Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Погребний В. Узагальнення поняття похідної // Фізико-математична освіта : науковий журнал. – 2017. – Випуск 2(12). – С. 124-129.

Pogrebnoy W. Generalise Of Determination Of Derivativ // Physical and Mathematical Education : scientific journal. – 2017. – Issue 2(12). – P. 124-129.

УДК 517.6

В.Д. Погребний
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Україна
mathematicsspu@gmail.com

УЗАГАЛЬНЕННЯ ПОНЯТТЯ ПОХІДНОЇ

Анотація. *В роботі обговорюються деякі проблеми узагальнення одного з найголовніших понять не тільки математичного аналізу, а і всієї математики – поняття похідної. Це поняття дуже важливе не лише в математиці, а і в багатьох інших науках, оскільки характеризує швидкість зміни різноманітних величин. А така характеристика величин є дуже суттєвою в багатьох процесах. При введенні похідної традиційним способом у студентів з'являється деяка неясність: звідки ж з'являється похідна як функція? Цей етап введення похідної в статті детально роз'яснений. Традиційно спочатку вводиться поняття похідної, а потім поняття диференційовності функції, і то не завжди для функцій однієї змінної. Часто функцію просто називають диференційовною, якщо вона має скінченну похідну. Але при переході до функцій кількох змінних, поняття диференційовності вже обійти ніяк неможливо. Краще проводити цю лінію починаючи з функцій однієї змінної. Оскільки уже для функцій двох змінних єдиного поняття похідної не існує, а поняття диференційовності продовжується далеко у сучасний аналіз, то ми вважаємо більш обґрунтованим починати виклад диференціального числення з поняття диференційовності, а поняття похідної вводити потім, спочатку похідне число, потім похідну функцію. В роботі досліджуються проблеми означення поняття похідної функції кількох змінних, пояснюється причина неможливості введення єдиного поняття похідної і пропонується метод введення частинних похідних, який показує їх необхідність і їх роль.*

Ключові слова: *функція, диференційовність, похідна, напрям, границя.*

Метою даної статті, що має науково-методичний характер, є дослідження деяких проблем, пов'язаних з викладанням студентам математичних спеціальностей одного з найважливіших понять математичного аналізу і всієї математики – поняття похідної. Це поняття важливе не лише для математики, оскільки є математичним відображенням важливої характеристики різноманітних величин – швидкості їх зміни. У викладанні математичного аналізу, як і інших дисциплін, склалися певні традиції, термінологія, символіка, що мало не завжди раціональний і доцільний характер, бо процес розвитку наук не завжди прямий та прозорий. Ми маємо на меті висловити деякі пропозиції в галузі методики викладання деяких питань математичного аналізу. Це, на наш погляд, буде сприяти більш успішному засвоєнню студентами важливих понять математичного аналізу.

Отже, в окремих пунктах, розглянемо ці моменти.

п.1. Похідна як функція

У всіх відомих нам курсах класичного аналізу поняття похідної вводиться таким чином. Розглядається відношення $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$. Якщо існує границя цього відношення при $\Delta x \to 0$, то вона називається похідною функції $f(x)$ в т. x_0 і позначається $f'(x_0)$ (наприклад, [1, с. 96]). Далі працюють з похідною уже як функцією. Але границя вказаного відношення у даній точці є число! У деяких студентів (на жаль, у дуже небагатьох) виникають питання з цього приводу: де ж число, а де ж функція? Цілком можливо, що в минулі десятиріччя, коли рівень математичної підготови учнів і студентів був, на порядок чи більше, вищим, ніж тепер, вони могли самостійно у цьому розібратися. Для сучасних студентів це важко. Тому ми пропонуємо такий спосіб означення цих понять.

Розглядаємо у даній точці $x_0 \in domf$ відношення $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Якщо $\exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{x-x_0}$, то це число називається похідним або диференціальним числом для функції $f(x)$ в точці x_0. Позначимо його $f'(x_0)$.

