Сумський державний педагогічний університет

імені А. С. Макаренка

Олена Мартиненко, Ярослав Чкана

Функції багатьох змінних:
диференціальне та інтегральне числення

Суми 2023

УДК 512.2/.3(075.8.057.875)
М 29

Рекомендовано вченою радою Сумського державного педагогічного університету імені А.С. Макаренка (протокол № 12 від 26.06.2023 р.)

Рецензенти:

Лисенко О.В., доктор фізико-математичних наук, професор кафедри ПМ та МСС Сумського державного університету

Шуляк М.Л., доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри «Агроінжинірінгу» Сумського національного аграрного університету

Мартиненко О.В., Чкана Я.О.
М 29 **Функції багатьох змінних: диференціальне та інтегральне числення.** Навчальний посібник / О.В. Мартиненко, Я.О. Чкана. Суми, ФОП Литовченко Є.Б., 2023. 152 с.

Посібник написано відповідно до діючих програм з курсу «Математичний аналіз» для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Він зорієнтований на набуття студентами теоретичних знань та практичних умінь з математичного аналізу в частині основних положень диференціального та інтегрального числення теорії функцій багатьох змінних.

Робочий зошит, поданий в кінці цього посібника, є керівництвом до організації індивідуальної та самостійної роботи студентів.

Навчальний посібник рекомендовано для студентів фізико-математичних та природничих факультетів педагогічних університетів, а також вчителів математики загальноосвітніх навчальних закладів.

УДК 512.2/.3(075.8.057.875)

ЗМІСТ

ВСТУПНЕ СЛОВО

Цей посібник створено з урахуванням багаторічного досвіду роботи авторів у Сумському державному педагогічному університеті імені А.С. Макаренка. Він призначений, у першу чергу, для студентів та викладачів педагогічних університетів, проте автори сподіваються, що запропонований матеріал буде цікавим і корисним для всіх, хто вивчає математичний аналіз або викладає його. Метою посібника є подання основ диференціального та інтегрального числення функцій багатьох змінних на науковому і, водночас, доступному рівні, з використанням елементів інформаційних технологій.

Додаткову інформацію, необхідну для розуміння навчального матеріалу, можна отримати через звереренення до QR-кодів, поданих на сторінках посібника.

Запропонований у посібнику «Робочий зошит» зорієнтований на організацію аудиторної, індивідуальної та самостійної роботи студентів по вивченню матеріалу даного розділу математичного аналізу. Навчальний матеріал кожної теми поділено на три блоки: перший блок є керівництвом для засвоєння основних теоретичних положень, другий – містить завдання для аудиторної роботи, третій включає різнорівневе домашнє завдання, частина вправ якого має дослідницький характер.

Нумерація формул у посібнику має двоступеневу структуру: 1-а цифра відповідає номеру розділу, 2-га – номеру формули.

РОЗДІЛ 1. Диференціальне числення функцій багатьох змінних

n-вимірний евклідів простір

Відомо, що кожній точці числової прямої Ox, площини Oxy та простору Oxy однозначно відповідають дійсне число x, впорядкована пара дійсних чисел (x, y) та впорядкована трійка дійсних чисел (x, y, z). При цьому дійсні числа x, y, z називаються координатами точки.

Сукупність n дійсних чисел $x_1, x_2, ..., x_n$, записаних у певному порядку, називають ***точкою*** і позначають $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, а числа x_i, $i = \overline{1, n}$, називають її ***координатами***.

Операції додавання точок і множення їх на дійсні числа вводяться так:

$$x + y = (x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

$$\lambda x = \lambda(x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n), \text{ де } \lambda \text{ - дійсне число.}$$

Множину всіх точок $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ з введеними над ними операціями називають n***-вимірним лінійним простором.***

У n-вимірному просторі відстань між двома точками $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ і $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ визначимо формулою

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Так, відстань між точками x і y прямої, площини та простору визначаються за формулами:

$\rho(x, y) = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y|$, де x, y - координати точок прямої;

$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$, де $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ - точки площини;

$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$, де $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$ - точки простору.

Точковий лінійний n-вимірний простір, відстань між точками якого визначається за формулою $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$, називають n***-вимірним евклідовим простором*** і позначають R^n.

Означення. Довільну непорожню множину A точок називають ***метричним простором***, якщо існує правило, за яким двом довільним точкам x та y цієї множини відповідає деяке число $\rho(x,y)$, яке називають ***відстанню*** між цими точками, і при цьому виконуються умови (аксіоми метричного простору):

1) $\rho(x,y)\geq 0$, причому $\rho(x,y)=0$ тоді і тільки тоді, коли $x=y$ (властивість невід'ємності);

2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ (властивість симетрії);

3) $\rho(x,z)\leq \rho(x,y)+\rho(y,z)$ для $\forall x,y,z\in A$ (нерівність трикутника).

Доведемо, що n-вимірiний евклідів простір є метричним простором. Виконання перших двох аксіом є очевидним, а для доведення третьої застосуємо наслідок з нерівності Коші

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2},$$

де a_i і b_i, $i=1,2,...,n$ - довільні дійсні числа.

Нехай $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $y=(y_1,y_2,...,y_n)$, $z=(z_1,z_2,...,z_n)$ - довільні точки простору R^n. Покладемо $a_i=x_i-y_i$, $b_i=y_i-z_i$, тоді $a_i+b_i=x_i-z_i$, $i=1,2,...,n$. Тоді нерівність (2) набуває вигляду

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2}\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2},$$

або

$$\rho(x,z)\leq\rho(x,y)+\rho(y,z).$$

Множини в n-вимірному просторі

1. Нехай задано точку $x^0=(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)\in R^n$ і деяке число $\varepsilon>0$. Сукупність усіх точок $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ простору R^n таких, що $\rho(x,x^0)<\varepsilon$, називають n***-вимірною кулею*** з центром в точці x^0 і радіусом ε та

позначають $O\left(x^0,\varepsilon\right)$. Будь-яку кулю $O\left(x^0,\varepsilon\right)$, що містить точку x^0, називають ε-околом точки x^0.

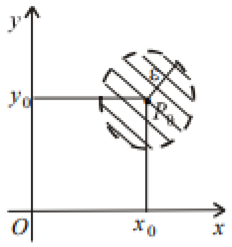


Рис. 1

Наприклад, у просторі R^2 ε-околом точки $x^0 = \left(x_0, y_0\right)$ є множина

$$O\left(x^0,\varepsilon\right) = \left\{(x,y):\ \sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}<\varepsilon\right\},$$

тобто внутрішня частина круга радіуса ε з центром в точці $x^0 = \left(x_0, y_0\right)$ (рис. 1), а в просторі R^3 ε-околом точки $x^0 = \left(x_0, y_0, z_0\right)$ є множина

$$O\left(x^0,\varepsilon\right) = \left\{(x,y,z):\ \sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2}<\varepsilon\right\}.$$

2. Нехай задано точку $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right) \in R^n$ і деякі числа $\delta_i > 0,\ i = 1,2,...,n$. Множину точок $x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ простору R^n таких, що $\left|x_i - x_i^0\right| < \delta_i,\ i = 1,2,...,n$, називають n***-вимірним паралелепіпедом***, а точку x^0 – його ***центром***.

При $n = 1$ маємо інтервал довжиною $2\delta_1$ з центром в точці $x^0 = x_0$; у випадку $n = 2$ – прямокутник з центром в точці $x^0 = \left(x_0, y_0\right)$, сторони якого паралельні координатним осям і мають довжини $2\delta_1$ і $2\delta_2$ відповідно; при $n = 3$ – прямокутний паралелепіпед з центром в точці $x^0 = \left(x_0, y_0, z_0\right)$ з ребрами, паралельними осям координат з довжинами $2\delta_1,\ 2\delta_2,\ 2\delta_3$ відповідно.

Введення n-вимірного евклідового простору R^n дає змогу побудувати математичний апарат для вивчення функцій багатьох змінних.

Нехай задано деяку множину $D \in R^n$. Точку $x \in D$ називають ***внутрішньою*** точкою множини D, якщо існує окіл $O(x,\varepsilon)$ цієї точки, який цілком міститься у множині D.

Множину D називають ***відкритою***, якщо кожна її точка є внутрішньою.

Приклад. $A = \{x : a < x < b\}$ – відкрита множина.

Завдання. Навести приклади відкритих множин у R^n.

Точку $x \in R^n$ називають ***граничною*** точкою множини D, якщо будь-який окіл цієї точки містить нескінченну кількість точок з множини D. Множину D називають ***замкненою***, якщо вона містить всі свої граничні точки.

Приклад. $C = \{(x, y): x^2 \le y\}$ – замкнена множина.

Завдання. Навести приклади замкнених множин у R^n.

Множину D називають ***обмеженою***, якщо існує n-вимірна куля, яка цілком містить цю множину (рис. 2).

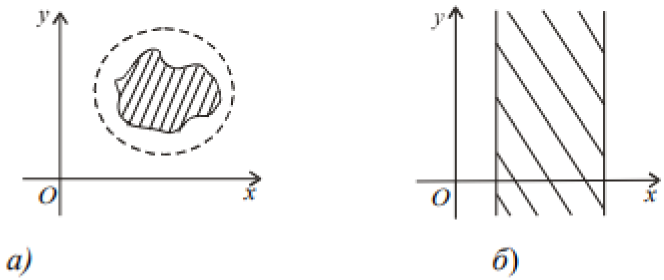


Рис. 2

Приклад. $Y = \{(x, y, z): x^2 + y^2 = 1,\ 0 \le z \le 3\}$ – обмежена множина.

Завдання. Навести приклади обмежених множин у R^n.

Множину D простору R^n називають ***зв'язною***, якщо будь-які дві її точки можна з'єднати неперервною кривою, яка цілком належить множині D. Зв'язність виражає властивість множини зображати єдине ціле, складатися з одного куска (рис. 3).

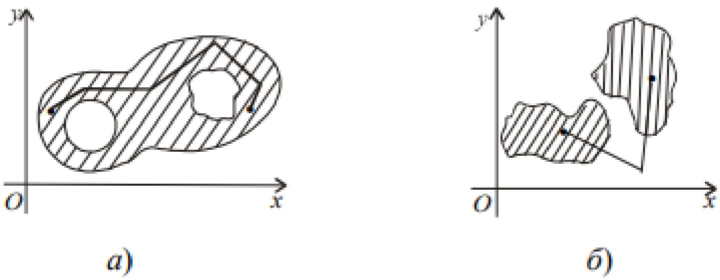


Рис. 3

Приклад. Всі названі множині є зв'язними. Множина $Z=\{(x,y):xy=1\}$ є незв'язною, оскільки дві точки, взяті на різних вітках гіперболи, не можна сполучити неперервною кривою, яка б цілком належала б гіперболі.

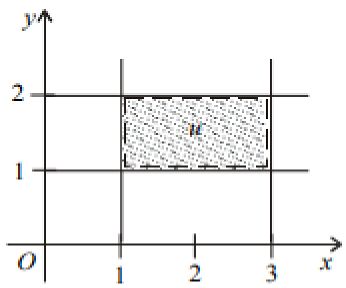


Рис. 4

Відкрита і зв'язна множина точок простору R^n називається ***областю*** (рис. 4).

Точку $x\in R^n$ називають ***межовою*** точкою множини $D\subset R^n$, якщо будь-який її окіл містить як точки множини D, так і точки, які їй не належать.

Множину всіх межових точок множини $D\subset R^n$ називають її ***межею***. Область разом з її межею називають ***замкненою областю*** і позначають $\overline{D}$.

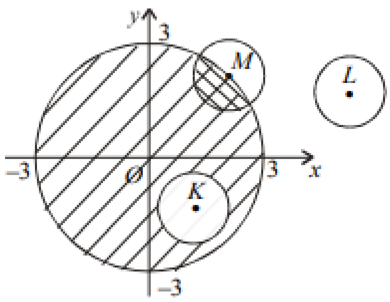


Рис. 5

На рисунку 5 зображено замкнену область $D=\{(x,y)\in R^2:x^2+y^2\le 9\}$, яка обмежена графіком рівняння $x^2+y^2=9$, та точки: K – внутрішня, L – зовнішня, M – межова.

Основні поняття теорії функцій багатьох змінних

Означення. Нехай задано множину $E\subset R^n$. Якщо кожній точці $x\in E$ за деяким законом f поставлено у відповідність одне і тільки одне дійсне число y, то говорять, що на множині E визначена функція $y=f(x)$. Оскільки точка $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ задається своїм координатами, то $f(x)$ є функцією n незалежних змінних $x_1,x_2,...,x_n$, кожна з яких змінюється на деякій множині дійсних чисел. Це записують як $y=f(x_1,x_2,...,x_n)$.

Змінні $x_1,x_2,...,x_n$ при цьому називаються незалежними змінними або ***аргументами***, змінна y – ***функцією***; множина E називається ***областю визначення*** (***існування***) функції і позначається символом $D(y)$.

У подальшому основні поняття теорії функцій будуть розглянуті для $n = 2$.

Означення. Величина $z = f(x, y)$ називається ***функцією*** двох змінних величин x та y, якщо кожній впорядкованій парі значень (x, y), що належить до деякої множини $E \subset R^2$, відповідає за деяким законом f єдине значення величини $z \in R$.

Змінні x, y при цьому називаються ***аргументами***, змінна z – ***функцією***; множина E пар значень (x, y) називається ***областю визначення*** (***існування***) функції і позначається символом $D(z)$.

Якщо функція f задана аналітично, то під областю визначення функції розуміємо множину всіх пар дійсних чисел (x, y), для яких аналітичний вираз $f(x, y)$ має смисл.

Приклад. Знайти область визначення функції та зобразити її на координатній площині:

а) $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$;

б) $z = \ln\left(x^2 + y^2 - 4\right)$;

в) $z = \arccos(x + 2y)$.

Розв’язання.

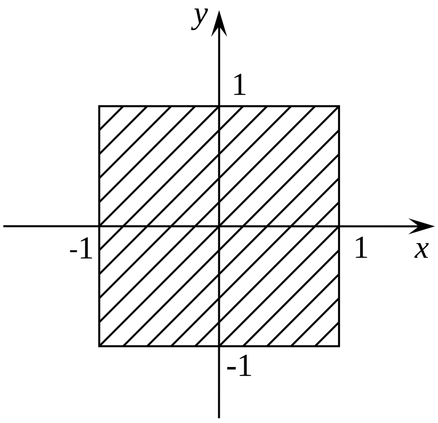


Рис. 6

а) Даний вираз має зміст за умови одночасного виконання нерівностей $1 - x^2 \geq 0, 1 - y^2 \geq 0$. Областю визначення функції є множина точок площини $\{(x, y) : x \in [-1;1],\ y \in [-1;1]\}$, яка зображена на рисунку 1.

б) Областю визначення даної функції є множина точок площини, що визначається нерівністю $x^2 + y^2 - 4 > 0$, зображенням якої є вся площина, що лежить зовні круга $x^2 + y^2 \leq 4$ (рис. 7).

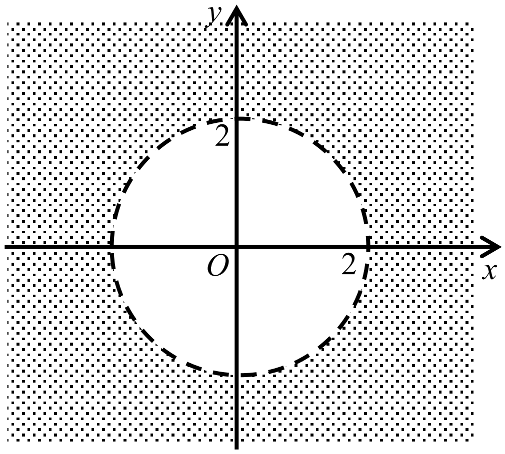


Рис. 7

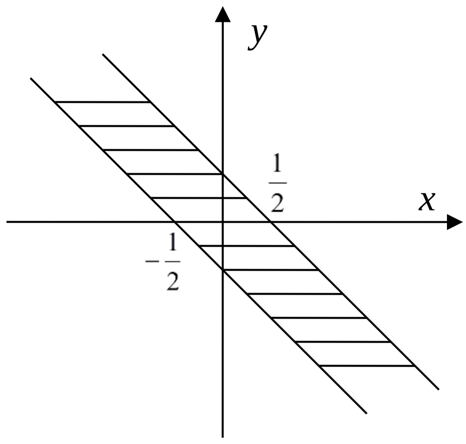


Рис. 8

в) З означення функції $z=\arccos(x+2y)$ маємо подвійну нерівність $-1\le x+2y\le 1$, яка рівносильна системі нерівностей:

$$\begin{cases} x+2y\ge -1 \\ x+2y\le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\ge -\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2} \\ y\le -\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Отже, області визначення відповідає частина площини, яка обмежена знизу і зверху прямими $y=-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$ та $y=-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$ відповідно (рис. 8).

Графіком функції $z=f(x,y)$ є геометричне місце точок $(x,y,f(x,y))$, координати яких задовольняють це рівняння.

Функція двох змінних геометрично задає деяку поверхню. Наприклад, рівняння $z=x+y-1$ є рівнянням площини, рівняння $z=x^2+y^2$ задає параболоїд обертання, а $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ визначає верхню частину сфери (рис. 9).

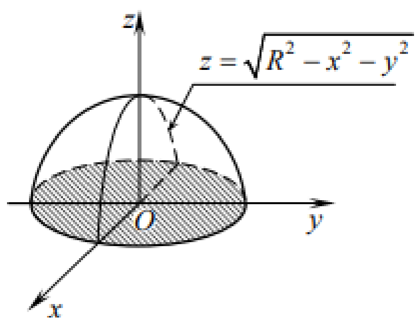


Рис. 9

Для функцій трьох і більшої кількості змінних такого простого геометричного тлумачення вже не можна дати.

У випадку, коли побудова графіка функції двох змінних викликає труднощі, для з'ясування його особливостей використовують так звані лінії рівня.

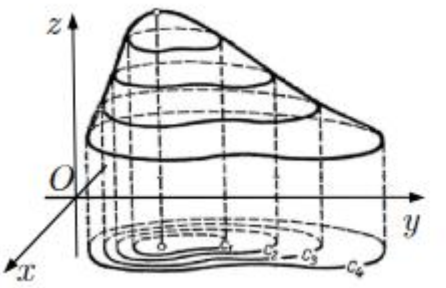


Рис. 10

Якщо графік функції $z = f(x, y)$ перетнути площиною $z = C$, де C- деяке дійсне число, то отримаємо рівняння $f(x, y) = C$, геометричним образом якого є сукупність певних точок площини XOY. Ця сукупність утворює деяку лінію, яка називається ***лінією рівня*** даної функції (рис. 10).

Наприклад, лініями рівня функції $z = x^2 + y^2$ є точка $O(0,0)$ і концентричні кола $x^2 + y^2 = c,\ c > 0$, а лініями рівня функції $z = x^2 y + y$ є точка $O(0,0)$ і сімейство кривих $y = \dfrac{c}{x^2 + 1}$.

Границя функції двох змінних

Нехай M_0 – деяка фіксована точка простору R^n, а δ – деяке додатне дійсне число.

Означення. ***δ-околом*** точки M_0 називається множина точок M простору R^n таких, що виконується нерівність $\rho(M, M_0) < \delta$, де $\rho(M, M_0)$ – відстань від точки M_0 до будь-якої точки M.

Поняття границі функції двох змінних формулюється аналогічно до поняття границі функції однієї змінної.

Означення (за Коші). Нехай функція $z = f(M)$, де $f(M) = f(x, y)$, визначена в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$ за винятком, можливо, самої точки M_0. Дійсне число A називається ***границею функції*** $f(M) = f(x, y)$ ***в точці*** $M_0(x_0, y_0)$, якщо для довільного як завгодно малого дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує дійсне число $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх пар чисел (x, y) з області визначення функції, відмінних від (x_0, y_0), які задовольняють умову $0 < \rho(M, M_0) < \delta(\varepsilon)$, виконується нерівність $\rho(f(M), A) < \varepsilon$.

Означення (за Гейне). Якщо для будь-якої послідовності точок $M_n(x_n, y_n)$, що збігається до точки $M_0(x_0, y_0)$ ($(x_n, y_n) \neq (x_0, y_0)$ для $\forall n \in N$), послідовність відповідних значень функції $f(M_n) = f(x_n, y_n)$ є збіжною до одного і того ж числа A, то це число називається ***границею функції*** $f(x, y) = f(M)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$.

Позначається це так:

$$A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) \text{ або } A = \lim_{M \to M_0} f(M).$$

Зауваження. Хоча означення границі функції двох змінних дається аналогічно одновимірному випадку, дослідження її існування є принципово складнішим. Якщо для функції однієї змінної досить дослідити існування двох односторонніх границь (для $x > x_0$ і $x < x_0$), то на площині R^2 прямування до точки (x_0, y_0) може відбуватися нескінченною кількістю способів. При цьому значення границі не повинно залежати від способу прямування точки M до точки M_0 і визначатися однозначно.

Приклад. Довести, що границя функції $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ в точці $(0;0)$ існує і дорівнює 0.

Очевидно, що задана функція визначена на R^2, за винятком точки $(0;0)$. Розглянемо довільну послідовність точок $M_n(x_n, y_n)$, $(x_n, y_n) \neq (0;0)$, $n \in N$, збіжну до точки $(0;0)$, і покажемо, що послідовність відповідних значень функції прямує до нуля. Маємо:

$$|f(M_n) - 0| = \frac{|x_n|^2 |y_n|}{x_n^2 + y_n^2} = |x_n| \frac{|x_n||y_n|}{x_n^2 + y_n^2} \leq |x_n| \frac{\frac{1}{2}(x_n^2 + y_n^2)}{x_n^2 + y_n^2} = \frac{1}{2}|x_n| \to 0 \ (n \to \infty),$$

тобто $f(M_n) \to 0$ $(n \to \infty)$.

Зауваження. При переході до нерівності використали співвідношення $(a-b)^2 \geq 0$.

Якщо існує $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A$, то границя за довільним напрямком при $x \to x_0$, $y \to y_0$ також існує і дорівнює A. Проте, якщо за двома різними напрямками границі функції $f(x,y)$ в точці (x_0, y_0) різні, то границя не існує.

Приклад. Показати, що $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ не існує.

Розв'язання. Якщо наближатися до точки $(0;0)$, зокрема, вздовж парабол $y = ax^2$, $a \in R$, то маємо:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot ax^2}{x^4 + a^2 x^4} = \frac{a}{1 + a^2}.$$

Очевидно, що дана границя залежить від параметра a, а отже, вона не існує.

Приклад. З'ясувати, чи існує границя $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$.

Розглянемо дві різні послідовності $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $(x_n', y_n') = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$, які при $n \to \infty$ збігаються до точки $(0;0)$. Відповідні послідовності значень функції збігаються до різних граничних значень:

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} \to 1, \qquad f(x_n', y_n') = \frac{\frac{2}{n^3}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Отже, ця границя не існує.

Зауважимо, що всі основні властивості границі функції однієї змінної справджуються і для функцій двох змінних, зокрема, теореми про арифметичні дії з границями, властивості нескінченно малих, теорема про границю проміжної змінної тощо.

Приклад. Показати, що $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0$.

Розв'язання. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\cdot x+\dfrac{y^2}{x^2+y^2}\cdot y\right)=$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}x+\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}y=0,$$

оскільки функції $\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$, $\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$ обмежені (наприклад числом 1), а $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}x=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}y=0$.

Приклад. Обчислити границю $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\frac{\sin xy}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\frac{\sin xy}{xy}\cdot y=\begin{bmatrix} xy=t\\ a\neq\infty\\ t\to 0\end{bmatrix}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}y=1\cdot 0=0.$$

При знаходженні границі ми використали першу «чудову» границю для змінної t.

Зауваження. У деяких випадках обчислення границі $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$ спрощує перехід до полярних координат з центром в точці (x_0,y_0). Покладемо $x=x_0+r\cos\varphi$, $y=y_0+r\sin\varphi$ та перейдемо до функції $f(x_0+r\cos\varphi;y_0+r\sin\varphi)$.

Приклад. Обчислити границю $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.

Розв'язання. Покладемо $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ ($(x_0,y_0)=(0;0)$). Тоді $\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=r\cos^2\varphi\sin\varphi$. Оскільки функція $\cos^2\varphi\sin\varphi$ обмежена, то значення

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2 y}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0} r\cos^2\varphi\sin\varphi=0\,.$$

Про **<u>повторні границі</u>** почитай тут

Неперервність функції двох змінних

Нехай функція $z=f(x,y)$ визначена в точці $M_0(x_0,y_0)$ та деякому її околі.

Означення. Функція $z=f(x,y)$ називається ***неперервною*** в точці $M_0(x_0,y_0)$, якщо виконується рівність

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0) \tag{1.1}$$

або

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=f(M_0).$$

На мові «$\varepsilon-\delta$» поняття неперервності формулюється так:

Означення. Функція $z=f(x,y)$ називається ***неперервною*** в точці $M_0(x_0,y_0)$, якщо для будь-якого як завгодно малого $\varepsilon>0$ існує (можна підібрати) дійсне число $\delta(\varepsilon)>0$ таке, що для всіх пар чисел (x,y), що задовольняють умову

$$\rho(M,M_0)<\delta \tag{1.2}$$

виконується нерівність $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$.

Зокрема, виконання умови (1.2) можна звести до виконання нерівностей $|x-x_0|<\delta,\ \ |y-y_0|<\delta.$

Означимо поняття неперервності функції двох змінних на мові «приростів».

Означення. ***Повним приростом*** функції $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ називається приріст функції, якого вона набула при довільних приростах Δx та Δy обох змінних:

$$\Delta z(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Означення. Функція $z = f(x, y)$ називається ***неперервною*** в точці $M_0(x_0, y_0)$, якщо $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z(M_0) = 0$.

Завдання. Показати рівносильність обох означень неперервності функції в точці.

Зауваження. Якщо функція двох змінних $z = f(x, y)$ є неперервною в точці $M_0(x_0, y_0)$, то неперервними є і функції однієї змінної $z = f(x, y_0)$ при $x = x_0$ та $z = f(x_0, y)$ при $y = y_0$. Отже, з *неперервності функції двох змінних за сукупністю змінних слідує її неперервність по кожній змінній окремо*. Обернене твердження, взагалі кажучи, місця не має.

Приклад Показати, що функція $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, \ x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, \ x = y = 0 \end{cases}$ є неперервною по кожній змінній x та y, але не є неперервною за їх сукупністю.

Розв'язання. Ця функція не є неперервною в точці $O(0;0)$ за сукупністю аргументів, оскільки $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ не існує. Дійсно, прямуючи до точки $O(0;0)$ вздовж прямих $y = kx$, маємо різні значення границі, що залежать від k:

$$\lim_{\substack{y \to kx \\ x \to 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ (k \neq 0)}} \frac{kx^2}{x^2(1 + k^2)} = \frac{k}{1 + k^2}, \text{ де } k \neq 0.$$

Проте, за кожним аргументом окремо вона є неперервною в точці $O(0;0)$. Дійсно, нехай $y=0$, тоді $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{0}{x^2}=0=f(0;0)$; при $x=0$ маємо, що $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{0}{y^2}=0=f(0;0)$.

Всі відомі властивості неперерваних функцій однієї змінної виконуються й у випадку функцій багатьох змінних. Наведемо деякі з них.

Теорема 1 (про неперервність складної функції). *Якщо функції* $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$ *неперервні в точці* (u_0,v_0), *а функція* $z=f(x,y)$ *є неперервною в точці* (x_0,y_0), *де* $x_0=\varphi(u_0,v_0)$, $y_0=\psi(u_0,v_0)$, *то функція* $z=f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ *є також неперервною в точці* (u_0,v_0).

Сформулюємо частинний випадок теореми про неперервність складної функції.

Теорема 2. *Якщо функція* $y=\varphi(x)$ *задана в деякому околі точки* x_0 *і неперервна в* x_0, *а функція* $z=f(x,y)$ *є неперервною в точці* (x_0,y_0), *де* $y_0=\varphi(x_0)$, *то складна функція* $z=f(x,\varphi(x))$ *є також неперервною в точці* x_0.

Означення. Функція називається *неперервною в області*, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Теорема 3 (Вейєрштрасса про обмеженість функції). *Якщо функція* $f(x,y)$ *є неперервною в обмеженій замкненій області* (D), *то* $f(x,y)$ *є обмеженою в цій області.*

Доведення. Застосуємо метод доведення від супротивного і припустимо, що $f(x,y)$ не є обмеженою зверху. Це означає, що для будь-якого натурального числа $n>0$ в області (D) завжди знайдеться точка $M_n(x_n,y_n)$ така, що

$$f(x_n,y_n)>n. \tag{1.3}$$

За умовою теореми область (D) обмежена та замкнена, тому маємо обмежену послідовність точок M_n, з якої можна виділити підпослідовність точок $M_{n_k}(x_{n_k}, y_{n_k})$, яка збігається до точки $M_0(x_0, y_0)$ з області (D).

З неперервності функції $f(x,y)$ в точці M_0 маємо, що послідовність $f(x_{n_k}, y_{n_k}) \to f(x_0 y_0)$, $k \to \infty$. Проте, з нерівності (1.3) $f(x_{n_k}, y_{n_k}) \to \infty$ при $k \to \infty$. Отримане протиріччя доводить, що $f(x,y)$ є обмеженою зверху в (D).

Обмеженість знизу доводиться аналогічно. Теорему доведено.

Теорема 4 (Вейєрштрасса про найбільше та найменше значення функції). *Якщо функція $f(x,y)$ є неперервною в замкненій обмеженій області (D), то в (D) знайдуться принаймні дві точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$, в яких функція $f(x,y)$ набуває своїх найменшого та найбільшого значень.*

Теорема 5 (Коші про проміжне значення неперервної функції). *Якщо функція $f(x,y)$ є неперервною в деякій зв'язній області (D) і в цій області набуває значень A і B, причому $A \neq B$, то для будь-якого числа C, де $A < C < B$, в області (D) завжди знайдеться точка $M_0(x_0, y_0)$ така, що $f(x_0, y_0) = C$.*

Доведення. Нехай в точці $M_1(x_1, y_1)$ функція $f(x_1, y_1) = A$, а в точці $M_2(x_2, y_2)$ функція $f(x_2, y_2) = B$ і $A < B$. Виберемо довільне число C таке, що $A < C < B$. З'єднаємо точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$ ламаною, що цілком лежить в області (D) (це завжди можна зробити, оскільки область (D) за умовою є зв'язною).

Обчислимо по черзі значення функції $f(x,y)$ в кожній точці, що є вершиною ламаної. Якщо значення функції в деякій вершині буде дорівнювати C, то ця точка і є шуканою. Якщо ж у жодній з вершин функція не набуває значення C, то на деякій ланці $M'M''$ ламаної, де $M'(x', y')$,

$M''(x'', y'')$, значення функції в одній із вершин буде більшим за С, в іншій – меншим.

Коли ланка $M'M''$ не є паралельною осі Oy, то її рівняння має вигляд $y = kx + b$. В точках ланки $M'M''$ функція $f(x, y)$ є неперервною складною функцією однієї незалежної змінної x, тобто $f(x, kx + b) = F(x)$. Оскільки число C лежить між числами $F(x')$ та $F(x'')$, то за теоремою про проміжне значення неперервної на відрізку $[x', x'']$ функції $F(x)$ однієї змінної, маємо, що між x' і x'' знайдеться таке значення x_0, що $f(x_0) = f(x_0, kx_0 + b) = C$. Позначимо $kx_0 + b = y_0$, тоді $f(x_0 y_0) = C$ і точка $M_0(x_0, y_0)$ буде шуканою.

Якщо ланка $M'M''$ є паралельною осі Oy, то її рівняння має вигляд $x = x'$. У цьому випадку застосовуємо теорему Коші для функції однієї змінної $F(y) = f(x', y)$, неперервної на відрізку $[y', y'']$. Теорему доведено.

Наслідок. *Якщо числа А і В мають різні знаки (одне є додатним, а інше – від'ємним), то в цій області* (D) *завжди знайдеться принаймні одна точка* $M_0(x_0, y_0)$*, в якій функція дорівнює нулю, тобто* $f(x_0, y_0) = 0$.

Приклад. Дослідити на неперервність функцію $z = \dfrac{xy + 2}{x^2 - y^2}$.

Розв'язання. Оскільки чисельник і знаменник є неперервними функціями як многочлени, то функція може мати розрив, коли $x^2 - y^2 = 0$. Отже, дана функція є неперервною скрізь, крім точок прямих $y = x$ та $y = -x$.

Приклад. Знайти точки розриву функції $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Розв'язання. Функція $x^2 + y^2$ неперервна на R^2 як многочлен від x та y. За теоремою про неперервність складної функції маємо, що задана функція є неперервною скрізь, крім точки $(0;0)$, де знаменник дробу дорівнює нулю. Тому точка $(0;0)$ є точкою розриву функції.

Диференціювання функцій багатьох змінних. Частинні похідні

Розглянемо функцію $z = f(x,y)$, визначену в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$. Зафіксуємо змінну $y = y_0$ і отримаємо функцію $z = f(x, y_0)$ однієї змінної x. Якщо ця функція має похідну по змінній x при $x = x_0$, то остання називається ***частинною похідною функції*** $z = f(x,y)$ ***по змінній*** x в точці $M_0(x_0, y_0)$ і позначається $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ або $f'_x(x_0, y_0)$.

Отже, за наведеним означенням маємо, що

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Величина $\Delta_x f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ називається ***частинним приростом функції*** $z = f(x,y)$ ***по змінній*** x у точці $M_0(x_0, y_0)$.

Означення частинної похідної функції по змінній y формулюється аналогічно:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f(x_0, y_0)}{\Delta y},$$

де $\Delta_y f(x,y)$ - частинний приріст функції $z = f(x,y)$ ***по змінній*** y в точці $M_0(x_0, y_0)$.

