УДК 378.14:371.214.46:[004.78:51]

ВИКОРИСТАННЯМ ПРОГРАМИ GEOGEBRA В ДОСЛІДЖЕННІ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ (НА ПРИКЛАДІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ЕКСТРЕМУМ)

Семеніхіна Олена Володимирівна,

доцент кафедри інформатики Сумського державного педагогічного університету ім. А.С. Макаренка, кандидат педагогічних наук, доцент,

e.semenikhina@fizmatsspu.sumy.ua

Друшляк Марина Григорівна,

старший викладач кафедри математики Сумського державного педагогічного університету ім. А.С. Макаренка, кандидат фізико-математичних наук,

marydru@mail.ru

Анотація. *У статті розглянуто конструктивні підходи до розв'язування задач на екстремум із використанням програми динамічної математики GeoGebra, які реалізуються через побудову динамічної конструкції та візуальне спостереження за значенням шуканої величини; через побудову графіка емпіричної функції із використанням інструменту Динамічний слід та визначення її локального максимуму чи мінімуму; через виведення таблиці значень емпіричної функції та її аналізі. Наведено приклади задач на екстремум із детальним розв'язанням кожним із запропонованих способів.*

Ключові слова: *GeoGebra, програми динамічної математики, комп'ютерні інструменти, функціональна залежність, задачі на екстремум.*

Реалії сучасного суспільства визначають технології, які використовуються в навчанні підростаючого покоління. Розповсюдження портативних девайсів (КПК, смартфонів, планшетів) і запровадження мобільних та змішаних технологій навчання зумовлюють активізацію науково-методичних пошуків у напрямі використання предметно орієнтованих програмних середовищ, серед яких у галузі математики виділяють програми динамічної математики (ПДМ). Такі програми характеризуються передбаченою розробниками можливістю динамічно варіювати вихідні математичні об'єкти для візуалізації їх властивостей. Серед таких програм згадаємо *Gran (Gran1, Gran2d, Gran3d), DG, The Geometer's SketchPad*, *GeoGebra*, *Математический конструктор, Cabri* та подібні до них.

Про залучення таких середовищ до навчання математики згадується у роботах Ю. Горошка, В. Дубровського, М. Жалдака, С. Познякова, С. Ракова, В. Ракути, С. Семерікова, М. Хохенватора, І. Храповицького, М. Шабанової, Т. Ширикової та інших. Особливо відзначимо роботи [1-5], де піднімаються питання використання цих середовищ на уроках математики у загальноосвітніх навчальних закладах. Автори пропонують приклади розв'язування задач планіметрії, стереометрії, початків аналізу, зазначають про аспекти використання таких програм для автоматизації розрахунків, візуалізації результатів, проведення досліджень властивостей об'єктів тощо.

Аналіз цих та інших робіт дає підстави стверджувати про типове використання програмних засобів, коли розв'язування задачі у програмній оболонці дублює традиційні способи розв'язання у зошиті, та нетрадиційне, коли розв'язування задач базується на відкритті математичного факту через зміни динамічної конструкції [5], «комп'ютерному доведенні» певного твердження на емпіричному рівні через перебір великої кількості варіантів [4], на побудові відповідностей та використанні таблиць значень окремих параметрів для оцінки певного факту. Про останні два підходи нами згадувалося у роботах [6-7] і саме на них зупинимося у цій статті, щоб продемонструвати використання ПДМ як дієвого засобу формування функціонального мислення учнів.

Серед розмаїття ПДМ авторами обрано програму *GeoGebra* як одну з найпотужніших та вільно поширюваних. Кожна нова версія програми збагачується послугами і розширює напрямки її застосування не лише у галузі шкільної математики [8].

Геометричні задачі на екстремум часто викликають труднощі навіть у дітей, рівень математичної освіти яких вище середнього. Такі задачі вважаються складними через дещо незвичний для типових вправ теми спосіб формулювання умови і пошук відповіді – потрібно визначитися із заданими величинами, побудувати функцію, яка пов’яже ці величини з шуканою, а потім ще дослідити цю функцію на наявність екстремуму. Такі дії часто не усвідомлюються пересічними учнями, оскільки додатково вимагають уже сформованих геометричних понять та аналітичних умінь.

Конструктивні підходи до розв’язування таких задач, реалізовані у ПДМ, зменшують вагу аналітичних розрахунків і на перший план висувають потребу у вміннях змоделювати потрібну конструкцію, урахувати залежності між її параметрами, візуалізувати окремі позиції можливих результатів, навіть «побачити» шукану функцією, для якої потрібно визначити екстремум.

Приклад 1. Дві вершини прямокутника належать графіку функції $y = 12 - x^2$, $D(y) = [-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}]$, а дві інші – осі абсцис. Яку найбільшу площу може мати такий прямокутник? [9]

Класичний спосіб розв’язування задачі полягає у використанні похідної до невідомої функції площі такого прямокутника.

Розв’язування цієї задачі у ПДМ реалізується через побудову динамічної конструкції та візуальне спостереження за значенням площі, яке буде динамічно змінюватися при переміщенні базової точки: оскільки прямокутник вписано у параболу, яка симетрична відносно осі *Oy*, то прямокутник також буде симетричним відносно цієї осі, тому взявши довільно на параболі точку, однозначно формується прямокутник, площу якого потрібно досліджувати (рис. 1-2, табл.1).

