Працьовитий М. Конструктивна теорія функцій як навчальна дисципліна програми підготовки магістра математики в умовах педагогічного університету // Освіта. Інноватика. Практика : науковий журнал. 2017. № 2(3). С. 65-68.

Pratsiovytyi M. Constructive theory of functions as educational discipline for preparation to master's degree in mathematics in pedagogical university // Education. Innovation. Practice: scientific journal. 2017. Issue 2(3). P. 65-68.

Микола Працьовитий
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова, м. Київ

КОНСТРУКТИВНА ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ ЯК НАВЧАЛЬНА ДИСЦИПЛІНА ПРОГРАМИ ПІДГОТОВКИ МАГІСТРА МАТЕМАТИКИ В УМОВАХ ПЕДАГОГІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Функція – фундаментальне математичне поняття, основний об’єкт вивчення математичного аналізу, яке є найпримітивнішою моделлю (формою) причино-наслідкових зв’язків реального світу. Ґрунтовне знайомство з ним розпочинається в 9 класі загальноосвітньої школи. За своїми властивостями стосовно неперервності, монотонності, вимірності, диференційованості, інтегровності тощо функції бувають принципово різними. Здавалось би домінуючою властивістю мала б бути неперервність, але, як виявляється, це зовсім не так. Неперервність не є поглинаючою властивістю, оскільки не є достатньою ні для диференційовності, ні для кускової монотонності. Коротше кажучи, метричний простір $C[0;1]$ неперервних на відрізку $[0;1]$ функцій з рівномірною метрикою є багатим на функції з неоднорідними, складними локальними властивостями, аналіз яких вимагає «тонкого» (чутливого) апарату дослідження. Точніше висловлюючись, переважна більшість (в топологічному сенсі) функцій є ніде не монотонними, ніде не диференційовними, а серед монотонних більшість з них має похідну майже скрізь рівну нулю.

Разом з цим, традиційні університетські курси математичного аналізу із-за архаїчності програм були позбавлені можливості знайомити студентів з такими функціями, вони повністю випадали з концепції та палітри підходу, в якому основними інструментами вивчення функцій є оператори диференціюваня та інтегрування. В останній час функції з нетривіальними та фрактальними локальними властивостями все частіше з’являються в різних моделях реальних об’єктів, процесів та явищ і існує гостра потреба в розробці зручного та ефективного апарату їх задання та дослідження і таким є різні системи кодування (зображення) дійсних чисел як зі скінченним, так і не скінченним, як сталим, так і змінним алфавітами.

Завдяки наведеній аргументації ми бачимо потребу і навіть необхідність знайомства майбутніх магістрантів математичних спеціальностей з функціями зі складною тополого-метричною структурою та фрактальними властивостями, що є основним об’єктом розгляду у навчальній дисципліні «Конструктивна теорія функцій».

Пропонується наступна структура курсу.

0. Вступ

1. Двосимвольні системи кодування (зображення) дробової частини дійсного числа.

1.1. Класична двійкова система.

1.2. Q_2-зображення.

1.3. Ланцюгове A_2-представлення та зображення чисел.

2. Q_s-зображення дійсних чисел.

2.1. Означення. Q_s-раціональні та Q_s-ірраціональні числа.

2.2. Циліндричні множини та їх властивості.

2.3. Геометрія Q_s-зображення чисел.

3. Елементи теорії фракталів та фрактального аналізу функцій.

3.1. Самоподібність.

3.2. Самоафінність.

3.3. Автомодельність.

4. Сингулярні функції.

4.1. Функція Кантора.

4.2. Інверсор цифр Q_2-зображення числа.

4.3. Функція Салема.

4.4. Функція Мінковського.

4.5. Не монотонні сингулярні функції канторівського типу.

5. Ніде не монотонні функції.

5.1. Конструкції функцій, що ґрунтуються на s-кових зображеннях.

5.2. Функції, пов'язані з Q-зображенням чисел.

6. Ніде не диференційовні функції.

6.1. Трибін-функція.

6.2. Функція Серпінського.

Після належної аргументації інтересу до неперервних функцій з нетривіальними локальними властивостями і прикладів ситуацій, які приводять до таких функцій, наведених у вступі до дисципліни, пропонується розгляд різних моделей дійсного числа (у формі ряду або ланцюгового дробу). Тут особливо важливо розмежувати поняття система числення і система зображення (кодування) чисел, що не є тотожно-еквівалентними термінами.

