имеет достаточно широкий круг использования и играет большую роль в нашей жизни. Одним из примеров его применения является фрактальное кодирование изображений.

Знание данного метода позволит специалистам по физико-математических специальностям применять его при решении прикладных задач, а будущие учителя смогут объяснить ученикам математический аппарат, на котором построены современные технологии во многих областях жизни.

Ключевые слова: *метод сжимающих отображений, метод итераций, фрактальный сжатие изображений, неподвижная точка, математика, алгоритм фрактального кодирования, физико-математический факультет, студенты высших учебных заведений.*

Lubenets Z., Martynenko O. Application of the method of compression mappings. *The article considered application of the method of compression mappings and the method of successive approximation on the example fractal compression of images, a general algorithm for fractal coding of images is indicated and its advantages and the importance of studying this issue by students of higher educational institutions, in particular students of the physics and mathematics faculties of pedagogical universities, is substantiated.*

There are many problems in computational mathematics that can be reduced to finding a fixed point of reflection. To do this, use the method of sequential approximations (method of iterations), which is based on the principle of compression mappings. This principle is applied to the proof of the theorems on the existence and uniqueness of solutions of certain types of differential and integral equations; it also allows you to solve scientific problems in algebra, geometry, physics, medicine, computer science, fractal theory, and more.

Among the advantages of the fractal image compression method are the following: it is able to provide the best ratio of compression ratio and quality of the reconstructed image; has a short unpacking time; provides the ability to restore only part of the image and any size; has a wide range of compression options.

At the current stage, data compression is important for both transfer speed and storage efficiency. It is used in medicine for the reconstruction of images in computed tomography, and in addition to many commercial uses, compression technology is also important for military use. So, compression mapping has a wide range of uses and plays a big role in our lives. One example of its application is fractal image encoding.

Knowledge of this method will allow specialists in physical and mathematical specialties to apply it when solving applied problems, and future teachers will be able to explain to students the mathematical apparatus on which modern technologies in many branches of life are built.

Key words: *the method of compression mappings, iteration method, fractal compression of images, fixed point.mathematics, fractal coding algorithm, Faculty of Physics and Mathematics, students of higher education institutions.*

УДК 519.62
DOI 10.5281/zenodo.3547771

О. В. Мартиненко
ORCID ID 0000-0002-8287-0573
І. В. Міщенко
Сумський державний педагогічний
університет імені А.С. Макаренка

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ ЯК МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ РЕАЛЬНОЇ ДІЙСНОСТІ

У статті розглянуто прикладне значення теорії диференціальних рівнянь першого порядку, зокрема,описано математичні моделі для розв'язування задач з хімії, фізики, екології та економічної моделі Еванса встановлення рівноважної ціни; показано важливість *вивчення даної теми студентами фізико-математичних спеціальностей у вищих навчальних закладах та учнями, які цікавляться природничими та математичними науками.*

Диференціальні рівняння та їх системи є досить важливими при дослідженні хімічних процесів. При їх аналізі у хімічних системах завжди виходять з того, що кожен довільний процес здійснюється завдяки певній рушійній силі. Так, для дифузії рушійною силою є градієнт концентрації, конвекції – градієнт густини, потоку тепла – градієнт температури тощо. Тож, об'єктивний аналіз даних процесів можливий тільки при застосуванні диференціальних рівнянь, оскільки поняття градієнту тісно пов'язане з поняттям похідної.

Ще одна галузь, яка використовує здобутки теорії диференціальних рівнянь для свого розвитку та вдосконалення є екологія. Як основний об'єкт її дослідження розглядають еволюцію популяції живих організмів. Опишемо диференціальні моделі популяцій, які пов'язані з розмноженням чи їх вимиранням, а також із співіснуванням різних видів тварин у випадках «хижак – жертва».

Але окрім розглянутих вище природничих наук, дана теорія має досить широке застосування і в інших галузях. Наприклад, для економіки, де неможливе будь-яке експериментування, завдяки застосуванню потужного математичного апарату математичне моделювання є найефективнішим методом для дослідження. Прикладами економічних моделей є моделі споживчого вибору, моделі економічного зростання, моделі рівноваги на товарних, факторних і фінансових ринках тощо.