Із означень частинних похідних маємо ***практичний спосіб їх знаходження.*** Якщо шукаємо частинну похідну по змінній x, то змінну y вважаємо сталою величиною, і знаходимо частинну похідну функції $z = f(x,y)$ як звичайну похідну функції однієї змінної за всіма відомими правилами диференціювання. Аналогічно знаходять частинну похідну по змінній y, вважаючи при цьому сталою змінну x.

Приклад. Знайти частинні похідні функцій:

1) $z = 5x^3 + 2y^3 - 4x^2 y + \frac{1}{2} x y^4 - 1$;   2) $z = \sin\frac{x}{y} \cos\frac{y}{x}$.

Розв'язання. 1) Маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=15x^2-8xy+\frac{1}{2}y^4,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=6y^2-4x^2+2xy^3.$$

2) Функція z представлена у вигляді добутку двох функцій, кожна з яких є складною функцією як від x, так і від y:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\sin\frac{x}{y}\right)'_x\cdot\cos\frac{y}{x}+\left(\cos\frac{y}{x}\right)'_x\cdot\sin\frac{x}{y}=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}+\left(-\frac{y}{x^2}\right)\left(-\sin\frac{y}{x}\right)\sin\frac{x}{y}=$$
$$=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}\sin\frac{x}{y},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\sin\frac{x}{y}\right)'_y\cdot\cos\frac{y}{x}+\left(\cos\frac{y}{x}\right)'_y\cdot\sin\frac{x}{y}=-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}+\frac{1}{x}\left(-\sin\frac{y}{x}\right)\sin\frac{x}{y}=$$
$$=-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}-\frac{1}{x}\sin\frac{y}{x}\sin\frac{x}{y}.$$

Аналогічно можна ввести поняття частинних похідних для функції більшої кількості змінних.

Приклад. Знайти частинні похідні функції $u=x^{y^z}$.

Розв’язання.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^z x^{y^z-1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^{y^z} z y^{z-1}\ln x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x^{y^z}\ln x\cdot y^z\ln y.$$

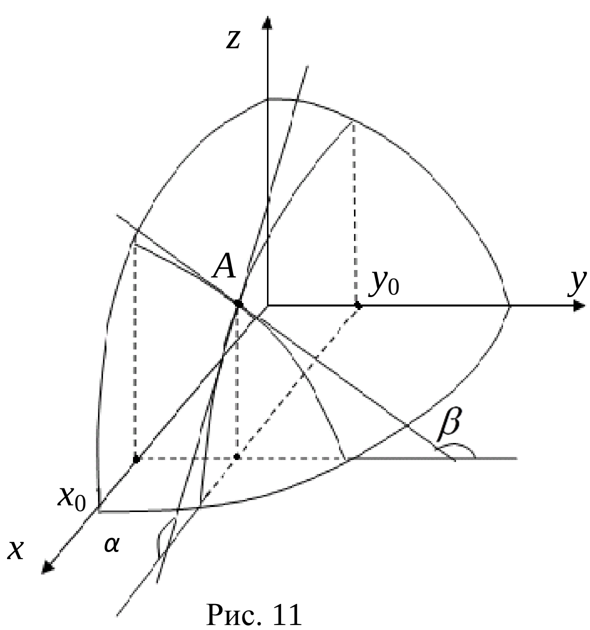


Рис. 11

З’ясуємо ***геометричний зміст частинних похідних*** функції $z=f(x,y)$ в точці $M_0(x_0,y_0)$.

Розглянемо поверхню, що задається функцією $z=f(x,y)$ і виберемо на цій поверхні точку $A(x_0,y_0,z_0)$ (рис. 11). Проведемо через дану точку площину $x=x_0$, паралельну координатній площині yOz. Ця площина перетинає задану поверхню по деякій кривій AB, що належить площині $x = x_0$. Рівняння кривої AB має вигляд: $z = f(x_0, y)$. Похідна цієї функції, обчислена за умови $y = y_0$, дорівнює частинній похідній по змінній y функції двох змінних $z = f(x, y)$ в точці (x_0, y_0) і визначає кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до кривої AB в точці $A(x_0, y_0, z_0)$, де $z_0 = f(x_0, y_0)$. Отже, $f'_y(x_0, y_0) = tg\beta$.

Якщо через точку $A(x_0, y_0, z_0)$ провести площину $y = y_0$, паралельну координатній площині xOz, і повторити всі міркування, аналогічні до попередніх, переконаємося, що $f'_x(x_0, y_0) = tg\alpha$. Тобто частинна похідна по змінній x функції $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до плоскої кривої в точці $A(x_0, y_0, z_0)$, яку ми отримали при перетині поверхні $z = f(x, y)$ даною площиною.

Диференційовні функції двох змінних

Розглянемо функцію двох змінних $z = f(x, y)$. Виберемо деяку внутрішню точку $M_0(x_0, y_0)$ з області визначення цієї функції і надамо значенням обох змінних x_0 та y_0 довільних приростів Δx і Δy відповідно.

Означення. Функція $z = f(x, y)$, визначена в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$, називається ***диференційовною*** в цій точці, якщо її повний приріст можна подати у вигляді

$$\Delta z(x_0, y_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y, \qquad (1.4)$$

де числа A і B визначаються точкою (x_0, y_0) і не залежать від приростів $\Delta x, \Delta y$, а величини $\alpha,\ \beta$ залежать як від точки (x_0, y_0), так і від приростів Δx та Δy, і є нескінченно малими при $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$.

З'ясуємо умови диференційовності функції двох змінних в точці.

Теорема 1. *Якщо функція* $z = f(x, y)$ *диференційовна в точці* $M_0(x_0, y_0)$, *то вона неперервна в цій точці.*

Доведення. За умовою теореми функція $z = f(x, y)$ є диференційовною в точці $M_0(x_0, y_0)$, а, отже, виконується умова (1.4).

Розглянемо праву частину (1.4) при одночасному виконанні умов $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$. Очевидно, що границя правої частини (1.4) при $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$ існує і дорівнює нулю, отже, існує границя і лівої частини $\Delta z(x_0, y_0)$, яка також дорівнює нулю. Це означає, що виконується умова неперервності функції в точці $M_0(x_0, y_0)$ на мові «приростів». Теорема доведена.

Теорема 2. *Якщо функція* $z = f(x, y)$ *диференційовна в точці* $M_0(x_0, y_0)$, *то в цій точці існують частинні похідні* $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ *, а її повний приріст має вигляд*

$$\Delta z(x_0, y_0) = \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y + \alpha(x_0, y_0; \Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(x_0, y_0; \Delta x, \Delta y)\Delta y, \quad (1.5)$$

де $\alpha,\ \beta$ *є нескінченно малими при* $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$.

Доведення. За умовою теореми функція $z = f(x, y)$ є диференційовною в точці $M_0(x_0, y_0)$, тобто виконується (1.4). За умови $\Delta y = 0$ з (1.4) маємо:

$$\Delta z(x_0, y_0)\big|_{\Delta y = 0} = A \cdot \Delta x + \alpha(x_0, y_0; \Delta x, 0)\Delta x.$$

Розділимо почленно обидві частини цієї рівності на Δx ($\Delta x \neq 0$):

$$\frac{\Delta z(x_0, y_0)}{\Delta x} = A + \alpha(x_0, y_0; \Delta x, 0).$$

Очевидно, що границя правої частини останнього співвідношення при $\Delta x \to 0$ існує, а тому існує і $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(A + \alpha(x_0, y_0; \Delta x, 0)\right) = A$ або

$$A = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0). \quad (1.6)$$

Аналогічно доводиться, що

$$B = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0). \qquad (1.7)$$

Звідси слідує справедливість (1.5). Теорема доведена.

Зауваження. Оскільки числа A та B визначаються з (1.6) і (1.7) однозначно, то подання повного приросту функції $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ є єдиним.

Приклад. За означенням показати, що функція $z = y^2 - 2x^2 + 3xy - 6x - 1$ диференційовна в кожній точці $M(x, y)$ площини.

Розв'язання. Виберемо на площині xOy довільним чином точку $M(x, y)$ і надамо аргументам x та y приростів Δx та Δy відповідно. Обчислимо повний приріст функції Δz в точці $M(x, y)$. Маємо

$$\Delta z = z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x, y) = (y + \Delta y)^2 - 2(x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x)(y + \Delta y) -$$
$$- 6(x + \Delta x) - 1 - y^2 + 2x^2 - 3xy + 6x + 1 = 2y\Delta y + (\Delta y)^2 - 4x\Delta x - 2(\Delta x)^2 +$$
$$+ 3x\Delta y + 3y\Delta x + 3\Delta x\Delta y - 6\Delta x = (-4x + 3y - 6)\Delta x + (2y + 3x)\Delta y +$$
$$+ (3\Delta y - 2\Delta x)\Delta x + \Delta y\Delta y.$$

Позначимо

$$A(x, y) = -4x + 3y - 6, \quad B(x, y) = 2y + 3x,$$

$$\alpha(x, y, \Delta x, \Delta y) = 3\Delta y - 2\Delta x, \quad \beta(x, y, \Delta x, \Delta y) = \Delta y.$$

Очевидно, що функції $\alpha(x, y, \Delta x, \Delta y)$ і $\beta(x, y, \Delta x, \Delta y)$ є нескінченно малими при $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$.

Як бачимо, функцію $z = y^2 - 2x^2 + 3xy - 6x - 1$ ми подали у вигляді (1.4), що відповідає означенню диференційовної функції, причому цей вигляд не залежить від вибору точки $M(x, y)$. Отже, можна стверджувати, що задана функція є диференційовною в будь-якій точці площини, а $A(x, y) = \dfrac{\partial z}{\partial x}(x, y)$, $B(x, y) = \dfrac{\partial z}{\partial y}(x, y)$.

Зауваження. Дані теореми визначають необхідні умови диференційовності функції $z = f(x, y)$ в точці, але вони не дають достатніх умов диференційовності.

Наприклад, функція $z = \sqrt[3]{x^2 y}$ має частинні похідні в точці $(0,0)$, але не є диференційовною в цій точці.

Неперервність даної функції є очевидною. Покажемо існування частинних похідних в точці $(0,0)$ за означенням:

$$\frac{\partial z(0,0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(0 + \Delta x, 0) - z(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0.$$

Аналогічно,

$$\frac{\partial z(0,0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{z(0, 0 + \Delta y) - z(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0,$$

тобто задана функція має обидві частинні похідні.

Доведемо, що вона не диференційовна в точці $(0,0)$. Доведення проведемо методом від супротивного.

Припустимо, що функція $z = \sqrt[3]{x^2 y}$ диференційовна в точці $(0,0)$, тоді її повний приріст можна подати у вигляді (1.5):

$$\begin{aligned}\Delta z &= z(0 + \Delta x; 0 + \Delta y) - z(0;0) = z(\Delta x, \Delta y) - 0 = \sqrt[3]{(\Delta x)^2 (\Delta y)} = \\ &= 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y = \alpha \Delta x + \beta \Delta y,\end{aligned}$$

тобто $\sqrt[3]{(\Delta x)^2 (\Delta y)} = \alpha \Delta x + \beta \Delta y$, де $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta = 0$. Покладемо в останній рівності $\Delta x = \Delta y$, отримаємо $\Delta x = \Delta x(\alpha + \beta)$ або $\alpha + \beta = 1$, $(\Delta x \neq 0)$, що неможливо. Отримане протиріччя і доводить, що функція $z = \sqrt[3]{x^2 y}$ не є диференційовною в точці $(0,0)$.

Наступна теорема дає достатні умови диференційовності функції в точці.

Теорема 3. *Якщо функція* $z = f(x,y)$ *має скінченні частинні похідні в околі точки* $M_0(x_0, y_0)$*, які є неперервними в цій точці, то дана функція диференційовна в точці* $M_0(x_0, y_0)$.

Доведення. Запишемо повний приріст функції $z = f(x,y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ у вигляді

$$\Delta z(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$
$$= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)].$$

Вираз у перших квадратних дужках є частинним приростом функції $f(x,y)$ по змінній x в точці $(x_0, y_0 + \Delta y)$, вираз у других квадратних дужках являє собою частинний приріст даної функції по змінній y в точці (x_0, y_0). Кожен з цих приростів можна подати за **формулою скінчених приростів** для функції однієї змінної у вигляді

$$\Delta z(x_0, y_0) = f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x + f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta y,$$

де $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$, або

$$\Delta z(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + [f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x_0, y_0)]\Delta x +$$
$$+ [f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) - f'_y(x_0, y_0)]\Delta y. \quad (1.8)$$

Позначимо

$$f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x_0, y_0) = \alpha,$$
$$f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) - f'_y(x_0, y_0) = \beta, \quad (1.9)$$

де $\alpha(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y)$ та $\beta(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y)$.

Тоді (1.8) набуває вигляду

$$\Delta z(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y.$$

Оскільки $x_0 + \theta_1 \Delta x \to x_0$, $y_0 + \Delta y \to y_0$, $y_0 + \theta_2 \Delta y \to y_0$ при $\Delta x \to 0$ та $\Delta y \to 0$ (θ_1, θ_2- обмежені величини), то з неперервності частинних похідних функції $z = f(x,y)$ в точці (x_0, y_0) слідує, що значення частинних похідних в (1.9) прямують до $f'_x(x_0, y_0)$ та $f'_y(x_0, y_0)$, а α та β прямують до 0.

Отже, функція $z = f(x,y)$ є диференційовною в точці (x_0, y_0). Теорему доведено.

Диференціювання складної функції двох змінних

Розглянемо функцію $z = f(x,y)$, у якої змінні x та y є, в свою чергу, функціями від змінної t: $x = x(t), y = y(t)$.

Теорема. *Якщо функція* $z = f(x,y)$ *має неперервні частинні похідні у деякій точці* $M(x_0, y_0)$*, а функції* $x = x(t), y = y(t)$ *мають похідні в точці* t_0*, тоді функція* $z = f(x,y)$ *має похідну по змінній* t*, яка обчислюється за формулою*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Приклад. Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = \cos^2 x - \sin y$, $x = t^2 + t - 1$, $y = t^3 - 2t$.

Розв'язання. Функція $z = \cos^2 x - \sin y$ диференційовна в усіх точках площини, оскільки має неперервні частинні похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\cos y.$$

Функції $x = t^2 + t - 1$ та $y = t^3 - 2t$ також диференційовні для будь-яких значень t і

$$\frac{dx}{dt} = 2t + 1, \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2 - 2.$$

Отже, для даної функції всі умови теореми виконуються. Отримаємо

$$\frac{dz}{dt} = -(2t+1)\sin 2x - (3t^2 - 2)\cos y = -(2t+1)\sin 2(t^2 + t - 1) - (3t^2 - 2)\cos(t^3 - 2t).$$

Зауваження. У частинному випадку для функції $z = f(x,y)$, де $y = \varphi(x)$, за попередньою теоремою отримаємо, що

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

Теорема. *Якщо функція* $z=f\left(x,y\right)$ *диференційовна в точці* $M\left(x_0,y_0\right)$, *а функції* $x=x(u,v),\ y=y(u,v)$ *мають скінченні частинні похідні* $\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial v}$ *в точці* $\left(u_0,v_0\right)$, *причому* $x_0=x(u_0,v_0),\quad y_0=y(u_0,v_0)$, *то складна функція* $f\left(x(u,v),y(u,v)\right)$ *має частинні похідні по змінним* u *та* v, *і справедливі рівності*

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},\qquad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{1.10}$$

Приклад. Знайти $\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо $z=x^2\ln y,\ x=\frac{u}{v},\ y=3u-3v$.

Розв'язання. Маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\ln y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2}{y};$$
$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{v},\quad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{u}{v^2};\quad \frac{\partial y}{\partial u}=3,\quad \frac{\partial y}{\partial v}=-3.$$

Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial u}=2x\ln y\cdot\frac{1}{v}+\frac{x^2}{y}\cdot 3=\frac{2u}{v^2}\ln 3(u-v)+\frac{3u^2}{3v^2(u-v)}=\frac{2u}{v^2}\ln 3(u-v)+\frac{u^2}{v^2(u-v)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=2x\ln y\cdot\left(-\frac{u}{v^2}\right)+\frac{x^2}{y}\cdot(-3)=-\frac{2u^2}{v^3}\ln 3(u-v)-\frac{u^2}{v^2(u-v)}.$$

Повний диференціал функції двох змінних

Розглянемо клас функцій, що мають частинні похідні, і виділимо ті, для яких виконується співвідношення (1.5),

$$\Delta f\left(x_0,y_0\right)=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y,$$

де $\alpha\to 0,\ \beta\to 0$ при $\Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0$.

Покажемо, що при $\Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0$ різниця між сумою $f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y$ та $\Delta f\left(x_0,y_0\right)$ є нескінченно малою більш високого порядку, ніж нескінченно мала $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ (це відстань між точками (x_0, y_0) та $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$).

Дійсно, при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ маємо:

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\alpha \Delta x + \beta \Delta y}{\rho} = \lim_{\rho \to 0} \left(\alpha \frac{\Delta x}{\rho} + \beta \frac{\Delta y}{\rho} \right) = 0.$$

$$\left(\frac{|\alpha \Delta x + \beta \Delta y|}{\rho} = \left| \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2}} + \beta \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2}} \right| \le |\alpha| + |\beta| \to 0, \ \ \Delta x \to 0, \Delta y \to 0. \right)$$

Означення. Нехай функція $z = f(x, y)$ є диференційовною в точці (x_0, y_0). Частина $f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$ її повного приросту $\Delta f(x_0, y_0)$, яка лінійно залежить від Δx та Δy, називається ***повним диференціалом*** функції $z = f(x, y)$ в точці (x_0, y_0) і позначається dz, тобто

$$dz = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y. \tag{1.11}$$

Формулу повного приросту функції $z = f(x, y)$ в точці (x_0, y_0) можна подати у вигляді

$$\Delta z(x_0, y_0) = dz(x_0, y_0) + \alpha \Delta x + \beta \Delta y, \tag{1.12}$$

де $\alpha \to 0, \beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Приклад. Знайти повний диференціал функції $z = \sin x^y$.

Розв'язання. Оскільки змінні x та y є незалежними, то знаходження повного диференціалу зводиться до знаходження частинних похідних заданої функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y x^{y-1} \cos x^y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x \cos x^y.$$

Повний диференціал має вигляд

$$dz = y x^{y-1} \cos x^y dx + x^y \ln x \cos x^y dy = x^{y-1} \cos x^y \left(y dx + x \ln x dy \right).$$

Доведемо одну з найважливіших властивостей повного диференціала складної функції.

Нехай $z = f(x, y)$, а $x = x(s,t)$, $y = y(s,t)$, тобто ця функція є складною функцією від змінних s та t. З (1.11) маємо:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial s}ds + \frac{\partial z}{\partial t}dt,$$

де ds, dt – диференціали незалежних змінних s та t відповідно.

Знайдемо частинні похідні складної функції по змінним s та t за формулами (1.10) і згрупуємо вирази відносно $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right)ds + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)dt =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial s}ds + \frac{\partial x}{\partial t}dt\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial s}ds + \frac{\partial y}{\partial t}dt\right). \qquad (1.13)$$

Вирази в дужках є відповідно повними диференціалами функцій $x = x(s,t)$ та $y = y(s,t)$ $\left(\frac{\partial x}{\partial s}ds + \frac{\partial x}{\partial t}dt = dx,\ \frac{\partial y}{\partial s}ds + \frac{\partial y}{\partial t}dt = dy\right)$, тому повний диференціал (1.13) має вигляд $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$.

Отже, ***форма повного диференціала функції двох змінних є інваріантною (незмінною).***

Аналогічно, для функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$ справедлива формула для знаходження повного диференціала:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

Формула (1.12) дозволяє отримати наближену формулу для знаходження повного приросту функції в точці через її повний диференціал:

$$\Delta z \approx dz.$$

Зокрема, для функції двох змінних користуються наближеною рівністю:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y .$$

Властивість $\Delta z \approx dz$ використовують для наближених обчислень значень функції в точці.

Приклад. Обчислити наближено значення $2{,}003^2 \cdot 3{,}004^3$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $z = x^2 y^3$. Покладемо $x_0 = 2$, $y_0 = 3$, $\Delta x = 0{,}003$, $\Delta y = 0{,}004$. Маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y^2,\ z(2;3) = 2^2 \cdot 3^3 = 108,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2;3) = 2 \cdot 2 \cdot 3^3 = 108,\ \frac{\partial z}{\partial y}(2;3) = 3 \cdot 2^2 \cdot 3^2 = 108.$$

Отже,

$$\begin{aligned} &2{,}003^2 \cdot 3{,}004^3 \approx 108 + 108 \cdot 0{,}003 + 108 \cdot 0{,}004 = \\ &= 108 \cdot (1 + 0{,}003 + 0{,}004) = 108 \cdot 1{,}007 = 108{,}756. \end{aligned}$$

Зауваження. Методи диференціального числення функцій кількох змінних застосовують у теорії похибок. Зокрема, якщо маємо функцію $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, де величини $x_1, x_2, ..., x_n$ виміряні з точностями $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ відповідно, то максимальна абсолютна похибка $|\Delta^* u|$ для функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ обчислюється за формулою

$$|\Delta^* u| = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| |\Delta^* x_i|.$$

Так, максимальна абсолютна похибка обчислення

1) суми $u = x + y + z$ дорівнює $|\Delta^* u| = |\Delta^* x| + |\Delta^* y| + |\Delta^* z|$;

2) добутку $u = xy$ дорівнює $|\Delta^* u| = |y||\Delta^* x| + x|\Delta^* y|$;

3) частки $u = \dfrac{x}{y}$ дорівнює $|\Delta^* u| = \dfrac{|y||\Delta^* x| + |x||\Delta^* y|}{|y^2|}$.

Частинні похідні та диференціали вищих порядків

Частинні похідні деякої функції двох змінних також є функціями двох змінних, для яких так само можна обчислювати частинні похідні. Такі частинні похідні називаються ***частинними похідними другого порядку***:

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ (читаємо «де два z по де x двічі»)

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ (читаємо «де два z по де y двічі»)

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ (читаємо «де два z по де x де y»)

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ (читаємо «де два z по де y де x»)

Порядок частинної похідної визначається числом 2 у чисельнику, а вираз у знаменнику вказує на послідовність змінних, за якими шукаємо відповідні частинні похідні.

Від частинних похідних другого порядку можна знаходити частинні похідні третього порядку, зокрема, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ тощо.

Частинні похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \ldots$ називаються ***мішаними***.

Також вживають позначення f''_{xx} або f''_{x^2}, f''_{yy} або f''_{y^2}, f''_{xy}, f'''_{x^3} тощо.

Приклад. Обчислити частинні похідні другого порядку для функції $z=x^2y^3-\sin(x-y)+4x-3y$.

Розв'язання. Маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^3-\cos(x-y)+4, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=3x^2y^2+\cos(x-y)-3.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^3 + \sin(x-y), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6xy^2 - \sin(x-y),$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x^2 y + \sin(x-y), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6xy^2 - \sin(x-y).$$

Справедлива

Теорема. *Якщо функція* $z = f(x,y)$ *має частинні похідні* $f'_x,\ f'_y,\ f''_{xy},\ f''_{yx}$ *в точці* $M_0(x_0, y_0)$ *та в деякому її околі, при цьому мішані похідні* $f''_{xy}(x,y),\ f''_{yx}(x,y)$ *є неперервними в точці* $M_0(x_0,y_0)$, *то* $f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)$.

Доведення. Складемо вираз

$$\omega = \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0,y_0)}{hk}, \tag{1.14}$$

де h,k – досить малі додатні числа, такі, що прямокутник $[x_0, x_0+h, y_0, y_0+k]$ міститься в околі точки M_0.

Розглянемо функцію $\varphi(x) = \dfrac{f(x, y_0+k) - f(x,y_0)}{k}$ і подамо вираз (1.14) у вигляді $\omega = \dfrac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h}$. Знайдемо похідну функції $\varphi(x)$: $\varphi'(x) = \dfrac{f'_x(x, y_0+k) - f'_x(x,y_0)}{k}$ (похідні в правій частині існують за умовою). Функція $\varphi(x)$ має похідну $\varphi'(x)$ на $[x_0, x_0+h]$, тому вона є неперервною на цьому проміжку. За формулою скінченних приростів маємо:

$$\omega = \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h} = \varphi'(x_0+\theta h) = \frac{f'_x(x_0+\theta h, y_0+k) - f'_x(x_0+\theta h, y_0)}{k},$$

де $0 < \theta < 1$.

За умовою теореми існує похідна $f''_{xy} = (f'_x)'_y$. Застосуємо формулу скінченних приростів до функції $f'_x(x_0+\theta h, y)$ як до функції змінної y на проміжку $[y_0, y_0+k]$.

$$\omega = f''_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta_1 k), \text{ де } 0<\theta<1,\ 0<\theta_1<1. \tag{1.15}$$

Якщо розглянути функцію $\psi(y)=\dfrac{f(x_0+h,y)-f(x_0,y)}{h}$ і провести аналогічні міркування, то отримаємо:

$$\omega = f''_{yx}(x_0+\theta_3 h, y_0+\theta_2 k), \text{ де } 0<\theta_2<1,\ 0<\theta_3<1. \quad (1.16)$$

З (1.15) та (1.16) маємо, що $f''_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta_1 k)= f''_{yx}(x_0+\theta_3 h, y_0+\theta_2 k)$.

Якщо $h\to 0,\ k\to 0$, то $x_0+\theta h\to x_0$, $y_0+\theta_1 k\to y_0$, $x_0+\theta_3 h\to x_0$, $y_0+\theta_2 k\to y_0$. За умовою теореми мішані похідні $f''_{xy}(x,y)$ та $f''_{yx}(x,y)$ є неперервними в точці $M_0(x_0,y_0)$, тому при $h\to 0,\ k\to 0$

$$f''_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta_1 k)\to f''_{xy}(x_0,y_0),$$

$$f''_{yx}(x_0+\theta_3 h, y_0+\theta_2 k)\to f''_{yx}(x_0,y_0).$$

Переходячи до границі при $h\to 0,\ k\to 0$, отримаємо: $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$. Теорему доведено.

Ця теорема дозволяє узагальнити твердження про рівність мішаних частинних похідних третього, четвертого і взагалі n-го порядку.

Якщо функція $z=f(x,y)$ має неперервні частинні похідні, то її повний диференціал є також функцією двох змінних і дорівнює

$$df(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy.$$

Знайдемо ***диференціал другого порядку*** (диференціал від диференціала першого порядку):

$$d^2z=d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dy=$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z.$$

Останній вираз є символічним, але дозволяє написати формулу знаходження диференціала n-го порядку:

$$d^n z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z.$$

Приклад. Знайти d^3z, якщо $z = e^{x^2+y^2}$.

Розв'язання. Використаємо останню формулу, за якою

$$d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$$

Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2e^{x^2+y^2}\left(1+2x^2\right), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2e^{x^2+y^2}\left(1+2y^2\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xye^{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 4xe^{x^2+y^2}\left(3+2x^2\right), \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 4ye^{x^2+y^2}\left(3+2y^2\right),$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 4ye^{x^2+y^2}\left(1+2x^2\right), \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 4xe^{x^2+y^2}\left(1+2y^2\right).$$

Отже,

$$d^3z = 4e^{x^2+y^2}\left(x\left(3+2x^2\right)dx^3 + 3y\left(1+2x^2\right)dx^2dy + 3x\left(1+2y^2\right)dxdy^2 + y\left(3+2y^2\right)dy^3\right).$$

Неявні функції та їх диференціювання

Нехай задано рівняння $F(x,y)=0$, де F функція двох змінних, задана в деякій області (D). З'ясуємо, коли це рівняння буде визначати функцію $y = f(x)$, неперервну і диференційовну в околі деякої точки. Зазначимо, що такий спосіб задання функції називається ***неявним***.

Теорема (про існування та диференційовність неявної функції). *Нехай задано рівняння $F(x,y)=0$ і виконуються такі умови:*

1) функція $F(x,y)$ та її частинні похідні $F'_x(x,y)$, $F'_y(x,y)$ визначені та неперервні у прямокутнику $D = \{(x,y)\colon x_0 - a \le x \le x_0 + a,\ y_0 - b \le y \le y_0 + b\}$, де a, b – дійсні додатні числа;

2) $F(x_0, y_0) = 0$;

3) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Тоді існує окіл точки (x_0, y_0), в якому рівняння $F(x, y) = 0$ визначає функцію $y = f(x)$, неперервну та диференційовну в околі точки x_0 таку, що $f(x_0) = y_0$, і похідна цієї функції обчислюється за формулою

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} . \tag{1.17}$$

Приклад. Чи задає рівняння $F(x, y) = x^3 - 2xy + 3y^2 - 2x + 5y + 1$ неявну функцію від змінної x? Якщо так, то знайти її похідну.

Розв'язання. Перевіримо виконання умов теореми. Функція $F(x, y) = x^3 - 2xy + 3y^2 - 2x + 5y + 1$ визначена та неперервна в усій площині xOy як многочлен. Знайдемо її частинні похідні:

$$F'_x(x, y) = 3x^2 - 2y - 2, \quad F'_y(x, y) = -2x + 6y + 5 .$$

Очевидно, що функції $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ визначені та неперервні в усіх точках площини xOy, а, отже, існують такі точки (x_0, y_0), в яких $F(x_0, y_0) = 0$ та $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, наприклад, точка $(1;-1)$, де $F(1,-1) = 0$, $F'_y(1,-1) = -6 \neq 0$.

За наведеною теоремою в околі точки $(1;-1)$ рівняння $F(x, y) = x^3 - 2xy + 3y^2 - 2x + 5y + 1$ визначає неперервну та диференційовну функцію $y = f(x)$, похідна якої має вигляд

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = \frac{3x^2 - 2y - 2}{2x - 6y - 5} .$$

Зауважимо, що похідну неявної функції $y = f(x)$ можна знайти й іншим способом, якщо продиференціювати рівняння $x^3 - 2xy + 3y^2 - 2x + 5y + 1 = 0$ по змінній x, вважаючи, що $y = y(x)$:

$$3x^2 - 2y - 2xy' + 6yy' - 2 + 5y' = 0 .$$

Звідси

$$y'(x) = \frac{3x^2 - 2y - 2}{2x - 6y - 5} .$$

Зауваження. Якщо $F'_x(x_0, y_0) = F'_y(x_0, y_0) = 0$, то точку (x_0, y_0) кривої, заданої рівнянням $F(x, y) = 0$, називають *особливою*.

Похідну другого порядку знаходять диференціюванням функції (1.17), при цьому вважають, що $y = y(x)$.

Приклад. Знайти y''_{xx}, якщо $arctg\, y - y + x = 0$.

Розв'язання. Вираз $arctg\, y - y + x = 0$ продиференціюємо по x, вважаючи $y = y(x)$, та визначимо y'_x: $\frac{y'}{1+y^2} - y' + 1 = 0$ або $y' = \frac{1+y^2}{y^2} = 1 + y^{-2}$.

Продиференціюємо ще раз по x:

$$y'' = -2y^{-3}y' = -\frac{2(1+y^2)}{y^5}.$$

Аналогічно, частинні похідні неявної функції $z = \varphi(x, y)$, заданої рівнянням $F(x, y, z) = 0$, де $F(x, y, z)$ є диференційовною функцією і $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, можуть бути обчислені за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Приклад. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції $z = f(x, y)$, якщо $cos(xyz) + 2xz = 3yz.$

Розв'язання. З умови отримаємо:

$$F(x, y, z) = \cos xyz + 2xz - 3yz.$$

Маємо

$$F'_x = -yz\sin xyz + 2z,$$
$$F'_y = -xz\sin xyz - 3z,$$
$$F'_z = -xy\sin xyz + 2x - 3y.$$

Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz\sin xyz - 2z}{xy\sin xyz - 2x + 3y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz\sin xyz + 3z}{xy\sin xyz - 2x + 3y}.$$

Розглянемо застосування даної теорії при розв’язуванні задач геометрії.

Дотична та нормаль до плоскої кривої

Нехай рівняння $F(x,y)=0$ задає деяку криву на площині xOy, точка $M_0(x_0,y_0)$ належить цій кривій, функція $F(x,y)$ є диференційовною в точці $M_0(x_0,y_0)$. Відомо, що рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=f(x)$ в точці x_0 відповідно мають вигляд:

$$y-y_0=k(x-x_0),$$

$$y-y_0=-\frac{1}{k}(x-x_0),\ k\neq 0,$$

де k – кутовий коефіцієнт дотичної. Якщо $k=0$, то рівнянням нормалі є $x=x_0$.

З геометричного змісту похідної та формули (1.17) маємо, що $k=f'(x_0)=-\dfrac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}$, де $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$. Тоді рівняння дотичної і нормалі відповідно будуть такими:

$$y-y_0=-\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}(x-x_0),$$

$$y-y_0=\frac{F'_y(x_0,y_0)}{F'_x(x_0,y_0)}(x-x_0)$$

або

$$F'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0, \qquad (1.18)$$

$$F'_y(x_0,y_0)(x-x_0)-F'_x(x_0,y_0)(y-y_0)=0. \qquad (1.19)$$

Рівняння (1.18), (1.19) визначають ***дотичну*** та ***нормаль*** до кривої $F(x,y)=0$ і у випадку, коли $F'_y(x_0,y_0)=0$, але $F'_x(x_0,y_0)\neq 0$.

Якщо $F'_x(x_0,y_0)=F'_y(x_0,y_0)=0$, то точка $M_0(x_0,y_0)$ є особливою, в цій точці рівняння (1.18), (1.19) втрачають зміст.

Приклад. Записати рівняння дотичної і нормалі до кривої $x^2y^2-3x+6y+11=0$ в точці $(1;-2)$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $F(x,y)=x^2y^2-3x+6y+11$ і знайдемо її частинні похідні F'_x та F'_y в точці $(1;-2)$:

$$F'_x(x,y)=2xy^2-3,\quad F'_y(x,y)=2x^2y+6,$$

$$F'_x(1;-2)=5,\quad F'_y(1;-2)=2.$$

Рівняння дотичної та нормалі відповідно мають вигляд $5x+2y-1=0$ і $2x-5y-12=0$.