Системою числення дійсних чисел називається сукупність засобів для представлення=подання (математичного вираження), зображення (кодування, скороченого, формального запису), найменування дійсних чисел, їх ідентифікації та порівняння, а також побудови арифметики. Ця сукупність включає: модель числа у формі математичного виразу (ряду, нескінченного добутку, ланцюгового дробу тощо); алфавіт − набір цифр (символів, знаків) для формального (скороченого) запису представлень числа математичним виразом, які відіграють роль чисел або індексів; базис (базисну послідовність), якщо моделлю числа є ряд. Існуючі сьогодні системи числення за своєю формою та структурою досить різні. Класичною у цьому відношенні є s-кова система числення, на основі якої К. Вейєрштрассом була створена перша змістовна теорія дійсних чисел.

Кодуванням дійсних чисел відрізка $[0;1]$ засобами алфавіту A називається відповідність між множинами $[0;1]$ і $L = A \times A \times \ldots \times A \times \ldots$, при якій кожному числу $x \in [0;1]$ відповідає принаймні один елемент множини L і при цьому кожний елемент множини L є образом принаймні одного числа відрізка $[0;1]$. Сама послідовність $(\alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots) \in L$, яка відповідає числу x, називається його *зображенням (або кодом),* α_n *– n-ою цифрою (або символом)* цього зображення (коду). Зрозуміло, що складовою системи числення є кодування, але без вибудованої арифметики це ще не система числення.

Знайомство студентів з системами кодування слід починати з двосимвольних, які забезпечують технічну зручність. Сьогодні існує багато двосимвольних систем кодування дійсних чисел, але на сьогоднішній день лише класична двійкова задовольняє всі вимоги до системи числення. Узагальненням класичного двійкового зображення чисел зі збереженням властивостей неперервності та самоподібності є Q_2-зображення*.*

Нехай q_0 — задане дійсне число з інтервалу $(0;1)$, $q_1 \equiv 1 - q_0$, $\beta_0 \equiv 0, \beta_1 \equiv q_0, \mathrm{A} \equiv \{0;1\}, L \equiv A \times \ldots \times A \times \ldots$ − простір послідовностй елементів алфавіту. Відомо [3], що *для будь-якого числа* $x \in [0;1]$ *існує послідовність* $(\alpha_k) \in L$ *така, що*

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} \right) = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_{k-1} \alpha_k \ldots}. \tag{1}$$

Ряд (1) називається Q_2*-представленням* числа x, а його скорочений запис $\Delta^{Q_2}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_{k-1} \alpha_k \ldots}$ – Q_2*-зображенням* ряду (1) і його суми x*.* При $q_0 = 0{,}5$ Q_2-представлення числа є класичним двійковим.

Принципово іншим за тополого-метричними властивостями є ланцюгове A_2-зображення, яке є несамоподібним і ґрунтується на розкладі числа в ланцюговий дріб:

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}} = \Delta^{A_2}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_k \ldots}, \text{ де } a_i \in \left\{\frac{1}{2}; 1\right\}, \alpha_i = \begin{cases} 0, \text{якщо } a_i = \frac{1}{2}, \\ 1, \text{якщо } a_i = 1. \end{cases}$$

Аналогічно вводяться s-символьні системи кодування. Q_s-зображення є узагальненням s-кового та Q_2-зображення і визначається стохастичним вектором $\bar{q} = (q_0, q_1, \ldots, q_{s-1}), \beta_0 = 0, \beta_i = q_0 + \cdots q_{i-1}$. Тоді Q_s-представлення та Q_s-зображення формально задається рівністю (1).

Озброївшись засобом формального запису дійсних чисел і знанням його геометрії (геометричного змісту цифр), ми отримуємо можливість конструювати об'єкти з наперед заданими локально складними властивостями. Наприклад, функція f, означена рівністю

$$f\left(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots}\right) = \Delta^{Q_2}_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]\ldots[1-\alpha_n]\ldots},$$

яка називається інверсором цифр Q_2-зображення числа, при $q_0 \neq \frac{1}{2}$ є спадною сингулярною функцією (неперервною функцією, похідна якої рівна нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега).

А функція f, означена рівністю

$$f\left(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \Delta^{Q_2}_{c_1c_2c_3\ldots c_n\ldots},$$

де $c_i = \begin{cases} 0, \text{якщо } \alpha_i = 0, \\ 0, \text{якщо } \alpha_i \neq 0, \end{cases}$ $c_{n+1} = \begin{cases} c_n, \text{якщо } \alpha_{n+1} = \alpha_n, \\ 1 - c_n, \text{якщо } \alpha_{n+1} \neq \alpha_n. \end{cases}$ є неперервною ніде не диференційованою.