Таблиця 1

Візуалізація побудови	Алгоритм побудови

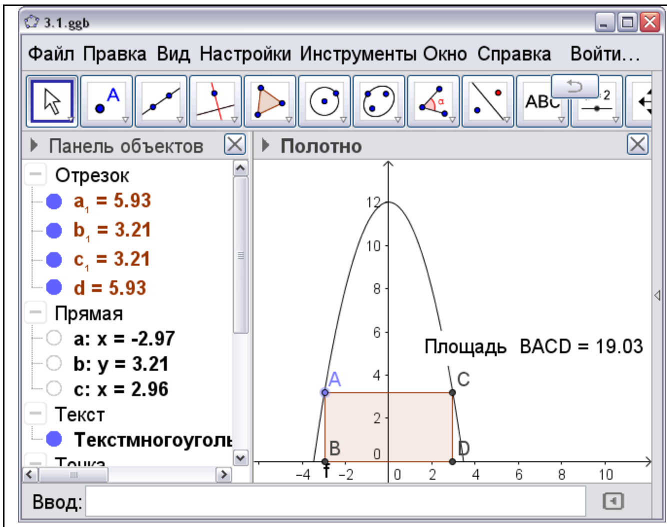


Рис.1

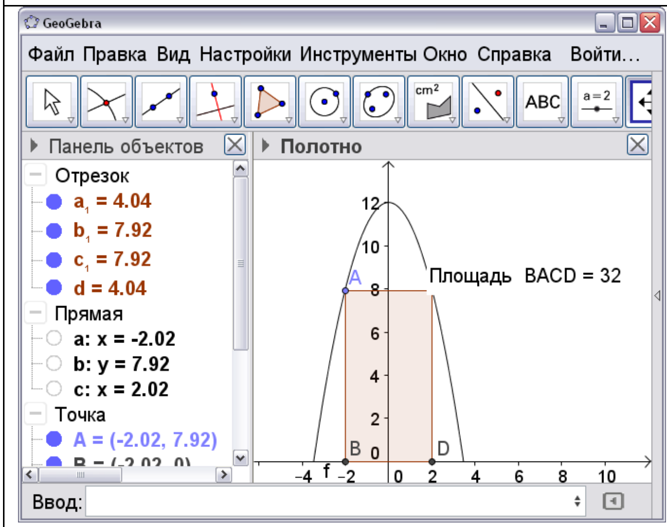


Рис.2

1. Задаємо функцію через рядок вводу командою *Функция* $[12-x^2, -2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$.
2. Будуємо на графіку функції довільну точку *A*.
3. Проводимо через точку *A* пряму *a*, перпендикулярну до вісі абсцис, та фіксуємо точку *B*.
4. Проводимо через точку *A* пряму *b*, перпендикулярну прямій *a* та фіксуємо точку перетину *C* прямої *b* та графіка функції.
5. Проводимо через точку *C* пряму *c*, перпендикулярну до вісі абсцис та фіксуємо точку перетину *D*.
6. Приховуємо побудовані прямі.
7. З'єднуємо чотири одержані точки у прямокутник *ABDC* (інструмент *Многоугольник*).
8. Обчислюємо площу *ABDC*.
9. Змінюючи положення точки *A* як базової точки досліджуваного прямокутника, спостерігаємо за значенням його площі. Найбільше значення площі прямокутника дорівнює 32.

Розглянемо інші методи розв'язування цієї задачі.

1. Метод, який базується на побудові емпіричного графіка залежності між довжиною сторони прямокутника та його площі з використанням інструменту *Динамічний слід*.

Використання інструменту *Динамічний слід* передбачає побудову кривої, точкам якої притаманна певна властивість. Якщо задіяти цей інструмент, то під час динамічних змін вихідної конструкції обрана точка буде залишати слід, який і буде геометричним місцем точок з потрібною нам властивістю.

Якщо виконати дії 1-9 (табл.1), то такий слід може залишати додатково побудована точка *E*, абсциса якої відповідає абсцисі базової точки *A* вихідної конструкції, а ордината дорівнює значенню площі досліджуваного прямокутника. В параметрах точки *E* потрібно замовити послугу залишати слід. Зміна положення точки *A* зумовить зміну положення точки *E*, а побудований слід точки *E* і буде емпіричним графіком функції площі прямокутника, що нас цікавить (рис.3).

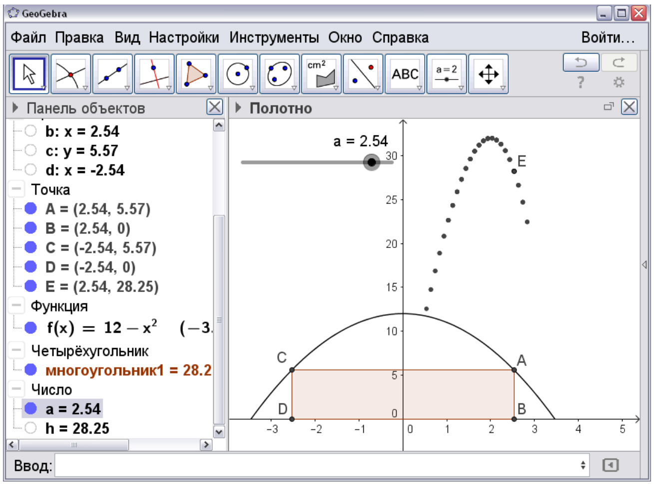


Рис.3

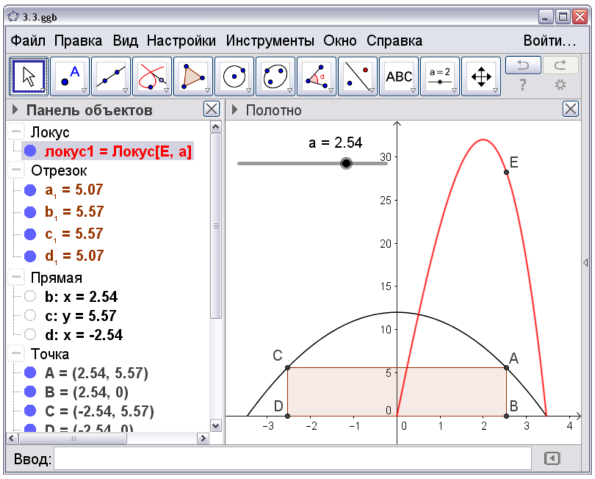


Рис.4

Екстремум для цієї функції буде очевидним. При такому розв’язуванні задачі у учнів, за умови усвідомлення ними значень координат точки, не виникне сумнівів у тому, що максимум для площ прямокутників існує і він єдиний.

Зауважимо, що можна також скористатися інструментом *Локус*, який автоматично побудує емпіричну функцію площі (рис. 4). Результат дії цього інструменту подібний до результату, одержаного інструментом *Динамічний слід*, а різниця полягає у форматі виведення результату: після *Локусу* – це неперервна крива, а після *Динамічного сліду* – точкове зображення.

