма має таку властивість, визначити невідомий елемент,

метод 3. Виходячи з того, що рівність $f(a)=g(a;\ A,B)$ *є тотожністю одержати при будь-яких обраних значеннях* a_1, a_2 *систему рівнянь водносно A та B та розв'язати її.*

Розглянуті кілька прикладів задач такого типу та кілька питань, пов'язаних з таким типом задач та методами їх розв'язання.

Для допомоги учневі у пошуку методу розв'язання задачі пропонується створити програмне забезпечення у вигляді бази даних, яка включає наступні взаємопов'язані поля: 1) типи задач, 2) методи розв'язання задач кожного типу, 3) база знань для задач даного типу, 4) приклади задач, розв'язаних кожним методом, 5) математичні об'єкти і властивості кожного об'єкта, 6) особливості постановок задач, які використовуються в методах їх розв'язання.

Запропонована методика використання такої бази даних.

Ключові слова: *тип задачі, метод розв'язання задачі, база даних, форми представлення об'єкту, тотожність.*

Навчання шляхом розв'язання задач є основним методом в математиці, і не тільки в ній. Фактично кожен навчальний курс націлений на засвоєння бази знань (понять науки, її об'єктів і їх властивостей) і на їх застосування до розв'язання задач.

На наш погляд, первинним при розв'язанні навчальних задач є тип задачі. Він поєднує в собі тип об'єкта задачі і вимогу до цього об'єкта та має узагальнювати постановку задачі.

У статті [1] виділені 22 типа математичних задач, наведені методи їх розв'язання та приклади. У цій роботі розглядається ще один тип задач, а далі пропонується структура база даних для допомоги у розв'язанні навчальних задач та проста методика користування цією базою.

Викладання типу почнемо з розв'язання конкретних задач, а потім запропонуємо формулювання загального типа цих задач та методів їх розв'язання. Саме таким шляхом від частинного до узагальнення краще і навчати учнів.

Задача 1. У рівності $3^5 = \underline{2\ y\ 3}$ визначити, яка цифра має стояти замість букви *y*.

Суть задачі в тому, що: 1) одне й те саме число представлено двома різними способами: у формі степеню та у десятковій позиційній системі, 2) одна з форм містить невідомий елемент, який треба визначити.

Розглянемо кілька методів розв’язання такої задачі.

Метод 1 (перетворити форму представлення). Обчислити, що $3^5 = 243$ (тобто звести форму без невідомої до іншої) і шляхом зіставлення визначити, що y=4. Скоріш за все, у більшості випадків це зробити важко.

Метод 2 (використати властивості об’єкту). Визначаємо властивість тієї форми запису числа, яка не має невідомого елементу: 3^5 ділиться на 3. Таку ж властивість потрібна мати і друга форма. Признак подільності на 3 числа, записаного у десятковій позиційній системі, складається в тому, що сума його цифр ділиться на 3. Таким чином, $2+y+3=5+y$ має ділитися на 3. Це можливо, коли y=1 або 4. Очевидно, що поставлена задача має єдиний розв’язок, тобто задача ще не розв’язана, і її не можна розв’язати перебором одержаних варіантів.

Тоді шукаємо іншу властивість форми 3^5: це число ділиться на 9. Признак подільності на 9 числа, записаного у десятковій позиційній системі, складається в тому, що сума його цифр ділиться на 9. Число $5+y$ ділиться на 9 лише при y= 4. Єдиний розв’язок одержано.

Очевидно, що коли б задача була поставлена відносно, наприклад, числа 3^{17}, то застосувати метод 2 було б суттєво легше і красивіше.

Задача 2. Розв’язати рівняння

$a^{2x-2}- a^{2x-3}=(a-1)^{x-1/2}$, a – будь-яке натуральне число.

Розв’язання. За методом 1 зводимо форму лівої частини до форми правої і порівнюємо однакові елементи. Одержуємо два рівняння відносно x, кожне з яких має розв’язок x =3/2:

$$a^{2x-3}(a-1)=(a-1)^{x-1/2},\ 2x-3=0,\ x-1/2=1,\ x=3/2.$$

На відміну від попередньої задачі, у цьому рівнянні невідома присутня в обох частинах рівняння, і саме в такій формі зручно було їх порівнювати.