Список використаних джерел

1. Барановський О.М., Працьовитий М.В., Торбін Г.М. Ряди Остроградського-Серпінського-Пірса та їх застосування. – К. Наукова думка, 2013. – 288 с.
2. Замрій І.В., Працьовитий М.В. Сингулярність інверсора цифр Q_3-зображення дробової частини дійсного числа, його фрактальні та інтегральні властивості // Нелінійні коливання. 2015., 18, №1. – С. 55-70.
3. Ісаєва Т.М. Працьовитий М.В. Геометрія та основи метричної теорії зліченно-символьного зображення дійсних чисел одиничного пів інтервалу // Наукові записки НаУКМА, фізико-математичні науки. – Том 165. – 2015. – С. 11-18.
4. Працьовитий М. В. Геометрія дійсних чисел у їх кодуваннях засобами нескінченного алфавіту як основа топологічних, метричних, фрактальних і ймовірнісних теорій // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2013. – № 14. – С. 189-216.
5. Працьовитий М.В. Двосимвольні системи зображення (кодування) дійсних чисел // Студентські фізико-математичні етюди. – К.: Вид-во НПУ імені М.П. Драгомановаю – 2010. – №9 – С. 6-26.
6. Працьовитий М.В. Ніде не монотонні сингулярні функції // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки, 2011. – №12. – С. 24-36.
7. Працьовитий М.В. Системи числення зі змінною основою та змінним алфавітом (або розвинення чисел в ряди Кантора) // Студентські фізико-математичні етюди. – Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2009. – № 8. – С. 6-18.
8. Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. – 296 с.
9. Працьовитий М.В., Василенко Н.А. Одна сім'я неперервних ніде не монотонних функцій з фрактальними властивостями // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2013. – № 14. – С. 176-188.
10. Працьовитий М.В., Свинчук О.В. Немонотонні сингулярні функції Канторівського типу // Четверта міжнародна конференція «Відкриті еволюційні системи» (20-21 травня 2016 р.). Збірник праць: Частина 2. – Ніжин: ВНЗ ВП НУБіП України НАІ. – 2017. – С. 52-57.
11. Працьовитий М.В., Свинчук О.В. Сингулярні немонотонні функції, визначені в термінах Q_s^*-зображення аргумента // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2013. – № 15. – С. 144-155.
12. Турбин А.Ф., Працевитый Н.В. Фрактальные множества, функции, распределения. – Киев: Наук.думка, 1992. – 208 с.

Анотація. Працьовитий М. Конструктивна теорія функцій як навчальна дисципліна програми підготовки магістра математики в умовах педагогічного університету. *У доповіді пропонується концепція формування змісту навчальної дисципліни «Конструктивна теорія функцій», яка передбачає знайомство майбутніх магістрів математики з неперервними функціями зі складною локальною структурою та фрактальними властивостями; обґрунтовується потреба та доцільність такої дисципліни, її зв'язки з іншими дисциплінами навчального плану. Розгорнуто представляються завдання курсу і його наповнення задачним матеріалом.*

Ключові слова: *неперервна функція, сингулярна функція, ніде не монотонна функція, недиференційовна функція, Q-зображення дійсних чисел, інверсор цифр зображення числа, система кодування дійсних чисел, мета та завдання навчальної дисципліни, самостійна робота, наукова діяльність студента.*

Аннотация. Працевитый Н. Конструктивная теория функций как учебная дисциплина программы подготовки магистра математики в условиях педагогического университета. *В докладе предлагается концепция формирования содержания учебной дисциплины «Конструктивная теория функций», которая предусматривает знакомство будущих магистров математики с непрерывными функциями со сложной локальной структурой и фрактальными свойствами; обосновывается необходимость и целесообразность такой дисциплины, ее связи с другими дисциплинами учебного плана. Развернуто представляются задачи курса и его наполнения задачным материалом.*

Ключевые слова: *непрерывная функция, сингулярная функция, нигде не монотонная функция, недиференцируема функция, Q-изображение действительных чисел, инверсор цифр изображения числа, система кодирования действительных чисел, цели и задачи учебной дисциплины, самостоятельная работа, научная деятельность студента.*

Abstract. Pratsiovytyi M. Constructive theory of functions as educational discipline for preparation to master's degree in mathematics in pedagogical university. In t*he report we propose the concept of forming the content of the discipline "Constructive Theory of Functions", which involves acquaintance of future masters of mathematics with continuous functions with complex local structure and fractal properties. We prove the necessity and expediency of such discipline, its connection with other disciplines of the curriculum is substantiated. Also we present the tasks of the course and its filling with math problems.*

Keywords: *continuous function, singular function, nowhere monotone function, non-differentiable function, Q-representation of real numbers, inversor of digits of number of representation, real numbers coding system, purpose and tasks of educational discipline, independent work, scientific activity of student.*