І.А. Сверчевська
кандидат педагогічних наук, доцент
Житомирський державний університет імені Івана Франка, м. Житомир, Україна
iryna_sver@ukr.net

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ В ІСТОРИЧНИХ ЗАДАЧАХ

Сучасне суспільство вимагає творчих людей з критичним мисленням. Значна роль у розв'язанні поставленого завдання належить навчанню математиці. Важливим навчальним ресурсом при цьому є розв'язування математичних задач. Ми виокремлюємо визначні історичні задачі. Це задачі, які збережені історією та розв'язувалися вченими в різні періоди розвитку математики. Для сучасної людини одним з найважливіших понять є поняття математичної моделі, оскільки за її допомогою описується зміст математичної науки. Ми виділяємо ті математичні моделі, які використовуються в курсі елементарної математики, алгебри, теорії чисел, математичного аналізу. Наведемо приклади.

Задача ал-Кархі (помер між 1019 – 1029)

На початку XI ст. з'явилися праці багдадського математика ал-Караджи (Ал-Кархі). У праці з алгебри "Аль-Фахрі" він зібрав все відоме його попередниками, а також довів нові власні теорії та задачі, використовуючи "Арифметику" Діофанта [1, с. 214].

Задача. На двох протилежних берегах річки стоять дві пальми. Висота однієї 20 ліктів, другої – 30. Ширина річки 50 ліктів. На верхівці кожної з пальм сидить по пташці. Обидві пташки бачать в річці рибу і летять по прямій до неї, одночасно досягають поверхні води в точці на прямій, що з'єднує корені пальм. Визначити довжину шляхів, які пролетіли птахи і місце їх зустрічі [5, с. 156].

Нехай x – відстань від вищої пальми до місця зустрічі. За умовою задачі відстані, що пролетіли птахи, рівні, тому $x^2+30^2=(50-x)^2+20^2$. Тобто математичною моделлю задачі є квадратне рівняння $x^2+900=2500-100x+x^2+400$, x=20. Відстані, що пролетіли птахи дорівнюють $\sqrt{30^2+20^2}=10\sqrt{13}$.

Задачі Бега Едіна (1547 – 1622)

Бега Еддін (Бехаеддін) (1547 – 1622) – іранський математик і поет, автор твору "Сутність мистецтв числення". Це зібрання правил з арифметики, алгебри, геометрії. До XIX ст. переклад цієї книги використовується як посібник при вивченні математики в школах Індії, Ірану, Туреччини. В X розділі наведено деякі задачі, що зводяться до систем рівнянь [3, с. 459].

Задача 1. *Дехто запитав, скільки пройшло часу ночі? Йому відповіли: одна третя минулого часу дорівнює одній четвертій часу, що залишився. Запитується, скільки часу ночі пройшло і скільки ще залишилося?* [3, с. 673]

Задача приводить до розв'язування системи:

$$\begin{cases} x+y=12 \\ \frac{1}{3}x=\frac{1}{4}y \end{cases}$$, де x – час, що пройшов, y – час, що залишився.

Розв'язання автора.

З першого рівняння маємо: $\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y=3$. Враховуючи друге рівняння, одержимо: $x=5\frac{1}{7}$, $y=6\frac{6}{7}$.

Відповідь: пройшло годин $x=5\frac{1}{7}$, залишилося $y=6\frac{6}{7}$ годин.

Задача 2. *Заїду обіцяно 10 без квадратного кореня Амура, а Амуру обіцяно 4 без квадратного кореня частини Заїда" Що обіцяно?* [3, с. 675]

Якщо частина Заїда x^2, Амура – y^2, то задача приводить до системи рівнянь: $\begin{cases} x^2=10-y \\ y^2=4-x \end{cases}$.

Розв'язавши її методом підстановки $y=10-x^2$, прийдемо до рівняння: $x^4-20x^2+x+96=0$. Шукаємо його корені серед дільників вільного члена. Маємо, $x=3$ – корінь рівняння, тоді ліва частина розкладається на множники: $(x-3)(x^3+3x^2-11x-32)=0$. Рівняння $x^3+3x^2-11x-32=0$ має три дійсні корені, але вони ірраціональні. Отже, умову задовольняє $x=3$, $y=10-x^2=10-9=1$.

Відповідь: частина Заїда – 9, Амура – 1.