Дотична площина та нормаль до поверхні

Нехай деяка поверхня задана рівнянням $F(x,y,z)=0$ і точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ належить цій поверхні.

Означення. ***Дотичною до поверхні*** в точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$ називають дотичну до довільної кривої L, яка повністю лежить на поверхні і проходить через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ (рис. 12).

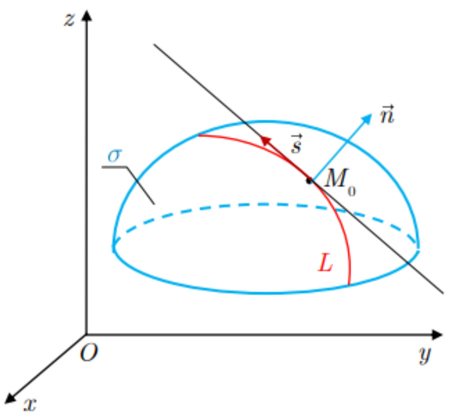


Рис. 12

Будемо вважати, що функція $F(x,y,z)=0$ є диференційовною в точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$, а крива L задана в параметричному вигляді $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$, де функції $x(t),\ y(t),\ z(t)$ визначені та диференційовні на проміжку $(\alpha;\beta)$.

Рівняння дотичної до кривої L в точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$ має вигляд:

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)},\quad t_0\in(\alpha;\beta). \tag{1.20}$$

Оскільки крива L лежить на поверхні, то координати точок цієї кривої задовольняють рівняння поверхні, тобто $F(x(t), y(t), z(t)) = 0$. Продиференціюємо цю тотожність по змінній t, при $t = t_0$ маємо:

$$F'_x(M_0)x'(t_0) + F'_y(M_0)y'(t_0) + F'_z(M_0)z'(t_0) = 0. \qquad (1.21)$$

Розглянемо пряму

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}. \qquad (1.22)$$

З (1.21) маємо, що скалярний добуток напрямних векторів прямих (1.20) і (1.22) дорівнює нулю, тобто вони є взаємно перпендикулярними. Отже, і прямі (1.20) та (1.22) також взаємно перпендикулярні.

Очевидно, що пряма (1.22) цілком визначається поверхнею $F(x, y, z) = 0$ та точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і не залежить від кривої L. Тому всі дотичні, проведені в точці M_0 до всіх можливих кривих, що лежать на цій поверхні і проходять через цю точку, є перпендикулярними до прямої (1.22).

Означення. Площину, в якій лежать усі дотичні, проведені в точці M_0 до всіх можливих кривих, що належать поверхні $F(x, y, z) = 0$ і проходять через цю точку, називають ***дотичною площиною*** до поверхні в точці M_0.

Рівняння дотичної площини до поверхні $F(x, y, z) = 0$ в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ має вигляд:

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0. \qquad (1.23)$$

Пряму (1.22), перпендикулярну до дотичної, проведеної до поверхні $F(x, y, z) = 0$ в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$, називають ***нормаллю*** до поверхні в цій точці.

Якщо поверхня задана в явному вигляді, тобто $z = f(x, y)$, то рівняння (1.22) і (1.23) набувають вигляду відповідно:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

та

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Приклад. Записати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $e^{xy} + 3xz^2 - 2x^2y + 5x - y + z = 7$ в точці $(0, 0, 6)$.

Розв'язання. Обчислимо частинні похідні функції $F(x, y, z) = e^{xy} + 3xz^2 - 2x^2y + 5x - y + z - 7$ в точці $(0, 0, 6)$:

$F'_x(x, y, z) = ye^{xy} + 3z^2 - 4xy + 5$,

$F'_y(x, y, z) = xe^{xy} - 2x^2 - 1$,

$F'_z(x, y, z) = 6xz + 1$,

$F'_x(0, 0, 6) = 113$, $\quad F'_y(0, 0, 6) = -1$, $\quad F'_z(0, 0, 6) = 1$.

Рівняння нормалі матиме вигляд $\dfrac{x}{113} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z - 6}{1}$, а рівнянням дотичної площини до поверхні є $113x - y + z - 6 = 0$.

Зауваження. Рівняння дотичної площини дозволяє з'ясувати ***геометричний зміст повного диференціала*** функції $z = f(x, y)$: повний диференціал функції $z = f(x, y)$, обчислений в точці $M_0(x_0, y_0)$, дорівнює приросту аплікати точки дотичної площини, проведеної до поверхні $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$, що відповідає приростам незалежних змінних Δx та Δy.

Похідна за напрямом та градієнт функції

Означення. Область простору, кожній точці M якої поставлено у відповідність значення деякої скалярної величини $u(M)$, називають ***скалярним полем***.

Важливою характеристикою скалярного поля є швидкість зміни поля в заданому напрямі.

Нехай скалярне поле визначено функцією $u = u(x, y, z)$, а $\vec{l}$ – вектор, який виходить з точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і має напрямні косинуси $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ (косинуси кутів, що утворює даний вектор з додатними напрямами координатних осей). Точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ належить вектору $\vec{l}$, а довжина вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ дорівнює p.

Позначимо через

$$\Delta u(M_0) = u(M_1) - u(M_0) = u(x_0 + p\cos\alpha, y_0 + p\cos\beta, z_0 + p\cos\gamma) - u(x_0, y_0, z_0).$$

Означення. Якщо існує границя відношення $\dfrac{\Delta u(M_0)}{p}$, коли $p \to 0$, то її називають ***похідною функції*** $u(x, y, z)$ ***за напрямом*** $\bar{l}$ в точці M_0 і позначають символом

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \lim_{p\to 0} \frac{\Delta u(M_0)}{p}.$$

Справедлива

Теорема. *Якщо функція* $u(x, y, z)$ *диференційовна в точці* $M_0(x_0, y_0, z_0)$, *то в цій точці вона має похідну за напрямом вектора* $\vec{l}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, *яка обчислюється за формулою*

$$\frac{\partial u}{\partial l}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma.$$

У випадку функції двох змінних $u = u(x, y)$ похідна за напрямом вектора $\vec{l}(\cos\alpha, \cos\beta)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ матиме вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial l}(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\cos\beta.$$

Приклад. Обчислити похідну функції $u(x, y) = xy + \sqrt{x^2 + y^2}$ в точці $M_0(1;2)$ у напрямі бісектриси першого координатного кута.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні функції в точці $M_0(1;2)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1;2) = 2 + \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(1;2) = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Для бісектриси першого координатного кута $\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{4}$, тому $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Отже, $\dfrac{\partial u}{\partial l}(1;2)=\left(2+\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Означення. ***Градієнтом*** функції $u(x,y,z)$ називається вектор

$$\overline{grad\,u}=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k},$$

де $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ – одиничні вектори або орти координатних осей.

Градієнт – це вектор, який показує напрям найбільшої зміни скалярного поля $u(x,y,z)$ (рис. 13).

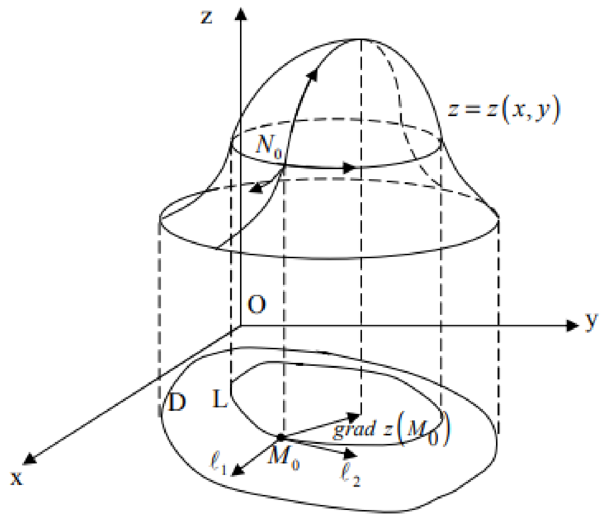


Рис. 13

Приклад. Знайти величину та напрям градієнта поля $u(x,y,z)=x^2-y^2+2z^2+x+3y-5$ в точці $A(0;1;-2)$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні функції в точці $A(0;1;-2)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+1,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y+3,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=4z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(A)=1,\quad \frac{\partial u}{\partial y}(A)=1,\quad \frac{\partial u}{\partial z}(A)=-8.$$

Отже, $\overline{grad\,u}(A)=\bar{i}+\bar{j}-8\bar{k}$, величина $\left|\overline{grad\,u}(A)\right|=\sqrt{66}$, а його напрям визначається напрямними косинусами

$$\cos\alpha=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(A)}{\left|\overline{grad\,u}(A)\right|}=\frac{1}{\sqrt{66}},\quad \cos\alpha=\frac{\frac{\partial u}{\partial y}(A)}{\left|\overline{grad\,u}(A)\right|}=\frac{1}{\sqrt{66}},\quad \cos\alpha=\frac{\frac{\partial u}{\partial z}(A)}{\left|\overline{grad\,u}(A)\right|}=-\frac{8}{\sqrt{66}}.$$

Екстремуми функції багатьох змінних

Локальний екстремум

Означення. Якщо в деякому околі $(x_0-\delta, x_0+\delta; y_0-\delta_1, y_0+\delta_1)$ точки $M_0(x_0,y_0)$ виконується нерівність $f(x_0,y_0)>f(x,y)$ ($f(x_0,y_0)<f(x,y)$), то говорять, що функція $z=f(x,y)$ має в точці $M_0(x_0,y_0)$ локальний максимум (мінімум), які називаються ***точками локального екстремуму*** (рис. 14).

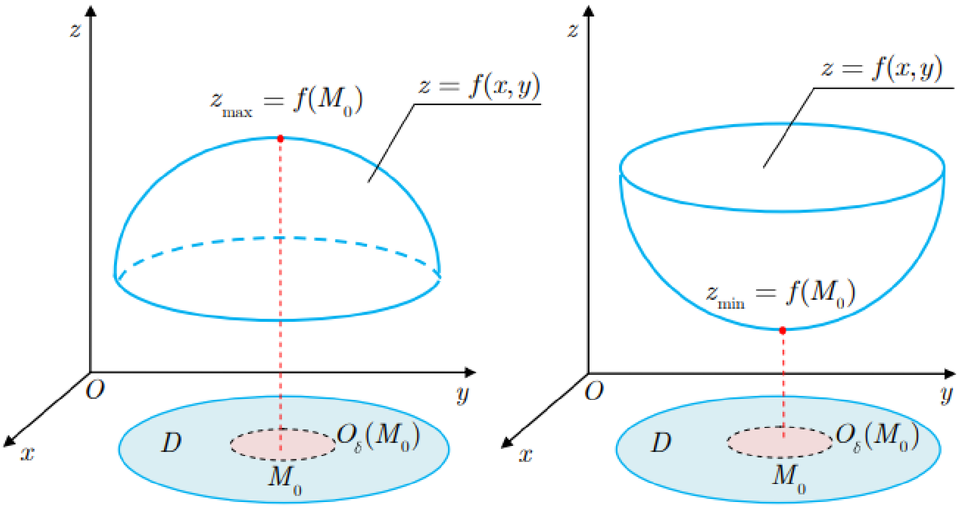


Рис. 14

З'ясуємо необхідні і достатні умови існування екстремуму.

Теорема (необхідна умова локального екстремуму функції двох змінних). *Якщо диференційовна функція $z=f(x,y)$ має екстремум в точці $M_0(x_0,y_0)$, то її частинні похідні в цій точці дорівнюють нулю, тобто*

$$f'_x(x_0,y_0)=0,\quad f'_y(x_0,y_0)=0.$$

Доведення. Для визначеності розглянемо випадок, коли функція $f(x,y)$ має максимум в точці $M_0(x_0,y_0)$, тобто в деякому околі $(x_0-\delta, x_0+\delta; y_0-\delta_1, y_0+\delta_1)$ цієї точки виконується нерівність

$$f(x_0,y_0) > f(x,y). \tag{1.24}$$

Розглянемо точки з даного околу, для яких $y=y_0$. З нерівності (1.24) маємо $f(x_0,y_0) > f(x,y_0)$. Це означає, що отримана диференційовна функція $f(x,y_0)$ однієї змінної x має максимум в точці $x=x_0$, тому $f'(x_0,y_0)=0$ (з необхідної умови екстремуму функції однієї змінної). Очевидно, що ця похідна співпадає з частинною похідною по x функції $f(x,y)$ двох змінних, обчисленою в точці $M_0(x_0,y_0)$, тому

$$f'_x(x_0,y_0)=0. \tag{1.25}$$

Міркуючи аналогічно, далі розглядаємо тільки ті точки околу $(x_0-\delta, x_0+\delta; y_0-\delta_1, y_0+\delta_1)$, для яких $x=x_0$, а нерівність (1.24) має вигляд $f(x_0,y_0) > f(x_0,y)$ і переконуємося, що

$$f'_y(x_0,y_0)=0. \tag{1.26}$$

Теорему доведено.

Зауваження. Необхідні умови екстремуму можуть бути сформульовані інакше: *Якщо диференційовна функція $f(x,y)$ має екстремум в точці $M_0(x_0,y_0)$, то її повний диференціал, обчислений в точці $M_0(x_0,y_0)$, дорівнює нулю:*

$$df(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)dx + f'_x(x_0,y_0)dy = 0. \tag{1.27}$$

Дійсно, якщо виконуються умови (1.25) і (1.26) даної теореми, то $df(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)dx + f'_y(x_0,y_0)dy = 0$.

Справедливе й обернене твердження. Нехай $df(x_0,y_0)=0$. Оскільки dx, dy співпадають з приростами незалежних змінних і $dx \neq 0, dy \neq 0$, то $f'_x(x_0,y_0)=0$, $f'_y(x_0,y_0)=0$.

Отже, з теореми випливає, що для знаходження точок, в яких диференційовна функція $f(x,y)$ може мати екстремум, треба розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=0, \\ f'_y(x,y)=0. \end{cases}$$

Приклад функції $z=\sqrt{x^4+y^2}$, яка, очевидно, має мінімум у точці $O(0{,}0)$ і не має в цій точці частинних похідних, показує, що екстремум можливий і у точках, де частинні похідні першого порядку не існують.

Означення. Точки $M_0(x_0,y_0)$, в яких частинні похідні f'_x і f'_y дорівнюють нулю, називаються ***стаціонарними***. Точки, в яких частинні похідні f'_x, f'_y дорівнюють нулю або не існують, називаються *критичними*.

Теорема (достатні умови існування локального екстремуму функції двох змінних). *Нехай функція* $f(x,y)$ *в околі критичної точки* $M_0(x_0,y_0)$ *має неперервні частинні похідні другого порядку, і число* $\Delta(M_0)= f''_{xx}(M_0)\cdot f''_{yy}(M_0)- f''^2_{xy}(M_0)$.

Якщо $\Delta(M_0)>0$*, то функція* $f(x,y)$ *має екстремум в точці* M_0*, причому максимум при* $f''_{xx}(M_0)<0$ *і мінімум при* $f''_{xx}(M_0)>0$*. Якщо* $\Delta(M_0)<0$*, то функція* $f(x,y)$ *не має екстремуму в точці* M_0*. Якщо* $\Delta(M_0)=0$*, то функція* $f(x,y)$ *може або мати, або не мати локального екстремуму в точці* M_0.

Приклад. Знайти локальні екстремуми функції $z=2x^3-3xy+y^2$.

Розв'язання. Дана функція визначена на всій площині xOy. Обчислимо частинні похідні $z'_x=6x^2-3y,\ \ z'_y=-3x+2y$ та складемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 6x^2-3y=0, \\ -3x+2y=0. \end{cases}$$

Її розв'язками є точки $M_1(0{,}0),\ M_2\left(\frac{3}{4},\frac{9}{8}\right)$.

Знайдемо частинні похідні другого порядку та складемо вираз $\Delta(M)$: $z''_{xx} = 12x,\ z''_{yy} = 2,\ z''_{xy} = -3,\ \Delta(M) = 24x - 9$.

Значеннями цього виразу в точках $M_1(0;0),\ M_2\left(\frac{3}{4};\frac{9}{8}\right)$ є $\Delta(M_1) = -9 < 0$, $\Delta(M_2) = 9 > 0$. Отже, в точці $M_1(0;0)$ задана функція екстремуму не має, а оскільки $z''_{xx}(M_2) = 9 > 0$, то точка $M_2\left(\frac{3}{4};\frac{9}{8}\right)$ є точкою локального мінімуму функції.

Приклад. Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 7$.

Розв'язання. Дана функція визначена на всій площині xOy, її частинними похідними першого порядку є

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15,\quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12.$$

Для знаходження стаціонарних точок розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0; \\ 6xy - 12 = 0. \end{cases}$$

Отримали точки $M_1(1;2),\ M_2(-1;-2),\ M_3(2;1),\ M_4(-2;-1)$.

Складемо вираз Δ. Маємо

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y,$$

$$\Delta = 36x^2 - 36y^2 .$$

Обчислимо значення виразу Δ в цих точках:

$$\Delta(M_1) = 36 - 144 = -108 < 0,$$
$$\Delta(M_2) = 36 - 144 = -108 < 0,$$
$$\Delta(M_3) = 144 - 36 = 108 > 0,$$
$$\Delta(M_4) = 144 - 36 = 108 > 0.$$

Отже, точки $M_3(2;1),\ M_4(-2;-1)$ є точками екстремуму функції, при чому точка M_3 є точкою локального мінімуму, оскільки

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_3) = 6 \cdot 2 = 12 > 0$, а точка M_4 є точкою локального максимуму, бо $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_4) = 6 \cdot (-2) = -12 < 0$.

Найбільше та найменше значення функції в області

Нехай функція $z = f(x, y)$ неперервна в деякій замкненій обмеженій області (D). Тоді, за теоремою Вейєрштрасса, вона набуває в цій області своїх найменшого і найбільшого значень (***глобальні екстремуми***).

Функція $z = f(x, y)$ є диференційовною в (D), тому найбільшого та найменшого значень всередині області вона може набувати тільки в точках екстремуму. Проте, цих значень функція може набувати і на межі області. Тому при дослідженні функції на глобальний екстремум потрібно обчислити її значення в критичних точках, що належать області (D), знайти найбільше та найменше значення функції на межі області і вибрати серед усіх одержаних значень найбільше та найменше.

Приклад. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = 2x^3 - 3xy + y^2$ в області (D), обмеженій лініями $y = x,\ y = 3,\ x = -1$.

Розв'язання. Область (D) зображена на рисунку 15. Функція $z = 2x^3 - 3xy + y^2$ є неперевною на всій площині xOy.

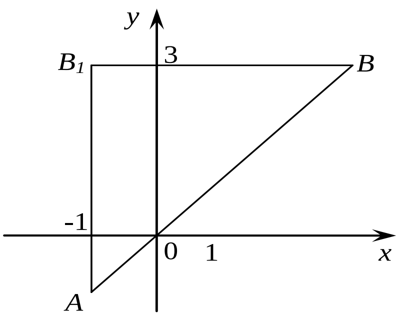


Рис. 15

Стаціонарні точки заданої функції були знайдені в попередній задачі: $M_1(0,0),\ M_2\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{9}{8}\right)$.

Вони належать області (D), а значення функції в цих точках $z(M_1) = 0, \quad z(M_2) = -\dfrac{27}{64}$.

Межею області (D) є трикутник ABC, тому дослідимо функцію на відрізках $AB,\ BC,\ AC$.

1) $AB: y = x,\ x \in [-1;3]$

У вираз для функції $z(x, y)$ замість змінної y підставимо праву частину з рівняння прямої $y = x$, якій належить відрізок: $z(AB) = 2x^3 - 2x^2$. Отримали функцію однієї змінної, для якої застосуємо алгоритм знаходження найменшого та найбільшого значень на відрізку. Маємо, що $z'(AB) = 6x^2 - 4x$, стаціонарні точки $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{2}{3}$, які належать відрізку $[-1,3]$. Функція $z(AB) = 2x^3 - 2x^2$ в цих точках набуває значень $z(0) = 0$, $z\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}$.

2) $BC: y = 3,\ x \in [-1;3]$

Функція z на відрізку BC набуває вигляду $z(BC) = 2x^3 - 9x + 9$. $z'(BC) = 6x^2 - 9$, $6x^2 - 9 = 0$, $x_{1,2} = \pm\frac{3}{\sqrt{6}}$. Точка $x = -\frac{3}{\sqrt{6}}$ не належить відрізку $[-1;3]$, тому ми її не розглядаємо. Точка $x = \frac{3}{\sqrt{6}}$ належить відрізку $[-1,3]$, отже, $z\left(\frac{3}{\sqrt{6}}\right) = 9 - 3\sqrt{6}$.

3) $AC: x = -1,\ y \in [-1;3]$

Функція z на відрізку AC набуває вигляду $z(AC) = -2 + 3y + y^2$, $z'(AC) = 2y + 3$. З рівняння $2y + 3 = 0$ отримали критичну точку $y = -\frac{3}{2}$, вона не належить відрізку $[-1;3]$.

4) Запишемо значення функції на кінцях відрізків AB, BC, AC:

$z(A) = -4, z(B) = 36,\ z(C) = 16.$

5) Порівняємо всі знайдені значення і виберемо найменше та найбільше з них.

Отже, $\min\limits_{(D)} z = z(A) = -4$, $\max\limits_{(D)} z = z(B) = 36$, де $A(-1;1)$, $B(3;3)$.

Умовний екстремум

Розглянемо диференційовну функцію трьох змінних $u = f(x, y, z)$, де змінні x, y, z пов'язані деяким співвідношенням

$$\varphi(x, y, z) = 0 . \tag{1.28}$$

Рівняння $\varphi(x, y, z) = 0$ називається ***рівнянням зв'язку***.

Означення. Нехай координати точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ задовольняють рівняння зв'язку (1.28). Якщо для всіх точок $M(x, y, z)$ з деякого околу точки M_0 виконується нерівність $f(x_0, y_0, z_0) > f(x, y, z)$ ($f(x_0, y_0, z_0) < f(x, y, z)$), то говорять, що функція $u = f(x, y, z)$ має ***умовний максимум*** (***умовний мінімум***) в точці M_0. Умовний максимум і умовний мінімум називають ***умовними екстремумами***.

Якщо змінну z з рівняння (1.28) можна виразити через x та y, тобто $z = g(x, y)$, та підставити цей вираз у функцію $u = f(x, y, z)$, то отримаємо складну функцію двох змінних x і y:

$$u = f(x, y, g(x, y)). \tag{1.29}$$

У цьому випадку умовний екстремум функції $u = f(x, y, z)$ співпадає із звичайним екстремумом складної функції (1.29).

Зауваження. Замість змінної z можна розглядати іншу змінну, якщо її легко виразити з рівняння зв'язку.

Приклад. Знайти прямокутний паралелепіпед заданого об'єму V, який має найменшу поверхню.

Розв'язання. Позначимо сторони паралелепіпеда через x, y, z і запишемо формулу для обчислення поверхні:

$$S(x, y, z) = 2xy + 2yz + 2xz .$$

Оскільки об'єм паралелепіпеда заданий, то $xyz = V$ і $z = \dfrac{V}{xy}$. Підставимо цей вираз у функцію $S(x, y, z)$:

$$S=2\left(xy+y\cdot\frac{V}{xy}+\frac{xV}{xy}\right)=2\left(xy+y\cdot\frac{V}{x}+\frac{V}{y}\right),$$

$$S'_x=2\left(y-\frac{V}{x^2}\right),\ \ S'_y=2\left(x-\frac{V}{y^2}\right).$$

Складемо і розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y-\dfrac{V}{x^2}=0, \\ x-\dfrac{V}{y^2}=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{V}{x^2}, \\ x-\dfrac{V}{V^2}x^4=0, \end{cases}$$

$$x\left(1-\frac{1}{V}x^3\right)=0\ .$$

За умовою $x\neq 0:\ 1-\dfrac{x^3}{V}=0,\quad x^3=V,\ \ x=\sqrt[3]{V}$.

Тоді розв'язком системи є $x=\sqrt[3]{V},\ y=\sqrt[3]{V},\ z=\sqrt[3]{V}$.

Отже, прямокутний паралелепіпед має розміри $x=\sqrt[3]{V},\ y=\sqrt[3]{V},\ z=\sqrt[3]{V}$. Легко переконатися, що саме ці розміри забезпечують найменшу поверхню $S=6V^{\frac{2}{3}}$.

Проте, досить часто знайти явну залежність $z=z(x,y)$ буває складно або ж це призводить до громіздких виразів, тому для знаходження умовних екстремумів функцій застосовують так званий ***метод множників Лагранжа***.

Нехай маємо функцію $u=f(x,y,z)$, рівняння зв'язку $\varphi(x,y,z)=0$ і в деякій точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ця функція має умовний екстремум. Припустимо, що рівняння зв'язку визначає неявну функцію $z=z(x,y)$. Тоді складна функція двох змінних $u=f(x,y,z(x,y))$ має в точці (x_0,y_0) звичайний екстремум.

За необхідною умовою екстремуму повний диференціал такої функції в точці (x_0,y_0) дорівнює нулю. В силу інваріантної форми повного диференціала маємо:

$$f'_x(x_0, y_0, z_0)dx + f'_y(x_0, y_0, z_0)dy + f'_z(x_0, y_0, z_0)dz = 0, \qquad (1.30)$$

де dx, dy - довільні прирости незалежних змінних, dz - диференціал неявної функції $z = z(x, y)$.

Якщо в рівнянні зв'язку (1.28) під z розуміти неявну функцію $z = z(x, y)$, то воно обертається на тотожність $\varphi(x, y, z(x, y)) \equiv 0$, для якої повний диференціал лівої частини також дорівнює нулю при всіх значеннях x та y, зокрема, при $x = x_0, y = y_0$:

$$\varphi'_x(x_0, y_0, z_0)dx + \varphi'_y(x_0, y_0, z_0)dy + \varphi'_z(x_0, y_0, z_0)dz = 0, \qquad (1.31)$$

де dx, dy – довільні прирости незалежних змінних, dz – диференціал неявної функції.

Помножимо почленно (1.31) на деякий числовий множник λ і додамо з (1.30):

$$[f'_x(x_0, y_0, z_0) + \lambda\varphi'_x(x_0, y_0, z_0)]dx + [f'_y(x_0, y_0, z_0) + \lambda\varphi'_y(x_0, y_0, z_0)]dy +$$
$$+ [f'_z(x_0, y_0, z_0) + \lambda\varphi'_z(x_0, y_0, z_0)]dz = 0. \qquad (1.32)$$

Число λ виберемо так, щоб множник при dz обертався на нуль, тобто

$$f'_z(x_0, y_0, z_0) + \lambda\varphi'_z(x_0, y_0, z_0) = 0. \qquad (1.33)$$

Тоді (1.32) набуває вигляду:

$$[f'_x(x_0, y_0, z_0) + \lambda\varphi'_x(x_0, y_0, z_0)]dx + [f'_y(x_0, y_0, z_0) + \lambda\varphi'_y(x_0, y_0, z_0)]dy = 0. \quad (1.34)$$

Оскільки множники dx, dy є довільними числами, то (1.34) виконується лише тоді, коли

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) + \lambda\varphi'_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \qquad (1.35)$$

$$f'_y(x_0, y_0, z_0) + \lambda\varphi'_y(x_0, y_0, z_0) = 0. \qquad (1.36)$$

З системи рівнянь (1.33), (1.35), (1.36) та рівняння зв'язку $\varphi(x_0, y_0, z_0) = 0$ знаходимо значення невідомих величин x_0, y_0, z_0, λ (λ потрібна як допоміжна величина). Отже, ми визначили координати точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, в якій функція $u = f(x, y, z)$ має умовний екстремум.

Алгоритм застосування методу множників Лагранжа

Складемо функцію

$$\Phi(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z).$$

Знайдемо частинні похідні цієї функції по x,y,z, прирівняємо їх до нуля і приєднаємо рівняння зв'язку. Складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases}\Phi'_x(x,y,z)=0,\\ \Phi'_y(x,y,z)=0,\\ \Phi'_z(x,y,z)=0,\\ \varphi(x,y,z)=0.\end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо координати точок x,y,z, в яких функція $u=f(x,y,z)$ має умовний екстремум.

Цей метод застосовують і у випадку функцій іншої кількості змінних, зокрема, при $n=2$.

Приклад. Знайти паралелепіпед найбільшого об'єму, якщо сума усіх його ребер дорівнює $12a$.

Розв'язання. Нехай паралелепіпед має ребра x,y,z, тоді його об'єм знайдемо за формулою $V(x,y,z)=xyz$. Оскільки сума усіх ребер паралелепіпеда задана, то $4(x+y+z)-12a=0$ або $x+y+z-3a=0$. Це рівняння є рівнянням зв'язку.

Складемо функцію

$$\Phi(x,y,z)=xyz+4\lambda(x+y+z-3a).$$

та знайдемо її частинні похідні

$$\begin{aligned}\Phi'_x(x,y,z)&=yz+4\lambda(y+z),\\ \Phi'_y(x,y,z)&=xz+4\lambda(x+z),\\ \Phi'_z(x,y,z)&=xy+4\lambda(x+y).\end{aligned}$$

Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} yz+4\lambda(y+z)=0, \\ xz+4\lambda(x+z)=0, \\ xy+4\lambda(x+y)=0, \\ x+y+z-3a=0. \end{cases}$$

Маємо, що

$$\frac{yz}{y+z}=\frac{xz}{x+z} \Rightarrow x=y,$$

$$\frac{yz}{y+z}=\frac{xy}{x+y} \Rightarrow x=z\,,$$

$$x=y=z=a\,.$$

Отже, шуканий паралелепіпед є кубом зі сторонами $x=y=z=a$. Ці розміри забезпечують найбільший об’єм паралелепіпеда $V=a^3$ (перевірити самостійно).

РОЗДІЛ 2. Інтегральне числення функцій багатьох змінних

Задача, що приводить до поняття подвійного інтеграла

Розглянемо задачу про знаходження об'єму V просторового тіла (U). Просторове тіло, обмежене зверху поверхнею $z = f(x, y)$, де функція $f(x, y)$ є невід'ємною і неперервною в деякій замкненій області (D), з боків – циліндричними поверхнями, твірні яких паралельні осі Oz, а знизу – квадровною фігурою (D) в площині xOy, називають ***циліндричним тілом*** або ***циліндричним бруском*** (рис. 16).

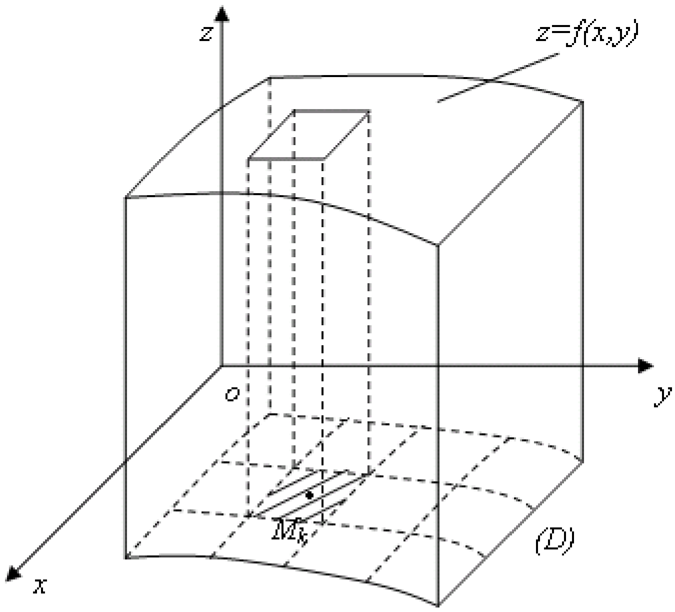


Рис. 16

Розіб'ємо область (D) довільними кривими на n областей $(D_0),(D_1),\ldots,(D_{n-1})$ і отримаємо n циліндричних брусків з основами (D_k), $k = 0,1,\ldots,n-1$. Вони в сукупності утворюють тіло (U).

У кожній області (D_k) візьмемо довільну точку $M_k(\zeta_k, \eta_k)$ і знайдемо $f(\zeta_k, \eta_k)$. Замінимо кожен циліндричний брусок **<u>циліндром</u>** з висотою і основою (D_k). Об'єм такого циліндра обчислюється як $V_k = f(\zeta_k, \eta_k) \cdot \Delta S_k$, $k = 0,1,\ldots,n-1$, де ΔS_k – площа області (D_k). Формулу для знаходження наближеного значення об'єму заданого циліндричного тіла (U) отримаємо, якщо додати всі ці рівності: $V \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k, \eta_k)\Delta S_k$. Це наближення буде тим точніше, чим «меншими» будуть області розбиття тіла (U) на частини. Найбільшу відстань між двома точками контуру області (D_k) позначимо через d_k і назвемо ***діаметром*** цієї області.

Якщо існує границя $\lim\limits_{\max d_k \to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k, \eta_k) \cdot \Delta S_k$, то її приймають за об'єм циліндричного тіла (U), тобто

$$V = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k, \eta_k) \Delta S_k . \qquad (2.1)$$

Подвійний інтеграл та його властивості

Задача про об'єм циліндричного тіла та низка інших задач, в яких з'являються границі типу (2.1), приводять до поняття подвійного інтегралу.

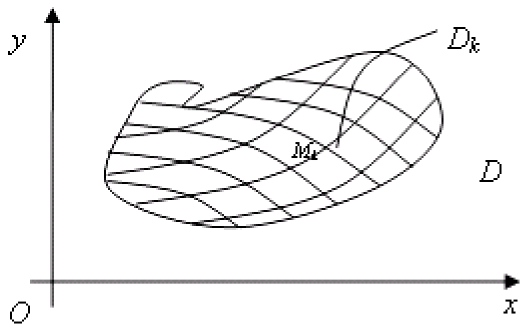


Рис. 17

Нехай у площині xOy задана обмежена квадровна область (D), на якій визначена неперервна функція $z = f(x, y)$. Розіб'ємо довільним чином цю область сіткою (T) кривих на частини (D_k), $k = 0,1,...,n-1$ (рис. 17). Площу кожної частини (D_k) позначимо через ΔS_k, довжину найбільшої з хорд, що сполучає дві довільні її точки, позначимо через $d_k = diam\,(D_k)$, і через $d(T) = \max\limits_k d_k$. У кожній частині (D_k) довільним чином виберемо точку $M_k(\zeta_k, \eta_k)$ і складемо суму $S(T) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k, \eta_k) \Delta S_k$, яку називають ***інтегральною***. Очевидно, що вона залежить від (T)-розбиття області (D) на частини (D_k) та від вибору точок $M_k(\zeta_k, \eta_k)$.