Задача 3 (узагальнення задачі 2). Визначити значення параметрів А, В, за яких рівність $f(a)=g(a;\ A,B)$ є тотожністю при будь-якому a.

Метод 3 (для розв’язання задачі 3). Розв’язати систему рівнянь водносно А та В:

$$f(a_1)=g(a_1;\ A,B),$$
$$f(a_2)=g(a_2;\ A,B),$$

при будь-яких обраних значеннях a_1, a_2.

Приклад задачі 3 наведений нижче.

Задача 4. Визначити n, якщо $n!=2^{15}*3^6*5^3*7^2*11*13$.

Розв’язання. За методом 2 порівнюємо властивості правої та лівої частин і робимо висновки відносно n. Права частина містить такі прості числа, як 11 та 13, але не містить 17. Тоді $13 \le n \le 16$. За кількістю множників 2 у $n!$ встановлюємо, що $n = 16$.

Сформулюємо узагальнений тип таких задач.

Тип 23: дані два різних представлення одного й того самого об’єкту, одне з представлень (або обидва) містить невідомий елемент, який і треба визначити.

Узагальнимо тепер методи розв’язання такої задач такого типу.

Метод 1. Звести одну з форм до іншої і шляхом зіставлення визначити невідомий елемент.

Метод 2. Визначити властивість тієї форми запису числа, яка не має невідомого елементу, і перенести цю властивість на другу форму. На базі того, що друга форма має таку властивість, визначити невідомий елемент.

Метод 3. Виходячи з того, що рівність $f(a)=g(a;\ A,B)$ є тотожністю одержати при будь-яких обраних значеннях a_1, a_2 систему рівнянь водносно А та В та розв’язати її.

Розглянемо кілька питань, пов’язаних з таким типом задач та методами їх розв’язання:

1) під тип 23 можна підвести і задачу розв’язання рівняння $f(x)=0$: зліва форма представлення нуля, яка містить невідомий елемент, зліва – сам нуль. Взагалі, оскільки рівняння $f(x)=g(x)$ відображає той факт, що одне й те саме число представлено у двох різних формах $f(x)$ та $g(x)$, то задача розв’язання рівняння є частинним випадком задачі типу 23, а метод 1, навпаки, є частинним випадком методу рівносильних перетворень рівняння. Наприклад, застосовуючи метод 1 до рівняння $2x+3=5$, праву частину можна привести до форми лівої: $2x+3=2+3$, далі зробити вивід, що $2x=2$, $x=1$. Але взагалі рівняння розв’язуються не таким штучним прийомом, а за правилами рівносильних перетворень. Підкреслимо, що перетворення об’єкту є одним з головних методів розв’язання як рівнянь, так і задач типу 23 та багатьох інших типів [2].

2) задачу 1 вдалося розв’язати методом 1 тому, що ми знаємо, як форму 3^5 звести до форми 243. А в задачі 2 функції, що стоять в обох частинах рівняння, відносяться до одного класу, тому вдалося одну з них привести до виду іншої. Аналогічно рівняння $f(x)=g(x)$ ми можемо розв’язати, коли $f(x)$ та $g(x)$ – функції одного класу, наприклад, многочлени, і то, не завжди. Але рівняння $e^x=x+1$ ми можемо розв’язати тільки наближено або замінивши за формулою Тейлора функцію e^x многочленом, тобто функцією того ж класу, що і функція $x+1$,

або замінивши аналітичні форми функцій двох різних класів представленнями цих функцій в одній і тій самій графічній формі.

3) метод невизначених коефіцієнтів при розв'язанні різних задач зводить задачу до задачі типу 23; його можна трактувати як частинний випадок методу 1, тільки невідомих елементів (коефіцієнтів) вже декілька. Наприклад, якщо на базі тих фактів, що сума 1+2+…+ n є многочленом другого ступеня, а сума $1^2+2^2+\ldots+n^2$ є многочленом третього ступеня [3], сформулювати гіпотезу, що сума $1^3+2^3+\ldots+n^3$ є многочленом четвертого ступеня, тобто,

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn + E, \qquad (1)$$

то задача обчислення коефіцієнтів A, B, C, D, E є задачею типу 23, а їхні значення можна одержати за методом 3 із системи лінійних рівнянь, сформованої з (1) при n = 1, 2, 3, 4, 5.