Ключові слова: *диференціальне рівняння, модель, досліджуваний об'єкт, досліджуваний процес, математичне моделювання, студенти закладів вищої освіти, математика, математичні моделі.*

Постановка проблеми. Дослідження процесів у різних областях людської діяльності потребувало розвитку математичного апарату. Досить велика кількість задач, які виникали перед дослідниками зводяться до розв'язання диференціальних рівнянь. Характер таких задач і методи їх розв'язування можна схематично описати так: відбувається деякий процес (фізичний, хімічний або біологічний), потрібно описати функціональну залежність між його компонентами. Якщо є досить повна інформація про перебіг цього процесу, то доцільно спробувати побудувати його математичну модель. У багатьох випадках такою моделлю й є диференціальне рівняння, один з розв'язків якого відповідає шуканим характеристикам процесу. Диференціальне рівняння моделює процес у тому розумінні, що воно описує його еволюцію, характер змін, які відбуваються з матеріальною системою, можливі варіанти цих змін у залежності від початкового стану системи. Різні за змістом задачі приводять до однакових або схожих рівнянь, тому необхідно виокремити прийоми розв'язування таких класів рівнянь для відповідного типу задач [5].

Поєднання теорії диференціальних рівнянь і математичного моделювання дозволяє розв'язати досить широкий клас задач, що в свою чергу, зумовлює вирішення нагальних проблем сучасності.

Аналіз актуальних досліджень. Теорія диференціальних рівнянь посідає чільне місце серед інших математичних дисциплін, які вивчаються студентами фізико-математичних спеціальностей у вищих навчальних закладах. Вона дозволяє розв'язувати задачі практичного змісту. Виникнення диференціальних рівнянь пов'язують з ім'ям Ісаака Ньютона, який у вигляді анаграми зашифрував дуже важливу інформацію: «закони природи виражаються диференціальними рівняннями». Саме він узагальнив біном на випадок раціональних показників, що привело його до числових рядів; склав таблицю первісних, яка майже ідентична сучасній.

Теорія лінійних систем диференціальних рівнянь була розвинута у наукових працях Ейлера та Лагранжа, яких вважають наступниками Ньютона. У XVIII столітті з багатьох робіт у математиці виділяються саме їх дослідження.

Вагомий внесок у становлення теорії диференціальних рівнянь було зроблено Огюстеном Луї Коші, його задача (задача Коші) і сьогодні слугує для знаходження частинного розв'язку диференціальних рівнянь. Новий етап розвитку даної теорії починається з робіт Анрі Пуанкаре, створена ним «якісна теорія диференціальних рівнянь» разом з теорією функцій комплексних змінних привела до виникнення сучасної топології.

Теорія диференціальних рівнянь зараз розвивається досить активно і має широке коло застосувань у різних сферах, оскільки диференціальні рівняння слугують математичними моделями для багатьох задач реальної дійсності. Все це зумовлює важливість вивчення диференціальних рівнянь першого порядку, як математичних моделей процесів реальної дійсності студентами фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів.

Мета статті. Дослідити на конкретних прикладах можливості використання диференціальних рівнянь як одного із засобів реалізації математичного моделювання в різних галузях людської діяльності (хімії, екології, економіки, фізики). Продемонструвати, що звичайні диференціальні рівняння, зокрема першого порядку, слугують основою для досить ґрунтовних досліджень та показати важливість вивчення даної теми студентами вищих навчальних закладів з точки зору її прикладного спрямування.

Виклад основного матеріалу. Диференціальні рівняння та їх системи є досить важливими при дослідженні хімічних процесів. При їх аналізі у хімічних системах завжди виходять з того, що кожен довільний процес здійснюється завдяки певній рушійній силі. Так, для дифузії рушійною силою є градієнт концентрації, конвекції – градієнт густини, потоку тепла – градієнт температури тощо. Тож, об'єктивний аналіз даних процесів можливий тільки при застосуванні диференціальних рівнянь, оскільки поняття градієнту тісно пов'язане з поняттям похідної.

Перехід від словесного формулювання умов задачі до її математичної моделі досить часто приводить до диференціальної моделі відповідного процесу. Відомо, що швидкість витрачення реагенту є пропорційною його поточній концентрації, тому процес її знаходження описується рівнянням:

$$\frac{dC}{dt} = -kC,$$

розв'язком якого при заданих початкових умовах (вихідній концентрації реагенту C_0) є відоме кінетичне рівняння реакції першого порядку $C = C_0 e^{-kt}$.

З результатів дослідження відповідної диференціальної моделі можна прогнозувати хід кінетичної кривої реагенту у часі. Потрібно встановити, чи відповідає дана реакція кінетичним закономірностям першого порядку і зробити певні висновки про механізм її перебігу [1].

Ще одна галузь, яка використовує здобутки теорії диференціальних рівнянь для свого розвитку та вдосконалення є екологія. Як основний об'єкт її дослідження розглядають еволюція популяції живих організмів. Опишемо диференціальні моделі популяцій, які пов'язані з розмноженням чи їх вимиранням, а також із співіснуванням різних видів тварин у випадках «хижак – жертва».