$D = \{x_0 \in domf : \exists f'(x_0) \in R\}$. Розглянемо функцію: $g: D \to R$ $x_0 \in D \to f'(x_0) \in R$. Це є функція: вказаному значенню $x_0 \in D$ відповідає певне число $f'(x_0) \in R$. Цю функцію і будемо називати похідною функцією (або похідною, бо вона походить від деякої функції $f(x)$) функції $f(x)$. Запис: $g(x) = f'(x)$. Така методика не допустить неясності у студентів з приводу того, де число, а де функція.

п.2. Диференційовність функції і похідна

Знову таки, у відомих курсах класичного аналізу, починають з поняття похідної . Функцію називають диференційовною, якщо вона має похідну (скінченну двосторонню). Але при вивченні функції кількох змінних такий підхід дає деякі методичні труднощі. Для дійсних функцій однієї дійсної змінної дійсно диференійовність еквівалента наявності похідної, що дає можливість так і означити поняття диференційовності (наприклад, [1, с. 98]). А для дійсних функцій кількох дійсних змінних це вже зовсім не еквівалентні поняття. Диференційовність, як важлива властивість функцій, йде далеко у сучасний аналіз. Вона означає можливість зручного і досить простого представлення приросту функції Δf. Ми пропонуємо такий порядок вивчення.

З першої лекції розділу «Диференціальне числення дійсних функцій однієї дійсної змінної» відразу вводиться поняття диференційовності функції в даній точці: функція $f(x)$ називається диференційовною в т. x_0, якщо $\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x$, де *A* не залежить від Δx (від точки x_0, A, взагалі кажучи не залежить), $\alpha = 0(\Delta x)$ – нескінчено мала більш високого порядку відносно Δx при $\Delta x \to 0$. Виясняємо, що $A\cdot\Delta x$ є головна частина Δf при $\Delta x \to 0$, лінійна відносно Δx. Встановлюємо, що необхідною умовою диференційовності є неперервність. Далі розглядаємо деякі задачі, що приводять до поняття похідної і означаємо похідну функцію, як вказано вище. Далі звичайним порядком розглядаємо правила диференціювання і т.д.

п.3. Диференційовність функцій кількох змінних

Традиційно для дійсних функцій кількох змінних виклад починають відразу з поняття частинних похідних (наприклад, [2, с. 375]) без пояснення того, чому замість одного загального поняття похідної вводять кілька більш спеціальних. Потім означають повний диференціал і представлення Δf для випадку існування частинних похідних, вказується термін «диференційовність функції», як правило, без обговорення значення «хорошого» представлення Δf .

Ми пропонуємо такий порядок вивчення. Спочатку вводимо поняття диференційовності функції: $\Delta f = (A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + ... + C\cdot\Delta z) + (\alpha\cdot\Delta x + \beta\cdot\Delta y + ... + \gamma\cdot\Delta z)$

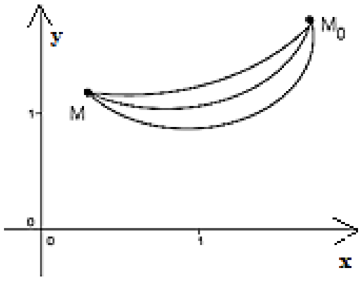
Вказуємо роль двох частин цього представлення. Підкреслюємо продовження лінії представлення Δf, як суми головної лінійної частини та нескінченно малої більш високого порядку, яка була почата для функції однієї змінної. Доводимо неперервність і обмеженість диференційовної функції в околі даної точки. Встановлюємо диференційовність функції $f+g$, $f-g$, λf, fg при диференційовності *f,g.* Далі переходимо до обговорення введення поняття похідних для функцій кількох змінних (про це наступний пункт).