Перехід в рівності (1) від лівої частини до правої можна трактувати також як задачу перетворення форми представлення об'єкту, а саме, представити суму в лівій частині (1) у формі многочлена. Цей тип задач на перетворення об'єкту розглядався у статтях [1, 2] при різних варіантах, коли два з трьох елементів Н, П, К постановки задачі відомі, а третій треба знайти (Н, К – початковий та кінцевий стани об'єкту відповідно, П – послідовність операцій перетворення Н в К). З точки зору перетворення у рівнянні (1) відомий початковий стан (ліва частина рівняння), задана структура кінцевого стану з невідомими елементами A, B, C, D, E, і треба визначити ці коефіцієнти.

Відмітимо, що така знайома за формулюванням ще з початкової школи задача як «Спростити вираз» є задачею на перетворення форми представлення об'єкту, але, на відміну від варіантів, розглянутих в [1, 2], в ній заданим є тільки початковий стан, відома також множина правил, за якими можна виконувати елементарні перетворення, але невідомі ні послідовність таких елементарних перетворень, ні кінцевий стан. Такі ж властивості мають задачі, які постійно встають у науковій, педагогічній діяльності та в повсякденному житті. Якщо завдання «Спростити вираз» подавати як тренування у виборі з заданої множини дій такої послідовності дій, яка дозволить одержати об'єкт, що має кращі властивості (у даному разі, більш простий), то для багатьох учнів це підвищило б мотивацію виконання такого завдання та включило б задану конкретну задачу в більш широкий клас задач як частинний випадок.

Навчати узагальненню об'єкта, включенню його як елемент в множину об'єктів на базі знаходження спільних властивостей цих об'єктів – важлива педагогічна задача, бо узагальнення – один з основних прийомів мислення.

Між тим, як показує наш досвід, навіть більшість студентів (а не тільки школярів) не підводить нестандартну задачу під загальний тип задач і не шукає метод розв'язання серед методів цього типу, а починає розв'язання з методу проб та помилок. І навіть коли завдання підвести дану математичну чи логічну задачу під тип ставиться прямо, для студентів-математиків зробити це виявляється непросто, бо вони не треновані у такій діяльності.

У напрямку допомоги учневі у пошуку методу розв'язання задачі перспективним є, на наш погляд, виділення якомога більшого числа типів задач і методів розв'язання задач кожного типу [4] та створення програмного забезпечення у вигляді бази даних, яка включає наступні взаємопов'язані поля: 1) типи задач, 2) методи розв'язання задач кожного типу, 3) база знань для задач даного типу, 4) приклади задач, розв'язаних кожним методом, 5) математичні об'єкти і властивості кожного об'єкта, 6) особливості постановок задач, які використовуються в методах їх розв'язання.

Ці поля мають бути пов'язані таким чином, щоб можна було здійснювати, наприклад, таку методику (послідовність дій) розв'язання нестандартної навчальної математичної задачі:

1. Визначте тип задачі з переліку типів математичних задач.
2. Перегляньте методи розв'язання задач даного типу.
3. Виберіть метод розв'язання.
4. Спробуйте застосувати цей метод.
5. Якщо розв'язати задачу не вдалося, перегляньте базу знань для задач даного типу. Можливо, Ви побачите відповідну формулу.
6. Проаналізуйте приклади задач даного типу, які розв'язані обраним методом. Це покаже Вам особливості застосування цього методу для різних задач даного типу, і, можливо, підкаже ідею розв'язання.
7. Якщо розв'язати задачу не вдалося, виберіть інший метод розв'язання задач даного типу і перейдіть до п.4, або до п.8.
8. Уточніть тип задачі і перейдіть до п.2. Якщо тип задачі визначити не вдалося, перейдіть до п.9.
9. Визначте особливості задачі. Програма покаже приклади задач, в умови яких є такий же набір особливостей, а також тип, метод і хід розв'язання кожної задачі. Проаналізуйте ці приклади, можливо, це підкаже Вам ідею розв'язання.
10. Перейдіть до п.7 або п.3.