2. Метод, який базується на виведенні таблиці значень емпіричної функції та їх аналізі (рис. 5).

Після побудови основної конструкції створюється таблиця, до якої заносяться значення абсциси базової точки, довжини сторін прямокутника та його площі. Під час зміни положення базової точки така таблиця заповнюється відповідними наборами значень. Аналіз цих значень дозволяє унаочнити функціональну залежність між довжинами сторін та площею прямокутника, побачити екстремальне значення площі і зробити висновок про відповідні йому довжини сторін прямокутника.

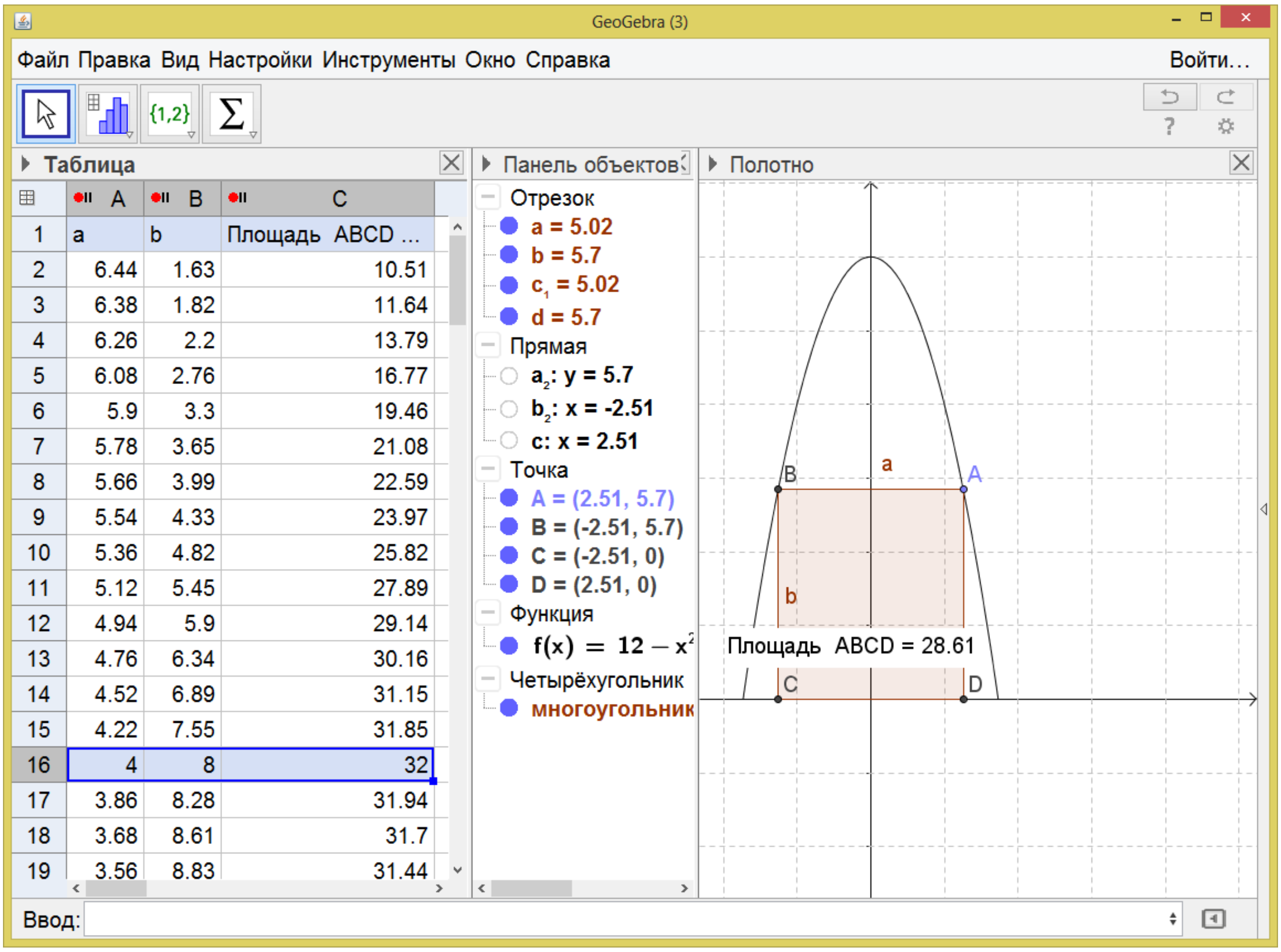


Рис.5

При застосуванні описаного способу від учнів вимагається володіння інструментами пакету і усвідомлення моделі для пошуку відповіді: побачити зв'язок між вхідними даними і результатом без застосування похідної, знаючи лише означення прямокутника та його площі.

Алгоритми розв’язання задачі на основі описаних способів наведені у таблиці 2.

Таблиця 2

Спосіб	Опис можливого алгоритму розв’язання
З використанням інструменту *Слід* (рис.3)	1. Задаємо функцію *f(x)* через рядок вводу командою *Функция*$[12-x^2,-2\sqrt{3},2\sqrt{3}]$. 2. Будуємо повзунок для значення параметра *a* в межах $[0,2\sqrt{3}]$. 3. Будуємо точку *A(a,f(a))*.

Спосіб	Опис можливого алгоритму розв'язання
	4. Будуємо прямокутник *ABDC*, скориставшись точкою *A* як базовою (див. попереднє розв'язання) 5. Обчислюємо площу прямокутника (число h) за формулою *Отрезок[A, C]*Отрезок[B, A]*. 6. Будуємо точку *E(a,h)* і замовляємо послугу залишати слід. 7. За траєкторією точки *E* визначаємо максимум емпіричної функції – 32.
З використанням інструменту Локус (рис.4)	1-5. Кроки аналогічні до попереднього способу розв'язування. 6. Будуємо точку *E(a,h)* і за допомогою інструменту *Локус* будуємо ГМТ, обираючи в якості «водія» параметр a, а в якості «олівця» – точку *E*. 7. За неперервним графіком ГМТ (точки *E)* визначаємо максимум емпіричної функції – 32.
З використанням таблиць значень (рис.5)	1. Задаємо функцію через рядок вводу командою *Функция[*$12 - x^2, -2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}$*]*. 2. Обираємо на кривій довільну точку *A*, яка буде базовою. 3. На основі точки *A* будуємо прямокутник і приховуємо допоміжні побудови. 4. Визначаємо площу прямокутника (інструмент *Площадь*). 5. Додаємо на екран полотно таблиць і через контекстне меню замовляємо послугу *Запись в таблицу* для значень довжин сторін прямокутника (на рис 5 це величини a і b) та площі. 6. Змінюючи положення базової точки *A*, спостерігаємо появу числових значень сторін прямокутника і відповідного їм значення площі. 7. Аналізуємо динаміку змін значення площі – значення до певного моменту зростають, а потім спадають. Критичне значення 32 досягається при довжині сторін 4 і 8.

