

learning activities based on the results of formative assessment. Based on the survey, we can see some ambiguity in the interpretation of the concepts of "formative assessment", "current assessment" and "summative assessment" by teachers. The article identifies the classes in which Ukrainian teachers most often use formative assessment, the most effective types and the most popular strategies of this assessment. Some problems and challenges related to the implementation of formative assessment are considered and some ways for its effective implementation in the educational process are suggested.

Key words: formative assessment, current assessment, summative assessment, mathematics teaching, self-assessment, mutual assessment, assessment technologies, New Ukrainian School.

УДК 378.147 33

DOI 10.5281/zenodo.12162205

І. В. Гордієнко

ORCID ID 0000-0001-6182-4968

Л. І. Комарницька

ORCID ID 0009-0001-0907-1038

Дрогобицький державний педагогічний
університет імені І. Я. Франка

ВИКОРИСТАННЯ АНАЛОГІЇ ПРИ ВИКЛАДАННІ ВИЩОЇ АЛГЕБРИ

У статті проведено аналіз і викладено основні засади використання аналогії у практиці навчання, зокрема у викладанні вищої алгебри. Обґрунтовано методичні особливості аналогії у навчанні математики як засобу активізації навчальної діяльності здобувачів освіти. Розкрито особливості застосування аналогії у процесі навчання як важливого компонента творчого мислення студентів, які базуються на принципах поступовості й послідовності, інтегрованості, цілісності та відкритості. За допомогою аналогії пізнавальна діяльність здобувачів освіти на основі встановлення подібності між об'єктами спрямовується на реалізацію певних дидактичних цілей – набуття нової навчальної інформації; конкретизацію, усвідомлення матеріалу, що вивчається; закріплення, запам'ятовування, узагальнення та систематизацію набутих знань. Умовиводи за аналогією є одними з основних при виникненні навчальних гіпотез, при встановленні нових закономірностей, способів введення понять, доведення тверджень і теорем, розв'язування математичних задач. Наведено приклади використання аналогії при викладанні лінійної алгебри, алгебри та теорії чисел. Зокрема, за аналогією з дво- та тривимірними векторами розглядається поняття n -вимірного вектора; матриці як узагальнення поняття числа та їх властивості; виконання операцій над числами, записаними в різних позиційних системах числення; властивості порівнянь, що тісно пов'язані з властивостями рівностей; подільність цілих чисел і многочленів; означення старшого члена многочлена від однієї і декількох змінних; означення найбільшого спільного дільника чисел і многочленів; означення звідних і незвідних многочленів та теореми про подання многочлена ненульового степеня у вигляді добутку незвідних многочленів як аналог основної теореми арифметики. Наведено приклад історичного характеру, коли умовиводи, зроблені за аналогією, не дають очікуваного результату. Проілюстровано цінність аналогії як евристичного методу та обґрунтовано необхідність використання методу аналогії у навчанні математики для формування у студентів умінь переносу знань від відомого об'єкта до невідомого.

Ключові слова: методика навчання математики, викладання вищої алгебри, методи та прийоми навчальної діяльності, прийоми розумової діяльності, пошуково-дослідницька діяльність, проблемне навчання, аналогія.

Постановка проблеми. Останнім часом велика увага приділяється дослідженню таких методів навчання, які сприяють активізації пізнавальної діяльності здобувачів освіти, зокрема при викладанні вищої математики. Значну роль у розв'язанні цього завдання відіграє проблемне навчання. Актуальним є управління пізнавальною діяльністю під час створення проблемної ситуації і розв'язання відповідної проблеми. Тут найбільш складною ланкою є, як відомо, вирішення проблеми. У процесі розв'язання навчальної проблеми здобувач освіти застосовує логічні операції, а найчастіше прийоми аналогії та порівняння.

Аналогія як метод наукових математичних досліджень і як метод пізнання займає значне місце у процесі вивчення математики. Відомий польський математик С. Банах писав: «Математик – це той, хто вміє знаходити аналогії між твердженнями; кращий математик той, хто встановлює аналогії доведень; сильніший математик той, хто зауважує аналогії теорій; але можна уявити собі й такого, хто між аналогіями бачить аналогії».

У статті аналізується важливість використання методу аналогії при висвітленні важливих питань з курсів вищої алгебри і теорії чисел та його значення для формування у студентів умінь переносу знань від відомого об'єкта до невідомого та глибокого розуміння матеріалу.