Нехай $x(t)$ – число особин у популяції в момент часу t. Тоді якщо A – число особин у популяції, народжених в одиницю часу, а B – число особин, померлих за одиницю часу, то є можна стверджувати, що швидкість зміни величини популяції з часом задається формулою

$$\frac{dx}{dt} = A - B$$

Завдання полягає в тому щоб описати залежність A і B від x. Найпростішим є випадок, коли

$$A = ax;\ B = bx,$$

де a і b – коефіцієнти народжуваності і смертності особин в одиницю часу відповідно. З урахуванням попередньої рівності, диференціальне рівняння $\frac{dx}{dt} = A - B$ перепишеться у наступному вигляді:

$$\frac{dx}{dt} = (a-b)x$$

Припускаючи, що в момент часу $t = t_0$ число особин у популяції становить $x = x_0$, із отриманого рівняння знаходимо $x(t)$:

$$x(t) = x_0 e^{(a-b)(t-t_0)}.$$

З цього слідує, що якщо $a > b$, то при $t \to \infty$ число особин $x \to \infty$. З іншого боку, за умови $a < b$, маємо що $x \to 0$ при $t \to \infty$ і популяція стає вимираючою.

Хоча наведена модель є спрощенню, проте вона в низці випадків відповідає дійсності. Насправді ж, всі моделі, що описують реальні явища і процеси, нелінійні, і замість розглянутого диференціального рівняння слід використати рівняння вигляду

$\frac{dx}{dt} = f(x)$, де $f(x)$ – нелінійна функція, наприклад, рівняння

$\frac{dx}{dt} = f(x) = ax - bx^2$, де $a > 0$, $b > 0$.

Вважаючи, що в момент часу t_0 число особин у популяції становить x_0, тоді з останнього рівняння знаходимо

$$x(t) = \frac{x_0 \frac{a}{b}}{x_0 + \left[\frac{a}{b} - x_0\right] e^{-a(t-t_0)}}$$

Звідси видно, що при $t \to \infty$ число особин у популяції $x(t) \to \frac{a}{b}$. При цьому можливі два випадки:

$$\frac{a}{b} > x_0 \text{ або } \frac{a}{b} < x_0 .$$

Різницю між ними наочно можна побачити на графіку, що відображає залежність зміни числа особин в популяції від часу:

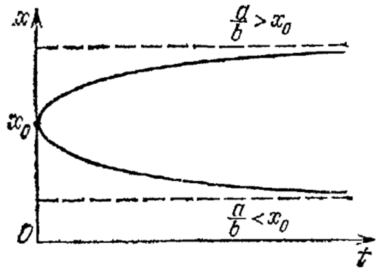

Рис. 1

Відмітимо, що дане співвідношення описує популяції фруктових шкідників і деяких видів бактерій [2].

Але окрім розглянутих вище природничих наук, дана теорія має досить широке застосування і в інших галузях. Наприклад, для економіки, де неможливе будь-яке експериментування, завдяки застосуванню потужного математичного апарату математичне моделювання є найефективнішим методом для дослідження. Прикладами економічних моделей є моделі споживчого вибору, моделі економічного зростання, моделі рівноваги на товарних, факторних і фінансових ринках тощо.

Розглянемо *модель Еванса встановлення рівноважної ціни,* як приклад застосування теорії диференціальних рівнянь першого порядку в неперервних моделях економіки, де незалежною змінною є час.

У цій моделі розглядають ринок одного товару, неперервно залежний від часу. Нехай $Q(t), S(t), P(t)$ – відповідно попит, пропозиція і ціна цього товару у момент часу t. Будемо вважати, що і попит, і пропозиція лінійні функції від ціни, тобто

$Q(t) = a - bP(t), \quad a, b > 0$, очевидно що із зростанням ціни попит спадає),

$S(t) = \alpha - \beta P(t), \quad \alpha, \beta > 0$ – із зростанням ціни пропозиція зростає, причому $a > \alpha$ (для нульової ціни попит перевищує пропозицію, тобто товар бажаний споживачу). При цьому, головним припущенням є те, що збільшення ціни ΔP прямо пропорційне перевищенню попиту над пропозицією за час Δt, тобто

$$\Delta p = \gamma(Q-S)\Delta t, \text{ де } \gamma > 0, \text{ або } \frac{dP}{dt} = \gamma(Q-S).$$