Якщо існує скінченна границя інтегральних сум $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k, \eta_k) \Delta S_k$, коли $d(T) \to 0$, яка не залежить ні від способу розбиття області (D) на частини, ні від вибору точок $M_k(\zeta_k,\eta_k)$, то її називають ***подвійним інтегралом функції*** $f(x,y)$ ***по області*** (D) і позначають символом

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(D)} f(x,y)ds\,.$$

Функцію $f(x,y)$ в даному випадку називають ***інтегровною*** в області (D).

Задача про об'єм циліндричного тіла приводить до формули його обчислення:

$$V = \iint\limits_{(D)} f(x,y)ds\,.$$

Ця рівність визначає ***геометричний зміст подвійного інтеграла***, коли підінтегральна функція є невід'ємною в обмеженій квадровній області (D).

З'ясуємо умови, за яких функція $z = f(x,y)$ є інтегровною в області (D).

Розглянемо випадок обмеженої функції в цій області і покажемо, що умова обмеженості є необхідною для її інтегровності в (D). Дійсно, в протилежному випадку при будь-якому (T)-розбитті заданої області на частини (D_k) завжди можна вибрати точки, в яких функція $f(x,y)$ є необмеженою, а відповідна інтегральна сума може бути нескінченно великою.

Проте, обмеженість функції не є достатньою умовою її інтегровності. Наведемо приклад обмеженої функції, яка не є інтегровною.

Нехай в деякій обмеженій квадровній області (D) задана функція

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \in Q,\ y \in Q, \\ 0, & x \in I \vee y \in I. \end{cases}$$

Оскільки $|f(x,y)| \le 1$ для довільних точок $(x;y) \in (D)$, то задана функція є обмеженою. Доведемо, що вона не інтегровна в цій області.

Розглянемо деяке (T)-розбиття області (D) на частини (D_k), $k = 0,\ldots,n-1$. У кожній такій частині існують точки $(x_k;y_k)$, де обидві координати x_k та y_k – раціональні числа, і точки $(x_k;y_k)$, в яких хоча б одна з координат є ірраціональним числом.

Складемо інтегральну суму $S(T)=\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k, y_k)\Delta S_k$. Якщо точки $(x_k, y_k)\in(D_k)$, $k=0,...,n-1$ вибрати так, що числа x_k та y_k будуть раціональними, то $S(T)=\sum_{k=0}^{n-1}\Delta S_k = S$, де S – площа області (D). Якщо хоча б одне з чисел x_k або y_k є ірраціональним, то сума $S(T)=0$. Отже, інтегральна сума $S(T)$ при $d(T)\to 0$ границі не має і задана функція $f(x;y)$ не є інтегровною в області (D).

При вивченні подвійних інтегралів важливу роль відіграють нижня і верхня суми Дарбу

$$\underline{S}=\sum_{k=0}^{n-1} m_k\Delta S_k\ ,\ \overline{S}=\sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta S_k\ ,$$

де m_k та M_k – відповідно точна нижня та точна верхня грані множини значень функції $f(x,y)$ в області (D_k), $k=0,...,n-1$. Оскільки

$$m_k \le f(x_k, y_k)\le M_k,\ \ k=0,...,n-1,$$

то

$$\underline{S}\le S(T)\le \overline{S}\,.$$

Властивості сум Дарбу аналогічні відповідним властивостям сум Дарбу для одномірного випадку. За допомогою цих сум можна встановити критерій (необхідну і достатню умову) інтегровності функції $f(x,y)$ в області (D).

Теорема (критерій інтегровності функції). *Для того щоб обмежена в області (D) функція $f(x,y)$ була інтегровною в цій області, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність*

$$\lim_{d(T)\to 0}\left(\underline{S}-\overline{S}\right)=0\,.$$

Використовуючи критерій інтегровності легко довести:

Теорема. *Кожна неперервна в замкненій обмеженій квадровній області (D) функція $z=f(x,y)$ є інтегровною в цій області.*

Зауваження. Аналогічно до одновимірного випадку, клас інтегровних функцій двох змінних не вичерпується неперервними функціями. Зокрема, таким класом можуть бути обмежені функції, які мають скінченну або злічену множину точок розриву.

Основні властивості подвійних інтегралів

1. $\iint\limits_{D} Cdxdy = C\cdot S(D)$, *де* $C = const$, $S(D)$ *– площа області* D.

Доведення. Дійсно, за означенням подвійного інтеграла маємо:

$$\iint\limits_{(D)} Cdxdy = \lim_{d(T)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} C\cdot\Delta S_k = C\cdot\lim_{d(T)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta S_k = C\cdot S(D).$$

Наслідок. *При C=0 отримаємо* $\iint\limits_{D} 0dxdy = 0$, *коли C=1 маємо, що* $\iint\limits_{D} 1dxdy = \iint\limits_{D} dxdy = S(D)$.

2. *Якщо функція* $f(x,y)$ *є інтегровною в області* (D), *то в цій області є інтегровною також і функція* $Cf(x,y)$, *де* C *– деяка стала, причому*

$$\iint\limits_{D} Cf(x,y)dxdy = C\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy.$$

Доведення. Для довільного (T)-розбиття області (D) і довільного вибору точок $M_k(\zeta_k,\eta_k)\in(D_k)$, $k = 0,...,n-1$, маємо, що

$$\iint\limits_{(D)} Cf(x,y)dxdy = \lim_{d(T)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} Cf(\zeta_k,\eta_k)\Delta S_k = C\lim_{d(T)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k,\eta_k)\Delta S_k = C\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy.$$

3. *Якщо функції* $f_1(x,y)$ *та* $f_2(x,y)$ *є інтегровними в області* (D), *то в цій області є інтегровними також і функції* $f_1(x,y)\pm f_2(x,y)$, *причому*

$$\iint\limits_{D}\left(f_1(x,y)\pm f_2(x,y)\right)dxdy = \iint\limits_{D} f_1(x,y)dxdy + \iint\limits_{D} f_2(x,y)dxdy.$$

Доведення. Для довільного (T)-розбиття області (D) і для довільного вибору точок $M_k(\zeta_k,\eta_k)\in(D_k)$, $k = 0,...,n-1$, маємо, що

$$\iint\limits_{(D)}\left(f_1(x,y)\pm f_2(x,y)\right)dxdy = \lim_{d(T)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f_1(\zeta_k,\eta_k)\pm f_2(\zeta_k,\eta_k)\right)\Delta S_k =$$

$$= \lim_{d(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f_1(\zeta_k, \eta_k)\Delta S_k \pm \lim_{d(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f_2(\zeta_k, \eta_k)\Delta S_k = \iint f_1(x, y)dxdy + \iint f_2(x, y)dxdy.$$

Доведену властивість можна узагальнити на будь-яку скінченну кількість функцій, інтегровних в області (D).

4. *Якщо функція $f(x, y)$ є інтегровною в кожній з областей (D_1) і (D_2), що не мають спільних внутрішніх точок, то вона також є інтегровною і в області $D = D_1 \cup D_2$, причому*

$$\iint_{(D)} f(x, y)dxdy = \iint_{(D_1)} f(x, y)dxdy + \iint_{(D_2)} f(x, y)dxdy .$$

Доведення. Нехай маємо довільне (T)-розбиття області $(D) = \bigcup_{k=0}^{n-1}(D_k)$. Інтегральну суму $S(T)$ для функції $f(x, y)$ в цій області можна подати у вигляді $S(T) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k, \eta_k)\Delta S_k = \sum_{k:(D_k)\subset(D_1)} f(\zeta_k, \eta_k)\Delta S_k + \sum_{k:(D_k)\subset(D_2)} f(\zeta_k, \eta_k)\Delta S_k$, де доданки в правій частині рівності є інтегральними сумами для функції $f(x, y)$ в областях (D_1) і (D_2) відповідно. За умовою теореми функція $f(x, y)$ інтегровна в кожній області (D_1) і (D_2), тому існує границя правої частини останньої рівності при $d(T) \to 0$, яка дорівнює $\iint_{(D_1)} f(x, y)dxdy + \iint_{(D_2)} f(x, y)dxdy$. При $d(T) \to 0$ також існує границя і лівої частини цієї рівності, яка дорівнює, $\iint_{(D)} f(x, y)dxdy$.

5. *Якщо інтегровна в області (D) функція задовольняє умову $f(x, y) \geq 0$, то $\iint_{(D)} f(x, y)dxdy \geq 0$.*

Доведення цієї властивості ґрунтується на тому, що складені інтегральні суми є невід'ємними.

6. *Якщо функції $f_1(x, y), f_2(x, y)$ інтегровні в області (D), причому $f_1(x, y) \geq f_2(x, y)$, то $\iint_{(D)} f_1(x, y)dxdy \geq \iint_{(D)} f_2(x, y)dxdy$.*

Для доведення досить розглянути різницю $f_1(x,y) - f_2(x,y) \geq 0$ і застосувати попередню властивість.

Наслідок. *Якщо функція* $f(x,y)$ *інтегровна в області* (D), *то функція* $|f(x,y)|$ *є також інтегровною в цій області і* $\left|\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy\right| \leq \iint\limits_{(D)} |f(x,y)|dxdy$.

7. **Теорема (про середнє значення).** *Якщо* $f(x,y)$ *неперервна в обмеженій замкненій квадровній області* D, *то існує точка* $M_0(x_0, y_0) \in D$ *така, що*

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = f(x_0, y_0) \cdot S(D).$$

Доведення. За умовою теореми функція $f(x,y)$ неперервна в обмеженій замкненій області (D), тому вона в цій області приймає свої найменше m та найбільше M значення, тобто $m \leq f(x,y) \leq M$ для $\forall (x,y) \in (D)$. Проінтегруємо почленно цю нерівність:

$$\iint\limits_{(D)} m dxdy \leq \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy \leq \iint\limits_{(D)} M dxdy,$$

або

$$m\iint\limits_{(D)} dxdy \leq \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy \leq M\iint\limits_{(D)} dxdy.$$

За наслідком з властивості 1 маємо, що $\iint\limits_{(D)} dxdy = S(D)$, отже,

$$m \cdot S(D) \leq \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy \leq M \cdot S(D). \qquad (2.2)$$

Якщо позначити $\dfrac{\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy}{S(D)} = \mu$, то нерівність (2.2) матиме вигляд $m \leq \dfrac{\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy}{S(D)} \leq M$ або $m \leq \mu \leq M$. За теоремою Больцано-Коші про проміжне значення існує точка $(x_0, y_0) \in (D)$ така, що $\mu = f(x_0, y_0)$. Отже, $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = f(x_0, y_0) \cdot S(D)$.

Зауваження. В деяких задачах, коли обчислення подвійного інтеграла $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$ є технічно складним, то його можна оцінити, застосувавши нерівність $m \cdot S(D) \le \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy \le M \cdot S(D)$.

Обчислення подвійних інтегралів

Обчислення подвійного інтеграла можна провести безпосередньо за означенням, тобто через границю інтегральних сум $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \lim\limits_{d(T)\to 0}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k,\eta_k)\cdot \Delta S_k$. Проте, такий спосіб є досить громіздким. Зокрема, на практиці обчислення подвійного інтеграла зводять до повторного інтегрування, тобто до послідовного обчислення двох визначених інтегралів. Розглядають два випадки області інтегрування: прямокутну область та криволінійну область.

Випадок прямокутної області

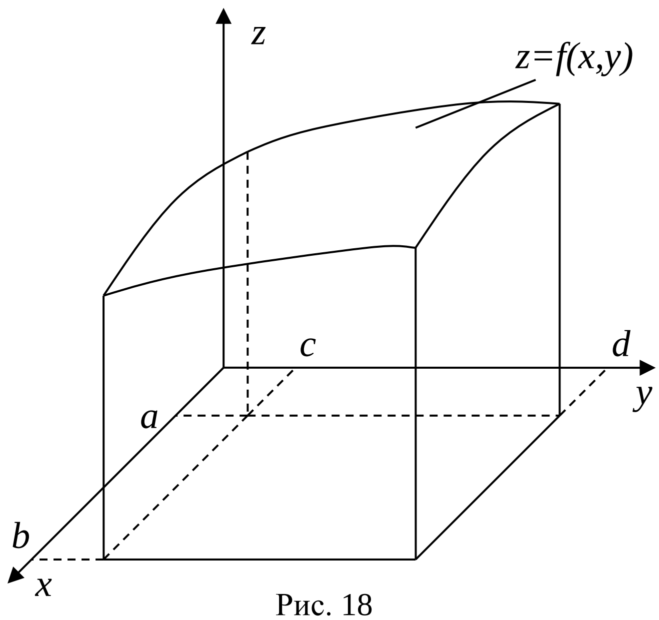


Рис. 18

Нехай областю інтегрування є прямокутник (P):

$$a \le x \le b,\ c \le y \le d\ ,$$

де a , b , c , d – довільні дійсні числа, зі сторонами, паралельними координатним осям. На цьому прямокутнику визначена деяка неперервна функція $f(x,y)$ (рис. 18).

Теорема. *Якщо для функції* $f(x,y)$, *визначеної та неперервної на прямокутнику* (P), *існує подвійний інтеграл* $\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy$ *і при кожному* *фіксованому значенні* $x\in[a;b]$ *існує інтеграл* $I(x)=\int\limits_c^d f(x,y)dy$, *тоді також існує повторний інтеграл* $\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)dy$ *і виконується рівність*

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)dy .$$

Доведення. Відрізки $[a;b]$ і $[c;d]$, що визначають прямокутник (P), розіб'ємо на частини:

$$a=x_0<x_1<...<x_i<x_{i+1}<...<x_{n-1}<x_n=b,$$
$$c=y_0<y_1<...<y_k<y_{k+1}<...<y_{m-1}<y_m=d.$$

При цьому (P) розіб'ється на прямокутники $(P_{ik})=[x_i,x_{i+1};y_k,y_{k+1}]$ ($i=0,1,...,n-1$; $k=0,1,...,m-1$).

Точні нижню і верхню грані функції $f(x,y)$ в прямокутнику (P_{ik}) позначимо через m_{ik} і M_{ik} відповідно, тоді

$$m_{ik}\le f(x,y)\le M_{ik} . \qquad (2.3)$$

Виберемо довільним чином точки $\zeta_i\in[x_i,x_{i+1}]$, $i=0,1,...,n-1$. Проінтегруємо нерівності (2.3) по змінній y на кожному відрізку розбиття $[y_k;y_{k+1}]$, $k=0,1,...,m-1$:

$$m_{ik}\Delta y_k\le\int\limits_{y_k}^{y_{k+1}} f(\zeta_i,y)dy\le M_{ik}\Delta y_k , \qquad (2.4)$$

де $\Delta y_k=y_{k+1}-y_k$. За умовою теореми такий інтеграл існує. Додамо почленно нерівності (2.4) по $k=0,1,..,m-1$:

$$\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik}\Delta y_k\le I(\zeta_i)=\int\limits_c^d f(\zeta_i,y)dy\le\sum_{k=0}^{m-1} M_{ik}\Delta y_k . \qquad (2.5)$$

Усі частини нерівності (2.5) помножимо на $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$ та знайдемо суму по $i=0,1,...,n-1$:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik}\Delta y_k\le\sum_{i=0}^{n-1} I(\zeta_i)\Delta x_i\le\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i\sum_{k=0}^{m-1} M_{ik}\Delta y_k .$$

Середній вираз у нерівності є інтегральною сумою для функції $I(x)=\int\limits_c^d f(x,y)dy$, а її крайні члени являють собою нижню та верхню суми Дарбу для подвійного інтеграла $\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy$. В цій нерівності перейдемо до границі при $\Delta x_i \to 0,\ \Delta y_k \to 0$, отримаємо $\lim\limits_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_k \to 0}} \sum\limits_{i=0}^{n-1} I(\zeta_i)\Delta x_i = \iint\limits_{(P)} f(x,y)dP$, де $dP = dxdy$, або

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b I(x)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy.$$

Випадок криволінійної області

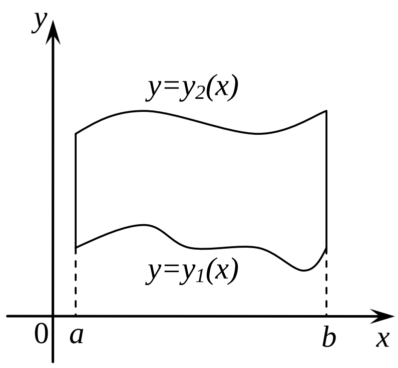


Рис. 19

Означення. Квадровна область (D) називається ***криволінійною трапецією першого роду*** (***елементарною відносно осі*** Ox), якщо вона обмежена лініями $x=a,\ x=b$, $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$, де функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ неперервні на відрізку $[a,b]$ і $y_1(x)\le y_2(x)$ для довільного $x\in[a,b]$ (рис. 19).

Зауважимо, що при перетині ліній $y=y_1(x)$ та $y=y_2(x)$ відрізки вертикальних прямих $x=a,\ x=b$ вироджуються в точки.

Теорема. *Якщо для функції $f(x,y)$, визначеної та неперервної в області (D), що є криволінійною трапецією першого роду, існує подвійний інтеграл $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$ і при кожному фіксованому значенні $x\in[a;b]$ існує інтеграл $I(x)=\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$, то існує також повторний інтеграл $\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ та виконується рівність*

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

Доведення. Розглянемо криволінійну область (D) і покладемо $c=\min\limits_{a\le x\le b} y_1(x),\ d=\max\limits_{a\le x\le b} y_2(x)$. Отримаємо прямокутник $(P)=[a,b;c,d]$, який включає область (D), та задамо функцію

$$f^*(x,y)=\begin{cases} f(x,y), \text{ якщо } (x,y) \text{ належить області } (D), \\ 0, \text{в інших точках прямокутника } (P). \end{cases}$$

Ця функція є інтегровною в прямокутнику (P), оскільки в точках області (D) цього прямокутника вона співпадає з інтегровною за умовою функцією $f(x,y)$ і $\iint\limits_{(D)} f^*(x,y)dxdy=\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$. З іншого боку, $f^*(x,y)=0$ в усіх точках області (P), які не належать області (D), тому вона також інтегровна і відповідний інтеграл дорівнює нулю. Отже,

$$\iint\limits_{(P)} f^*(x,y)dxdy=\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy.$$

Для фіксованого значення $x\in[a,b]$ існує інтеграл

$$\int\limits_c^d f^*dy=\int\limits_c^{y_1(x)} f^*dy+\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f^*dy+\int\limits_{y_2(x)}^{d} f^*dy, \tag{2.6}$$

оскільки існує кожен інтеграл у правій частині рівності (2.6). Для $c\le y\le y_1(x)$ та $y_2(x)\le y\le d$ функція $f^*(x,y)=0$, тому перший і третій інтеграли дорівнюють нулю і

$$\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f^*(x,y)dy=\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy. \tag{2.7}$$

З (2.6) та (2.7) маємо, що

$$\int\limits_c^d f^*(x,y)dy=\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy. \tag{2.8}$$

За теоремою про подвійний інтеграл по прямокутній області та співвідношеннями (2.7), (2.8), отримуємо рівність

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

Теорему доведено.

Приклад. Обчислити $\iint\limits_D \frac{x^3}{y^2}dxdy$, де область D обмежена лініями $x=3$, $y=x$, $xy=1$.

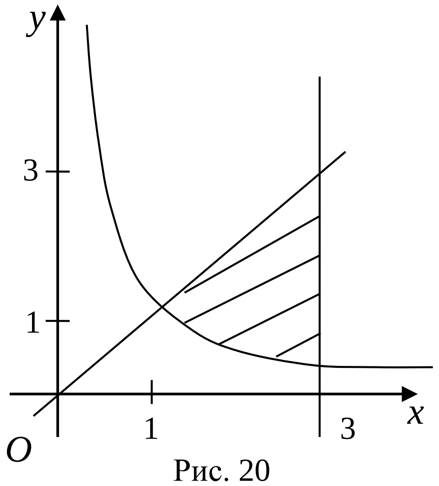


Рис. 20

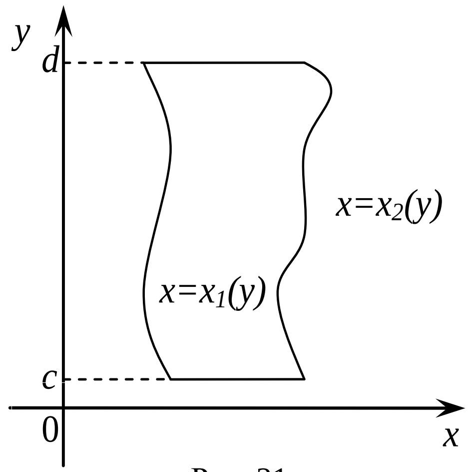


Рис. 21

Розв'язання. Область D є криволінійною трапецією першого роду. Точки перетину ліній, що її обмежують, знайдемо із системи рівнянь $\begin{cases} y=x \\ xy=1 \end{cases}$.

Очевидно, що $1 \le x \le 3,\ \frac{1}{x} \le y \le x$ (рис. 20). Для обчислення заданого подвійного інтеграла перейдемо до повторних:

$$\iint\limits_{(D)} \frac{x^3}{y^2}\,dxdy = \int_1^3 dx \int_{1/x}^{x} \frac{x^3}{y^2}\,dy = \int_1^3 dx \left(-\frac{x^3}{y} \right)\Bigg|_{1/x}^{x} = \int_1^3 \left(-x^2 + x^4 \right) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right)\Bigg|_1^3 = \frac{594}{15}.$$

Означення. Квадровна область називається ***криволінійною трапецією другого роду*** (***елементарною відносно осі*** Oy), якщо вона обмежена лініями $y=c,\ y=d$, $x=x_1(y),\ x=x_2(y)$, де функції $x_1(y)$ та $x_2(y)$ неперервні на відрізку $[c,d]$ і $x_1(y) \le x_2(y)$ для довільного $y \in [c,d]$ (рис. 21).

Зокрема, відрізки горизонтальних прямих $y=c,\ y=d$ можуть вироджуватись в точки перетину ліній $x=x_1(y),\ x=x_2(y)$.

В цьому випадку подвійний інтеграл по області (D) обчислюється за формулою

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx .$$

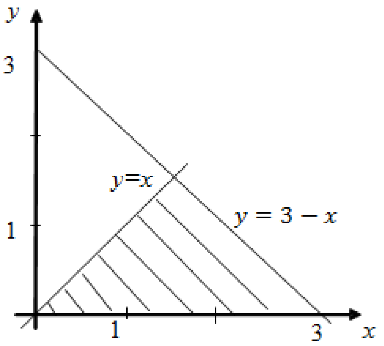


Рис. 22

Приклад. Обчислити $\iint\limits_{(D)} (x-y)dxdy$, якщо $D = \{y = x,\ y = 3 - x,\ y = 0\}$.

Розв'язання. Область D (рис. 22) задано системою нерівностей: $0 \le y \le \dfrac{3}{2},\ y \le x \le 3 - y$.

Для обчислення заданого подвійного інтеграла перейдемо до повторних:

$$\iint\limits_{(D)} (x-y)dxdy = \int\limits_{0}^{\frac{3}{2}} dy \int\limits_{y}^{3-y} (x-y)dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{\frac{3}{2}} dy \left(xy - \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_{y}^{3-y} = \int\limits_{0}^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{3}{2}y^2 + 6y - \frac{9}{2} \right) dy = \left(-\frac{1}{2}y^3 + 3y^2 - \frac{9}{2}y \right)\Bigg|_{0}^{\frac{3}{2}} = -\frac{27}{16} .$$

Зауваження. У випадку, коли область (D) не є криволінійною трапецією першого або другого роду, її розбивають на скінченне число таких трапецій прямими, паралельними осям координат, та обчислюють інтеграли в кожній з цих частин.

Заміна змінних у подвійному інтегралі

При обчисленні подвійних інтегралів досить часто доводиться застосовувати метод заміни змінних. Розглянемо поняття ***площі в криволінійних координатах***.

Нехай у площині xOy задано деяку область (D), а в площині uOv - область (E), причому $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$ – деякі неперервні та диференційовні в області (E) функції. Нехай точка $B_1(u,v) \in (E)$, а відповідна їй точка $A_1(x,y) \in (D)$. В області (E) виберемо досить малу область (E_1), що містить точку B_1, і нехай (D_1) – образ цієї області в площині xOy.

Позначимо через S_{xy} і S_{uv} відповідно площі областей (D_1) та (E_1). Відношення $\dfrac{S_{xy}}{S_{uv}}$ показує, як змінюється площа в околі точки B_1 при відображенні області (E) на область (D), воно залежить від вибору області (E_1). Нехай $|I| = \lim\limits_{d \to 0} \dfrac{S_{xy}}{S_{uv}}$, де d - діаметр області (E_1). Величину $|I|$ називають ***коефіцієнтом викривлення площ***.

Для знаходження $|I|$ будемо вважати, що область (E_1) є прямокутним трикутником з вершинами $B_1(u;v)$, $B_2(u+\Delta u;v)$, $B_3(u;v+\Delta v)$, площа якого $S_{xy} = \dfrac{1}{2}\Delta u \Delta v$. Перетворення $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ переводить точки B_1, B_2, B_3 відповідно у точки $A_1(x(u,v); y(u,v))$, $A_2(x(u+\Delta u,v); y(u+\Delta u,v))$, $A_3(x(u,v+\Delta v); y(u,v+\Delta v))$, а прямолінійні відрізки B_1B_2, B_2B_3, B_3B_1 – в дуги A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 (рис. 23).

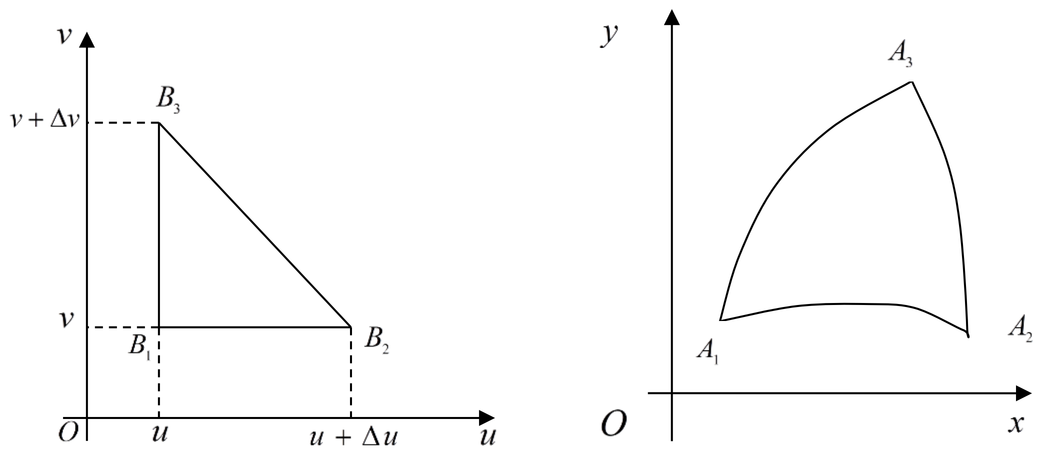


Рис.23

Знайдемо площу S_{xy} отриманого криволінійного трикутника $A_1A_2A_3$.

Дуги A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 при $\Delta u \to 0$ та $\Delta v \to 0$ є досить малими, тому їх можна вважати прямолінійними відрізками, а прирости функцій $x(u,v)$ та $y(u,v)$ можна замінити відповідними диференціалами. Зокрема, для A_1A_2

$$x(u+\Delta u, v) \approx x'_u \Delta u + x(u,v),$$

$$y(u+\Delta u, v) \approx y'_u \Delta u + y(u,v),$$

аналогічно для A_3A_1

$$x(u, v+\Delta v) \approx x'_v \Delta v + x(u,v),$$

$$y(u, v+\Delta v) \approx y'_v \Delta v + y(u,v).$$

Отже, площа S_{xy} криволінійного трикутника $A_1A_2A_3$ наближено визначається за формулою

$$S_{xy} \approx \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x'_u\Delta u & y'_u\Delta u \\ x'_v\Delta v & y'_v\Delta v \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left|I(u,v)\right|\Delta u\Delta v,$$

де $I(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} = x'_u y'_v - x'_v y'_u$ - ***визначник Остроградського-Якобі*** або ***якобіан*** відображення. Коли $I(u,v) \neq 0$, маємо, що

$$S_{xy} \approx \left|I(u,v)\right| \cdot S_{u,v}. \qquad (2.9)$$

Перейдемо до ***методу заміни змінних*** у подвійному інтегралі.

Нехай маємо інтеграл $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$, де функція $f(x,y)$ неперервна в заданій області (D). Нехай x та y є функціями змінних u та v, тобто $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$. Функції $x(u,v), y(u,v)$ неперервні разом із частинними похідними першого порядку по змінним u і v в області (E) у площині uOv, що є образом заданої області (D), та якобіан $I(u,v) \neq 0$.

Розглянемо деяке (T)- розбиття області (E) на частини $(E_k), k = 1,...,n$. При цьому область (D) також розіб'ється на частини $(D_k), k = 1,...,n$, а довільній точці $B_k(u_k, v_k) \in (E_k), k = 1,...,n$ за формулами $x_k = x(u_k, v_k)$, $y_k = y(u_k, v_k)$ відповідатиме точка $P_k(x_k, y_k) \in (D_k), k = 1,...,n$.

За співвідношенням (2.9) для площ $\Delta S(D_k)$ і $\Delta S(E_k)$ областей (D_k) і (E_k) відповідно виконується наближена рівність $S(D_k) \approx \left|I(u_k, v_k)\right| \cdot S(E_k),\ k = 1,...,n$. Тоді

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S(D_k) \approx \sum_{k=1}^{n} f(x(u_k, v_k); y(u_k, v_k)) \cdot |I(u_k, v_k)| \cdot \Delta S(E_k).$$

Перейдемо до границі при $d = \max\limits_{1 \le k \le n} diam(D_k) \to 0$, $\delta = \max\limits_{1 \le k \le n} diam(E_k) \to 0$:

$$\lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S(D_k) = \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x(u_k, v_k); y(u_k, v\ )) \cdot |I(u_k, v_k)| \cdot \Delta S(E_k).$$

У правій частині рівності під знаком границі маємо інтегральну суму для функції $f(x(u,v), y(u,v)) \cdot |I(u,v)|$ в області (E), яка неперервна в цій області і тому інтегровна в ній. Отже, ми отримали формулу

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(E)} f(x(u,v),\ y(u,v)) \cdot |I(u,v)| dudv,$$

яку називають ***формулою заміни змінних*** у подвійному інтегралі, де визначник Остроградського-Якобі (***якобіан переходу***) $I(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \ne 0$.

Слід зазначити, що застосування даного методу в деяких випадках спрощує не тільки підінтегральну функцію, а й область інтегрування.

Приклад. Обчислити $\iint\limits_{D} (2x - y)dxdy$, якщо область D – паралелограм, обмежений прямими $x + y = 1,\ x + y = 2,\ 2x - y = 1,\ 2x - y = 3$ (рис. 24).

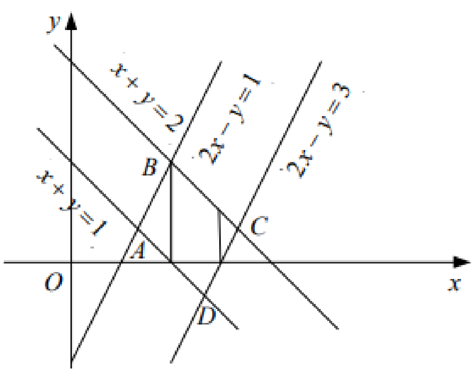


Рис. 24

Розв'язання. Покладемо $x + y = u$, $2x - y = v$ або $x = \frac{1}{3}(u + v),\ y = \frac{1}{3}(2u - v)$.

Обчислимо якобіан переходу: $I = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \ne 0,\ |I| = \frac{1}{3}$. Область (E) у нових змінних задається системою нерівностей $E = \{1 \le u \le 2,\ 1 \le v \le 3\}$. Отже, при заміні змінних область інтегрування – паралелограм – перейшла у прямокутник.

За формулою заміни змінних маємо

$$\iint\limits_{D}(2x-y)dxdy=\frac{1}{3}\iint\limits_{E}vdudv=\frac{1}{3}\int\limits_{1}^{2}du\int\limits_{1}^{3}vdv=\frac{4}{3}.$$

Подвійний інтеграл у полярних координатах

Відомо, що перехід від декартових координат x, y до полярних координат ρ, θ здійснюється за формулами $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$. Таке відображення не є взаємно однозначним. На площині $O\rho\theta$ розглянемо півсмугу, яка визначається нерівностями $0\le\theta\le 2\pi$, $0\le\rho<+\infty$. Формули $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$ відображають її на всю площину Oxy. Зокрема, будь-яка область (E), що міститься в цій півсмузі, відображається на деяку область (D) площини Oxy, це відображення (E) на (D) буде взаємно однозначним, якщо (E) не містить точок прямої $\theta=2\pi$ або $\theta=0$ і прямої $\rho=0$ (або містить тільки одну таку точку).