Аналіз актуальних досліджень. Для дослідження проблеми застосування методу аналогії у навчанні математики важливе значення мають роботи Д. Пойя. Учений стверджував, що навчання математики, як й інших предметів, є практично неможливим без використання індукції та аналогії. «Можливо, – пише він, – не існує відкриттів ні в елементарній, ні у вищій математиці, ні, навіть, в будь-якій іншій галузі, які могли б бути зроблені без цих операцій, особливо без аналогії» [5, с.39].

«Аналогією проймає все наше мислення; наша щоденна мова й тривіальні висновки, мова художніх творів і вищі наукові досягнення. Аналогія може бути різною. Люди часто застосовують туманні, двозначні, неповні або не цілком з'ясовані аналогії, але аналогія може досягнути математичної точності. Нам не слід нехтувати жодним видом аналогії; кожний з них може відіграти певну роль у пошуках розв'язання» [5, с.42–43]. Автор зауважує, що багато задач часто легше розв'язати, ніж одну, бо при розв'язанні серії типових задач, що пов'язані тісною аналогією, виникає принцип розв'язання. Підкреслюючи важливу роль аналогії у розв'язанні задач, Д. Пойя обґрунтував процес розв'язання задачі методом спеціально дібраних додаткових задач, точніше ланцюга еквівалентних задач. Хоча допоміжна задача не гарантує розв'язку основної, але частина її розв'язку може стати частиною розв'язку основної задачі, зробити основну задачу більш зрозумілою, оживити пам'ять, розширити сферу пошуку [5].

Розробник теорії методів проблемно-розвивального навчання в загальноосвітній і професійній школі М. І. Махмутов зазначає, що на першому етапі розв'язування навчальної проблеми «аналогія, перенесення відомих способів розв'язування в нову ситуацію, асоціативні зв'язки відіграють головну роль». Другий етап розв'язування проблеми, як пише М. І. Махмутов, починається з висунення гіпотези. Автор зауважує, що розвиток гіпотези, тобто логічний процес її висунення, обґрунтування і доведення може здійснюватися також шляхом аналогії. Аналогія, як правило, дає поштовх для висунення гіпотези. У побудові гіпотези актуалізуються всі наявні знання відносно даної проблеми.

А. П. Дмитрієв встановив можливість застосування на кожному з виділених М. І. Махмутовим етапів такого ефективного методу наукового пізнання, як аналогія. На його думку застосування аналогії виступає як необхідний етап у вирішенні поставленої проблеми. Для пояснення нового спочатку актуалізують знання, проводять аналіз відомого та невідомого. І на основі аналізу, за аналогією, роблять висновок.

У процесі формулювання проблеми може виникнути здогадка – основа евристичного її вирішення. Д. В. Вількеєв вважає, що основою для здогадок, висунення навчальних гіпотез може слугувати аналогія. Проте, він попереджує про можливість виникнення різних помилок. «Помилка першого роду – це коли встановлюються неправильні аналогії...» [3, с.35].

У загальних методиках викладання математики аналогія часто розглядалася як евристичний метод, який сприяє пошукам шляхів доведення теорем і розв'язування задач. Г. П. Бевз [2] радить користуватися аналогіями в навчанні для кращого усвідомлення навчального матеріалу, його узагальнення та систематизації, вироблення навичок творчого розв'язування задач. Автор наголошує на евристичній функції методу аналогії. З цього приводу він зазначає, що з її допомогою можна: а) підвести здобувачів освіти до відкриття нового твердження і допомогти сформулювати його; б) вказати на спосіб або метод доведення цього твердження; в) допомогти знайти шлях розв'язання задачі. Тим самим з допомогою аналогії можна полегшити процес навчання, здійснюючи перехід від відомого до невідомого, при цьому пов'язуючи матеріал ряду тем у певну змістовну єдність.

О. І. Скафа в евристичному навчанні математики важливе місце відводить аналогії. У монографії [6, с.47] подається евристичне правило-орієнтир цього прийому, яке складається із послідовності таких операцій:

- визначити мету дії;
- розглянути деякі властивості чи відношення об'єкта, який вивчається;
- згадати, чи не зустрічали раніше подібний предмет;
- якщо так, то згадати усі його властивості;
- порівняти властивості першого та другого предметів;
- якщо другий предмет має властивості, яких не було помічено у першому предметі, виявити їх наявність у предметі, який вивчається;
- зробити висновок згідно поставленої мети.