Задача Фібоначчі (1180 – 1250)

Леонардо Пізанський – італійський математик, відомий як Фібоначчі (син Боначчо), народився бл. 1180 р. в Пізі. Життя його мало відомо. Він першим познайомив європейських вчених з алгеброю і десятковою позиційною системою числення. В 1202 р. Фібоначчі написав трактат «Книга абака», що містив арифметичні й алгебраїчні відомості, які він одержав, подорожуючи країнами Європи та Сходу. У книзі містяться також власні розробки, зокрема задача, що приводить до «ряду Фібоначчі» [1, с. 289].

Задача. Скільки пар кроликів протягом року народиться від однієї пари, якщо кожного місяця одна пара народжує одну пару, яка через місяць народжує нову пару?[4, с. 21]

Розв'язання Фібоначчі.

На другий місяць буде 1+1=2 пари, на третій місяць 2+1=3, на четвертий 3+2=5, тому що з трьох пар народить тільки дві. На п'ятий місяць тільки три пари народять, тому 5+3=8 і т. д. Тобто число пар кролів у (n+1)-му місяці u_{n+1} дорівнює числу пар кролів у попередньому місяці u_n плюс число пар u_{n-1}, що народилися, тобто ті, які були позаминулого місяця (тому що тільки вони народжують). Маємо $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$, $n>1$, $u_1=1$, $u_2=2$. Отже, отримали послідовність: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, …

Відповідь: через рік буде 377 пар кролів.

Задача Лейбніца (1646 – 1716)

Готфрід Вільгельм Лейбніц – німецький математик, фізик, філософ. Діапазон його наукової діяльності був дуже великий. Він одночасно з Ньютоном завершив створення диференціального та інтегрального числення [1, с. 285].

Задача. Знайти криву, в якої піднормаль у будь-якій точці обернено пропорційна ординаті цієї точки [2, с. 153].

Якщо (x, y) – координати довільної точки, l – довжина піднормалі, за умовою $l=\frac{k}{y}$, то математичною моделлю цієї задачі буде диференціальне рівняння $y^2\cdot y'=k$. Шукана крива $y^3=\lambda x+c$.

Побудову математичних моделей до відомих історичних задач доцільно застосовувати при вивченні різних розділів математики. Така робота викликає інтерес до математики, розвиває інтелект, спонукає до самостійних досліджень.

Література

1. Бородін О. І., Бугай А. С. Біографічний словник діячів у галузі математики. К.: Вища школа, 1973. 552 с.
2. Бевз В.Г. Практикум з історії математики. К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2004. 312 с.
3. Ващенко-Захарченко, М. Е. История математики. Т. 1. К.: Университет Святого Владимира, 1883. 684 с.
4. Сверчевська І. А. Історичний підхід у формуванні ключових компетентностей // Інноваційна педагогіка. Вип. 21. Т. 3. Херсон: Гельветика, 2020. С. 19-23.
5. Чистяков В. Д. Математические вечера в средней школе. М.: Учпедгиз, 1958. 174 с.

Анотація. Сверчевська І.А. Математичні моделі в історичних задачах. *Досліджуються можливості історії математики у розвитку математичних здібностей до побудови та дослідження математичних моделей в історичних задачах. Запропоновано задачі, розв'язування яких приводить до побудови таких моделей як алгебраїчні рівняння, системи лінійних і нелінійних рівнянь, послідовностей та диференціальних рівнянь. Звертається увага на авторські методи розв'язування задач, короткі історичні довідки.*

Ключові слова: *математична модель, історична задача, алгебраїчні рівняння, системи рівнянь, диференціальні рівняння.*

Аннотация. Сверчевская И.А. Математические модели в исторических задачах. *Исследуются возможности истории математики в развитии математических способностей к построению и исследованию математических моделей в исторических задачах. Предложено задачи, решение которых приводит к построению таких моделей как алгебраические уравнения, системы линейных и нелинейных уравнений, последовательностей и дифференциальных уравнений. Обращается внимание на авторские методы решения задач, краткие исторические справки.*

Ключевые слова: *математическая модель, историческая задача, алгебраические уравнения, системы уравнений, дифференциальные уравнения.*

Summary. Sverchevska I.A. Mathematical models in historical tasks. *The paper studies the application of the history of mathematics to the development of skills in creating and investigating mathematical models in historical tasks. The author suggests problems which solving involves using models, including algebraic equations, systems of linear and nonlinear equations, number sequences and differential equations. The work highlights the authoring methods of solving problems, as well as brief historical references.*

Keywords: *mathematical model, historical task, algebraic equations, systems of equations, differential equations.*

З.О. Сердюк