Використовуючи формулу заміни змінних у подвійному інтегралі, запишемо подвійний інтеграл у полярних координатах. При цьому якобіан переходу дорівнює

$$|I(\rho,\varphi)|=\begin{vmatrix}\cos\theta & -\rho\sin\theta\\ \sin\theta & \rho\cos\theta\end{vmatrix}=\rho\cos^2\theta+\rho\sin^2\theta=\rho,$$

а ***формула заміни змінних в полярних координатах*** має вигляд

$$\iint\limits_{(D)}f(x,y)dxdy=\iint\limits_{(E)}f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\cdot\rho d\rho d\theta.$$

Приклад. Обчислити $\iint\limits_{D}\sqrt{4-x^2-y^2}dxdy$, де область (D) – частина кола $x^2+y^2\le a^2$, розташована в першій чверті.

Розв'язання. При переході до полярних координат отримаємо область (E), що задається системою нерівностей $0\le\rho\le a,\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$. Тоді

$$\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy = \iint_E \rho\sqrt{4-\rho^2}\,d\theta d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \rho\sqrt{4-\rho^2}\,d\rho = \frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\sqrt{\left(4-\rho^2\right)^3}\Big|_0^a\right) =$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(8-\left(4-a^2\right)\sqrt{4-a^2}\right).$$

Приклад. Обчислити інтеграл $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, де область (D) обмежена колами $x^2+y^2=2x,\ x^2+y^2=4x$ (рис. 25).

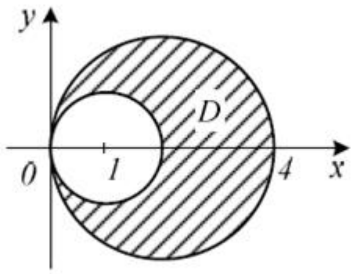


Рис. 25

Розв’язання. Перейдемо до полярних координат і визначимо область інтегрування:

$$\rho^2 = 2\rho\cos\theta \text{ або } \rho = 2\cos\theta,$$

$$\rho^2 = 4\rho\cos\theta \text{ або } \rho = 4\cos\theta.$$

Отже, $2\cos\theta \le \rho \le 4\cos\theta$. З умови, що $\rho \ge 0$, маємо $\cos\theta \ge 0$ або $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

Маємо, що

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} \rho^2 d\rho = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cdot \frac{\rho^3}{3}\Big|_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} = \frac{56}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta = \frac{224}{9}.$$

Зауваження. Зокрема, перехід до полярної системи координат є доречним у випадках, коли область інтегрування – коло або його частина.

Застосування подвійних інтегралів

Обчислення площ плоских фігур

Площа $S(D)$ плоскої фігури (D) визначається з рівності

$$S(D) = \iint_D dxdy,$$

де (D) - криволінійна трапеція у площині xOy, на яку поширюється інтеграл.

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 + 1$, $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{8}{3}$.

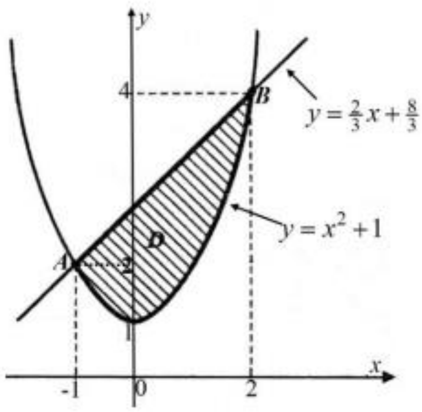


Рис. 26

Розв'язання. Знайдемо координати точок перетину заданих ліній: $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{8}{3} \end{cases}$. Маємо $A(-1;2)$, $B(2;4)$. Область D є криволінійною трапецією першого роду (рис.26), де $-1 \le x \le 2$, $x^2 + 1 \le y \le \dfrac{2}{3}x + \dfrac{8}{3}$.

Тоді

$$S(D) = \iint\limits_D dxdy = \int_{-1}^{2} dx \int_{x^2+1}^{\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}} dy = \int_{-1}^{2} \left(\frac{2}{3}x + \frac{8}{3} - x^2 - 1 \right) dx = \left(\frac{x^2}{3} + \frac{5}{3}x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-1}^{2} = 3 \text{ кв.од.}$$

Обчислення об'ємів тіл

При розв'язуванні задачі про знаходження об'єму циліндричного тіла ми отримали формулу, яка виражає геометричний зміст подвійного інтеграла:

$$V = \iint\limits_{(D)} f(x, y) dxdy,$$

де задане циліндричне тіло має твірні, паралельні осі Oz, та обмежене знизу у площині xOy областю (D), зверху – поверхнею $z = f(x, y)$, де функція $f(x, y)$ є неперервною та невід'ємною в цій області.

Приклад. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$, $x = 0$.

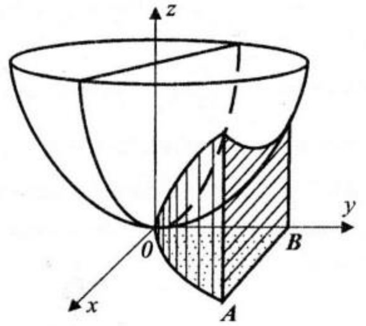


Рис.27

Розв'язання. Задане тіло обмежене зверху параболоїдом обертання $z = x^2 + y^2$, знизу – площиною xOy $(z = 0)$, з боків – поверхнею циліндра $y = x^2$, площинами $y = 1$ та $x = 0$ (рис. 27).

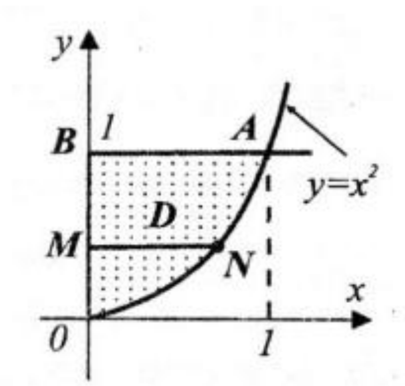


Рис. 28

Проекцією даного тіла на площину xOy, тобто областю інтегрування, є область (D), обмежена прямою $y=1$ і параболою $y=x^2$ (рис. 28). Підінтегральною функцією є $z=x^2+y^2$.

Шуканий об'єм виражається подвійним інтегралом:

$$V=\iint_D \left(x^2+y^2\right)dxdy.$$

Перейдемо до повторного інтегралу

$$V=\iint_D \left(x^2+y^2\right)dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 \left(x^2+y^2\right)dy=$$

$$=\int_0^1 dx\cdot\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{x^2}^1=\int_0^1\left(x^2+\frac{1}{3}-x^4-\frac{x^6}{3}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x}{3}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{21}\right)\Bigg|_0^1=\frac{44}{105}.$$

Отже, $V=\dfrac{44}{105}$ куб. од.

Приклад. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=0$, $x^2+y^2=4x$, $z=2\sqrt{x^2+y^2}$.

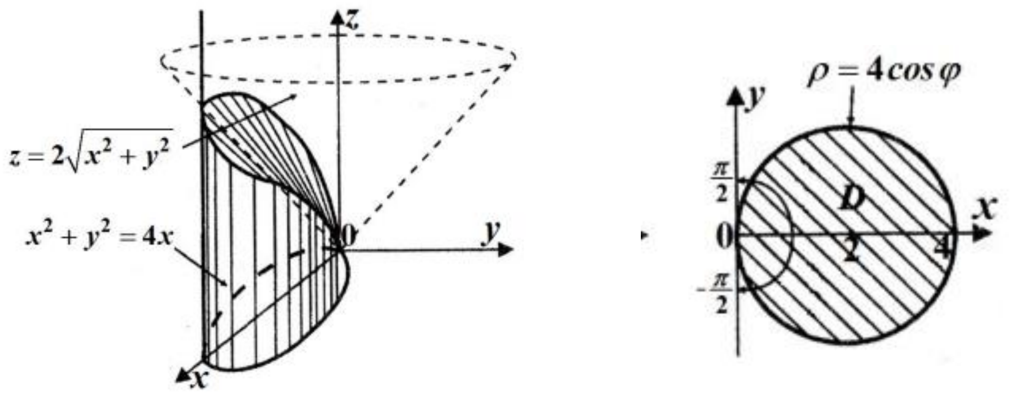


Рис. 29

Розв'язання. Задане тіло обмежене знизу $z=0$ (координатною площиною xOy), з боків – круговим циліндром $x^2+y^2=4x$, а зверху – верхньою частиною конуса $z=2\sqrt{x^2+y^2}$. Проекцією тіла на площину xOy є область D, яка являє собою круг, обмежений колом $x^2 + y^2 = 4x$ (рис. 29). Отже, об’єм заданого тіла знаходимо за формулою $V = \iint_D 2\sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$.

Оскільки область D – круг, то доречно перейти до полярних координат. Рівняння кола, що обмежує область інтегрування D, у полярній системі координат має вигляд $\rho = 4\cos\theta$, а область інтегрування визначається нерівностями: $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \rho \le 4\cos\theta$.

$$V = \iint_D 2\sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy = 2\iint_E \rho^2 d\rho d\theta = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{4\cos\theta} \rho^2 d\rho = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^{4\cos\theta} d\theta =$$

$$= \frac{128}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta = \frac{128}{3}\left.\left(\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3}\right)\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{512}{3}.$$

Отже, $V = \frac{512}{3}$ куб. од.

Обчислення площі поверхні

Нехай рівняння $z = f(x, y)$ задає деяку поверхню, область (D) – її проекція на площину xOy. Функція $f(x, y)$ неперервна разом із своїми частинними похідними першого порядку в області (D). Очевидно, що задана поверхня є гладкою, тобто в кожній її точці існує дотична площина.

Введемо поняття площі поверхні. Розглянемо T-розбиття області (D): $(D) = \bigcup_{k=1}^{n} (D_k)$. Позначимо площу області (D_k) через ΔS_k, а її діаметр – d_k, $k = 1,\dots,n$. В кожній області (D_k), де $k = 1,\dots,n$, довільним чином виберемо точку $P_k(x_k, y_k)$, знайдемо значення функції $f(P_k)$ і проведемо дотичну площину до поверхні $z = f(x, y)$ в цій точці:

$$z - f(x_k, y_k) = f'_x(x_k, y_k)(x - x_k) + f'_y(x_k, y_k)(y - y_k).$$

Кожен із «циліндричних стовбців» з основою з (D_k), $k=1,...,n$, вирізає на цій дотичній площині деяку плоску область, площу якої позначимо через $\Delta\sigma_k$. Складемо суму

$$\sum_{k=1}^{n}\Delta\sigma_k . \tag{2.10}$$

Якщо існує границя суми (2.10) при $\lambda(T)=\max\limits_{1\le k\le n} d_k \to 0$, яка не залежить ні від способу розбиття області (D) на частини, ні від вибору точок P_k, то вона називається ***площею поверхні*** $z=f(x,y)$, тобто

$$P=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\Delta\sigma_k . \tag{2.11}$$

З <u>**аналітичної геометрії відомо**</u>, що $\Delta S_k=\Delta\sigma_k\cos\gamma_k$, $k=1,...,n$, де γ_k – гострий кут між площиною xOy та дотичною площиною. Обчислимо $\cos\gamma_k$ як косинус кута між двома площинами: $\cos\gamma_k=\dfrac{1}{\sqrt{1+f_x'^2(x_k,y_k)+f_y'^2(x_k,y_k)}}$.

Отже, сума (2.10) набуває вигляду $\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1+f_x'^2(x_k,y_k)+f_y'^2(x_k,y_k)}\Delta S_k$, вона є інтегральною сумою, складеною для неперервної в області (D) функції $\sqrt{1+f_x'^2(x_k,y_k)+f_y'^2(x_k,y_k)}$ і деякого T-розбиття цієї області. Очевидно, що ця функція інтегровна в області (D), тому границя (2.11) існує і дорівнює площі частини поверхні $z=f(x,y)$, заданої в цій області:

$$P=\iint\limits_{(D)}\sqrt{1+f_x'^2(x,y)+f_y'^2(x,y)}\,dxdy .$$

Приклад. Знайти площу поверхні частини параболоїда обертання $z=x^2+y^2$, вирізану циліндром $x^2+y^2=4$ (рис. 30).

Розв'язання. Маємо $f(x,y)=x^2+y^2$, $f'_x=2x$, $f'_y=2y$,

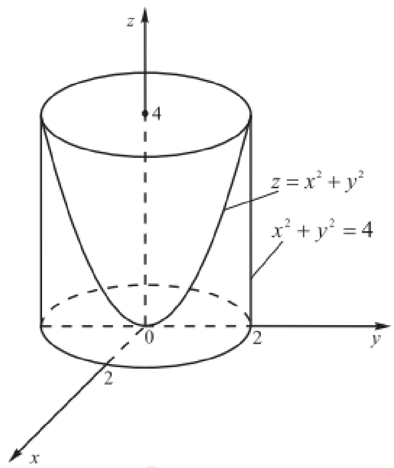


Рис. 30

$\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}=\sqrt{1+4(x^2+y^2)}$; область D – коло $x^2+y^2=4$.

Отже, $P=\iint\limits_D \sqrt{1+4(x^2+y^2)}dxdy$.

Для обчислення інтеграла перейдемо до полярних координат:

$$P=\iint\limits_D \sqrt{1+4(x^2+y^2)}dxdy=\iint\limits_E \sqrt{1+4\rho^2}\rho d\theta d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^2\sqrt{1+4\rho^2}\rho d\rho=\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-1\right).$$

Приклад. Знайти площу поверхні тіла, обмеженого циліндрами $x^2+z^2=a^2$ і $y^2+z^2=a^2$.

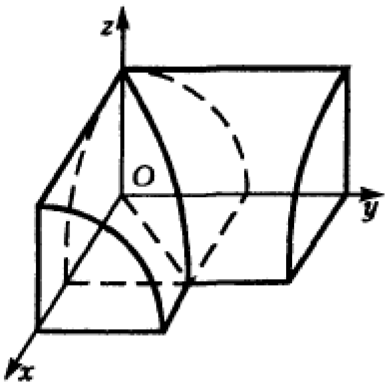


Рис. 31

Розв'язання. Задане тіло утворене перетином двох кругових циліндрів (рис. 31). Воно є симетричним відносно координатних площин і площини $y=x$, тому досить обчислити площу $\frac{1}{16}$-ої частини поверхні цього тіла. Ця частина в проекції на площину xOy визначає область (D): $0\le x\le a,\ 0\le y\le x$. Тоді

$$f(x,y)=\sqrt{a^2-x^2},\ f'_x=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},\ f'_y=0,\ \sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

$$P=16a\iint\limits_D\frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2}}=16a\int\limits_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\int\limits_0^x dy=16a\int\limits_0^a\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=16a\sqrt{a^2-x^2}\Big|_a^0=16a^2.$$

Потрійний інтеграл

До поняття потрійного інтеграла приводить, зокрема, ***задача про масу матеріального тіла:*** нехай у просторі задано неоднорідне тіло (V) з густиною $\rho = \rho(x, y, z)$. Знайти масу заданого матеріального тіла.

Відомо, що маса однорідного матеріального тіла з густиною $\rho = \rho_0$, де $\rho_0 = const$, визначається за формулою $m = \rho_0 V$, де V – об'єм тіла. У випадку неоднорідного тіла цю формулу застосовувати не можна, тому розглянемо метод, аналогічний до методу знаходження об'єму тіла.

Розіб'ємо довільним чином тіло (V) сіткою поверхонь на n частин (V_k), $k = 0,1,...,n-1$, які не мають спільних внутрішніх точок. Об'єми цих частин позначимо через ΔV_k, $k = 0,1,...,n-1$. В кожній частині (V_k) виберемо довільним чином точку $M_k(x_k, y_k, z_k)$, $k = 0,1,...,n-1$.

Припустимо, що густина в кожній частині тіл (V_k) є сталою величиною і дорівнює $\rho(x_k, y_k, z_k)$. Тоді добуток $\rho(x_k, y_k, z_k)\cdot \Delta V_k$ визначає наближене значення маси частини (V_k), а сума $S = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \rho(x_k, y_k, z_k)\cdot \Delta V_k$ наближено визначає масу всього тіла (V). Якщо в сумі S перейти до границі при $d = \max\limits_{1\le k\le n} diam(V_k) \to 0$, $k = 0,1,...,n-1$, то отримаємо точне значення маси заданого тіла:

$$m = \lim_{d\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \rho(x_k, y_k, z_k)\cdot \Delta V_k \,. \qquad (2.12)$$

Означення потрійного інтеграла, умови його існування

Нехай в деякій замкненій обмеженій кубовній області $(V) \subset R^3$ визначена функція $u = f(x, y, z)$. Розіб'ємо область (V) сіткою поверхонь на n довільних частин (V_k), $k = 0,1,...,n-1$, , об'єми яких позначимо через ΔV_k відповідно. У кожній області (V_k) отриманого T-розбиття області (V) візьмемо довільну точку $M_k(x_k, y_k, z_k)$, $k = 0,1,...,n-1$, і складемо суму

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k, y_k, z_k) \cdot \Delta V_k . \qquad (2.13)$$

Суму S називають ***інтегральною сумою*** для функції $f(x, y, z)$, складеною для даного T-розбиття області (V) і заданого вибору точок $M_k \in (V_k)$, $k = 0,1,...,n-1$.

Нехай $d_k = diam\,(V_k)$, $k = 0,1,...,n-1$, $d(T) = \max\limits_{0 \le k \le n-1} d_k$. Якщо при $d(T) \to 0$ інтегральні суми (13) мають скінчену границю, яка дорівнює числу I, то це число називають ***потрійним інтегралом від функції*** $f(x, y, z)$ ***в області*** (V) і позначають

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)dV \text{ або } \iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)dxdydz .$$

Отже, $\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)dxdydz = \lim\limits_{d(T)\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k$, а функція $f(x, y, z)$ називається ***інтегровною за Ріманом*** в області (V).

Справедлива теорема, що визначає достатню умову інтегровності функції.

Теорема. *Будь-яка функція* $f(x, y, z)$*, неперервна в замкненій обмеженій кубовній області* (V)*, інтегровна в цій області.*

Зауваження. Оскільки потрійний інтеграл є узагальненням подвійного інтеграла на випадок функції трьох змінних, то властивості подвійних інтегралів мають місце і для потрійних інтегралів.

Обчислення потрійних інтегралів

Теорема (про обчислення потрійного інтегралу в прямокутному паралелепіпеді). *Нехай функція* $f(x, y, z)$ *інтегровна в прямокутному паралелепіпеді* $(P) = \{(x, y, z) : a_1 \le x \le b_1, a_2 \le y \le b_2, a_3 \le z \le b_3\}$*. Якщо для кожної фіксованої точки* (x, y) *прямокутника* $(D) = \{(x, y) : a_1 \le x \le b_1, a_2 \le y \le b_2\}$ *існує інтеграл* $F(x, y) = \int\limits_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)dz$*, то* *існує також і подвійний інтеграл* $\iint\limits_{(D)} F(x,y)dxdy = \iint\limits_{(D)} dxdy \int\limits_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz$ *,*

причому

$$\iiint\limits_{(P)} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{(D)} dxdy \int\limits_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz.$$

Ця теорема доводиться аналогічно до випадку подвійного інтегралу у прямокутній області інтегрування.

Якщо до умов цієї теореми додати умову існування інтегралу $\int\limits_{a_2}^{b_2} F(x,y)dy$ для кожної фіксованої точки $x \in [a_1, b_1]$, то існує і повторний інтеграл $\int\limits_{a_1}^{b_1} dx \int\limits_{a_2}^{b_2} F(x,y)dy$ та справедлива формула

$$\iiint\limits_{(P)} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx \int\limits_{a_2}^{b_2} dy \int\limits_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz.$$

Зауваження. У випадку прямокутного паралелепіпеда значення потрійного інтеграла не залежить від порядку повторного інтегрування.

Теорема (про обчислення потрійного інтегралу по довільній області). *Якщо функція* $f(x,y,z)$ *інтегровна в обмеженій області* (V) (рис. 32)*, яка визначається нерівностями* $z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)$, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, $a \le x \le b$*, де* $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ - *неперервні функції, і для кожної фіксованої точки* $(x,y) \in (D) = \{y_1(x) \le y \le y_2(x), a \le x \le b\}$*, існує інтеграл* $F(x,y) = \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$*, то існує також і подвійний інтеграл* $\iint\limits_{(D)} F(x,y)dxdy = \iint\limits_{(D)} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$*, причому*

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{(D)} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\ .$$

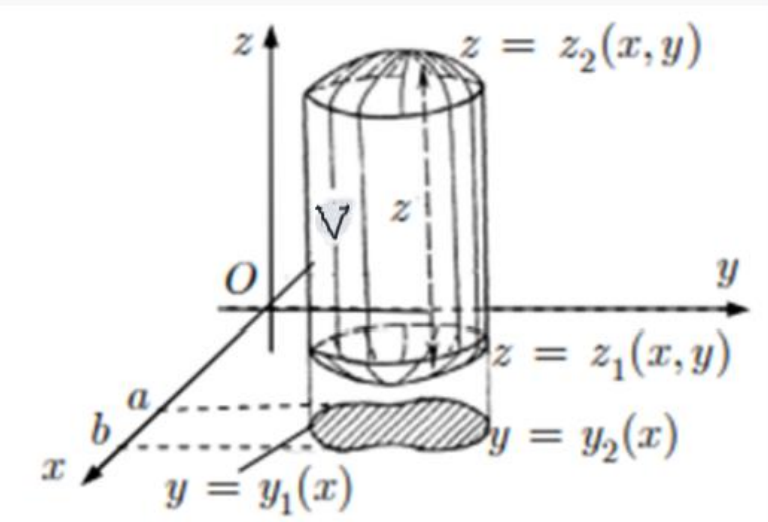


Рис. 32

Зауваження. Інші формули для обчислення потрійного інтеграла, в яких інтегрування по змінних x, y і z здійснюється в іншому порядку, можна отримати аналогічно.

Приклад. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{(V)}(x+y-z)dxdydz$ по області (V), обмеженій площинами $x=-1,\ x=1,\ y=0,\ y=1,\ z=-1,\ z=2$.

Розв'язування. Областю інтегрування є прямокутний паралелепіпед, який задається нерівностями $-1\le x\le 1,\ 0\le y\le 1, -1\le z\le 2$. Для обчислення заданого потрійного інтеграла перейдемо до повторного:

$$\iiint\limits_{(P)}(x+y-z)dxdydz=\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{1}dy\int_{-1}^{2}(x+y-z)dz=\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{1}dy\cdot\left(xz+yz-\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{2}=$$

$$=\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{1}\left(3x+3y-\frac{3}{2}\right)dy=\int_{-1}^{1}dx\cdot\left(3xy+\frac{3}{2}y^2-\frac{3}{2}y\right)\Bigg|_{0}^{1}=\int_{-1}^{1}3xdx=0.$$

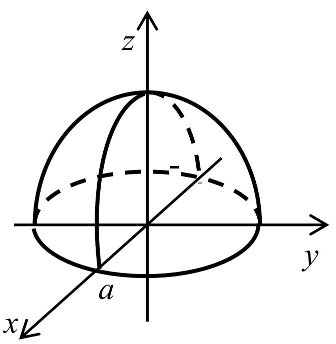


Рис. 33

Приклад. Обчислити інтеграл $\iiint\limits_{(V)}zdxdydz$, де область (V) обмежена верхньою частиною еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ і площиною xOy (рис. 33).

Розв'язування. Проекцією області інтегрування (V)

на площину xOy є еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$, тому область інтегрування (V) визначається системою нерівностей:

$$-a\le x\le a,\ -\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\le y\le \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\ 0\le z\le c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

Маємо:

$$\iiint\limits_{(V)} zdxdydz=\int\limits_{-a}^{a}dx\int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dy\int\limits_{0}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}zdz=\int\limits_{-a}^{a}dx\int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dy\cdot\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}=\frac{c^2}{2}\int\limits_{-a}^{a}dx\int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=$$

$$=c^2\int\limits_{-a}^{a}dx\int\limits_{0}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=c^2\int\limits_{-a}^{a}dx\cdot\left.\left(y-\frac{x^2y}{a^2}-\frac{y^3}{3b^2}\right)\right|_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{2bc^2}{3a^3}\int\limits_{-a}^{a}\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}dx=$$

$$=\frac{4bc^2}{3a^3}\int\limits_{0}^{a}\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}dx=\begin{bmatrix} x=a\sin t\\ dx=a\cos t dt\\ t_н=0,\ t_в=\frac{\pi}{2}\end{bmatrix}=\frac{4abc^2}{3}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 tdt=\frac{abc^2}{3}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)^2dt=\frac{\pi}{4}abc^2.$$

Заміна змінних у потрійному інтегралі

Нехай неперервні та диференційовні функції

$$x=x(u,v,w),\ y=y(u,v,w),\ z=z(u,v,w)$$

задають взаємно однозначне відображення області (V) на область (V'). Визначник

$$I=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix},$$

називається ***якобіаном*** такого ***відображення***. Якщо в області (V) якобіан $I\ne 0$, то справедлива формула заміни змінних у потрійному інтегралі:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{(V')} f\big(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big)\cdot|I|dudvdw.$$

Змінні u, v, w називають ***криволінійними координатами*** точки (x, y, z), а вираз $|I(u,v,w)|dudvdw$ – ***елементом об'єму*** в криволінійних координатах.

Розглянемо найбільш вживані на практиці криволінійні координати – циліндричні та сферичні.

Циліндричними координатами точки $M(x, y, z)$ називають числа ρ, φ, z, де ρ і φ – полярні координати точки (x, y) (рис. 34). Тоді $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$, де $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \rho < +\infty$, $-\infty < z < +\infty$, а якобіан переходу

$$I = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho .$$

Формула заміни змінних у циліндричних координатах має вигляд:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{(V')} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\cdot \rho\, d\rho d\varphi dz .$$

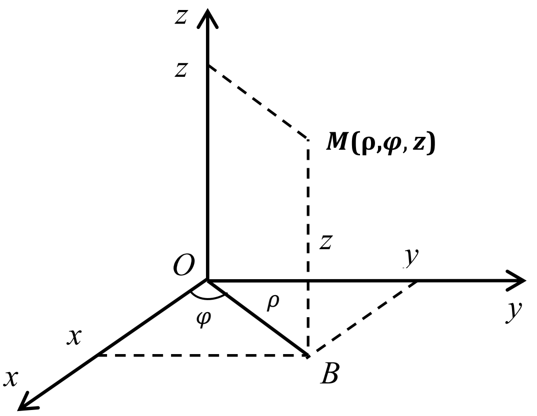


Рис. 34

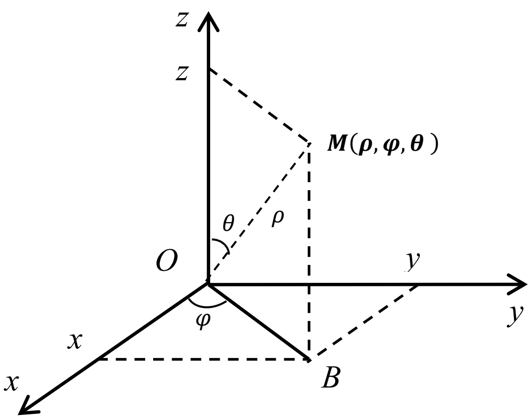


Рис. 35

Сферичними координатами точки $M(x, y, z)$ називають числа ρ, φ, θ, де θ – кут між віссю Oz і радіусом-вектором OM точки M, ρ - довжина цього радіуса-вектора, φ – кут між проекцією OB радіуса-вектора OM на площину xOy і додатним напрямом осі Ox (рис. 35). Маємо $OB = \rho\sin\theta$, і тому

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi,\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi,\ z = \rho\cos\theta ,$$

де $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$.

Якобіан цього перетворення $I(\rho,\varphi,\theta)=\rho^2\sin\theta$, тому ***формула заміни змінних в сферичних координатах*** має вигляд

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{(V')} f(\rho\sin\theta\cos\varphi,\rho\sin\theta\sin\varphi,\rho\cos\theta)\cdot\rho^2\sin\theta\,d\rho d\varphi d\theta\,.$$

Приклад. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2)dxdydz$, де (V) – область, обмежена площиною $z=2$ та параболоїдом обертання $x^2+y^2=2z$.

Розв'язання. Задана область обмежена зверху площиною $z=2$, а знизу – параболоїдом обертання $x^2+y^2=2z$ (рис. 36). Вона проектується в область (D) площини xOy, обмежену колом $x^2+y^2=4$ (рис. 37), яке отримується із системи рівнянь $\begin{cases} z=2, \\ x^2+y^2=2z. \end{cases}$

Перейдемо до циліндричних координат. Маємо, що $0\le\varphi\le2\pi$, $0\le\rho\le2$, $\dfrac{\rho^2}{2}\le z\le2$.

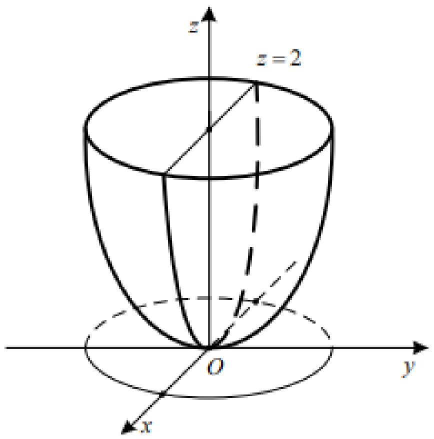


Рис. 36

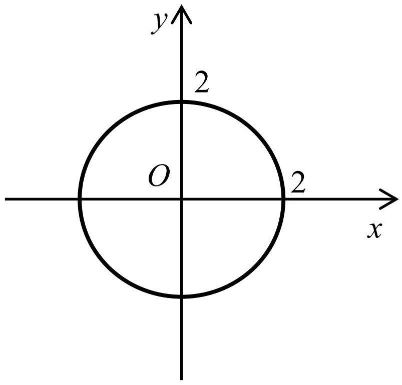


Рис. 37

$$\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2)dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho^3d\rho\int\limits_{\frac{\rho^2}{2}}^2dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho^3\cdot\left(z\Big|_{\frac{\rho^2}{2}}^2\right)d\rho=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho^3\cdot\left(2-\frac{\rho^2}{2}\right)d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\left(2\rho^3-\frac{\rho^5}{2}\right)d\rho=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^4}{2}-\frac{\rho^6}{12}\right)\Bigg|_0^2d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\frac{8}{3}d\varphi=\frac{16\pi}{3}.$$

Приклад. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, де (V) – куля $x^2+y^2+z^2=z$.

Розв'язання. Канонічне рівняння сфери, що обмежує задану область (V) має вигляд $x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, тобто її центр розташований в точці $\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$, а радіус $R=\frac{1}{2}$ (рис. 38).

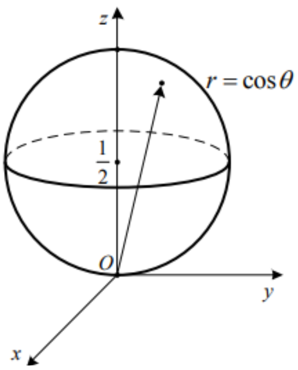


Рис. 38

У потрійному інтегралі перейдемо до сферичних координат. Врахуємо, що у сферичних координатах рівняння сфери $\rho=\cos\theta$, проекцією півкулі на площину *xOy* є круг $x^2+y^2\le\frac{1}{4}$, тому в сферичній системі координат область (V') описується системою нерівностей:

$$0\le\rho\le\cos\theta,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\varphi\le2\pi .$$

Отже, маємо

$$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz=\iiint\limits_{(V')} \rho^3\sin\theta d\rho d\theta d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{\cos\theta}\rho^3d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cdot\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^{\cos\theta}d\theta=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\sin\theta\,d\theta=-\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}\left.\left(\frac{\cos^5\theta}{5}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{1}{20}\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{\pi}{10}.$$

Застосування потрійного інтеграла до обчислення об'ємів просторових тіл

В задачі про знаходження маси матеріального неоднорідного тіла була виведена формула $m=\lim\limits_{d\to0}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\rho(x_k,y_k,z_k)\cdot\Delta V_k$. Якщо вважати матеріальне тіло однорідним з густиною $\rho(x,y,z)=1$, то отримаємо очевидну рівність

$$\lim_{d_k\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta V_k = V .$$

Отже, ми отримали формулу для обчислення об'єму просторового тіла, обмеженого областю (V):

$$V = \iiint\limits_{(V)} dxdydz .$$

Приклад. Обчислити об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2 + y^2 = 4$ і площинами $y + z = 2$, $z = 0$.

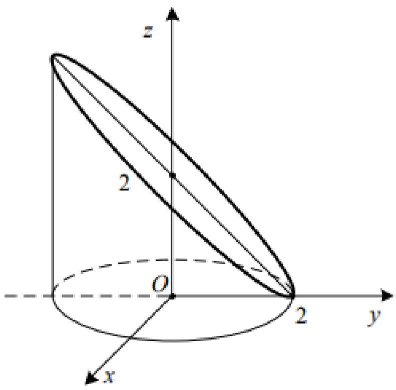


Рис. 39

Розв'язання. Задане тіло обмежене зверху площиною $y + z = 2$, знизу – $z = 0$. На площину xOy воно проектується в круг $x^2 + y^2 \le 4$ (рис. 39). Об'єм заданого тіла виражається інтегралом $\iiint\limits_{(V)} dxdydz$. Для обчислення цього інтегралу доречно перейти до циліндричної системи координат, в якій область (V') описується системою нерівностей: $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le 2$, $0 \le z \le 2 - \rho\sin\varphi$.

Маємо

$$\iiint\limits_{(V)} dxdydz = \iiint\limits_{(V')} \rho d\varphi\, d\rho\, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho\, d\rho \int_0^{2-\rho\sin\varphi} dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho \left(z\Big|_0^{2-\rho\sin\varphi} \right) d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho (2 - \rho\sin\varphi) d\rho = \int_0^{2\pi} \left(\rho^2 - \frac{\rho^3}{3}\sin\varphi \right)\Bigg|_0^2 d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(4 - \frac{8}{3}\sin\varphi \right) d\varphi = 8\pi \text{ (куб. од.)}$$

Приклад. Обчислити об'єм фігури, обмеженої поверхнею $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = a^3 x$.