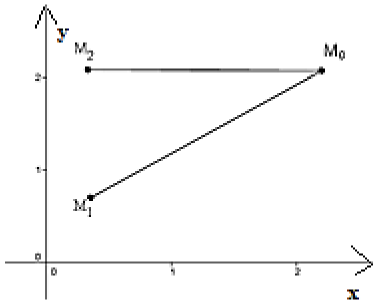
п.4. Проблема введення похідної для функції кількох змінних

Як ми вказували, для функцій кількох змінних, традиційно відразу вводяться поняття частинних похідних без будь-якої аргументації саме таких означень. На наш погляд, цю проблему необхідно студентам висвітлити детальніше і аргументовано. Пропонуємо такий підхід.

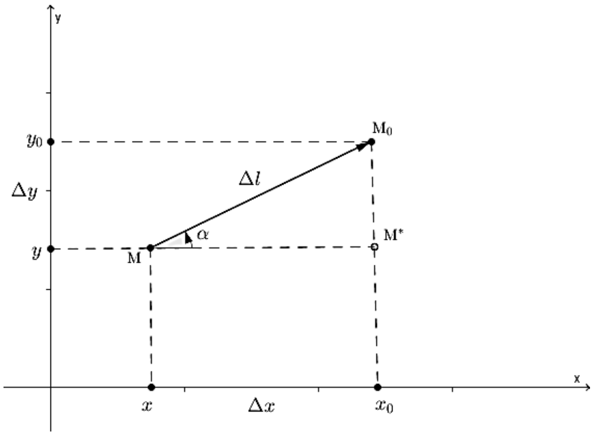
На дійсній прямій, похідна $f'(x_0)$ існує тоді і тільки тоді, коли існують ліва $f_l'(x_0)$ і права $f_r'(x_0)$ похідні і вони рівні між собою. Причиною цього є той важливий факт, що $x \to x_0$ може лише двома способами: $x \to x_0 - 0$ (зліва) чи $x \to x_0 + 0$ (справа). Для функцій кількох змінних ситуація стає значно більш складною. Способів $M \to M_0$ в E^m безліч. Для простоти почнемо з функцій двох змінних: $M = M(x,y)$, $f(M) = f(x,y)$, $M \to M_0$ може по безлічі шляхів різних форм. Тому слід чекати, що проблеми означення і існування похідних функцій в E^m будуть значно більш складними, ніж на прямій.

Спробуємо означити на площині $f'(M_0)$ по аналогії з дійсною прямою. Там ми розглядали $\frac{\Delta f}{\Delta x}$. Для $f(M)$, $M(x,y)$, $\Delta f = f(M) - f(M_0)$ є дійсне число. Тут труднощів немає. Що треба взяти замість Δx? Евклідова площина E^2 є дійсний лінійний простір. $\Delta M = M - M_0$ має зрозумілий смисл. Але це не є дійсним числом, це вектор. Спробуємо взяти $\Delta l = l\left(\overset{\smile}{M_0 M}\right)$. Це дійсне число. А як бути з формою дуги $\overset{\smile}{M_0 M}$? Результат не повинен залежати ні від напряму руху M до M_0, ні від форми шляху. Спростимо собі задачу. Будемо розглядати лише прямолінійні шляхи





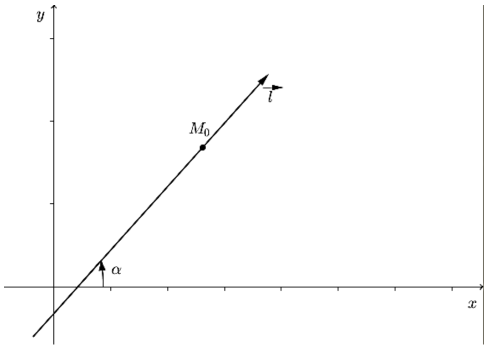
Значення $f'(M_0)$, якщо воно існує, не повинно залежати від напряму вектора $\overrightarrow{MM_0}$. Але і тут, при спрощеній задачі, виникають труднощі. Розглянемо приклад. $f(x,y) = x$, $M(x,y)$, $M_0(x_0, y_0)$, $\left(\overrightarrow{MM_0}, \widehat{\ } OX_+\right) = \alpha$.