Підставивши у це рівняння лінійні залежності попиту і пропозиції від ціни, одержимо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння з початковою умовою:

$$\frac{dP}{dt} = -\gamma(b-\beta)P + \gamma(a-\alpha), \quad P(0) = P_0.$$

Розв'язок рівняння, має вигляд:

$$P(t) = P_0 e^{-\gamma(b+\beta)t} + \frac{a-\alpha}{b+\beta}\left(1 - e^{-\gamma(b+\beta)t}\right),$$

звідки

$$P(t) = P_0 e^{-\gamma(b+\beta)t} + P^*\left(1 - e^{-\gamma(b+\beta)t}\right), \text{ де } P^* = \frac{a-\alpha}{b+\beta}.$$

Точка $P^* = \dfrac{a-\alpha}{b+\beta} > 0$ є стаціонарною: $\lim\limits_{t \to \infty} P(t) = P^*$, бо для $P_0 < P^*$

Рівноважну ціну можна також знайти графічно:

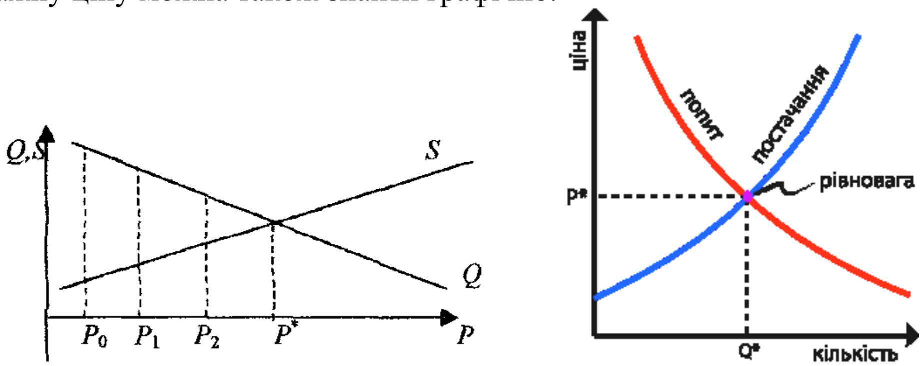

Рис. 2. Ціна та поведінка ринку

З графіка видно, що ціна до P^*, зростаючи, а для $P_0 > P^*$ ціна, спадаючи, теж прямує до P^*. Сама ціна P^* є рівноважною ціна – для неї $Q(P^*) = S(P^*)$ [3].

Приклади практичного застосування теорії диференціальних рівнянь можна зустріти у фізиці. Зокрема, розглянемо задачу про політ тіла, кинутого під кутом до горизонту.

Нехай тіло кинуте під кутом α до горизонту з початковою швидкістю υ_0. Необхідно вивести рівняння руху тіла, нехтуючи силами опору.

Оберемо осі координат так, як показано на рисунку 3.

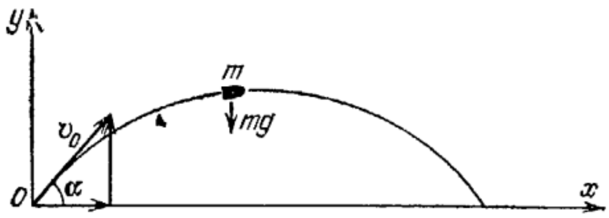

Рис. 3. Тіло кинуте під кутом до горизонту

Очевидно, що у довільному положенні M на тіло масою m діє лише одна сила – його вага $P = mg$. Тому у відповідності до другого закону Ньютона диференціальні рівняння руху в проекціях на осі x та y запишуться у вигляді: $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0$; $m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -mg$.

Скоротимо на m обидва рівняння, отримаємо, що

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0\,; \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=-g$$

Визначимо початкові умови руху тіла: $x=0$; $y=0$; $t=0$;

$$\frac{dx}{dt}=\upsilon_0\cos\alpha\,; \qquad \frac{dy}{dt}=\upsilon_0\sin\alpha\,.$$

Проінтегрувавши рівняння руху в проекціях на осі x та y, з урахуванням початкових умов, знаходимо, що

$$x=(\upsilon_0\cos\alpha)\cdot t\,; \qquad y=(\upsilon_0\sin\alpha)\cdot t-\frac{gt^2}{2}$$

Отримані рівняння дають можливість зробити ряд висновків про характер руху кинутого тіла. Зокрема, можна встановити траєкторію його польоту, яка задається параболою [4].