Зауваження.

1. При русі точки *A* по графіку функції із правої півплощину в ліву точки *A* та *C* можуть «склеюватися», а прямокутник вироджуватися, тому значення параметра варто задавати в межах від 0 до $2\sqrt{3}$.

2. Ординатою точки *E* взято значення площі побудованого прямокутника (число *h*), що обчислена за формулою *Отрезок[A,C]*Отрезок[B,A]*. Використання інструменту *Площадь* при введенні ординати точки *E* не буде коректним, оскільки результатом застосування інстументу *Площадь* є об'єкт типу *Текст*, який не можна використати в якості координати точки, але можна заносити у таблицю значень. Зауважимо, що ординатою точки можна встановити «програмне» позначення прямокутника, тобто точка *E* буде мати координати *(a, многоугольник1)* – в цьому випадку координати вважаються коректними, і слід точки *E* описує шукану функцію площі.

3. Побудована за допомогою інструменту *Локус* емпірична функція площі не сприймається програмою як самостійний об'єкт, тому застосування команди *Экстремум* або інструменту *Исследователь функции* для швидкого визначення максимуму є неможливим. Екстремальні значення побудованої функції площі потрібно визначати візуально.

4. Інструмент *Исследователь функции* не застосовний до прямих і парабол, які задані безпосередньо через рядок вводу відповідними формулами (наприклад, *y=x-5* і *y=x^2*). Програма їх сприймає як геометричні об'єкти – прямі та конічні перерізи відповідно. Тому такі залежності потрібно задавати за допомогою команди *Функция[<Функция>, <Начальное значение>, <Конечное значение>]*, наприклад, *Функция[x-5, -2, 3]* для лінійної і *Функция[x^2, -3, 4]* для квадратичної залежностей.

5. Одержані числові результати часто можуть бути «некрасивими» або наближеними, оскільки розраховуються у числовому форматі з наперед заданою точністю. Це зумовлює додаткову потребу або у пошуці формульного виразу досліджуваної функції та аналітичному відшуканні її екстремальних значень або хоча б у перевірці співпадання графіків емпіричної функції і знайденої аналітично.

Приклад 2. Сума довжин радіуса основи конуса та його висоти постійна і дорівнює 10. При якому співвідношенні радіуса і висоти об'єм конуса буде найбільшим?

Опишемо можливі алгоритми розв'язання.

Спосіб 1 (традиційний, рис.6).

1. Будуємо точки *O(0,0), A(10,0)* та відрізок *OA*.
2. На відрізку *OA* будуємо точку *B* (відрізок *OB* буде визначати радіус основи конуса).
3. Будуємо точку *D(0,BA)* (відрізок *OD* буде визначати висоту конуса) і додаємо полотно 3*d*. Оскільки полотна 2*d* та 3*d* інтерактивно пов’язані, то точки *O, A, B, D* з’являться і на полотні 3*d*.
4. Будуємо коло з центром в точці *O* та точкою *A* на колі – основа конуса.
5. Будуємо конус з висотою *OD* за допомогою інструменту *Выдавить пирамиду или конус.*
6. Обчислимо об’єм конуса інструментом *Объем*.
7. Обчислимо (через рядок вводу) відношення довжин радіуса основи конуса та висоти конуса – число *h*.

Змінюючи положення точки *B*, спостерігаємо за значенням об’єму конуса. Найбільше значення об’єму конуса 155,1 досягається при співвідношенні радіуса і висоти *h=2.*