Мета статті – проілюструвати та обґрунтувати цінність методу аналогії при викладанні вищої алгебри.

Виклад основного матеріалу. Аналогію доцільно використовувати на різних етапах процесу навчання математики, зокрема у закладах вищої освіти.

За допомогою методу аналогії пізнавальна діяльність студентів на основі встановлення подібності між об'єктами спрямовується на реалізацію певних дидактичних цілей – набуття нової навчальної інформації; конкретизацію, усвідомлення матеріалу, що вивчається; закріплення, запам'ятовування, узагальнення та систематизацію набутих знань [7].

Застосування методу аналогії як засобу засвоєння знань студентами в умовах університету з різних дисциплін є однією з актуальних і недостатньо розроблених проблем, вирішення якої тісно пов'язане з подальшим удосконаленням процесу професійної підготовки випускників вищої школи в контексті сучасної особистісно орієнтованої парадигми освіти [7].

Розглянемо приклади використання аналогії у вищій алгебрі.

У шкільному курсі математики розглядається поняття вектора як напрямленого відрізка. Проте в математиці термін «вектор» вживається в більш широкому розумінні, а саме, як елемент деякого векторного простору. У курсі лінійної алгебри за аналогією з двовимірним, тривимірним векторами розглядається поняття n -вимірного числового вектора, а сукупність таких векторів із заданими операціями додавання векторів і множення на число – як арифметичний n -вимірний векторний простір.

Число можна розглядати як матрицю розмірності 1×1 , тому поняття матриці узагальнює поняття числа. І природно припустити, що властивості операцій над матрицями аналогічні операціям над числами, а саме: операції додавання матриць та множення їх на число асоціативні та комутативні. Асоціативна і операція множення матриць, проте вона не є комутативною. Аналогічні властивості мають і операції над лінійними операторами у n -вимірному векторному просторі, які повністю описуються квадратними матрицями n -го порядку.

У теорії чисел за аналогією з десятковою системою числення розглядаються двійкова, трійкова і т.д. системи числення. У десятковій системі використовується десять цифр, аналогічно у системі числення з основою g використовуються g цифр: $0, 1, 2, 3, \dots, g-1$. При виконанні арифметичних операцій над числами, записаними в

десятковій системі числення, користуються правилами додавання, віднімання і множення чисел «стовпцем», ділення – «кутом». Аналогічно за цими ж правилами виконують операції й над числами, записаними в будь-якій іншій позиційній системі числення.

При розгляді в курсі алгебри многочленів від однієї змінної, старший член означають як відмінний від нуля член многочлена, степінь якого більший за степінь усіх інших відмінних від нуля членів цього многочлена. Очевидно, що він єдиний. Аналогічне означення можна дати і для старшого члена многочлена від кількох змінних, вважаючи степенем члена $A x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ суму $k_1 + k_2 + \dots + k_n$, але тут многочлен може мати декілька різних старших членів, або ж взагалі всі, й тоді він називається однорідним. Крім того, для многочлена від однієї змінної існує два способи розташування його членів – за зростаючими або спадними степенями змінної. У випадку многочленів від багатьох змінних такого способу вже не існує, оскільки степені різних членів можуть збігатися. Тому для многочленів від кількох змінних використовують лексикографічний спосіб розташування членів, при цьому перший за порядком член многочлена при такому розміщенні називається вищим членом многочлена. Тобто для многочленів від кількох змінних розглядають поняття старшого і вищого членів, тоді як для многочленів від однієї змінної – лише старшого члена.

Широко використовується аналогія при розгляді таких питань, як подільність цілих чисел і многочленів. Якщо для цілих чисел a і b існує таке ціле число q , що $a = bq$, то кажуть, що a ділиться на b . Аналогічно дається означення подільності многочленів: многочлен $f(x)$ ділиться на многочлен $g(x)$, якщо існує многочлен $s(x)$ такий, що $f(x) = g(x)s(x)$. Аналогічними є і більшість властивостей подільності чисел і многочленів, наприклад такі: властивість транзитивності $f(x):g(x) \wedge g(x):h(x) \Rightarrow f(x):h(x)$; якщо кожний з многочленів (або чисел) $f(x)$ і $g(x)$ ділиться на $h(x)$, то їхня сума і різниця ділиться на $h(x)$; якщо многочлени (числа) діляться один на одного, то вони відрізняються множником, що є дільником одиниці (для чисел це 1 або -1 , для многочленів – відмінні від нуля константи). Аналогічно до теореми про ділення цілих чисел з остачею формулюється і відповідна теорема для многочленів з тією відмінністю, що вимога для чисел, щоб остача була меншою від модуля дільника, замінюється наступною: щоб степінь остачі був меншим від степеня дільника.