Розв'язання. Аналітичний вираз в лівій частині рівняння поверхні спонукає при обчисленні відповідного інтегралу перейти до сферичних координат. При цьому рівняння поверхні $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = a^3 x$ має вигляд

$\rho = a\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi}$, а межі інтегрування по змінній ρ визначаються подвійною нерівністю $0 \le \rho \le a\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi}$.

Знайдемо межі інтегрування по змінним θ і φ: покладемо $\rho = 0$, або $a\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi} = 0$, отримаємо $\sin\theta\cos\varphi = 0$. Це можливо у випадку, коли $\sin\theta = 0$ або $\cos\varphi = 0$ ($\theta = \pi n,\ n \in Z,\ \varphi = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$). Отже, $0 \le \theta \le \pi$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$, і шуканий об'єм дорівнює:

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{a\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi}} \rho^2 \sin\theta d\rho = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \cdot \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^{a\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi}} d\theta =$$

$$= \frac{a^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^2\theta\cos\varphi d\theta = \frac{\pi a^3}{3} \text{(куб. од.)}$$

Криволінійні інтеграли першого роду

Задача про масу матеріальної кривої: знайти масу неоднорідної матеріальної кривої $\breve{AB}$, якщо її лінійна густина $\rho = \rho(x, y)$.

Лінійною густиною ρ ***однорідної кривої*** ($\rho = const$ в довільній точці M) називають відношення її маси m до довжини $l(\breve{AB})$. В цьому випадку маса кривої визначається формулою $m = \rho l$.

Якщо крива неоднорідна, то дану формулу застосувати не можна. ***Лінійною густиною неоднорідної кривої*** в довільній точці M називають скінченну границю відношення маси частини кривої, що містить цю точку, до її довжини, коли довжина цієї частини прямує до нуля.

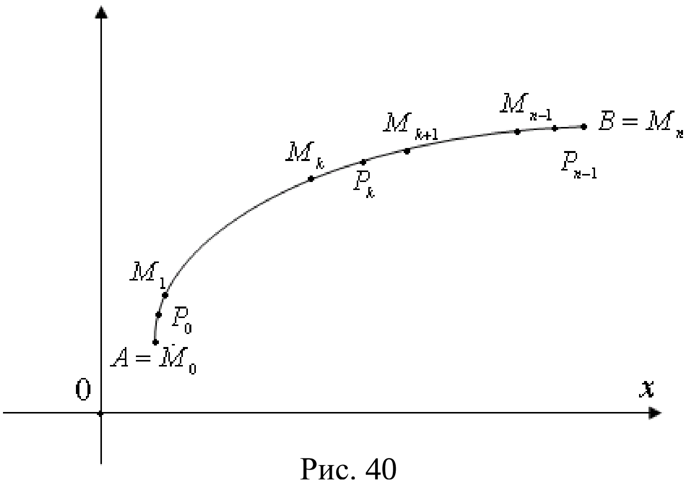


Рис. 40

Нехай **спрямлювана крива** $\breve{AB}$ задана параметричними рівняннями $x = x(t), y = y(t),\ t \in [\alpha, \beta]$ так, що кожним двом різним значенням параметра $t \in [\alpha, \beta]$ відповідають дві різні точки кривої. Розглянемо довільне розбиття кривої $\breve{AB}$ точками $A = M_0, M_1, M_2, ..., M_{n-1}, M_n = B$ на частини $M_k \breve{M}_{k+1},\ k = 0,1,...,n-1$ (рис. 40). Позначимо довжину дуги $M_k \breve{M}_{k+1}$ через Δl_k. На кожній дузі $M_k \breve{M}_{k+1},\ k = 0,1,...,n-1$, довільним чином виберемо точку P_k і складемо суму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \rho(P_k) \Delta l_k , \tag{2.14}$$

Цю суму можна вважати наближеним значенням маси кривої $\breve{AB}$. Перейдемо до границі в (2.14) при $L = \max\limits_{0 \le k \le n-1} \Delta l_k \to 0$ і отримаємо точне значення маси m:

$$m = \lim_{L \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \rho(P_k) \Delta l_k .$$

Границі такого типу приводять до поняття криволінійного інтеграла першого роду.

Означення криволінійного інтегралу першого роду

Нехай у площині xOy задано спрямлювану криву $\breve{AB}$ з довжиною S, на якій визначено деяку неперервну функцію $f(x, y)$. Позначимо через s довжину дуги на $\breve{AB}$, що сполучає точку A з довільною точкою кривої. За допомогою введеного параметра s рівняння кривої $A\breve{B}$ запишемо в параметричному вигляді $x = x(s),\ \ y = y(s),\ \ 0 \le s \le S$ (**<u>натуральна параметризація</u>**), а задану функцію $f(x, y)$ – як функцію $f(x(s), y(s))$ від однієї змінної s.

Розглянемо деяке T-розбиття відрізка $[0, S]$ точками $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_k < \ldots < s_{n-1} < s_n = S$ та складемо суму $\sigma = \sum\limits_{k-0}^{n-1} f(x(\tau_k), y(\tau_k))\Delta s_k$, де $\Delta s_k = s_{k+1} - s_k$, $\tau_k \in [s_k, s_{k+1}]$, $k = 0,1,\ldots,n-1$, яку називають ***інтегральною сумою***.

Нехай $\lambda(T) = \max\limits_{0 \le k \le n-1} \Delta s_k$ – ***параметр*** T-розбиття. Якщо існує границя складених інтегральних сум при $\lambda(T) \to 0$ і дорівнює числу I, то це число називають ***криволінійним інтегралом першого роду*** (або ***по довжині дуги***) від функції $f(x, y)$ по кривій $A\breve{B}$ і позначають $\int\limits_{A\breve{B}} f(x, y)ds$.

Властивості криволінійних інтегралів першого роду

Властивості криволінійних інтегралів та їх доведення аналогічні відповідним властивостям визначених інтегралів.

1. Якщо функція $f(x, y)$ інтегровна на кривій $A\breve{B}$, то інтегровною на цій кривій є і функція $Cf(x, y)$, де C – стала величина, і виконується рівність

$$\int\limits_{A\breve{B}} Cf(x, y)ds = C\int\limits_{A\breve{B}} f(x, y)ds.$$

2. Якщо функції $f(x, y)$ та $g(x, y)$ є інтегровними на кривій $A\breve{B}$, то функції $f(x, y) \pm g(x, y)$ також інтегровні на цій кривій і

$$\int\limits_{A\breve{B}} (f(x, y) \pm g(x, y))ds = \int\limits_{A\breve{B}} f(x, y)ds \pm \int\limits_{A\breve{B}} g(x, y)ds.$$

3. Якщо функція $f(x, y)$ інтегровна на кривій $A\breve{B}$ і $f(x, y) \ge 0$ для всіх $(x, y) \in A\breve{B}$, то $\int\limits_{A\breve{B}} f(x, y)ds \ge 0$.

4. Якщо $f(x,y)\geq g(x,y)$ *для всіх* $(x,y)\in \breve{AB}$ *і кожна з функцій* $f(x,y)$ *і* $g(x,y)$ *інтегровна на* $\breve{AB}$*, то* $\int\limits_{\breve{AB}} f(x,y)ds \geq \int\limits_{\breve{AB}} g(x,y)ds$.

5. Якщо крива $\breve{AB}$ *складається з двох кривих* $\breve{AC}$ *і* $\breve{CB}$*, то функція* $f(x,y)$ *інтегровна на* $\breve{AB}$*, причому*

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(x,y)ds = \int\limits_{\breve{AC}} f(x,y)ds + \int\limits_{\breve{CB}} f(x,y)ds .$$

6. Якщо функція $f(x,y)$ *інтегровна на кривій* $\breve{AB}$*, то функція* $|f(x,y)|$ *також інтегровна на цій кривій і*

$$\left|\int\limits_{\breve{AB}} f(x,y)ds\right| \leq \int\limits_{\breve{AB}} |f(x,y)|ds .$$

7. **Теорема (про середнє значення).** *Якщо функція* $f(x,y)$ *неперервна на кривій* $\breve{AB}$*, то на цій кривій знайдеться така точка* $(\bar{x};\bar{y})$*, що*

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(x,y)ds = f(\bar{x},\bar{y})\cdot S ,$$

де S *- довжина дуги* $\breve{AB}$.

Обчислення криволінійних інтегралів першого роду

Нехай крива $\breve{AB}$ задана за допомогою довільного параметру t у вигляді $x = x(t),\ y = y(t),\ t\in[\alpha,\beta]$. Тоді обчислення криволінійного інтегралу першого роду зводиться до обчислення визначеного інтегралу за формулою:

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(x,y)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t))\sqrt{x_t'^2(t)+y_t'^2(t)}dt . \qquad (2.15)$$

Дійсно, якщо функції $x = x(t),\ y = y(t)$ неперервні разом зі своїми похідними першого порядку і функція $f(x(t),y(t))$ неперервна на відрізку $[\alpha,\beta]$, то крива $\breve{AB}$ є спрямлюваною і довжина її дуги $\breve{AM}$, де M - довільна точка кривої $\breve{AB}$, обчислюється за формулою $S(t)=\int\limits_{\alpha}^{t}\sqrt{x'^2(\tau)+y'^2(\tau)}d\tau$.

Отже, $ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$ і справедлива формула (2.15).

Зокрема, якщо крива $\breve{AB}$ задана в декартових координатах рівнянням $y=y(x), a\le x\le b$, де функція $y(x)$ неперервна разом зі своєю похідною $y'(x)$ на відрізку $[a,b]$, то формула (2.15) має вигляд

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(x,y)ds=\int\limits_{a}^{b} f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}dx. \qquad (2.16)$$

У випадку, коли крива $\breve{AB}$ задана рівнянням $x=x(y), c\le y\le d$, де функція $x(y)$ неперервна разом зі своєю похідною $x'(y)$ на відрізку $[c,d]$, то

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(x,y)ds=\int\limits_{c}^{d} f(x(y),y)\sqrt{1+x'^2(y)}dy. \qquad (2.17)$$

Криву інтегрування $\breve{AB}$ часто позначають буквою L, а диференціал дуги ds через dl.

Приклад. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{L} xdl$, де L – дуга параболи $y=\frac{x^2}{\sqrt{2}}$, що сполучає точки $(0;0)$ і $(2;\sqrt{2})$.

Розв'язання. Оскільки $x\in[0;2]$ і $y'=\sqrt{2}x$, то за формулою (2.16) маємо:

$$\int\limits_{L} xdl=\int\limits_{0}^{2} x\sqrt{1+2x^2}dx=\begin{bmatrix} t=1+2x^2, & t_н=1 \\ dt=4xdx, & t_в=9 \end{bmatrix}=\frac{1}{4}\int\limits_{1}^{9}\sqrt{t}dt=\frac{1}{6}t\sqrt{t}\Big|_1^9=\frac{13}{3}.$$

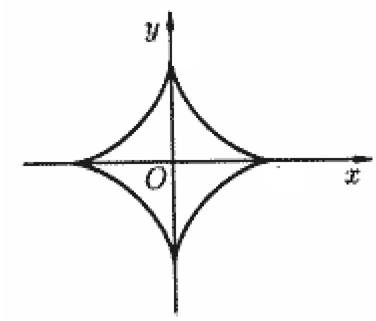


Рис. 41

Приклад. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{L}\left(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}\right)dl$, де L - дуга астроїди $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

Розв'язання. Запишемо параметричне рівняння астроїди: $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$,

$t\in[0;2\pi]$. Графік астроїди в декартовій системі координат зображено на рис. 41. Знайдемо похідні $x'=-3a\cos^2 t\sin t$, $y'=3a\sin^2 t\cos t$ та диференціал дуги

$$dl=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt=\sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2+(3a\sin^2 t\cos t)^2}\,dt=3a\cos t\sin dt.$$

Отримаємо інтеграл

$$\int\limits_L\left(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}\right)dl=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(a^{\frac{4}{3}}\cos^4 t+a^{\frac{4}{3}}\sin^4 t\right)\cdot 3a\cos t\sin t dt=12a^{\frac{7}{3}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4 t+\sin^4 t)\cos t\sin t dt=$$

$$=12a^{\frac{7}{3}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left((1-\sin^2 t)^2+\sin^4 t\right)\cos t\sin t dt=\begin{bmatrix} u=\sin t, & u_н=0\\ du=\cos t dt, & u_в=1\end{bmatrix}=$$

$$=12a^{\frac{7}{3}}\int\limits_0^1\left((1-u^2)^2+u^4\right)u du=12a^{\frac{7}{3}}\int\limits_0^1(u-2u^3+2u^5)du=12a^{\frac{7}{3}}\left(\frac{u^2}{2}-\frac{u^4}{2}+\frac{u^6}{3}\right)\Bigg|_0^1=4a^{\frac{7}{3}}.$$

Зауваження. Нехай функція $f(x,y,z)$ визначена та неперервна на просторовій кривій $A\breve{B}$, заданої рівняннями $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),\ t\in[\alpha,\beta]$, де функції $x(t),y(t),z(t)$ неперервні разом зі своїми похідними на відрізку $[\alpha,\beta]$. Тоді криволінійний інтеграл $\int\limits_{A\breve{B}} f(x,y,z)ds$ обчислюється за формулою

$$\int\limits_{A\breve{B}} f(x,y,z)ds=\int\limits_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x_t'^2(t)+y_t'^2(t)+z_t'^2(t)}dt.$$

Приклад. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L\frac{dl}{x^2+y^2+z^2}$, де L - дуга кривої $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt,\ t\in[0;2\pi]$.

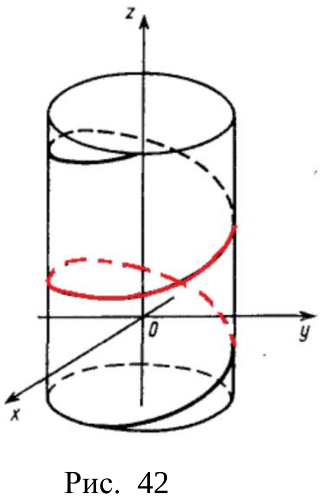


Рис. 42

Розв’язання. Кривою, по якій проводиться інтегрування, є гвинтова лінія (рис. 42).

Похідні мають вигляд $x_t'=-a\sin t$, $y_t'=a\cos t$, $z_t'=b$, диференціал дуги

$$dl=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}dt=$$

$$=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2}dt=\sqrt{a^2+b^2}dt.$$

Отже,

$$\int_L \frac{dl}{x^2+y^2+z^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t + b^2t^2}\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2t^2}\,dt = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b^2}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\frac{a^2}{b^2}+t^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\,arctg\frac{bt}{a}\Big|_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\,arctg\frac{2\pi b}{a}.$$

Криволінійні інтеграли другого роду

Задача про роботу змінної сили: нехай матеріальна точка $M(x,y)$ під дією змінної сили $\vec{F}$ (залежить від положення точки на кривій) рухається в площині xOy вздовж кривої L. Обчислимо роботу сили при переміщенні точки M з точки A в точку B кривої (рис. 43).

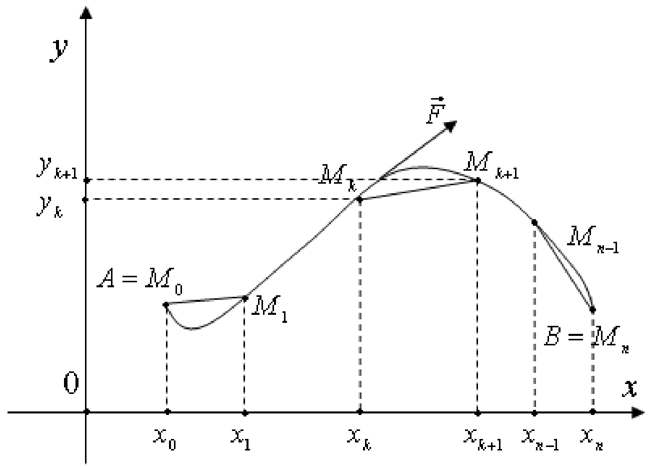


Рис. 43

Відомо, що робота по переміщенню матеріальної точки вздовж прямолінійного шляху під дією сталої сили $\vec{F}$ визначається як скалярний добуток вектора сили та вектору шляху $\vec{S}$, тобто

$$W = \vec{F}\cdot\vec{S}. \qquad (2.18)$$

Припустимо тепер, що матеріальна точка під дією сили $\vec{F}$ перемістилися вздовж спрямлюvваної кривої L від точки A до точки B, прицьому сила змінювалася і за величиною, і за напрямом.

Розіб'ємо криву $\breve{AB}$ довільним чином на n частин точками $A = M_0, M_1, M_2, ..., M_{n-1}, M_n = B$, точки поділу сполучимо послідовно відрізками M_kM_{k+1}, $k = 0,1,...,n-1$, і отримаємо ламану. Припустимо, що на кожному відрізку M_kM_{k+1} сила $\vec{F}$ є сталою і дорівнює її значенню в деякій точці M_k

цього відрізка, а робота сили за формулою (18) визначається як скалярний добуток $W_k = \vec{F}(M_k) \cdot M_k\vec{M}_{k+1}$. Якщо вектори $\vec{F}(M_k)$ і $\overrightarrow{M_k M_{k+1}}$ записати у проекціях на координатні осі у вигляді $\vec{F}(M_k) = P(M_k)\vec{i} + Q(M_k)\vec{j}$, $M_k\vec{M}_{k+1} = \Delta x_k \vec{i} + \Delta y_k \vec{j}$, то робота $W_k = P(M_k)\Delta x_k + Q(M_k)\Delta y_k$, де $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$, $k = 0,1,...,n-1$.

Робота сили $\vec{F}$ вздовж усієї ламаної, вписаної в криву $\breve{AB}$, дорівнює $\sum_{k=0}^{n-1} P(M_k)\Delta x_k + Q(M_k)\Delta y_k$. Якщо існує скінченна границя цієї суми при $\lambda(T) = \max\limits_{0 \le k \le n-1} \left| M_k\vec{M}_{k+1} \right| \to 0$, то її приймають за роботу змінної сили $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ вздовж кривої $\breve{AB}$, тобто

$$W = \lim_{\lambda(T) \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} P(x_k, y_k)\Delta x_k + Q(x_k, y_k)\Delta y_k .$$

Означення криволінійного інтегралу другого роду

Нехай у площині xOy неперервна спрямлювана крива $\breve{AB}$ задана рівняннями $x = x(t), y = y(t), \alpha \le t \le \beta$, і в точках цієї кривої визначена функція $P(x, y)$.

Введемо T - розбиття $\alpha = t_0 < t_1 < ... < t_k < ... < t_{n-1} < t_n = \beta$ відрізка $[\alpha, \beta]$. На кожному відрізку $[t_k, t_{k+1}]$ довільним чином візьмемо точку τ_k, $k = 0,1,...,n-1$, і складемо суму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} P(x(\tau_k), y(\tau_k))\Delta x_k , \qquad (2.19)$$

яку називають ***інтегральною сумою***.

Якщо існує скінченна границя інтегральних сум (19) при $\lambda(T) = \max\limits_{0 \le k \le n-1} \Delta t_k \to 0$, то це число називають ***криволінійним інтегралом*** від функції $P(x, y)$ ***по змінній*** x вздовж кривої $\breve{AB}$ і позначають $\int\limits_{\breve{AB}} P(x, y)dx$.

Поняття криволінійного інтеграла по ***змінній*** y вводиться аналогічно, він позначається як $\int\limits_{\breve{AB}} Q(x,y)dy$.

Криволінійні інтеграли по координатах об’єднують загальною назвою – ***криволінійні інтеграли другого роду*** і записують у вигляді

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Механічний зміст криволінійного інтегралу II роду: інтеграл $\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ чисельно дорівнює роботі змінної сили $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ по переміщенню матеріальної точки $M(x,y)$ вздовж кривої $\breve{AB}$ від точки A до точки B.

Властивості криволінійних інтегралів другого роду:

1. $\int\limits_{\breve{AB}} 0dx = \int\limits_{\breve{AB}} 0dy = 0$.

2. *Якщо* $\breve{AB}$ *– відрізок, перпендикулярний до осі* Ox, *то* $\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y)dx = 0$.

Якщо $\breve{AB}$ *– відрізок, перпендикулярний до осі* Oy, *то* $\int\limits_{\breve{AB}} Q(x,y)dy = 0$.

3. $\int\limits_{\breve{AB}} kP(x,y)dx = k\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y)dx$, $k = const$.

4. $\int\limits_{\breve{AB}} (P_1 \pm P_2)dx = \int\limits_{\breve{AB}} P_1dx \pm \int\limits_{\breve{AB}} P_2dx$.

5. *Якщо крива* $\breve{AB}$ *складається з двох кривих* $\breve{AC}$ *і* $\breve{CB}$, *то*

$$\int\limits_{\breve{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_{\breve{AC}} Pdx + Qdy + \int\limits_{\breve{CB}} Pdx + Qdy.$$

Ці властивості доводяться за означенням криволінійного інтеграла другого роду.

6. *Якщо напрямок обходу замінити на протилежний, то криволнійний інтеграл змінює знак*:

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{\breve{BA}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Дійсно, це слідує з того, що при інтегруванні по $\breve{BA}$ відповідні прирости Δx_i та Δy_j мають протилежні знаки.

Зауваження. Коли точки A і B кривої $\breve{AB}$ збігаються, то отримаємо замкнений контур. Іншими словами, під ***замкненим контуром*** на площині Oxy розуміють неперервну криву $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$ таку, що $x(\alpha) = x(\beta)$, $y(\alpha) = y(\beta)$.

При інтегруванні вздовж замкненого контуру потрібно вказувати напрям його обходу. За ***додатний напрям*** приймають напрям ***проти*** *руху* годинникової стрілки, або напрям, ідучи за яким частина площини, обмежена контуром, залишається ***зліва. Від'ємним*** вважають напрям обходу, що співпадає з напрямом руху годинникової стрілки.

Зауваження. Ми розглядаємо тільки плоскі криві, які не перетинають самих себе.

Зауваження. Якщо крива $AB = L$ замкнена і напрям її обходу є додатним, то криволінійний інтеграл позначається

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad \text{або} \quad \oint_L Pdx + Qdy\,.$$

Обчислення криволінійних інтегралів другого роду

Нехай криву $\breve{AB}$ задано параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, де функції $x(t)$, $y(t)$ неперервні разом із своїми похідними на відрізку $[\alpha, \beta]$, а функція $P(x, y)$ неперервна на $\breve{AB}$. За означенням

$$\int_{\breve{AB}} P(x, y)dx = \lim_{\lambda(T) \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} P(\zeta_k, \eta_k)\Delta x_k\,.$$

Розглянемо інтегральну суму $\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} P(\zeta_k, \eta_k)\Delta x_k$, де $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = x(t_{k+1}) - x(t_k)$. За теоремою Лагранжа $\Delta x_k = x'(\theta_k)\Delta t_k$, $\theta_k \in (t_k, t_{k+1})$. Точку (ζ_k, η_k) виберемо так, щоб $\zeta_k = x(\theta_k)$, $\eta_k = y(\theta_k)$, тоді

$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} P(x(\theta_k), y(\theta_k))x'(\theta_k)\Delta t_k$. Отриманий вираз є інтегральною сумою для функції $P(x(t), y(t))x'(t)$, неперервної, а, отже, інтегровної для $t \in [\alpha, \beta]$, і

$$\int_{\breve{AB}} P(x, y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t))x'(t)dt .$$

Аналогічно, для неперервної на кривій $\breve{AB}$ функції $Q(x, y)$ маємо:

$$\int_{\breve{AB}} Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(t), y(t))y'(t)dt .$$

Тоді

$$\int_{\breve{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left(P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t)\right)dt . \quad (2.20)$$

Якщо крива $\breve{AB}$ є графіком неперервної на відрізку $[a,b]$ функції $y = y(x)$, а функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ неперервні на кривій $\breve{AB}$, то має місце формула

$$\int_{\breve{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{a}^{b} \left(P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \cdot y'(x)\right)dx . \quad (2.21)$$

Якщо крива $\breve{AB}$ є графіком неперервної на відрізку $[c, d]$ функції $x = x(y)$, а функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ неперервні на кривій $\breve{AB}$, то має місце формула

$$\int_{\breve{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{c}^{d} \left(P(x(y), y) \cdot x'(y) + Q(x(y), y)\right)dy . \quad (2.22)$$

Приклад. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L \left(x + y^2\right)dx + 2xydy$, де L – контур трикутника ABC, де $A(0,0)$, $B(1;0)$, $C(1;1)$ (напрямок руху – проти годинникової стрілки).

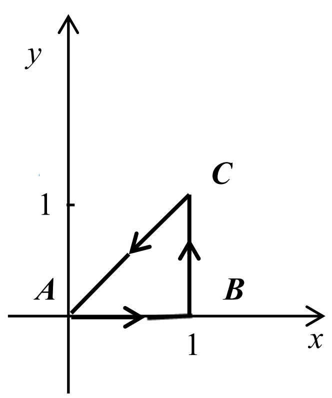


Рис. 44

Розв'язання. Контур інтегрування складається з трьох відрізків AB, BC, CA (рис. 44). Заданий напрямок руху вказаний стрілкою. Користуючись адитивною властивістю знайдемо інтеграл на кожному з цих відрізків.

1) $AB: \ y=0, \ x\in[0;1]$

Маємо за формулою (2.21)

$$\int\limits_{AB}(x+y^2)dx+2xydy=\int\limits_0^1(x+0+2x\cdot 0\cdot 0)dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{1}{2}.$$

2) $BC: \ x=1, \ y\in[0;1]$

За формулою (2.22) $\int\limits_{AB}(x+y^2)dx+2xydy=\int\limits_0^1((1+y^2)\cdot 0+2\cdot 1\cdot y)dy=\left.y^2\right|_0^1=1.$

3) $CA: \ y=x, \ x\in[1;0]$

Маємо $\int\limits_{AB}(x+y^2)dx+2xydy=\int\limits_0^1(x+x^2+2x\cdot x\cdot 1)dx=\left.\left(\frac{x^2}{2}+x^3\right)\right|_1^0=-\frac{3}{2}.$

Приклад. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L xydx+y^2dy$, де L – дуга еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ від точки $A(a;0)$ до точки $B(0;b)$ (напрямок руху – проти годинникової стрілки).

Розв'язання. Використаємо рівняння дуги еліпса в параметричній формі: $x=a\cos t, \ y=b\sin t, \ t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Точка A відповідає значенню параметра $t=0$, а точка B - $t=\frac{\pi}{2}$.

Маємо, що $x'=-a\sin t, \ y'=b\cos t$ і за формулою (20)

$$\int\limits_L xydx+y^2dy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(a\cos t\cdot b\sin t(-a\sin t)+b^2\sin^2 t\cdot b\cos t)dt=$$

$$=(-a^2b+b^3)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos tdt=\frac{b(b^2-a^2)}{3}.$$

Формула Гріна-Остроградського

Ця формула визначає зв'язок подвійного інтеграла по області (D) з криволінійним інтегралом по контуру L, який обмежує цю область.

Означення. Область (D), одночасно елементарна відносно обох осей Ox і Oy, називається ***елементарною***.

Теорема (Гріна-Остроградського). *Нехай область (D) елементарна, а функції $P(x,y)$, $Q(x,y)$ неперервні разом із частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$ та $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в області (D) і на її межі L. Тоді має місце формула*

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

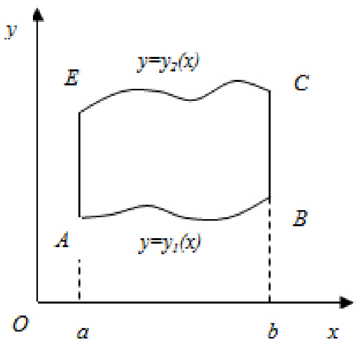


Рис. 45

Доведення. Розглянемо елементарну відносно осі Ox область (D) з додатно орієнтованою межею $ABCEA$ (рис. 45). За умовою теореми функція $P(x,y)$ визначена та неперервна разом із своєю частинною похідною $\frac{\partial P}{\partial y}$ в замкненій області (D), тому подвійний інтеграл

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b \left(P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x)) \right) dx =$$

$$= \int_a^b P(x, y_2(x)) dx - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx. \qquad (2.23)$$

Виразимо визначені інтеграли через криволінійні:

$$\int_a^b P(x, y_2(x)) dx = \int_{\breve{EC}} P(x,y) dx = -\int_{\breve{CE}} P(x,y) dx, \qquad (2.24)$$

$$-\int_a^b P(x, y_1(x)) dx = -\int_{\breve{AB}} P(x,y) dx. \qquad (2.25)$$

За властивістю 2 криволінійних інтегралів маємо, що $-\int\limits_{\breve{BC}} P(x,y)dx = 0$ та $-\int\limits_{\breve{EA}} P(x,y)dx = 0$. Враховуючи ці рівності та (2.23), (2.24) і (2.25), отримаємо

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y)dx - \int\limits_{\breve{BC}} P(x,y)dx - \int\limits_{\breve{CE}} P(x,y)dx - \int\limits_{\breve{EA}} P(x,y)dx = -\int\limits_{ABCEA} P(x,y)dx\,. \quad (2.26)$$

Розглянемо область (D), елементарну відносно осі Oy (рис. 46), на якій визначені і неперервні функція $Q(x,y)$ та її частинна похідна $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Міркуваннями, аналогічними щодо виведення формули (2.26), отримаємо

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int\limits_{L} Q(x,y)dy\,. \qquad (2.27)$$

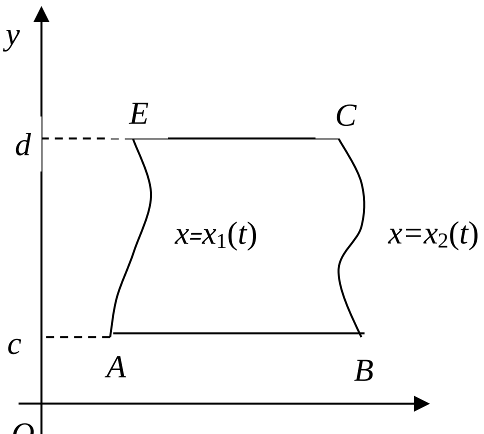


Рис. 46

Розглянемо тепер загальний випадок, коли область (D) є елементарною і допускає розбиття як на області, елементарні відносно осі Ox, так і на області, елементарні відносно осі Oy.

Нехай область (D) з межею L розбито на елементарні відносно осі Ox частини (D_i) з межами L_i, $i = 1,2,...,n$ (рис. 47), для кожної з яких справдується рівність

$$\iint\limits_{(D_i)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int\limits_{L_i} P(x,y)dx\,.$$

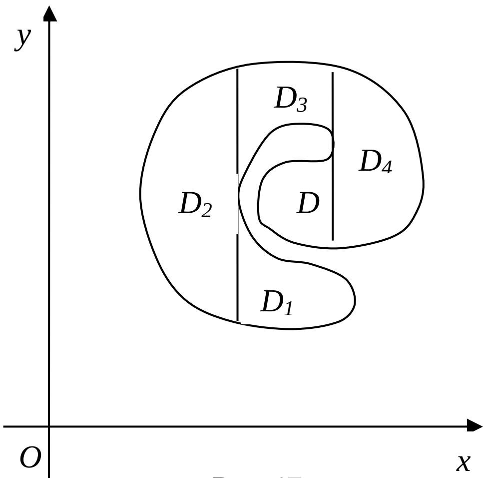


Рис.47

Сума цих рівностей по i, де $i = 1,2,...,n$, зліва дає подвійний інтеграл по всій області (D), а справа – суму криволінійних інтегралів, взятих по контурах L_i, які обмежують область (D), та ліній розбиття області (D) на частини. Проте, криволінійні інтеграли по кожній з ліній розбиття дорівнюють нулю.

Отже, сума інтегралів $\int\limits_{L_i} P(x,y)dx$ дорівнює криволінійному інтегралу по всьому контуру L і

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int\limits_{L} P(x,y)dx \,. \qquad (2.28)$$

Справедливість формули (2.27) для областей, які можна розбити на скінченну кількість елементарних доводиться аналогічно.

Очевидно, що для елементарної області (D) одночасно виконуються рівності (2.28) і (2.27). Якщо від рівності (2.27) відняти рівність (2.28), то отримаємо ***формулу Гріна***

$$\oint\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \,.$$

Теорему доведено.

Зауваження. З формули Гріна можна отримати формулу для обчислення площі плоскої фігур через криволінійний інтеграл. Оскільки $\iint\limits_{(D)} dxdy = S(D)$, то $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$. Очевидно, що цю умову задовольняють такі пари функцій: $Q(x,y) = x$, $P(x,y) = 0$ або $Q(x,y) = 0$, $P(x,y) = -y$. Тоді

$$S(D) = \iint\limits_{(D)} dxdy = \int\limits_{L} xdy \,,$$

$$S(D) = \iint\limits_{(D)} dxdy = -\int\limits_{L} ydx \,.$$

Додамо почленно ці рівності, отримаємо формулу для обчислення ***площі плоскої фігури*** (D):

$$S(D) = \frac{1}{2} \int\limits_{L} xdy - ydx \,.$$

Теорема (про незалежність криволінійного інтегралу від форми шляху інтегрування). *Нехай в елементарній області* (D) *функції*

$P(x,y)$, $Q(x,y)$ *неперервні разом зі своїми частинними похідними* $\dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Тоді рівносильними є наступні твердження:

1. *Інтеграл* $\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, *де* $L \subset (D)$ *– довільний замкнений контур.*

2. *Інтеграл* $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ *не залежить від шляху інтегрування.*

3. *Вираз* $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ *є повним диференціалом деякої функції* $U(x,y)$, *визначеної в області* (D).

4. *В області* (D) *виконується рівність* $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Доведення проведемо за схемою $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$.