Висновки та перспективи подальших наукових розвідок. Отже, в багатьох реальних задачах ми зустрічаємося з ситуацією, коли диференціальна модель ще не наведена в готовому для розв’язання вигляді, її попередньо потрібно скласти. Може статися, що етап побудови моделі буде набагато складнішим, ніж безпосереднє розв’язання конкретного диференціального рівняння. Іноді можна застосувати певні шаблонні підходи. Але в переважній більшості прийти до коректної моделі можна лише за умови детального аналізу фізичної суті процесів, використанні співвідношень матеріального й енергетичного балансу.

Вивчення диференціальних рівнянь першого порядку студентами вищих навчальних закладів є важливим, оскільки дана тема слугує основою для проведення досить ґрунтовних досліджень прикладного спрямування. Також, розуміння даної теми допоможе майбутнім вчителям при роботі з учнями, які цікавляться природничими та математичними науками.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Батунер, Л. М. (1960). Математические методы в химической технике. Ленінград: Госхимиздат.
2. Гаращенко, Ф. Г., Матвієнко, В. Т., Харченко, І. І. (2008). Диференціальні рівняння для інформатиків: підручник. Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет».
3. Мур, Дж. (2004). Экономическое моделирование в Microsoft Excel. Москва: Вильямс.
4. Мартинсон, Л. К., Малов, Ю. И. (2002). Дифференциальные уравнения математической физики. МГТУ им. Н.Э. Баумана.
5. Самойленко, А. М., Кривошея, С. А., Перестюк, Н. А. (1989). Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. Москва: Высшая школа.

Мартыненко Е. В., Мищенко И. В. Дифференциальные уравнения первого порядка как математические модели реальной действительности.

В статье рассмотрено прикладное значение теории дифференциальных уравнений первого порядка, в частности, описаны математические модели для решения задач с химии, физики, экологии и экономической модели Эванса установления равновесной цены; показано важность изучения данной темы студентами физико-математических специальностей в высших учебных заведениях и учениками, которые интересуются естественными и математическими науками.

Дифференциальные уравнения и их системы являются достаточно важными при исследовании химических процессов. При их анализе в химических системах всегда исходят из того, что каждый произвольный процесс осуществляется благодаря определенной движущей силе. Так, для диффузии движущей силой является градиент концентрации, конвекции – градиент плотности, потока тепла – градиент температуры и тому подобное. Поэтому, объективный анализ данных процессов возможен только при

применении дифференциальных уравнений, поскольку понятие градиента тесно связано с понятием производной.

Еще одна отрасль, которая использует достижения теории дифференциальных уравнений для своего развития и совершенствования является экология. Как основной объект ее исследования рассматривают эволюцию популяции живых организмов. Опишем дифференциальные модели популяций, связанные с размножением или их вымиранием, а также с сосуществованием различных видов животных в случаях «хищник – жертва».

Но кроме рассмотренных выше естественных наук, данная теория имеет достаточно широкое применение и в других отраслях. Например, для экономики, где невозможно любое экспериментирования, благодаря применению мощного математического аппарата математическое моделирование является эффективным методом для исследования. Примерами экономических моделей являются модели потребительского выбора, модели экономического роста, модели равновесия на товарных, факторных и финансовых рынках и тому подобное.

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение, модель, исследуемый объект, исследуемый процесс, математическое моделирование, студенты высших учебных заведений, математика, математические модели.*

Martynenko E. V., Mishchenko I. V. Differential equations of the first order as mathematical models of reality.

The article considers the applied value of the theory of differential equations of the first order, in particular, describes mathematical models for solving problems in chemistry, physics, ecology and the economic model of Evans establishing an equilibrium price; The importance of studying this topic by students of physical and mathematical specialties in higher educational institutions and students who are interested in the natural and mathematical sciences is shown.

Differential equations and their systems are quite important in the study of chemical processes. In their analysis in chemical systems, it is always assumed that every arbitrary process is carried out by a certain driving force. Thus, for diffusion, the driving force is the concentration gradient, convection is the density gradient, the heat flux is the temperature gradient, and so on. Therefore, objective analysis of these processes is possible only when applying differential equations, since the concept of gradient is closely related to the concept of a derivative.

Another area that uses the benefits of differential equation theory for its development and improvement is ecology. As the main object of her research, they consider the evolution of the population of living organisms. We describe differential population models that are associated with reproduction or extinction, as well as with the coexistence of different animal species in predator-prey cases.

But in addition to the natural sciences discussed above, this theory is quite widespread in other fields. For example, for an economy where no experimentation is possible, mathematical modeling is the most effective method for research through the use of a powerful mathematical apparatus. Examples of economic models are consumer choice models, economic growth models, equilibrium models in commodity, factor and financial markets and more.

Key words: *differential equation, model, object under study, process under study, mathematical modeling, students of higher education institutions, mathematics, mathematical models.*