При $M \to M_0$ буде $x \to x_0$, $y \to y_0$, $\Delta f = f(M) - f(M_0) = (x_0 + \Delta x) - x_0 = \Delta x$, $\frac{\Delta f}{\Delta l} = \frac{\Delta x}{\frac{\Delta x}{\cos\alpha}} = \cos\alpha$.

При різних напрямах руху $M \to M_0$, тобто при різних α, $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta l} = \cos\alpha$ суттєво залежить від напряму руху $M \to M_0$ і єдиного значення для всіх способів $M \to M_0$, навіть тільки прямолінійних, не існує. Доводиться зробити невтішний висновок: навіть для функцій $f(x,y)$ неможливо ввести єдине поняття похідної, незалежне від способу $M \to M_0$.

Підемо на дальші поступки. Виберемо один спеціальний напрям руху $M \to M_0$ по прямій, заданій променем $\vec{l}$, що проходить через точку M_0 і складає кут α з віссю Ox.

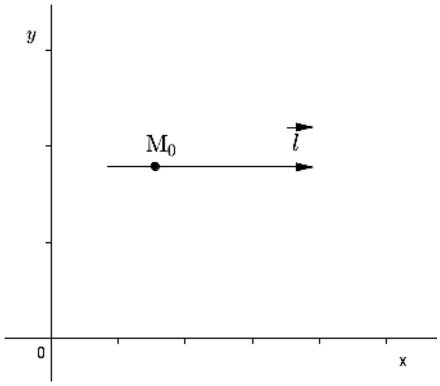


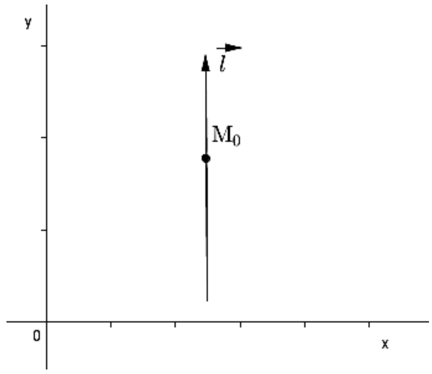
Нехай $M \to M_0$ по променю $\vec{l}$. Позначимо: $\Delta l = \begin{cases} \left\|\overrightarrow{MM_0}\right\|, \overrightarrow{MM_0} \uparrow\uparrow \vec{l} \\ -\left\|\overrightarrow{MM_0}\right\|, \overrightarrow{MM_0} \downarrow\uparrow \vec{l} \end{cases}$. Тоді Δl є дійсне число.

Розглянемо $\Delta_l f = f(M) - f(M_0)$, $M \in \vec{l}$. Складемо відношення $\frac{\Delta_l f}{\Delta l}$. Якщо існує $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l f}{\Delta l}$, то це значення називається похідним числом функції $f(M)$ в точці M_0 по даному напряму $\vec{l}$. Запис: $\frac{\partial f}{\partial l}(M_0)$, $\frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0)$, $f_l'(M_0)$, $f_l'(x_0, y_0)$. Звідси одержується і похідна функція $\frac{\partial f}{\partial l}(M)$.

Аналогічно все це можна зробити і в просторі E^3, і навіть в E^m, хоча наглядно собі уявити це ми не можемо.

Далі слід перейти до означення поняття частинних похідних. Знову почнемо з функцій двох змінних. На площині найважливішими, базовими є два напрями $\vec{l}$: по осях координат.