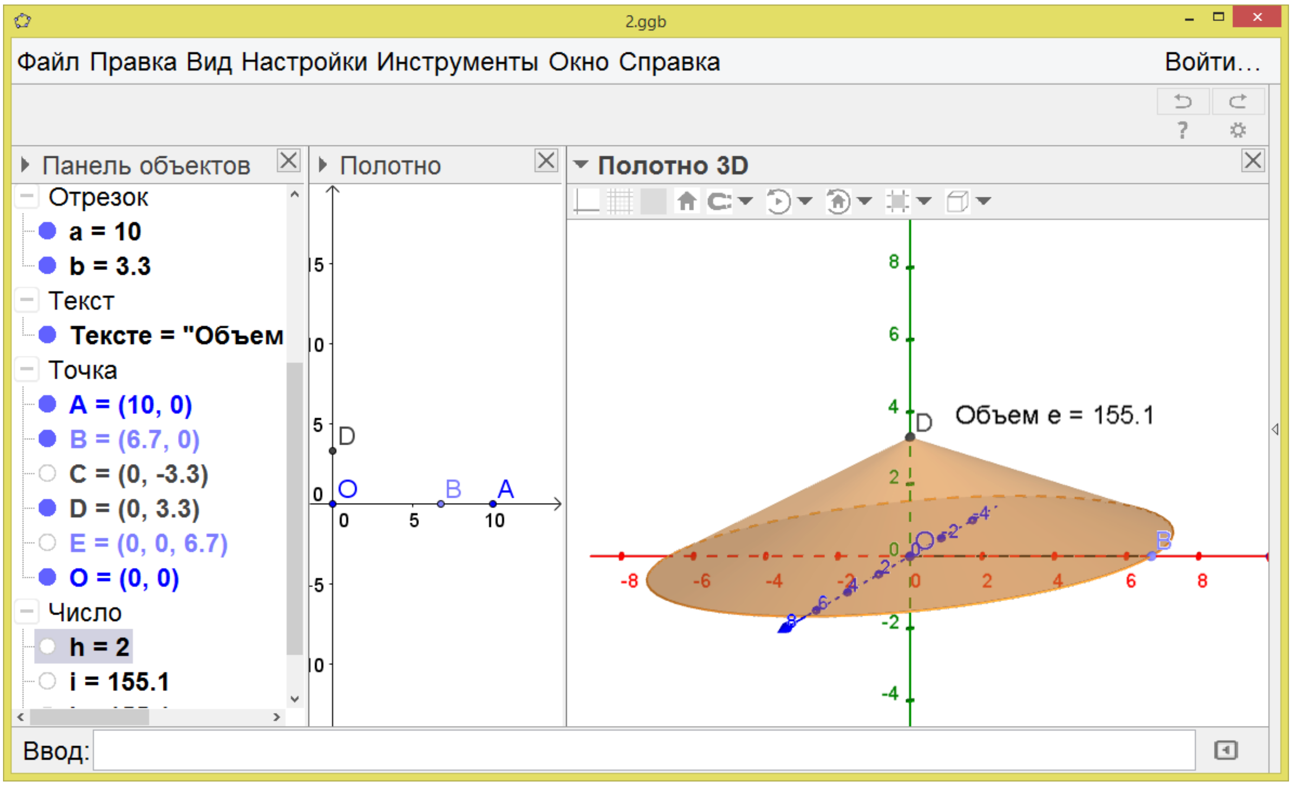


Рис.6

Спосіб 2 (з використанням інструменту *Слід*, рис.7).

1. Будуємо повзунок для значення параметра *a* в межах [*0,10*].
2. Будуємо точки *O(0,0)* та *A(a,0)* (відрізок *OA* буде визначати радіус основи конуса).
3. Будуємо точку *B(0,10-a)* (відрізок *OB* буде визначати висоту конуса).
4. Будуємо конус і обчислюємо його об'єм як і в попередньому способі розв'язання, додавши полотно 3*d*.
5. Будуємо точку *C(a/(10-a),объемb)* і замовляємо послугу залишати слід.
6. За траєкторією точки *C* визначаємо, що максимум емпіричної функції 155,1 досягається, якщо радіус основи конуса вдвічі більший за його висоту.

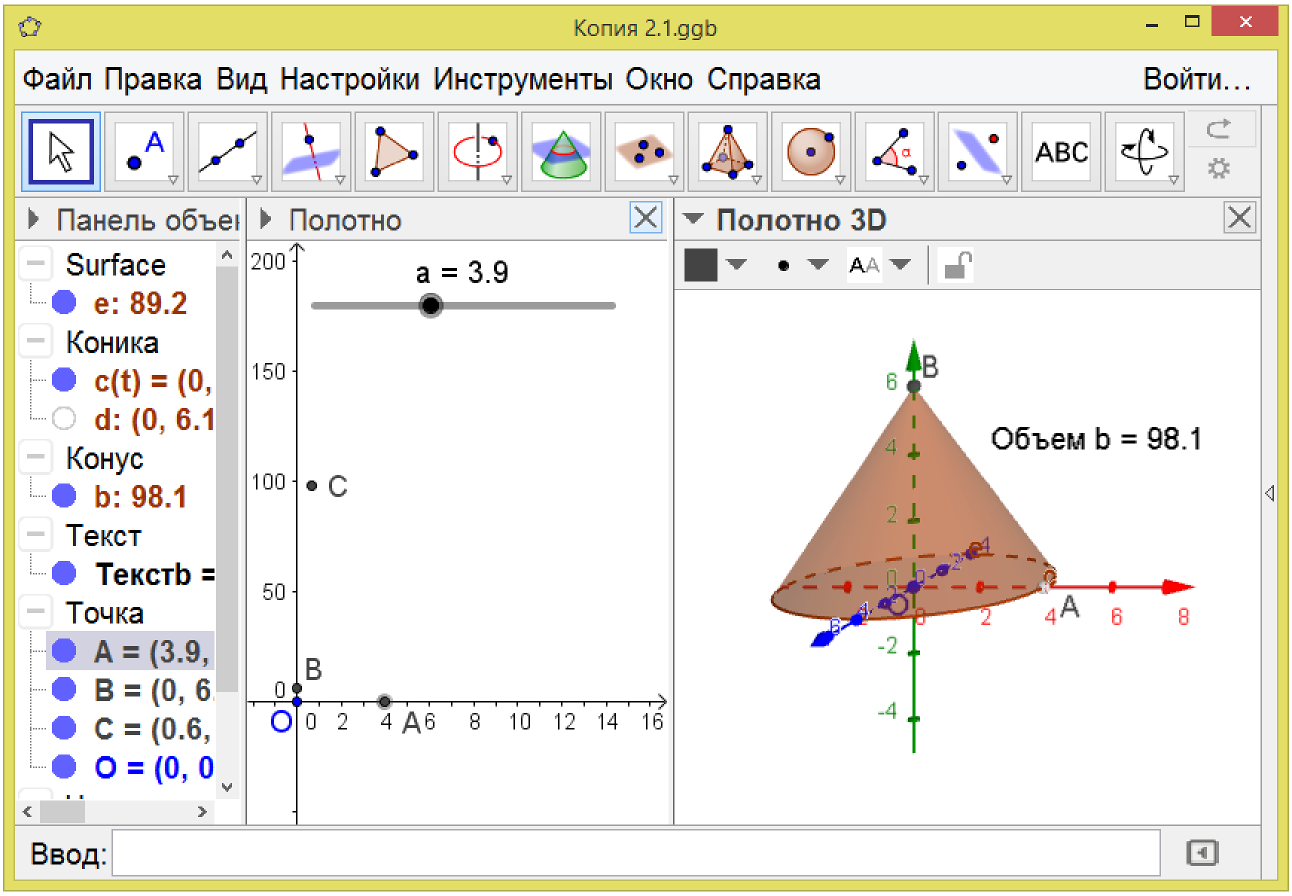


Рис.7

Спосіб 3 (з використанням інструменту *Локус*, рис.8).