1. Нехай $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, де L – будь-який замкнений контур в області (D). Розглянемо замкнений контур $AmBnA$ (рис. 48), тоді

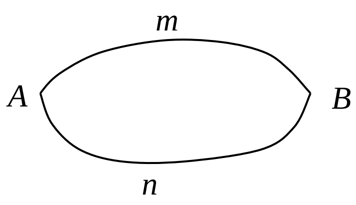


Рис. 48

$$\int\limits_{AnB} Pdx + Qdy + \int\limits_{BmA} Pdx + Qdy = 0.$$

Звідси слідує, що $\int\limits_{AnB} Pdx + Qdy = \int\limits_{AmB} Pdx + Qdy$, тобто інтеграл не залежить від шляху інтегрування ($1 \to 2$).

2. Позначимо $\int\limits_{M_0M} Pdx + Qdy = U(x,y) - U(x_0,y_0)$. Маємо (рис. 49), що

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x+\Delta x; y) - U(x;y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int\limits_{MM_1} Pdx + Qdy}{\Delta x}. \qquad (2.29)$$

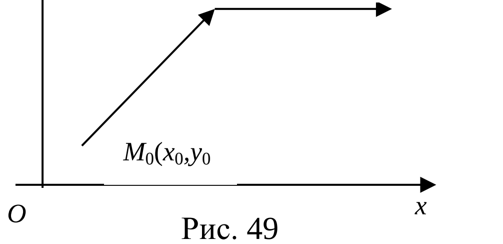


Рис. 49

Оскільки інтеграл не залежить від шляху інтегрування, то виберемо інтегрування вздовж прямої $y = const$, тоді $dy = 0$ і (2.29) запишеться у вигляді

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\int\limits_{x}^{x+\Delta x}P(x,y)dx}{\Delta x}$. Функція $P(x,y)$ неперервна в області (D), тому за теоремою про середнє значення між точками x та $x+\Delta x$ знайдеться така точка ξ, що $\int\limits_{x}^{x+\Delta x}P(x,y)dx = P(\xi,y)\Delta x$. При цьому рівність (2.29) при $\Delta x\to 0$, а отже, $\xi\to x$, набуває вигляду $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{P(\xi,y)\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}P(\xi;y)=\lim\limits_{\xi\to x}P(\xi;y)=P(x;y)$ і $\dfrac{\partial U}{\partial x}=P(x,y)$.

Рівність $\dfrac{\partial U}{\partial y}=Q(x,y)$ доводиться аналогічно.

Отже, $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\dfrac{\partial U}{\partial x}dx+\dfrac{\partial U}{\partial y}dy=dU(x,y)$. ($2\to 3$)

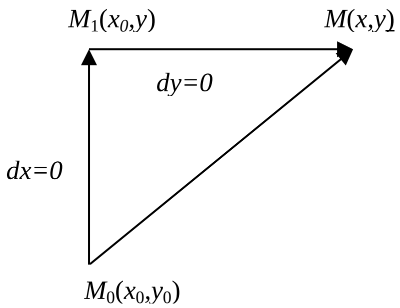


Рис. 50

З цієї рівності слідує, що

$$U(x,y)-U(x_0,y_0)=\int\limits_{M_0M}P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

Оскільки інтеграл не залежить від шляху інтегрування, то будемо інтегрувати вздовж ламаної M_0M_1M, зображеної на рисунку 50. За властивостями криволінійного інтегралу маємо

$$U(x,y)-U(x_0,y_0)=\int\limits_{M_0M_1}Q(x_0;y)dy+\int\limits_{M_1M}P(x;y)dx=\int\limits_{y_0}^{y}Q(x_0;y)dy+\int\limits_{x_0}^{x}P(x;y)dx$$

або

$$U(x;y)=\int\limits_{x_0}^{x}P(x;y)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x_0;y)dy+U(x_0;y_0).$$

3. З неперервності частинних похідних першого порядку $\dfrac{\partial U}{\partial x}=P(x;y)$, $\dfrac{\partial U}{\partial y}=Q(x;y)$ випливає рівність відповідних мішаних частинних похідних

другого порядку $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$, а отже, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ для довільних точок $(x; y)$ з області (D). $(3 \to 4)$

4. Для довільного замкненого контуру L, що повністю лежить в області (D), справедлива формула Гріна і $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, тоді $\int\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0$. $(4 \to 1)$

Теорему доведено.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int\limits_{AB} \left(x^3 - y^3\right)dx - 3xy^2 dy$, якщо AB – крива, що сполучає точки $A(1;0)$ і $B(2;1)$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні: $\frac{\partial P}{\partial y} = -3y^2, \frac{\partial Q}{\partial x} = -3y^2$. З їх рівності слідує, що величина даного інтегралу не залежить від шляху інтегрування. Розглянемо два випадки кривих інтегрування, що сполучають точки $A(1;0)$ і $B(2;1)$.

1-й спосіб. Сполучимо точки $A(1;0)$ і $B(2;1)$ відрізком прямої, рівняння якої $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1}$ або $y = x - 1$. Тоді маємо

$$\int\limits_{AB} \left(x^3 - y^3\right)dx - 3xy^2 dy = \int\limits_1^2 \left(x^3 - (x-1)^3 - 3x(x-1)^2\right)dx =$$

$$= \int\limits_1^2 \left(-3x^3 + 9x^2 - 6x + 1\right)dx = \left(-\frac{3}{4}x^4 + 3x^3 - 3x^2 + x \right)\Bigg|_1^2 = 1\frac{3}{4}.$$

2-й спосіб. Сполучимо точки $A(1;0)$ і $B(2;1)$ ламаною лінією ACB, де точка $C(1{,}1)$. Тоді відрізок $AC \perp Ox,\ CB \perp Oy$ і

$$\int\limits_{AB} \left(x^3 - y^3\right)dx - 3xy^2 dy = \int\limits_{AC} \left(x^3 - y^3\right)dx - 3xy^2 dy + \int\limits_{CB} \left(x^3 - y^3\right)dx - 3xy^2 dy =$$

$$=\int_0^1 -3y^2dy+\int_1^2\left(x^3-1\right)dx=-y^3\Big|_0^1+\left(\frac{x^4}{4}-x\right)\Bigg|_1^2=1\frac{3}{4}.$$

Приклад. Переконатись, що вираз $\left(2x\cos y-y^2\sin x\right)dx+\left(2y\cos x-x^2\sin y\right)dy$ є повним диференціалом деякої функції двох змінних і знайти цю функцію.

Розв'язання. Для того щоб вираз $Pdx+Qdy$ був повним диференціалом функції двох змінних, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$. Маємо

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-2x\sin y-2y\sin x,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=-2y\sin x-2x\sin y.$$

Отже, даний вираз є повним диференціалом деякої функції $\Phi(x,y)$, яку визначимо як $\Phi(x,y)=\int\limits_{AM}Pdx+Qdy$, де A – фіксована точка, $M(x,y)$ – змінна точка. Очевидно, що криволінійний інтеграл не залежить від форми шляху інтегрування, тому будемо інтегрувати вздовж ламаної ABM: на відрізку AB маємо $y=0$ і $dy=0$, на відрізку BM $x=const$ і $dx=0$ (рис. 51).

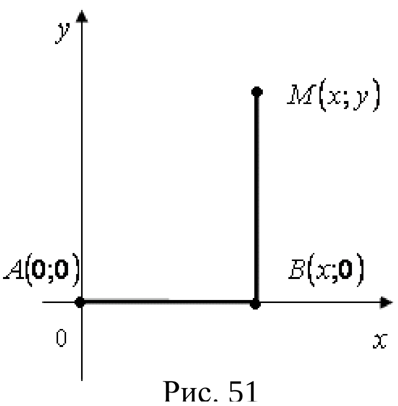


Рис. 51

$$\Phi(x,y)=\int\limits_{ABM}\left(2x\cos y-y^2\sin x\right)dx+\left(2y\cos x-x^2\sin y\right)dy=$$

$$=\int\limits_{AB}\left(2x\cos y-y^2\sin x\right)dx+\left(2y\cos x-x^2\sin y\right)dy+$$

$$+\int\limits_{BM}\left(2x\cos y-y^2\sin x\right)dx+\left(2y\cos x-x^2\sin y\right)dy=$$

$$=\int_0^x 2xdx+\int_0^y\left(2y\cos x-x^2\sin y\right)dy=x^2\Big|_0^x+\left(y^2\cos x+x^2\cos y\right)\Big|_0^y=y^2\cos x+x^2\cos y.$$

Отже, $\Phi(x,y)=y^2\cos x+x^2\cos y$.

Приклад. За формулою Гріна-Остроградського обчислити інтеграл $\oint\limits_L(xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$, де L – коло $x^2+y^2=ax$.

Розв’язання. Маємо

$$P(x, y) = xy + x + y,\ Q(x, y) = xy + x - y,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x + 1,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = y + 1,\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y - x.$$

Тоді за формулою Гріна-Остроградського

$$\oint_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy = \iint_D (y - x)dxdy,$$

де область (D) обмежена колом $x^2 + y^2 = ax$. Для зручності обчислень перейдемо в цьому подвійному інтеграла до полярної системи координат, де область (D') описується системою нерівностей $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \rho \le a\cos\theta$. Отже,

$$\iint_D (y - x)dxdy = \iint_{D'} \rho^2(\sin\theta - \cos\theta)d\varphi d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta - \cos\theta)d\theta \cdot \int_0^{a\cos\theta} \rho^2 d\rho =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta - \cos\theta)d\theta \cdot \rho^3\Big|_0^{a\cos\theta} = \frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta - \cos\theta)\cos^3\theta d\theta = -\frac{2a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta =$$

$$= -\frac{a^3}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta)^2 d\theta = -\frac{a^3}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\theta + \frac{1 + \cos 4\theta}{2}\right)d\theta =$$

$$= -\frac{a^3}{6}\left(\frac{3}{2}\theta + \sin 2\theta + \frac{1}{8}\sin 4\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{a^3}{6}\cdot\frac{3\pi}{4} = -\frac{\pi a^3}{8}.$$

Поверхневі інтеграли другого роду

Нехай на деякій гладкій обмеженій поверхні S задана довільна точка M. Проведемо в цій точці нормальний вектор до поверхні і розглянемо на S довільний замкнений контур, який виходить з точки M і повертається в цю точку. При обході заданого контуру можливі 2 випадки:

1) після обходу контуру напрям нормального вектора не змінюється;

2) після обходу контуру напрям нормального вектора змінюється на протилежний.

У першому випадку поверхню S називають ***двосторонньою***, в другому – ***односторонньою***. Двосторонню поверхню називають *орієнтованою*, а вибір її певної сторони – орієнтацією. Односторонні поверхні називають ***неорієнтованими***.

Прикладами двосторонніх поверхонь є площина, сфера, еліпсоїд, односторонньої – стрічка Мебіуса, яку можна отримати, якщо прямокутний кусок паперу $ABCD$, перекрутивши один раз, склеїти так, щоб точка A збігалася з точкою C, а точка B – з точкою D.

Нас будуть цікавити лише двосторонні поверхні.

Розглянемо гладку орієнтовану поверхню S і в кожній її точці визначимо деяку обмежену функцію $f(x, y, z)$. Нехай область (D) є проекцією поверхні S на площину xOy. Введемо (T)-розбиття поверхні S сіткою кусково-гладких кривих на частини S_k, $k = 0,1,\ldots,n-1$. В кожній частині S_k довільним чином виберемо точку $P_k(x_k, y_k, z_k)$, $P_k \in S_k$, $k = 0,1,\ldots,n-1$, і складемо суму

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k, y_k, z_k)\Delta\sigma_k\,, \tag{2.30}$$

де $\Delta\sigma_k$ - площа проекції частини S_k на площину xOy. При цьому величину $\Delta\sigma_k$ вважатимемо додатною, якщо нормальний вектор до поверхні S в точках, що належать S_k, утворює гострий кут з додатним напрямком осі Oz, і від'ємною, коли цей кут тупий. Нехай також $d_k = diam S_k$, $k = 0,1,\ldots,n-1$.

Якщо існує скінчена границя I інтегральних сум (30) при $\lambda(T) = \max\limits_{0\le k\le n-1} d_k \to 0$, то число I називається ***поверхневим інтегралом другого роду*** від функції $f(x, y, z)$ по поверхні S і позначається символом

$$\iint_S f(x, y, z)dxdy.$$

Отже,

$$\iint_S f(x,y,z)dxdy = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k, y_k, z_k)\Delta\sigma_k \, . \qquad (2.31)$$

Зауваженння. При зміні сторони заданої поверхні на протилежну змінюється знак $\Delta\sigma_k$, тому інтеграл також змінює свій знак.

У загальному випадку поверхневий інтеграл має вигляд:

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy,$$

де $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ – деякі функції, визначені в точках поверхні S.

Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна в усіх точках кусково-гладкої поверхні S, заданої рівнянням $z = z(x,y)$, $(x,y) \in (D)$, де (D) - проекція поверхні S на площину xOy, то обчислення поверхневого інтегралу другого роду зводиться до обчислення подвійного інтегралу:

$$\iint_S f(x,y,z)dxdy = \iint_{(D)} f(x,y,z(x,y))dxdy.$$

Якщо розглянути інтеграл по іншій стороні поверхні S, то

$$\iint_S f(x,y,z)dxdy = -\iint_{(D)} f(x,y,z(x,y))dxdy.$$

Аналогічно, якщо поверхня S проектується на площини yOz та xOz відповідно, то

$$\iint_S f(x,y,z)dydz = \pm \iint_{(D_{yz})} f(x(y,z),y,z)dydz,$$

$$\iint_S f(x,y,z)dxdz = \pm \iint_{(D_{xz})} f(x,y(x,z),z)dxdz \, .$$

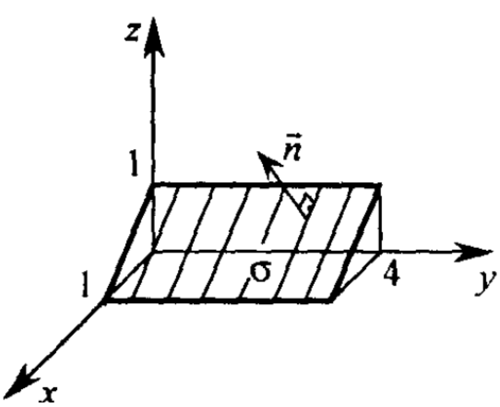


Рис. 52

Приклад. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, де S – верхня сторона частини площини $x + z - 1 = 0$, що розміщена у першому октанті та відтинається площинами $y = 0$ і $y = 4$.

Розв'язання. Поверхня зображена на

рисунку 52. За умовою розглядаємо її верхню сторону, тому вектор нормалі $\vec{n}$ утворює гострі кути з осями Oz і Ox.

Знайдемо проекції заданої поверхні на всі координатні площини:

D_{yz} – прямокутник $0 \le y \le 4$, $0 \le z \le 1$;

D_{xy} – прямокутник $0 \le y \le 4$, $0 \le x \le 1$;

D_{xz} – порожня множина (площина $x + z - 1 = 0$ перпендикулярна до xOz).

Маємо $z(x, y) = 1 - x$, $x(y, z) = 1 - z$.

Отже,

$$\iint\limits_{S} xdydz + ydxdz + zdxdy = \iint\limits_{D_{yz}} x(y, z)dydz + \iint\limits_{D_{xz}} y(x, z)dxdz + \iint\limits_{D_{xy}} z(x, y)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_{yz}} (1 - z)dydz + \iint\limits_{D_{xy}} (1 - x)dxdy = \int_0^4 dy \int_0^1 (1 - x)dx + \int_0^4 dy \int_0^1 (1 - z)dz = 2\int_0^4 dy \int_0^1 (1 - x)dx =$$

$$= 2\int_0^4 \left(x - \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_0^1 dy = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^4 dy = 4.$$

Формула Остроградського-Гаусса

Ця формула виражає зв’язок потрійного інтеграла по області (V) з поверхневим інтегралом по зовнішній стороні поверхні S, що обмежує цю область.

Теорема (формула Остроградського-Гаусса). *Якщо поверхня S є замкненою, а функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку в області (V), обмеженій цією поверхнею, то справедлива формула*

$$\iint\limits_{S} P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dxdz + R(x, y, z)dxdy = \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)dxdydz. \quad (2.32)$$

Приклад. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_{S} 4x^3dydz + 4y^3dxdz - 6z^4dxdy$, де S – зовнішня сторона поверхні, обмеженої циліндром $x^2 + y^2 = a^2$ і площинами $z = 0,\ z = h$.

Розв'язання. Оскільки поверхня S замкнена, то для обчислення інтеграла застосуємо формулу Остроградського-Гаусса.

Маємо

$$P(x,y,z)=4x^3,\ Q(x,y,z)=4y^3,\ R(x,y,z)=-6z^4,$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=12x^2,\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=12y^2,\quad \frac{\partial R}{\partial z}=-24z^3.$$

Тоді

$$I=\iint_S 4x^3dydz+4y^3dxdz-6z^4dxdy=\iiint_{(V)}\left(12x^2+12y^2-24z^3\right)dxdydz=$$

$$=12\iiint_{(V)}\left(x^2+y^2-2z^3\right)dxdydz=\left|\begin{array}{ll} x=\rho\cos\varphi & (V)\to(V') \\ y=\rho\sin\varphi & (V'):0\le\rho\le a \\ z=z & 0\le\varphi\le 2\pi \\ dxdydz=\rho d\rho d\varphi dz & 0\le z\le h \end{array}\right|=$$

$$=2\iiint_{(V')}\left(\rho^2-2z^3\right)\rho d\rho d\varphi dz=12\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\rho d\rho\int_0^h\left(\rho^2-2z^3\right)dz=$$

$$=24\pi\int_0^a\rho\left(\rho^2z-2\frac{z^4}{4}\right)\Bigg|_0^h d\rho=24\pi\int_0^a\left(\rho^3h-\rho\frac{h^4}{2}\right)d\rho=24\pi\left(\frac{h\rho^4}{4}-\frac{h^4\rho^2}{4}\right)\Bigg|_0^a=$$

$$=6\pi ha^2\left(a^2-h^3\right).$$

Формула Стокса

Ця формула встановлює зв'язок між поверхневим та криволінійним інтегралами другого роду.

Орієнтація кривої L, що обмежує поверхню S, називається ***узгодженою із орієнтацією*** цієї ***поверхні*** (орієнтація поверхні S задається напрямом нормалі $\vec{n}$ до неї), якщо спостерігач, який дивиться з кінця нормалі $\vec{n}$, бачить обхід вздовж кривої L проти годинникової стрілки.

Теорема (формула Стокса). *Нехай функції* $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ *неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку на кусково-гладкій поверхні* S, *що обмежена кусково-гладкою кривою* L, *і* *орієнтація кривої L узгоджена із орієнтацією поверхні S. Тоді має місце формула*

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz. \qquad (2.33)$$

Зауваження. Якщо поверхня S є частиною площини xOy, то формула Стокса переходить у формулу Гріна

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

Зауваження. Для запам'ятовування формули Стокса досить помітити, що перший доданок у правій частині такий самий, як і в формулі Гріна, а другий і третій можна дістати з першого циклічною перестановкою координат x, y, z та функцій P, Q, R.

Приклад. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\oint_L ydx + zdy + xdz$, де L – коло, утворене при перетині сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ і площини $x + y + z = 0$ (обхід кривої L здійснюється проти годинникової стрілки, якщо дивитись з додатного напряму осі Ox).

Розв'язання. Крива L замкнена, тому використаємо формулу Стокса. Маємо

$$P(x,y,z) = y,\ Q(x,y,z) = z,\ R(x,y,z) = x,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1,\quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0,\quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 1,\quad \frac{\partial R}{\partial x} = 1,\quad \frac{\partial R}{\partial y} = 0.$$

Будемо вважати, що поверхня S є частиною площини $x + y + z = 0$, обмеженої колом L. Тоді

$$I = \oint_L ydx + zdy + xdz = \iint_S \left(-dxdy - dydz - dxdz\right).$$

Спроектуємо поверхню на координатні площини. За умовою нормальний вектор до площини $x + y + z = 0$ утворює з осями Ox, Oy, Oz гострі кути, тому перед кожним доданком правої частини останньої рівності знак не змінюється. Проекціями S на координатні площини є кола радіуса a з центром у початку координат. Отже,

$$I = -\iint_{D_{xy}} dxdy - \iint_{D_{xz}} dxdz - \iint_{D_{yz}} dydz = -3\iint_{D_{xy}} dxdy = -3S\left(D_{xy}\right) = -3\pi a^2.$$

РОБОЧИЙ

ЗОШИТ

Практичне заняття 1

Тема: Функція багатьох змінних: область визначення, графік, лінії та поверхні рівня

Блок 1.

Теоретична частина

1. Сформулюйте означення функції багатьох змінних: ______________________

____

2. Графіком функції багатьох змінних називається ______________________

____.

З геометричної точки зору графіком функції двох змінних є деяка _________.

3. Лінією рівня функції $z = f(x, y)$ називається ___________________________

____.

Практична частина

1. Наведіть приклади функції двох, трьох змінних: _______________________

____.

2. Графіком функції $z = x^2 + y^2$ є _______________, $z = x^2 - y^2$ __________,

$z = x - y$ ____________________, $z = x^2$ ___________________________.

3. Лініями рівня функцій $z = x^2 + y^2$ є __________________________________,

$z = x^2 - y^2$ _____________________, $z = x - y$ ______________________________.

Їх зображеннями є:

Блок 2. Завдання для розв’язування на практичному занятті

1. Дано функцію $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$. Знайти $f(1;0)$, $f(1;-3)$, $f(-x;y)$, $f(-x;-y)$, $f\left(\dfrac{1}{x};\dfrac{1}{y}\right)$, $f(tx;ty)$.

2. Знайти область визначення функції, зобразити її:

1) $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$;

2) $z=\dfrac{3}{x^2+y^2-4}$;

3) $z=\dfrac{\ln(x-y)}{x+y}$;

4) $z=\ln\left(4x^2+9y^2-36\right)$;

5) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$;

6) $u=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$;

7) $z=\sqrt{y\sin x}$;

8) $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$;

9) $u=\dfrac{2}{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2-9}$.

3. Побудувати графіки ліній перетину поверхні $z=f(x,y)$ та площин $x=0,\ x=1,\ x=-1,\ y=0,\ y=1,\ y=-1$:

1) $z=x^2-y^2$, 2) $z=2x^2+y^2$, 3) $z=\sqrt{25-(x+3)^2-y^2}$.

Блок 3. Домашнє завдання

1. Навести приклади функцій, областю визначення яких є:

1) площина XOY з вилученою точкою $(a;b)$;

2) площина XOY з вилученою параболою $y=x^2$;

3) площина XOY з вилученим прямокутником $-1\le x\le 1,\ -2\le y\le 2$;

4) круг з центром в точці $(1;2)$ і радіусом $R=4$;

5) точка $(2;2)$;

6) пряма $y=-x$.

2. Побудувати лінії рівня функцій, надаючи значення змінній z від -5 до 5 через 1:

1) $z = xy$, 2) $z = y(x^2 + 1)$.

3. Дано складну функцію $z = u^w + w^{u+v}$, де $u = x + y$, $v = x - y$, $w = xy$. Виразити z безпосередньо у вигляді функції від змінних x та y.

Практичне заняття 2

Тема: Функція багатьох змінних: границя та неперервність

Блок 1

Теоретична частина

1. Сформулюйте означення границі функції багатьох змінних: на мові «$\varepsilon - \delta$»

____

____; на мові послідовностей____

____

____________________________, позначення __________________________.

2. Запишіть означення неперервності функції двох змінних в точці через прирости $\Delta f(x, y)$ та Δx, Δy ____

____.

Практична частина

1. Навести приклади відкритих та замкнених множин в R^2:

____

____.

2. Навести приклад області в R^2, вказати внутрішні та межові точки цієї області____

____

____.

3. Показати, що при $x \to 0$ і $y \to 0$ вираз $z = \dfrac{y}{x-y}$ може прямувати до будь-якого числа. (*Вказівка.* Розглянути наближення вздовж прямих $y = kx$.):

____

____

Навести приклади наближення точок (x, y) до точки $(0,0)$ при якому:

1) $\lim z = 3$____;

2) $\lim z = -2$ ____;

3) $\lim z = 0$____.

4. Показати, що для функції $f(x, y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ повторні границі існують і $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)\right) = 1$, $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)\right) = -1$, а подвійна границя $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ не існує:____

____.

5. Показати, що функція $z = Di(x) \cdot Di(y)$, де символ $Di(x)$– функція Діріхле, розривна в будь-якій точці:____

____

____.

6. Дослідити функцію на неперевність:

1) $f(x, y) = \dfrac{3x^2 + 7y^2}{x^2 - y^2}$ ___________________________________;

2) $f(x, y, z) = \dfrac{\cos(x+y)}{x^2 + y^2 - z}$_________________________________.

Блок 2. Завдання для розв'язування на практичному занятті

1. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2}{3(x^2 + y^2)}$;

2) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \left(1+\frac{1}{(xy)^2}\right)^{(xy)^2+3}$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{1-\cos 2(x+y)}{3(x+y)^2}$;

4) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

2. Знайти область неперервності функції:

1) $z=\frac{3}{\sqrt{9-(x+3)^2-y^2-(z-1)^2}}$.

Блок 3. Домашнє завдання

1. Показати, що функція

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, \ \textit{якщо}\ x^2+y^2\neq 0, \\ 0, \ \textit{якщо}\ x^2+y^2=0 \end{cases}$$

неперервна по кожній із змінних x та y окремо (тобто при фіксованому значенні іншої змінної), але не є неперервною за сукупністю цих змінних.

2. Сформулювати означення рівномірної неперервності функції двох змінних. Дослідити на рівномірну неперервність лінійну функцію $f(x,y)=2x-3y+5$ в просторі R^2.

Практичне заняття 3

Тема: Диференційовні функції багатьох змінних

Блок 1

Теоретична частина

1. Сформулювати означення частинної похідної по змінній x _______________

____

2. Геометричний зміст частинної похідної по змінній x ____________________

____

3. Сформулювати означення диференційовності функції $f(x, y)$ в точці: ____

____

4. Сформулювати означення повного диференціалу функції $f(x, y)$: ________

____

Практична частина

1. Показати диференційовність функції $z = 2xy^2 + 3x^2y - 5$ в довільній точці площини.

2. Показати, що функція $z = \sqrt[3]{xy^2}$ має обидві частинні похідні в точці $(0;0)$, але не є диференційовною в цій точці.

3. Знайти повний диференціал функції з прикладу 1.

Блок 2. Завдання для розв'язування на практичному занятті

1. Знайти частинні похідні першого порядку:

1) $z = x^2e^{-y}$, 2) $z = (3y - x)^2$, 3) $z = arctg\dfrac{y}{x}$, 4) $z = \dfrac{xy}{x - y}$;

5) $z = \sin^2(x + 2y) + \sin^2 x$, 6) $z = xe^{-xy}$, 7) $z = x^{x^y}$

2. Знайти похідні другого порядку в точці M_0 для функцій:

1) $z = arctg\dfrac{y}{x}$, $M_0(1;1)$, 2) $z = \ln(x^2 + y)$, $M_0(-1,2)$.

3. Знайти повний диференціал другого порядку для функції $z = \ln(4 - x^2 - y^2)$.

4. Довести, що дана функція задовольняє задане рівняння:

1) $z = e^{xy}$, $x^2z''_{xx} - y^2z''_{yy} = 0$,

2) $z = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$, $x^2z''_{xx} - \left(y^2z'_y\right)'_y = 0$.

5. Знайти наближене значення виразів:

1) $(1{,}03)^{2{,}99}$, 2) $\sqrt{1{,}01^2 + 1{,}9^3}$.

6. Знайти частинні похідні першого порядку функції:

1) $z = arctg\frac{u}{v},\ u = x\sin y,\ v = x\cos y$.

7. Знайти y', y'', y''', якщо $x^3 + xy + y^3 = 3$.

Блок 3. Домашнє завдання

1. Чи є диференційовною функція $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ в точці $(0;0)$?

2. Нехай $f(x,y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, де $x^2 + y^2 \neq 0$ і $f(0;0) = 0$. Показати, що $f''_{xy}(0;0) \neq f''_{yx}(0;0)$.

3. Показати, що функція $z = x + \varphi(xy)$ задовольняє рівняння $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = x$.

Практичне заняття 4-5

Тема: Екстремуми функцій багатьох змінних

Блок 1

Теоретична частина

1. Якщо в деякому околі $(x_0 - \delta, x_0 + \delta; y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_1)$ точки $M_0(x_0, y_0)$ виконується нерівність ___________________________, то говорять, що функція $z = f(x,y)$ має в точці $M_0(x_0, y_0)$ локальний максимум.

2. Необхідною умовою локального екстремуму диференційовної функції $z = f(x,y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ є ____.

3. Критичними точками функції $f(x,y)$ називаються точки, в яких ____.

4. Достатніми умовами локального максимуму диференційовної функції двох змінних в точці $M_0(x_0, y_0)$ є ____ ____.

5. Скласти алгоритм дослідження функції $z = f(x,y)$ на глобальний екстремум в замкненій обмеженій області:______________________________

____

____

6. Сформулювати задачу на умовний екстремум для функції $z = f(x, y)$ та записати відповідну функцію Лагранжа:____________________________________

____

____

Практична частина

1. Знайти критичні точки функції $z = xy + \frac{5}{x} + \frac{2}{y}$: ____________________________

____.

2. Перевірити, чи є $M_0(4,-1)$ точкою екстремуму для функції $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$ ____

____.

3. Скласти функцію Лагранжа у задачі на знаходження екстремуму функції $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$, коли $x + y = 3$:___________________________________

____.

Блок 2. Завдання для розв’язування на практичному занятті

1. Дослідити на екстремум:

1) $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$,

2) $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$,

3) $z = e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2\right)$.

2. Знайти найбільше і найменше значення функції в заданій області:

1) $z = x^2 - xy + y^2 - 4x,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ \ 2x + 3y \leq 12$,

2) $z = e^{-x^2-y^2}\left(3x^2 + 3y^2\right),\ x^2 + y^2 \leq 4$.

3. Визначити екстремум функції:

1) $z = x^2 + y^2$, якщо $3x + 2y = 6$,

2) $z = xy$, якщо $x + y = 1$.

4. Розв’язати задачу.

1) З усіх прямокутних трикутників даної площі S знайти той, гіпотенуза якого є найменшою.

2) Відрізок довжиною a поділити на три частини так, щоб сума площ квадратів, побудованих на цих відрізках, була найменшою.

Блок 3. Домашнє завдання

1. Сформулювати достатню умову екстремуму функції багатьох змінних за допомогою критерію Сільвестра та дослідити на екстремум функцію $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$.

2. Знайти екстремуми неявно заданої функції $z(x, y)$:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0.$$

3. Результати вимірювань величин x і y задані таблицею

x	-1	0	1	2	3
y	0,5	1	1,5	2	3

Вважаючи, що між величинами x та y існує лінійна залежність $y = kx + b$, знайти коефіцієнти k і b методом найменших квадратів.

Практичне заняття 6

Тема: Застосування диференціального числення функцій багатьох змінних

Блок 1

Теоретична частина

1. Записати рівняння дотичної та нормалі до плоскої кривої $F(x, y) = 0$ в точці $M_0(x_0, y_0)$____

____

2. Записати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $F(x, y, z) = 0$ в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$_____________________________________

____

3. Записати формулу для обчислення похідної функції $u(x, y, z)$ в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ за напрямом вектора $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$____________________

____.

4. *Градієнтом* функції $u(x, y, z)$ називається ____________________________

____,

його зміст ____.

Практична частина

1. Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $x^3y + y^3x = 3 - x^2y^2$ в точці $(1;1)$____

____.

2. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $z = x^2 + y^2$ в точці $(1;1;3)$____

____.

3. Знайти градієнт функції $z = x^2$ в точці $M(1;1)$________________________

____.

Блок 2. Завдання для розв'язування на практичному занятті

1. Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $2x^3 - x^2y + 3x^2 + 4yx - 5x - 3y + 6 = 0$ в точці її перетину з віссю Oy.

2. Показати, що рівняння дотичної площини до еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ в довільній його точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ має вигляд $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$.

3. До поверхні $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ визначити дотичні площини, які паралельні площині $x + 4y + 6z = 0$.

4. Визначити площину, що є дотичною до поверхні $x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$ і перпендикулярна до прямої $x = y = -z$.

5. Знайти похідну функції $z = \ln(x^2 + 3y^2 + 1)$ в точці $A(1;2)$ за напрямом вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $B(-1;1)$.

6. Дано функції $z=\sqrt{x^2+y^2}$ і $z=x-3y+\sqrt{3xy}$. Знайти кут між градієнтами цих функцій в точці $(3;4)$.

Блок 3. Домашнє завдання

1. Показати, що дотична площина до поверхні $xyz=a^3$ в довільній її точці утворює з координатними площинами тетраедр зі сталим об'ємом. Знайти цей об'єм.
2. Функцію $f(x,y)=x^3-2y^2+3xy$ розкласти за формулою Тейлора в околі точки $(2;1)$.
3. Знайти обвідну сім'ї парабол $y^2=a(x-a)$.

Практичне заняття 7

Тема: Обчислення подвійного інтеграла

Блок 1

Теоретична частина

1. Описати циліндричне тіло із задачі на знаходження його об'єму за допомогою подвійного інтеграла: ____

____

____.2.

Геометричний зміст подвійного інтеграла________________________________

____

3. Для оцінки подвійного інтеграла можна застосувати нерівність, що є наслідком теореми про середнє ________________________________

____.

4. Записати формули для обчислення подвійного інтеграла у випадках:

прямокутної області ____,

криволінійної трапеції першого роду _____________________________________

____.

Практична частина

1. Навести приклад функції, обмеженої в деякій області, але не інтегровної в цій області ____.