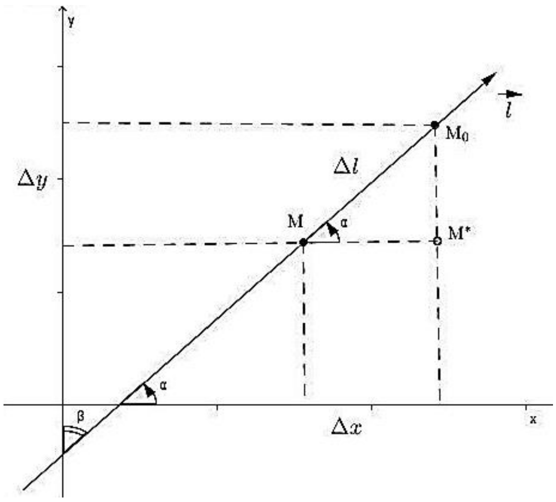
Отже, нехай $\vec{l} \parallel OX_+$. Тоді $y \equiv y_0$, $\Delta y \equiv 0$. Змінюється тільки x. $\Delta l = \Delta x$. $\frac{\Delta f_l}{\Delta l} = \frac{\Delta_x l}{\Delta x}$. Якщо існує похідна по цьому напряму, то вона називається частинною похідною даної функції $f(x, y)$ по змінній x. Запис: $\frac{\partial f}{\partial x}$, f_x'. Аналогічно одержуємо частинну похідну по змінній y, $\frac{\partial f}{\partial y}$, f_y'. В просторі E^3, ще $\frac{\partial f}{\partial z}$, f_z'. Взагалі, в E^m для $f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, частинна похідна по змінній x_k f_{x_k}', або $\frac{\partial f}{\partial x_k}$. Це позначення Якобі (C.G. Yacobi). Як практично шукати $\frac{\partial f}{\partial x_k}$? Всі інші змінні не змінюються, вважаємо їх *const* і застосовуємо звичайні правила знаходження похідних функцій однієї змінної.

Приклад. $f(x, y, z) = x^4 + 3x^2yz + 3yz$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 6xyz$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2z + 3z$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 3x^2y + 3y$.

Слід підкреслити, що $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ є єдиний символ, не частка.

Встановимо зв'язок частинних похідних і похідних по довільному напряму. Почнемо з функцій двох змінних.



$$\Delta x = \Delta l \cos\alpha, \Delta y = \Delta l \sin\alpha, \Delta_l f = f(M) - f(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) -$$
$$- f(x_0, y_0) = \left(f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)\right) - \left(f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)\right) =$$
$$= \Delta_x f(x_0, y_0 + \Delta y) + \Delta_y f(x_0, y_0)$$

Тоді $\frac{\Delta_l f}{\Delta l} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta x} + \frac{\Delta_y f}{\Delta l} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta y} = \frac{\Delta_x f}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta l} + \frac{\Delta_y f}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta l} = \frac{\Delta_x f}{\Delta x}\cos\alpha + \frac{\Delta_y f}{\Delta y}\sin\alpha \cdot$

Нехай існують $\frac{\partial f}{\partial l}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$. Перейдемо до границі при $\Delta l \to 0$, тоді $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0,$ оскільки $\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Одержуємо: $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha \cdot$ Позначимо $\beta = \left(\bar{l},^\wedge OY_+\right) = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Тоді $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$. Аналогічно, в E^3, $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma \cdot$

$\alpha = \left(\bar{l},^\wedge OX\right), \beta = \left(\bar{l},^\wedge OY\right), \gamma = \left(\bar{l},^\wedge OZ\right)$. Тепер ясною є визначальна роль саме частинних похідних: через них можна обчислити похідну по довільному напряму.

Вияснимо, які ж функції можуть мати похідну, незалежну від напряму. Нехай $f(M) = f(x, y)$. При

$$\alpha = 0, \frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x},$$
$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial y}$$
$$\alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial f}{\partial y}$$

Ці величини тотожно співпадають лише при $\frac{\partial f}{\partial x} \equiv 0, \frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0,$ тобто $f(x, y) \equiv const$.

Таким способом на наш погляд, ми даємо студентам достатньо аргументоване пояснення того, чому для функцій кількох змінних не існує єдиного поняття похідної і чому важливими є частинні похідні.