1-4. Кроки, аналогічні до способу 2.

5. Будуємо точку *C(a/(10-a),объемb)* і за допомогою інструменту *Локус* будуємо ГМТ, обираючи в якості «водія» параметр *a*, а в якості «олівця» – точку *C*.
6. За неперервним графіком ГМТ (точки *C)* визначаємо, що максимум 155,1

емпіричної функції досягається при відношенні, яке дорівнює 2.

Спосіб 4 (з використанням таблиць значень емпіричної функції, рис.9)

1-4. Кроки, аналогічні до способу 2.

5. Будуємо точку *C(a/(10-a),объемb)*.

6. Додаємо на екран полотно таблиць і через контекстне меню замовляємо послугу *Запись в таблицу* для значень відношення довжини радіуса основи конуса до його висоти (величина *f*) та об'єму.

6. Змінюючи положення базової точки *A*, спостерігаємо появу числового значення відношення і відповідного йому значення об'єму.

7. Аналізуємо динаміку змін значення об'єму – значення до певного моменту зростають, а потім спадають. Критичне значення 155,1 досягається при відношенні 2.

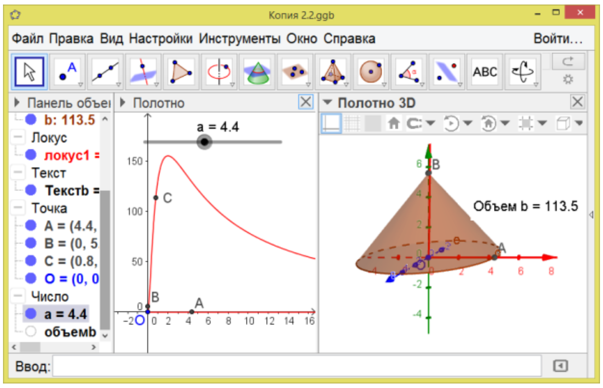
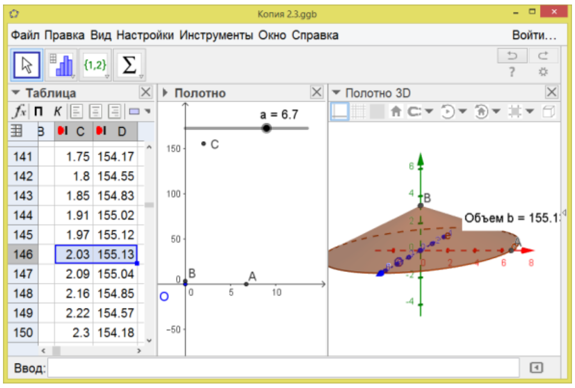


Рис.8



	B	C	D
141		1.75	154.17
142		1.8	154.55
143		1.85	154.83
144		1.91	155.02
145		1.97	155.12
146		2.03	155.13
147		2.09	155.04
148		2.16	154.85
149		2.22	154.57
150		2.3	154.18

Рис.9

Зауваження. 1. Оскільки при побудові емпіричної функції по вісі *Ox* відкладаються величини порядку 1 (відношення радіуса основи конуса до його висоти), а по вісі *Oy* величини порядку 3 (об'єм конуса), то у налаштуваннях потрібно вибрати зручний масштаб *Ось Абсцисс:Ось Ординат* – в даному випадку 1:10.

2. Об'єм конуса не потрібно обчислювати за формулою, як це було в прикладі 1 для площі прямокутника, оскільки при застосуванні інстуременту *Объем* з'являється об'єкт *Объем конуса* не тільки типу *Текст*, а й типу *Число*, яке можна обирати в якості ординати точки.

3. За аналізом таблиці стає очевидним, що значення об'єму та значення відношення радіуса та висоти подані з певним наближенням (це додатково можна продемонструвати, змінюючи формат виводу значень величин: одна цифра після коми, дві і т.д.). Це зумовлює додатковий пошук точного розв'язку аналітичними методами для підтвердження одержаного емпіричного факту.

Описані приклади і наш досвід підтверджують, що технологічно розв'язування геометричних задач на екстремум описаними методами підпорядковується наступному алгоритму дій (табл.4) і сприяє розвитку функціонального мислення учнів завдяки можливості динамічного подання і обробки різноманітних графічних, числових чи алгебраїчних даних: ми можемо виконувати вимірювання параметрів геометричних фігур, перевіряти на основі цих вимірів кількісні відношення (між довжинами, площами, кутами тощо), динамічно змінюючи форму вихідного об'єкта. Функціональна залежність може бути одержана у вигляді таблиці значень або графічно. Останнє є особливо наочним у контексті подальшого аналізу залежності.

Таблиця 4

№	Опис дій	Зауваження
1.	Побудова геометричної фігури або її частини, що досліджується, з урахуванням заданих параметрів	Фігуру потрібно будувати таким чином, щоб аналізована величина залежала тільки від однієї змінної , інші параметри мають бути фіксованими
2.	Виведення на екран функціональної залежності (графік або таблиця значень емпіричної функції)	Оскільки залежність описується однією змінною, то незалежна точка має забезпечувати динамічну зміну лише одного параметра, а оскільки геометричні величини невід'ємні, то для побудови емпіричної функції можна обмежитися лише першим квадрантом
3.	Інтерпретація одержаної емпіричної залежності	Залежність буде емпіричною, оскільки аналітичний вираз самої функції ще невідомий
4.	Аналітичне підтвердження (власноруч без комп'ютера)	Виведення формули залежності в зошиті чи на дошці залишається обов'язковим елементом розв'язання і припускає вміння оперувати відповідним математичним апаратом

№	Опис дій	Зауваження
5.	Перевірка збігу між аналітичною та емпіричною залежностями	Перевірка носить більше прикладний і формальний характер («аналітичний» графік має співпадати з «емпіричним»)
6.	Аналіз відповіді (чи є критичні точки, скільки їх, які умови їх появи чи відсутності тощо)	

Нижче пропонуємо подібні за методом розв'язування і цікаві, на думку авторів, задачі дослідницького змісту, які можна пропонувати учням на уроках математики або гурткових заняттях (рівень задач різний, тому варто попередньо оцінити рівень навчальних досягнень тих, кому вони будуть пропонуватися).