2. З'ясувати тип криволінійної трапеції, зобразити її та записати межі повторних інтегралів, якщо:

1) $x=1,\ x=2,\ y=0,\ y=4$ ____________________________

____

____;

2) $y=0,\ x=y,\ x+y=4$ ______________________________

____

____;

3) $y=x^2$, $4-y=x^2$ ___________________________________

____

____;

4) $x^2+y^2=4$ ____

____

____;

5) $y=-\sqrt{2x-x^2},\ \ x=0,\ x=1,\ y=1$ _____________________

____

____.

3. Обчислити повторні інтеграли:

1) $\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^1 \left(x^2+2y\right)dy$

____;

2) $\int\limits_1^2 dx\int\limits_1^x \frac{x^2}{y^2}\,dy$

____.

Блок 2. Завдання для розв'язування на практичному занятті

1. Зобразити область інтегрування та змінити порядок інтегрування:

1) $\int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{4} f(x,y)dy$;

2) $\int_{1}^{2} dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} f(x,y)dy$;

3) $\int_{0}^{3} dx \int_{0}^{\frac{x}{3}} f(x,y)dy + \int_{3}^{4} dx \int_{0}^{4-x} f(x,y)dy$.

2. Обчислити подвійні інтеграли:

1) $\iint\limits_{D} (x-y)dxdy,\ D:\ y=0,\ x=y,\ x+y=2$;

2) $\iint\limits_{D} x^4 y dxdy,\ D:\ xy=1,\ x=y,\ x=2$;

3) $\iint\limits_{D} x\cos(x+y)dxdy,\ D:\ y=0,\ x=\pi,\ y=x$;

4) $\iint\limits_{D} dxdy,\ D:\ y=2-x,\ y^2=4x+4$.

3. Знайти середнє значення функції $z=x+6y$ в трикутнику, обмеженому прямими $y=x,\ y=5x,\ x=1$.

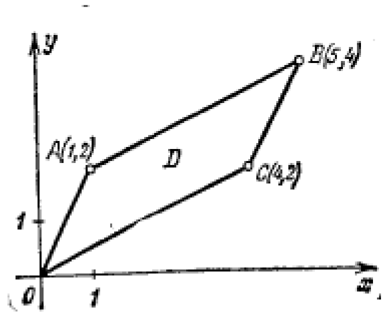
Блок 3. Домашнє завдання

1. Обчислити подвійний інтеграл за означенням $\iint\limits_{D} xydxdy,\ D:\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1$

.

Вказівка. Попередньо розбити область інтегрування на квадрати зі сторонами $\frac{1}{n}$.

2. Подати подвійний інтеграл $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$ у вигляді суми повторних інтегралів з найменшою кількістю доданків, де область D зображена на рисунку.



3. Користуючись наслідком з теореми про середнє, оцінити інтеграл $\iint\limits_D \frac{dxdy}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$, якщо $D\colon\ |x|+|y|\le 10$.

4. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D \sqrt{|y-x^2|}dxdy$, якщо $D\colon\ |x|\le 1,\ 0\le y\le 2$.

Вказівка. Розкрити модуль підінтегральної функції у заданій області.

5. Нехай функція f інтегровна за Ріманом на відрізку $[a;b]$. Довести, що $\left(\int\limits_a^b f(x)dx\right)^2 \le (b-a)\int\limits_a^b f^2(x)dx$.

Вказівка. Для доведення розглянути інтеграл $\iint\limits_P (f(x)-f(y))^2 dxdy$, де P – прямокутник $a\le x\le b,\ a\le y\le b$.

Практичне заняття 8

Тема: Заміна змінних у подвійному інтегралі

Блок 1

Теоретична частина

1. Визначник Остроградського-Якобі (якобіан) відображення $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ визначається формулою ______________________________________,

формула заміни змінних у подвійному інтегралі : ________________________

____.

2. Формула заміни змінних у полярних координатах має вигляд ____________

____.

Практична частина

1. Обчислити $\iint\limits_D (x+y)dxdy$ по області

   $D: 2x+y=1,\ 2x+y=3,\ x-y=1,\ x-y=2$.

2. Обчислити повторні інтеграли, перейшовши до полярної системи координат: $\int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \sin\left(x^2+y^2\right)dy$.

Блок 2. Завдання для розв’язування на практичному занятті

1. Обчислити подвійний інтеграл у полярній системі координат:

1) $\iint\limits_D \sin\pi\left(\dfrac{x^2}{4}+y^2\right)dxdy,\ D: \dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1;$

2) $\iint\limits_D .(12-x-y)dxdy,\ D:\ x^2+y^2=25;$

3) $\iint\limits_D arctg\dfrac{y}{x}dxdy,\ D: x^2+y^2\ge 1,\ x^2+y^2\le 9,\ y\ge\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y\le\sqrt{3}x,\ y\ge 0;$

4) $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy,\ D:\ x^2+y^2=4x;$

5) $\iint\limits_D xydxdy,\ D:\ \left(x^2+y^2\right)^2=2a^2xy;$

6) $\iint\limits_D \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy, 1\le x^2+y^2\le 4,\ y=x,\ y=0,\ x<0,\ y<0.$

Блок 3. Домашнє завдання

1. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D \dfrac{1}{y}dxdy$, якщо $D:\ y=x,\ y=2x,\ y=1-\dfrac{x}{2},\ y=4-2x$. 2. Обчислити подвійний інтеграл у полярній системі координат: $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$,

$D:\ x^2+y^2=4x,\ x^2+y^2=6x,\ y=x,\ y=\sqrt{3}x$.

3. Знайти якобіан переходу до узагальнених полярних координат за формулами $x=a\rho\cos\theta,\ y=a\rho\sin\theta$ та за їх допомогою обчислити подвійний інтеграл:

1) $\iint\limits_D xydxdy,\ D:\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ x=0,\ y\ge 0.$

2) $\iint\limits_D \sqrt{xy}dxdy$, коли D – область, обмежена лінією $\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}\right)^4=\frac{xy}{\sqrt{6}}$ та розташована в першому квадранті.

Практичне заняття 9

Тема: Застосування подвійних інтегралів

Блок 1

Теоретична частина

1. Площа $S(D)$ плоскої фігури (D) на площині xOy визначається формулою ____.

2. Записати формулу для знаходження об’єму циліндричного тіла, обмеженого знизу і зверху поверхнями $f(x,y)$ та $g(x,y)$ відповідно: ____.

3. Записати формулу обчислення площі поверхні просторового тіла ________ ____.

Практична частина

1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=x,\ y=5x,\ x=1$.

2. Зобразити на рисунку тіло, об’єм якого виражається інтегралом $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}(x^2+y^2)dy$ і обчислити його.

3. Обчислити об’єм тіла, обмеженого параболоїдом $z=x^2+y^2$, площинами $x=4,\ y=4$ та координатними площинами.

Блок 2. Завдання для розв’язування на практичному занятті

1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y=x^2,\ y=\frac{3}{4}x^2+1$;

2) $y^2=4+x,\ x+3y=0$;

3) $x = y^2, \ x = \sqrt{2 - y^2}$;

4) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2 - y^2\right)$;

5) $\rho = a\sin 2\theta, \ a > 0$.

2. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

1) циліндром $x = 2y^2$ та площинами $x + 2y + z = 4, \ y = 0, \ z = 0$;

2) параболоїдом $z = x^2 + y^2$ і площинами $y = 2x, \ y = 6 - x, \ y = 1, \ z = 0$;

3) циліндром $x^2 + y^2 = 4x$, параболоїдом $2z = x^2 + y^2$ і площиною $z = 0$;

4) параболоїдом $6z = x^2 + y^2$, сферою $x^2 + y^2 + z^2 = 27$ і площиною $z = 0$ ($z > 0$).

3.Обчислити площу тієї частини поверхні $z^2 = 2xy$, що розташована над прямокутником в площині xOy, обмеженим прямими $x = 0, y = 0, x = 3, y = 6$.

Блок 3. Домашнє завдання

1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $x^2 + y^2 = 2x, \ x^2 + y^2 = 4x, \ y = x, \ y = 0$.

2. Знайти площу одного витка кривої $(x + y)^4 = ax^2y$.

3. За допомогою подвійного інтеграла знайти центр мас однорідної плоскої фігури, обмеженої синусоїдою $y = \sin x$, віссю Ox та прямою $x = \frac{\pi}{4}$.

4. Знайти момент інерції однорідної плоскої фігури (щільність $\gamma = 1$), що є рівнобедреним трикутником з основою a і висотою h відносно вершини.

Практичне заняття 10

Тема: Потрійний інтеграл

Блок 1

Теоретична частина

1. Для заданого T-розбиття області (V) і заданого вибору точок $M_k \in (V_k)$, $k = 0,1,...,n-1$, записати інтегральну суму для функції $f(x, y, z)$ ___________

____.

2. Записати формулу для обчислення потрійного інтеграла у випадку:

прямокутної області ____;

довільної області в порядку $y,\ x,\ z$ ________________________________

____.

3. Сформулювати теорему про середнє для потрійного інтеграла _________

____

____.

4. Записати формулу заміни змінних:

у циліндричних координатах _____________________________________;

у сферичних координатах ____.

Практична частина

1. Описати область інтегрування для даних повторних інтегралів та обчислити їх: $\int_0^1 dx \int_2^5 dy \int_2^4 \frac{dz}{1-x-y}$.

2. Визначити межі інтегрування в потрійному інтегралі $\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$, якщо область інтегрування V обмежена поверхнями:

1) $y = x^2,\ z = 0,\ y + z = 4$.

2) $x^2 + y^2 = 1,\ z = 0,\ z = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0$.

3. Обчислити $\iiint_V x^2 y^2 z dxdydz$, де $V:\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x,\ 0 \le z \le xy$.

4. Перейти в потрійному інтегралі $\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$ до циліндричної системи координат, якщо область інтегрування V обмежена поверхнями $x^2 + y^2 = R^2,\ \ y = x,\ y = x\sqrt{3},\ z = 0,\ z = 1$.

5. Перейти в потрійному інтегралі $\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz$ до сферичної системи координат, якщо область інтегрування V обмежена поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \ \ x \geq 0, \ \ y \geq 0, \ \ z \geq 0$.

Блок 2. Завдання для розв'язування на практичному занятті

1. Перейти в потрійному інтегралі до циліндричної системи координат і обчислити його $\iiint\limits_V \frac{y^2 z}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} dxdydz$, $V: \ y \geq 0, \ \ y \leq \sqrt{3}x, \ \ z = 3(x^2 + y^2), \ \ z = 3$.

2. Перейти в потрійному інтегралі до сферичної системи координат і обчислити його $\iiint\limits_V x^2 dxdydz$, $: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, \ \ y \geq 0, \ y \leq x, \ \ \ z \geq 0$.

Блок 3. Домашнє завдання

1. Обчислити інтеграл $\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz$, якщо:

1) $f(x, y, z) = 1, \ \ V: \ (x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq 4xyz, \ \ x \geq 0, \ y \geq 0$;

2)* $f(x, y, z) = |z|, \ \ V: \ (x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - a^2)^2 \leq 4b^2(x^2 + y^2)$;

3)** $f(x, y, z) = z, \ \ V: \ (x - y)^2 + (y - z)^2 \leq R^2, \ 0 \leq x + y + z \leq h$.

Вказівка*. Областю інтегрування є **тор.** Спочатку параметричними рівняннями $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, де $r \geq 0$, а кут t – фіксований, задати площину, що проходить через вісь Oz. В отриманому перерізі цієї площини і тора ввести полярні координати та виконати остаточну заміну змінних для обчислення потрійного інтеграла.

Вказівка**. Перейти до нової системи координат за формулами $u = x - y$, $v = y - z$, $w = x + y + z$.

Практичне заняття 10

Тема: Застосування потрійного інтеграла

Блок 1

Теоретична частина

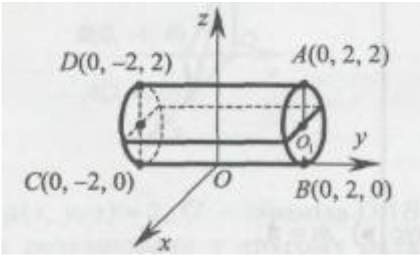
1. Масу неоднорідного тіла (V) з густиною $\rho = \rho(x, y, z)$ можна знайти за формулою ____.

2. Формулу для знаходження об'єму однорідного матеріального тіла запишемо у вигляді ____.

Практична частина

1. Обчислити масу тіла (V) з густиною $\rho(x, y, z) = 2$, що є пірамідою $OABC$ з вершинами $A(1,0,0), B(0,2,0)$, $C(0,0,3)$, $O(0,0,0)$.

2. Обчислити масу тіла (V) з густиною $\rho(x, y, z) = 1$, що є круговим циліндром з твірною $AD = CB = 4$, яка паралельна осі Oy, радіуси основи $O_1A = O_1B = 1$.



Блок 2. Завдання для розв'язування на практичному занятті

1. За допомогою потрійного інтеграла обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

1) $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, $y = x$, $y = x^2$;

1) $(x-1)^2 + y^2 = z$, $2x + z = 2$;

2) $az = a^2 - x^2 - y^2,\ z = a - x - y,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

2. Обчислити масу та середню густину $\mu_{сер}$ тіла з густиною $\rho(x, y, z) = z$, обмеженого поверхнями $2z = x^2 + y^2$ і $z = 2$.

Вказівка. Середня густина $\mu_{сер}$ – це відношення маси тіла до його об'єму.

Блок 3. Домашнє завдання

1. За допомогою потрійного інтеграла обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнею $\left(x^2+y^2+z^2\right)^3=a^2\left(x^2+y^2\right)^2$.

2. Знайти координати центра мас півкулі $x^2+y^2+z^2\le R^2,\ z\ge 0$, якщо густина $\rho(x,y,z)$ в кожній точці пропорційна відстані від точки до центра.

3. Знайти момент інерції відносно осі Oy однорідного тіла ($\rho(x,y,z)=1$), обмеженого параболоїдом $y=5-x^2-z^2$ і площиною $y=1$.

Практичне заняття 11

Тема: Обчислення криволінійних інтегралів

Блок 1

Теоретична частина

1. Криволінійний інтеграл першого роду функції $f(x,y)$ по кривій $\breve{AB}$ визначається як границя інтегральних сум виду ________________________ при $\lambda(T)=$________________, де $\Delta s_k=$_____________, точки τ_k______________. Позначається ______________________________.

2. Обчислення криволінійного інтеграла першого роду зводиться до обчислення ____________________________ інтеграла за формулами:

1) у випадку параметричного задання кривої $\breve{AB}$ рівняннями ______________:
____;

2) крива $\breve{AB}$ є графіком функції $y=f(x),\ x\in[a;b]$: _________________________;

3) крива $\breve{AB}$ є графіком функції $x=g(y),\ y\in[c;d]$: _________________________.

3. Криволінійний інтеграл другого роду позначається ______________________;
його механічний зміст: ____
____.

4. Обчислення криволінійного інтеграла другого роду зводиться до обчислення ____________________________ інтеграла за формулами:

1) у випадку параметричного задання кривої $\breve{AB}$ рівняннями ______________:

____;

2) крива $\breve{AB}$ є графіком функції $y = f(x),\ x \in [a;b]$: ____________________

____;

3) крива $\breve{AB}$ є графіком функції $x = g(y),\ y \in [c;d]$: ____________________

____.

5. Додатним напрямком обходу вздовж замкненої кривої L називається такий рух, при якому ____,
відповідний криволінійний інтеграл позначається ____________________.

6. При зміні напрямку руху вздовж кривої L знак криволінійного інтеграла другого роду ____.

Практична частина

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_L \frac{dl}{x-y}$, де L – відрізок прямої $y = \frac{1}{2}x - 2$ між точками $A(0;-2)$ і $B(4;0)$:______________________

____

____

2. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_L (x^2 - y^2)dx$, де L – дуга параболи $y = x^2$ від точки $O(0;0)$ до точки $A(2;4)$______________________

____

____

Блок 2. Завдання для розв'язування на практичному занятті

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду:

1) $\int\limits_L (x+y)dl$, де L – контур трикутника з вершинами $A(1;0),\ B(0;1),\ O(0;0)$;

2) $\int\limits_L ydl$, де L – дуга параболи $y^2 = 2x$ від точки $A(0;0)$ до точки $B(1;1)$;

3) $\int\limits_L xydl$, де L – чверть еліпса $x = a\cos t,\ y = b\sin t\ \ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду:

1) $\int\limits_L (x^2+y)dx+(2x-y)dy$, якщо L - дуга параболи $y=2x-x^2$ від точки $A(1,1)$ до точки $B(0,3)$;

2) $\int\limits_L (2a-y)dx+xdy$, де L – арка циклоїди $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$, де $0\le t\le 2\pi$;

3) $\int\limits_L x^3y^3dx+(x-y)^2dy$, якщо L - ламана ABC з вершинами у точках $A(2,1),\ B(0,3),\ C(-2,1)$.

Блок 3. Домашнє завдання

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_L x\sqrt{x^2-y^2}\,dl$, де L – лемніската Бернуллі $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, $x\ge 0$ (перейти до полярних координат).

2. Обчислити довжину кривої L – **ланцюгової лінії** $y=ch\,x,\ 0\le x\le 1$ – за допомогою криволінійного інтеграла першого роду.

3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_L \frac{xdx+ydy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$, де L – чверть еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, яка лежить у першому квадранті, обхід по контуру L відбувається за годинниковою стрілкою.

Практичне заняття 12

Тема: Криволінійні інтеграли другого роду. Їх незалежність від форми шляху інтегрування. Формула Гріна-Остроградського

Блок 1

Теоретична частина

1. Сформулювати теорему Гріна-Остроградського________________________

____

____.

2. Сформулюйте умови незалежності криволінійного інтеграла другого роду від форми кривої – шляху інтегрування ________________________________

____.

3. Навести алгоритм відновлення функції двох змінних за її повним диференціалом: ____

____

____

4. Записати формули обчислення площі плоскої фігури за допомогою криволінійного інтеграла другого роду __________________________________

____

____

Практична частина

1. Перевірити, чи є даний вираз $du = 4\left(x^2 - y^2\right)\left(xdx - ydy\right)$ повним диференціалом деякої функції. _______________________________________

____

2. З’ясувати, чи виконується рівність $\oint\limits_L \left(x^4 + 4xy^3\right)dx + \left(6x^2y^2 - 5y^4\right)dy = 0$?

____

____

Блок 2. Завдання для розв’язування на практичному занятті

1. Показати, що даний інтеграл не залежить від форми дуги, що сполучає задані точки та обчислити його:

1) $\int\limits_{(-2,-1)}^{(3,0)} \left(x^4 + 4xy^3\right)dx + \left(6x^2y^2 - 5y^4\right)dy$;

2) $\int\limits_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$.

2. Визначити, чи є вираз $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy$ повним диференціалом деякої функції. Якщо так, то знайти цю функцію.

3. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_L \left(1-x^2\right)ydx+x\left(1+y^2\right)dy$ по контуру $L: x^2+y^2=R^2$, який проходимо в додатному напрямку, безпосередньо і за формулою Гріна-Остроградського.

4. Знайти площу фігури, обмеженої кривими $y=x^2$, $x=y^2$, $8xy=1$ (фігура містить початок координат).

Блок 3. Домашні завдання

1. Обчислити роботу сили $\vec{F}=y\vec{i}-x\vec{j}$ при переміщенні одиничної маси від точки $A(a;0)$ до точки $B(-a;0)$ вздовж кривої L, що є верхньою половиною еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

2. Перевірити, чи є підінтегральний вираз повним диференціалом функції, та обчислити цей криволінійний інтеграл: $\int\limits_{(1;2;3)}^{(3;2;1)} yzdx+xzdy+xydz$.

3. Знайти функцію $u=u(x,y,z)$ за її повним диференціалом

$$du=\left(x^2-2yz\right)dx+\left(y^2-2xz\right)dy+\left(z^2-2xy\right)dz.$$

Література

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М., Наука, 1975. 416 с.
2. Бохан К.А., Егорова И.А., Лащенов К.В. Курс математического анализа, т. III: Учеб. пос. для студ. заочн. физ.-мат. фак. techинститутов // Под ред. Вулиха Б.З. М., Просвещение, 1972. 439 с.
3. Давидов М. О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3 ч. Ч.2. К.: Вища школа, 1992. 392 с.
4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1990. 624 с.
5. Денисюк В. П. Вища математика. Модульна технологія навчання: навч. посіб. У 4 ч. Ч. 2. / В. П. Денисюк, В. К. Репета: 4-те вид., стереотип. К.: Вид-во Нац. авіац. ун-ту «НАУ-друк», 2009. 276 с.
6. Диференціальне та інтегральне числення функцій кількох змінних. Диференціальні рівняння. Конспект лекцій. (I курс II семестр) / Уклад.: В. О. Гайдей, Л. Б. Федорова, І. В. Алєксєєва, О. О. Диховичний. К.: НТУУ «КПІ», 2013. 144 с.
7. Диференціальне та інтегральне числення функцій кількох змінних. Диференціальні рівняння. Практикум. (I курс II семестр) / Уклад.: І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова. К.: НТУУ «КПІ», 2014. 190 с.
8. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: Підручник: У двох частинах. Частина 2. К.: Либідь, 1993.– 320 с.
9. Дюженкова, Л.І. Вища математика: приклади і задачі: посібник / Л.І. Дюженкова, О.Ю. Дюженкова, Г.О. Михалін; ред. Г. О. Михалін. Київ : Академія, 2003. 623 с.
10. Жалдак М. І., Михалін Г. О., Деканов С. Я. Математичний аналіз. Функції багатьох змінних: Навчальний посібник. К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2007. 430 с.
11. Заболоцький М.В., Сторож О.Г., Тарасюк С.І., Математичний аналіз, К.:

Знання, 2008.
12. Збірник задач з математичного аналізу. Функції кількох змінних. М. О. Денисьєвський, А. В. Чайковський / К.: ВПЦ "Київський університет", 2012. 276 с.
13. Ляшко І.І., Ємельянов В.Ф., Боярчук О.К, Математичний аналіз, К.: Вища школа, 1993.
14. Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2 ч.: Навч. посіб. / Л.І. Дюженкова, Т.В. Колесник, М.Я. Ляшенко та ін. К.: Вища школа, 2003. Ч.2. 470 с.
15. Математичний аналіз: У 2 ч. / І. І.Ляшко, В. Ф. Ємельянов, О. К.Боярчук. К.: Вища шк., 1992. Ч.1. 496 с.
16. Методичні вказівки до лабораторних робіт з математичного аналізу для студентів математичного факультету. Частина IV. Функції багатьох змінних / Уклад.: А. І. Моца, Г. А., Наконечна, М. І. Немеш, Ю. А. Хоменко. Ужгород: Вид-во УжНУ, 2002. 40 с.
17. Синявська О. О., Слюсарчук П. В. Ряди Фур’є. Навчальний посібник для студентів спеціальностей математика, прикладна математика, статистика. Ужгород, 2015. – 70 с.
18. Томусяк А. А., Трохименко В. С. Математичний аналіз. Вінниця, 1999. 489 с.
19. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II. – М., Наука, 1970.- 800 с.
20. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III. – М., Физматгиз, 1963.- 656 с.
21. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа, т. 2. М., Гос. изд. техн.-теор.лит., 1956. 464 с.
22. Шкіль М.І. Математичний аналіз: Підручник: У 2 ч. Ч.2. – К.: Вища шк.., 2005. – 510 с.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ІНДИВІДУАЛЬНОЇ РОБОТИ

Завдання для індивідуальної роботи з теми "Диференціальне числення функцій багатьох змінних"

1. Знайти область визначення функції, зобразити її графічно:

1. $z = \dfrac{3xy}{2x - 5y}$
2. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$
3. $z = \dfrac{2}{6 - x^2 - y^2}$
4. $z = \arccos(x^2 + y)$
5. $z = \dfrac{\sqrt{xy}}{x^2 + y^2}$
6. $z = e^{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$
7. $z = \arcsin(x + 2y)$
8. $z = \ln(16 - x^2 - y^2)$
9. $z = \dfrac{\sqrt{5y - 3x}}{x^2 + y^2 - 4}$
10. $z = \arcsin(y - x)$

2. Знайти частинні похідні та частинні диференціали наступних функцій:

1. $z = \ln(y^2 - e^{-x})$
2. $z = arctg(x^2 - y^2)$
3. $z = \sin\sqrt{x + y^2}$
4. $z = tg\sqrt{xy^3}$
5. $z = \arcsin\sqrt{xy}$
6. $z = \cos(2xy - x^3)$
7. $z = e^{-x^2 + 3yx}$
8. $z = \ln(3y^2 - x^4)$
9. $z = arctg\, xy^2$
10. $z = \sin\sqrt{y - x^3}$

3. Знайти повні диференціали функцій:

1. $z = 2xy^3 + 4x^3y^5$
2. $z = arctg\, x - \sqrt{y}$
3. $z = 5xy^4 + 2x^2y^6$
4. $z = \ln(5y^2 - 3x^3)$
5. $z = x^2 y \sin x - 3y$
6. $z = \arcsin(yx) - 7xy^2$
7. $z = \cos(x^2 - y^2) + 3x^2 y$
8. $z = \arcsin(x + y) - 3y$
9. $z = 7x^3 y - \sqrt{xy}$
10. $z = e^{x + y^2 - 4}$

4. Записати рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні S в точці M_0 (x_0, y_0, z_0).

1. $x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0$, M_0 (2; 1; –1)
2. $x^2 + z^2 - 4y^2 = -2xy$, M_0 (–2; 1; 2)
3. $x^2 + y^2 + z^2 - xy + 3z = 7$, M_0 (1; 2; 1)
4. $x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 4x = 8$, M_0 (–1; 1; 2)
5. $2x^2 - y^2 + z^2 - 4z + y = 13$, M_0 (2; 1; –1)
6. $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z + 4 = 0$, M_0 (2; 1; –1)
7. $x^2 + z^2 - 5yz + 3y = 46$, M_0 (1; 2; –3)
8. $x^2 + y^2 - xz - yz + 4 = 0$, M_0 (1; 2; 3)
9. $x^2 + y^2 + 2yz - z^2 + y - 2z = 2$, M_0 (1; 1; 1)
10. $y^2 - z^2 + x^2 - 2xz + 2x = z$, M_0 (1; 1; 1)

5. Дослідити на екстремум функції:

1. $z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y$
2. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$
3. $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$
4. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$
5. $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$
6. $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$
7. $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$
8. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$
9. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$
10. $z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2$

6. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = z(x, y)$ в області $\overline{D}$, обмеженій лініями:

1. $z = 3x + y - xy$, $\overline{D}$: $y = x$, $y = 4$, $x = 0$.
2. $z = xy - x - 2y$, $\overline{D}$: $x = 3$, $y = x$, $y = 0$.
3. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$, $\overline{D}$: $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$.
4. $z = 5x^2 - 3xy + y^2$, $\overline{D}$: $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$.
5. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$, $\overline{D}$: $x - y + 1 = 0$, $x = 3$, $y = 0$.

6. $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8$, $\overline{D}: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0.$

7. $z = 2x^3 - xy^2 + y^2$, $\overline{D}: x = 0, x = 1, y = 0, y = 6.$

8. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$, $\overline{D}: x = 0, x = 1, y = 0, y = 1.$

9. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$, $\overline{D}: x = 0, y = 0, x + y - 3 = 0.$

10. $z = x^2 + 2xy - 10$, $\overline{D}: y = 0, y = x^2 - 4.$

Завдання для індивідуальної роботи
з теми: «Інтегральне числення функцій багатьох змінних»

1. Обчислити $\iint\limits_S f(x,y)dxdy$ від функції $z = f(x,y)$ по області S, якщо:

1. $z = e^{\frac{x}{y}}$; $\quad S:\ y^2 = x,\ x = 0,\ y = 1$
2. $z = x^2$; $\quad S:\ y = \frac{x^2}{2},\ y = x$
3. $z = y^2$; $\quad S:\ y = \frac{x^2}{3},\ y = x$
4. $z = x^2 y$; $\quad S:\ y^2 = 2x,\ y = x$
5. $z = x^2 y^2$; $\quad S:\ y^2 = 2x,\ y = x$
6. $z = y(1 + x^2)$; $\quad S:\ y = x^3,\ y = 3x$
7. $z = xy$; $\quad S: y = x^2,\ y = x$
8. $z = y^2(1 + 2x)$; $\quad S:\ x = 2 - y^2,\ x = 0$
9. $z = \frac{x}{(x^2 + y^2)}$; $\quad S: y = \frac{x^2}{2},\ y = x$
10. $z = e^{\frac{x}{y}}$; $\quad S:\ y = \sqrt{2x},\ x = 0,\ y = 2$

2. За допомогою подвійного інтеграла знайти площу фігури, обмеженої лініями:

1. $y^2 = 10x + 25,\ y^2 = -6x + 9$
2. $y^2 = 2x,\ y = \frac{x}{2}$
3. $y = \frac{3}{x},\ y = e^x, y = 3,\ y = 4$
4. $y^2 - 2y + x^2 = 0,\ y^2 - 4y + x^2 = 0,\ y = \frac{x}{\sqrt{3}},\ y = \sqrt{3}x$
5. $4y = x^2 - 4x,\ x + y = 3$

6. $y^2 = 2px + p^2$, $y^2 = q^2 - 2qx$, $p > 0$, $q > 0$

7. $x^2 + y^2 = 4$, $y^2 = 4 - 4x$, $x < 1$

8. $y^2 = 2x$, $y^2 = 4x - x^2$, $2x < y^2$

9. $y = \cos x$, $y = \cos 2x$, $0 \le x \le \dfrac{2\pi}{3}$

10. $2x^2 + 2y^2 = 2x + 1$, $x^2 + y^2 \ge 1$

3. За допомогою подвійного інтеграла обчислити в полярних координатах площу фігури, обмежену лінією ($a > 0$):

1. $(x^2 + y^2)^3 = a^2 x^2 y^2$

2. $x^4 = a^2(3x^2 - y^2)$

3. $(x^2 + y^2)^3 = a^2 x^2 (4x^2 + 3y^2)$

4. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(3x^2 + 2y^2)$

5. $x^4 = a^2(3x^2 - y^2)$

6. $x^6 = a^2(x^4 - y^4)$

7. $x^4 = a^2(x^2 - 3y^2)$

8. $y^6 = a^2(y^4 - x^4)$

9. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(2x^2 + 3y^2)$

10. $y^6 = a^2(x^2 y^2 + x^2)(3y^2 - x^2)$

4. За допомогою потрійного інтеграла знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

1. $z = 0$, $z = x + y$, $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$, ($x > 0$)

2. $z = 0$, $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$

3. $z = 0$, $z = e^{-(x^2 + y^2)}$, $x^2 + y^2 = 1$

4. $z^2 = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + a^2 = 2x^2$, $z > 0$, $a > 0$

5. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2>a|x|$, $a>0$

6. $x^2+y^2+z^2=4$, $z\le\sqrt{x^2+y^2}$

7. $x^2+y^2+z^2=2az$, $z\ge\sqrt{x^2+y^2}$

8. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3x$, $a>0$

9. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$

10. $(x^2+y^2+z^2)^2=axyz$, $a>0$

5. За допомогою потрійного інтеграла обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

1. $z=0$, $az=y^2$, $x^2+y^2=R^2$ $(a>0)$
2. $z=0$, $z=y^2$, $x^2+y^2=9$
3. $z=0$, $z=1-y^2$, $x=y^2$, $x=2y^2+1$
4. $z=0$, $z=2x$, $x+y=3$, $x=\sqrt{\dfrac{y}{2}}$
5. $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x-y+3z=3$
6. $x^2+y^2=4y$, $z^2=4-y$, $z\ge 0$
7. $x^2+y^2=1$, $z=2-x^2-y^2$, $z\ge 0$
8. $z=0$, $y+z=2$, $y=x^2$
9. $z^2=4-x$, $x^2+y^2=4x$, $z\ge 0$
10. $z=x$, $y^2=x$, $x=3$, $z\ge 0$

6.Обчислити $\int\limits_L P(x,y)dx+\int\limits_L Q(x,y)dy$ від функцій $P=P(x,y)$ і $Q=Q(x,y)$ по області L, якщо:

1. $P=-y$, $Q=x$; $L: y=x^3$, $0\le x\le 2$
2. $P=x+y$, $Q=-(x-2y)$; $L=AOB$, $A(2;0)$, $O(0;0)$, $B(4;5)$
3. $P=xy$, $Q=0$; $L: y=\sin x$, $0\le x\le \pi$
4. $P=x+2y$, $Q=-(2x-y)$; $L=OAB$, $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(4;6)$

5. $P=\frac{(y^2+1)}{y}$, $Q=-\frac{x}{y^2}$; $L=AB$, $A(1;2)$, $B(2;6)$

6. $P=2(x^2+y^2)$, $Q=(x+y)^2$; $L=ABC$, $A(1;1)$, $B(1;3)$, $C(2;2)$

7. $P=y$, $Q=\frac{x}{y}$; $L=AB$, $A(0;1)$, $B(-1;2)$

8. $P=x^2+y^2$, $Q=x^2-y^2$; $L: y=|x|$, $-1\le x\le 2$

9. $P=x^2+y$, $Q=x+y^2$; $L=ABC$, $A(2;0)$, $B(5;0)$, $C(5;3)$

10. $P=\frac{(y^2+1)}{y}$, $Q=-\frac{x}{y^2}$; $L=AB$, $A(1;2)$, $B(2;4)$

Навчальне видання

Мартиненко Олена Вікторівна

Чкана Ярослав Олегович

Функції багатьох змінних: диференціальне та інтегральне числення

Навчально-методичний посібник

(Українською мовою)

Суми: СумДПУ, 2023

Свідоцтво ДК №231 від 02.11.2000 р.

Комп'ютерний набір та верстка Чкана Я.О.

Редактор Мартиненко О.В.

Здано в набір 01.02.2012 Підписано до друку 1.09.12

Формат 60×84/16. Гарн. Times New Roman. Папір друк. Друк ризогр. Умовн. друк. арк. 4.

Обл.-вид. арк.. Тираж 100.

СумДПУ імені А.С.Макаренка

40002 Суми, вул. Роменська, 87

Виготовлено на обладнанні СумДПУ ім. А.С.Макаренка