п.5. Похідні вектор-функцій

Для вектор-функцій $f: R \to E^m$ проблеми введення похідних немає. Якщо

$f(t) = \left(f_1(t), f_2(t), \ldots f_m(t)\right)$, то $\Delta f = \left(\Delta f_1(t), \Delta f_2(t), \ldots \Delta f_m(t)\right)$

$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta f_1}{\Delta t}, \frac{\Delta f_2}{\Delta t}, \ldots, \frac{\Delta f_m}{\Delta t}\right)$. При існуванні всіх $\frac{df_k}{dt}, \frac{df}{dt} = \left(\frac{df_1}{dt}, \frac{df_2}{dt}, \ldots, \frac{df_m}{dt}\right)$

Зокрема в векторному аналізі, маємо і геометричну інтерпретацію.

п.6. Диференційовність в нормованих лінійних просторах

Для диференційовності, як ми бачили, треба розглядати Δf та Δx на прямій. Отже, в загальному випадку, аргумент повинен належати множині з лінійними операціями, тобто лінійному простору. Значення функції теж повинно належати лінійному простору. Потрібно мати можливість для $\Delta x \to 0$, а це вже метрична проблема. В поєднанні це дає нормований лінійний простір. Отже, продовжимо лінію диференційовності у сучасний аналіз ([3,с.451-469]).

Нехай X, Y – нормовані лінійні простори, $f : X \to Y$ - оператор з X в Y. f означений на деякій відкритій множині $G \subset X$, $x_0 \in G$. Оператор f називається диференційовним в т. x_0, якщо $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = L \cdot \Delta x + \alpha(x_0, \Delta x)$, де $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ – лінійний оператор, $\lim\limits_{\|\Delta x\|_X \to 0} \dfrac{\|\alpha(x_0, \Delta x)\|_Y}{\|\Delta x\|_X} = 0$.

Ми бачимо, що, в принципі, це та ж сама ситуація: Δf є сума двох частин: головної, лінійної відносно Δx і нескінченно малої більш високого порядку при $\Delta x \to 0$ по нормі простору X.

На наш погляд, запропоновані методичні підходи сприяють кращому розумінню студентами.

Список використаних джерел

1. Давидов М.О. Курс математичного аналізу. Ч.1. – К.: Вища школа, 1976. – 368 с.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. – М.: Наука, 1969. – 608 с.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. – 496 с.

References

1. Davidov M.O. Kurs matematichnogo analizu. Ch.1. – K.: Vishha shkola, 1976. – 368 s.
2. Fihtengol'c G.M. Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischislenija. T.1. – M.: Nauka, 1969. – 608 s.
3. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Jelementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza. M.: Nauka, 1972. – 496 s.

GENERALISE OF DETERMINATION OF DERIVATIV

Pogrebnoy W.

Makarenko Sumy State Pedagogical University, Ukraine

Abstract. *This paper discusses some problems of generalization one of the main concepts not only of mathematical analysis, but of the whole of mathematics - the notion of derivative. This concept is very important not only in mathematics but also in many other Sciences as a measure of the rate of change of various quantities. Such feature sizes is very essential in many processes. With the introduction of the derivative in the traditional way students have some uncertainty: where does the derivative as a function? This stage is the introduction of the derivative in the article explained in detail. Traditionally, first introduced the concept of the derivative, and then the concept of differentiability of a function, and not always for functions of one variable. Often the function is called differentiable if it has a finite derivative. But during the transition to functions of several variables, the notion of differentiability have to circumvent in any way possible. Better to pursue that line since functions of one variable. As for functions of two variables one of the concept of the derivative does not exist, and the notion of differentiability extends far in modern analysis, we believe it is more reasonable to begin the presentation of differential calculus from the concept of differentiability and the derivative notion to enter then, the derived number, then the derivative function. This paper investigates the problem of definition of derivative of function of several variables, explains the reason for the impossibility of introducing a single concept of the derivative and the method of introduction of the partial derivatives, which shows their need and their role.*

Key words: *differentiation of functions, derivative, direction, border.*