1. Уявивши відрізок довжини 20 як гнучкий дріт, змоделюйте з нього прямокутник. Змінюючи довжини сторін, дослідіть його площу. Коли вона буде найбільшою?

2. Побудуйте прямокутники:

а) з різною площею та різним периметром;

б) з різною площею, але однаковим периметром;

в) з різним периметром, але однаковою площею;

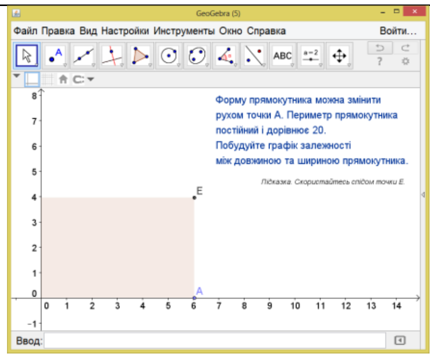
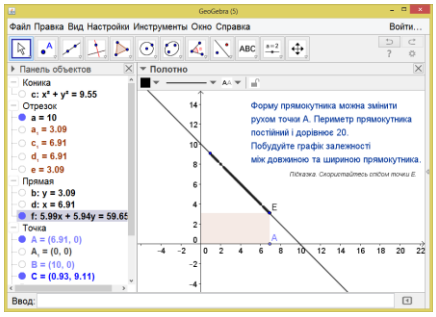
г) однакового периметра і однакової площі.

Методичний коментар. Задачі на перший погляд прості, але досвід їх розв'язування з учнями і студентами говорить про те, що завдання *а* і *б* розв'язуються швидше, ніж *в* і *г*. Типовою помилкою є побудова прямокутника, який є прямокутником лише візуально, і при зміні положення однієї з вершин перетворюється у звичайний чотирикутник. Доцільно рекомендувати учням спочатку побудувати саме прямокутник (!), потім прямокутник, у якого фіксований периметр (наприклад, 20, як у задачі 1). Це вимагає від учнів знань про елементарні побудови фігур за допомогою циркуля та лінійки, які вивчалися у 7 класі. Після цього варто запропонувати змінити значення периметра і подивитися, чи залишається побудована фігура прямокутником. Якщо дії були коректними, далі можна досліджувати значення площі при фіксованому периметрі (використавши *Динамічний слід*, *Локус* чи панель таблиць).

Наступні задачі в ідеалі передбачають самостійну роботу учнів за комп'ютером (можлива групова робота у парах) на основі шаблонів, які попередньо створені учителем за алгоритмом (табл. 5).

3. Дано прямокутник №1, форму якого можна змінити рухом точки *A* (права нижня вершина, рухається по *Ox*). Периметр прямокутника завжди дорівнює 20. Побудуйте графік залежності між його довжиною та шириною.

Таблиця 5

Алгоритм створення шаблону (задача 3)	Візуалізація
1. Оскільки периметр прямокутника 20, то на довжину і ширину прямокутника відводиться 10 одиниць. Будуємо на *Ox* відрізок із точки *O* заданої довжини 10. 2. На відрізку довільно обираємо точку, яку позначаємо буквою *A,* – вона буде базовою для конструкції і визначатиме довжину прямокутника. 3. Будуємо ліву верхню вершину прямокутника (інструмент *Циркуль*, радіус дорівнює ширині прямокутника, центр збігається з т.*O*). 4. Будуємо четверту вершину *E* і приховуємо допоміжні об'єкти. 5. З'єднуємо точки у прямокутник. 6. Додаємо текстове поле умови задачі.	 Початкова (вчителя)  Остаточна (учнів) – коефіцієнти рівнянь напевно не будуть збігатися, тому потрібне аналітичне розв'язання (!)

Відповідь: пряма виду $x+y=10$ (будується, наприклад, слідом правої верхньої вершини).

Методичний коментар. У побудованій вчителем конструкції користувачем змінюється лише положення точки *A*. Якщо для учнів не є очевидною залежність між довжиною і шириною після перегляду змін конструкції, можна задавати допоміжні питання: «Які значення приймає абсциса точки *A*?», «Як можна інтерпретувати (з чим ототожнити) координати точки *E*?», «Чим є слід точки *E*?», «Як задати пряму, що відсікає на осях задані відрізки?».

Потім варто порекомендувати учням взяти дві точки сліду, провести через них пряму і визначити її рівняння (з'явиться на панелі об'єктів), взяти інші дві точки і знову знайти рівняння прямої.

Потім обов'язковим є аналітичний пошук відповіді і його порівняння з емпіричними побудовами.

4. Дано прямокутник №2, форму якого можна змінити рухом точки *A* (права нижня вершина, рухається по *Ox*). Площа прямокутника завжди дорівнює 15. Побудуйте графік залежності між довжиною та шириною прямокутників з рівними площами.

Відповідь: гіпербола виду $x*y=15$ (будується, наприклад, слідом правої верхньої вершини).

5. Прямокутник №1 зберігає свій периметр, а прямокутник №2 – свою площу. Знайдіть такий прямокутник, у якого будуть ці периметр і площа одночасно. Чи завжди задача має розв'язок?

Відповідь: точки перетину слідів, побудованих у задачах 3 і 4, визначать верхні праві вершини шуканих прямокутників.

Наступні задачі пропонуємо для самостійного дослідження і розв'язування.

6. Дослідити значення площі розгортки паперового пакування (у формі паралелепіпеда), яка має постійний об'єм 200 см^3. Чи можлива економія матеріалу?

7а. Досліди площу рівнобедреного трикутника, у якого відома лише довжина бічної сторони, на наявність максимуму.

7б. Досліди об'єм конуса, у якого відома лише довжина твірної, на наявність максимуму.

8а. Серед вписаних у рівнобедрений трикутник прямокутників один має максимальний периметр, а інший – максимальну площу. Чи зберігаються ці екстремуми при зміні основи трикутника?

8б. Серед вписаних циліндрів один має максимальний об’єм, а інший – максимальну площу. Чи зберігається ці екстремуми при зміні форми конуса?