Як видно з опису, методика пропонує почати розв'язання з визначення типу задачі і надає перелік типів і пов'язаних з ними методів розв'язання. Але якщо визначити тип не вдається, успішним може виявитися пошук методу на основі особливостей задачі, для цього за ключовими словами програма надасть в розпорядження користувача відповідну базу знань і набір розв'язаних задач з подібними особливостями.

Список використаних джерел

1. Скороход Г.И. Некоторые типы математических задач и методы их решения. [Текст] / Г.И. Скороход // Фізико-математична освіта : науковий журнал — 2016. – Випуск 4(10). – С. 126-130.
2. Скороход Г.І. Перетворення об'єктів як тип та метод розв'язання текстових задач. [Текст] / Г.І. Скороход // Педагогічні науки: збірник наукових праць. Випуск LXXYI Том1. – Херсон. Видавничий дім «Гельветика» — 2017. С. 117-121.
3. Пойя, Д. Математическое открытие [Текст] / Д. Пойя. – М.: Наука, 1970. – 452 с.
4. Скороход Г.І. Основні методи розв'язання нестандартних математичних задач. [Текст] / Г.І. Скороход // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: збірник наукових праць. Випуск Х. – Кривий Ріг. Видавничий відділ НМетАУ, 2012. – Т. 1: Теорія та методика навчання математики. С. 228-234.

References

1. Skorokhod G.I. Some types of mathematical problems and methods of their solutions / G.I. Skorokhod // Fizyko-matematychna osvita: naukovyy zhurnal - 2016. - Vypusk 4 (10). - S. 126-130.
2. Skorokhod G.I. Transformation of objects as a tipe and a metod of solving text problems / G.I. Skorokhod // Pedahohichni nauky: zbirnyk naukovykh prats'. Vypusk LXXYI Tom1. - Kherson. Vydavnychyy dim «Hel'vetyka» - 2017. S. 117-121.
3. Polya, G. Mathematscal discovery / G. Polya. – M .: Nauka, 1970. – 452 s.
4. Skorokhod G.I. Basic methods for solving non-standard mathematical problems / G.I. Skorokhod // Teoriya ta metodyka navchannya matematyky, fizyky, informatyky: zbirnyk naukovykh prats'. Vypusk X. – Kryvyy Rih. Vydavnychyy viddil NMetAU, 2012. – T. 1: Teoriya ta metodyka navchannya matematyky. S. 228-234.

SEARCH FOR A SOLUTION TO A LEARNING PROBLEM BASED ON ITS TYPE

Georgiy Skorokhod

Oles Honchar Dnieper National University, Ukraine

Abstract. *This paper considers one type of task, and proposes the structure of a database to aid in solving educational problems based on the definition of the type of task and method of use of this database.*

Type of problems: given two different views of the same object, one of the views (or both) includes an unknown element, which must be determined.

Methods of solving such a problem of this type:

method 1. To reduce one form to the other and by matching to identify the unknown element

method 2. To define a property of the form record number, has no unknown elements, and to transfer this property on the second form. On the basis that the second form has the ability to identify the unknown element

method 3. Based on the fact that the equality f (a) = g (a, A, b) is the identity to any selected values of a1, a2 the system of equations odnosno A and b and solve it.

Several examples of such tasks and some of the issues associated with this type of tasks and methods of their solution.

To assist the student in finding a method of solving the problem is proposed to create software in the form of a database that includes the following interrelated fields: 1) the types of tasks 2) problem-solving methods of each type, 3) knowledge base for problems of this type 4) examples of tasks solved by each method, 5) mathematical objects and properties of each object, 6) the features of the formulation used in the methods of their solution.

The technique of use of such a database.

Key words*: type of problem, method of problem solving, database, form of representation of an object, identity.*