Висновки. 1. Оскільки метою математичної освіти є не лише засвоєння поняття функції, а у більшій мірі готовність до аналізу одержаних значень і їх відповідностей, у навчальний процес варто залучати такі інструменти, які прискорюють, спрощують та візуалізують розрахунки і побудови і при цьому надають змогу динамічно варіювати змінні для усвідомлення між ними істотного зв'язку. До таких інструментів у навчанні математики варто відносити програми динамічної математики, використання яких дозволяє не лише організувати евристичний пошук, а і вивільнити час на додаткові самостійні дослідження, щоб продемонструвати вихід математики у практичну площину дитячого досвіду та потребу у її вивченні.

Разом з цим варто пам’ятати, що залучення ПДМ до розв’язування математичних задач не забезпечує знання математичних формул, понять чи функціональних залежностей, але є тим інструментом, який сприяє формуванню у учнів дослідницьких якостей, математичного мислення та критичного погляду на будь-які твердження.

2. Вчителю математики сьогодні необхідно демонструвати усі можливі способи розв’язування математичних задач. Це стосується не лише аналітичних чи геометричних підходів, а й використання спеціалізованих програмних засобів. Чим ширшим буде перелік способів знаходження відповіді, тим більшою буде вірогідність правильного розв’язання задачі (хоча б через можливість перевірки відповіді).

3. Як показує наш досвід, залучення ПДМ до розв’язування задач не тільки демонструє пересічному учню додатковий шлях застосування інформаційних пристроїв (планшетів, смартфонів, комп’ютерів тощо), а і формує позитивне ставлення до навчального процесу та сприйняття математики

не як науки складних обчислень, а як науки про цікавий аналіз, співставлення чи узагальнення реальних фактів з реального життя.

Література

1. Дубровский В. Н. Учимся работать с «Математическим конструктором» / В. Н. Дубровский // Математика. – 2009. – №13. – С. 2-48.
2. Жалдак М. І. Математика з комп’ютером. Посібник для вчителів / М. І. Жалдак, Ю. В. Горошко, Є. Ф. Вінниченко. – К.: РННУ "ДІНІТ", 2004. – 252с.
3. Храповицкий И. С. Эвристический полигон для геометрии / И. С. Храповицкий // Компьютерные инструменты в образовании. – 2003. – №1. – С. 1-15.
4. Ширикова Т. С. Методика обучения учащихся основной школы доказательству теорем при изучении геометрии с использованием Geogebra: дисс… канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Теория и методика обучения и воспитания (математика)» / Т. С. Ширикова: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова». – Архангельск, 2013. – 250 с.
5. Раков С. А. Компьютерные эксперименты в геометри / С. А. Раков, В. П. Горох. – Х.: МП Регіональний центр нових інформаційних технологій, 1996. – 176с.
6. Семеніхіна О. В. Програми динамічної математики у контексті набуття емпіричного досвіду і формування знань (на прикладі розв’язування задач з параметрами) / О. В. Семеніхіна, М. Г. Друшляк // Інформатика та інформаційні технології в навчальних закладах. – 2014. – № 6. – С. 67-74.
7. Семенихина Е. В. Использование программ динамической математики для организации эксперимента при решении задач на экстремум / Е. В. Семеніхіна, М. Г. Друшляк // XXVI международная конференция

«Применение инновационных технологий в образовании». – 24-25 июня 2015г. – Москва, г.о. Троицк. – 2015. – С. 126-128.

8. Семеніхіна О. В. Інструментарій програми GeoGebra 5.0 та його використання при розв'язуванні задач стереометрії / О. В. Семеніхіна, М. Г. Друшляк // Інформаційні технології і засоби навчання. – 2014. – Т. 44. – № 6. – С. 124-133.
9. Мерзляк А. Г. Алгебра: підруч. для 11 кл. з поглибленим вивченням математики / А. Г. Мерзляк, Н. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2011. – Ч.1. – 256 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММЫ GEOGEBRA В ИССЛЕДОВАНИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ (НА ПРИМЕРЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ЭКСТРЕМУМ)

Семенихина Елена Владимировна,

доцент кафедры информатики Сумского государственного педагогического университета им. А.С. Макаренко, кандидат педагогических наук, доцент, e.semenikhina@fizmatsspu.sumy.ua

Друшляк Марина Григорьевна,

старший преподаватель кафедры математики Сумского государственного педагогического университета им. А.С. Макаренко, кандидат физико-математических наук, marydru@mail.ru

Аннотация. *В статье рассмотрены конструктивные подходы к решению задач на экстремум с использованием программы динамической математики GeoGebra, которые реализуются через построение динамической конструкции и визуальное наблюдение за значением искомой величины; через построение графика эмпирической функции с использованием инструмента Динамический след и определения ее максимума или минимума; через построение таблицы значений эмпирической функции и ее анализе. Приведены примеры задач на экстремум с их подробным решением каждым из предложенных способов.*

Ключевые слова: *функциональная зависимость, задачи на экстремум, программы динамической математики, компьютерные инструменты, GeoGebra*.

USING THE SOFTWARE GEOGEBRA IN THE STUDY OF FUNCTIONAL DEPENDENCIES (ON THE EXAMPLE OF SOLVING OF THE EXTREMUM PROBLEMS)

Olena V. Semenikhina,

Associate Professor of Department of Computer Science, PhD (Pedagogical Sciences), Associate Professor, Sumy State Pedagogical Makarenko University, Ukraine, e.semenikhina@fizmatsspu.sumy.ua

Marina G. Drushlyak,

PhD (Physical and Mathematical Sciences), Senior Lecturer

Sumy State Pedagogical Makarenko University, Ukraine, marydru@mail.ru

Abstract. *The article examines constructive approaches to the solving of extremum problems using dynamic mathematical software GeoGebra, which are realized through the dynamic construction and visual observation of the value of a desired value; through the plotting of the empirical function using the tool Dynamic Trace and determining its maximum or minimum; through the construction of a table of empirical values of the empirical function and its analysis. Examples of extremum problems with their detailed solution using each of these methods are given.*

Keywords*: functional dependence, extremum problems, dynamic mathematical software, computer tools, GeoGebra.*