Означення найбільшого спільного дільника чисел можна дати по-різному: як найбільшого зі спільних дільників чисел або як спільного дільника, який ділиться на будь-який інший спільний дільник цих чисел. А вже означення найбільшого спільного дільника многочленів дають аналогічно до другого варіанту, тобто як спільного дільника многочленів, який ділиться на кожний інший спільний дільник цих многочленів, оскільки порівнювати многочлени не можна (лише їхні степені).

Аналогами простих і складених чисел у теорії чисел є незвідні і звідні многочлени у теорії многочленів. Фундаментальну роль у теорії подільності цілих чисел відіграє основна теорема арифметики, тобто теорема про можливість і єдиність розкладу довільного цілого числа (відмінного від 0, ± 1) у добуток простих множників. Аналогічне твердження справедливе і для многочленів: кожний многочлен ненульового степеня можна подати у вигляді добутку незвідних у заданому полі многочленів, причому єдиним способом з точністю до сталих множників і до порядку нумерації цих незвідних многочленів.

Розглянемо, як використовується аналогія в теорії порівнянь, яка має цілу низку арифметичних застосувань. Порівняння в математиці – це співвідношення між двома цілими числами a і b , яке означає, що різниця $a - b$ ділиться на задане натуральне число m (модуль порівняння) і записується у вигляді $a \equiv b \pmod{m}$. Зазначимо, що якщо $a - b$ ділиться на число m , то це можна записати у вигляді рівності $a - b = mq$. Тому порівняння мають багато властивостей, аналогічних властивостям рівностей, а саме: доданок можна переносити з протилежним знаком з однієї частини порівняння в іншу; обидві частини порівняння можна множити на одне й те саме число та підносити до будь-

якого натурального степеня; порівняння з однаковим модулем можна почленно додавати, віднімати і перемножувати. Зручним способом розв'язування двочленних порівнянь n -го степеня за простим модулем є використання індексів, а поняття індексів у теорії порівнянь аналогічне поняттю логарифмів чисел. Аналогічні до властивостей логарифмів є властивості індексів, тому вони легко засвоюються студентами.

У процесі навчання аналогія відіграє двояку роль. В одних випадках вона допомагає краще усвідомлювати програмний матеріал і міцніше його запам'ятати; в інших випадках вона є причиною багатьох досить поширених помилок, які негативно впливають на знання учнів [2]. Так, найменше спільне кратне двох чисел дорівнює їхньому добутку, поділеному на їх найбільший спільний дільник, а для трьох чи більше чисел таке твердження вже неправильне, і студенти часто про це забувають.

Міркування за аналогією не є строгими, вони не мають «доказової сили». Іноді вони приводять до правильних висновків, навіть до відкриттів, а іноді – до хибних. Розглянемо приклад з історії розвитку числових систем, коли умовиводи, зроблені за аналогією, не дали очікуваного результату. У 1835 р. відомий ірландський математик Вільям Гамільтон опублікував працю «Теорія алгебраїчних пар», у якій побудував арифметичну модель комплексних чисел як пар дійсних чисел, для яких певним чином задані арифметичні операції. Геометрична інтерпретація комплексних чисел відкривала широкі можливості їх застосування. Успішність цієї моделі комплексних чисел як векторів на площині підштовхнула його до пошуків схожого представлення тривимірного простору. Протягом декількох років Гамільтон працював над узагальненням поняття комплексного числа і створенням, за аналогією, повноцінної системи «чисел» з трійок дійсних чисел, так званих триплетів, додавання яких, як і для комплексних чисел, мало бути покомпонентним. Проте тут виникла проблема із заданням операції множення триплетів, адже вимагалось, щоб для множення зберігалися властивості асоціативності, комутативності, дистрибутивності відносно додавання, а також, щоб добуток ненульових триплетів не дорівнював нулю. Але виявилось, що яким би способом не задавалося множення триплетів (пізніше було доведено, що такого способу не існує), завжди знаходились такі ненульові триплети, добуток яких дорівнював нулю. Однак у 1843 році Гамільтон все ж таки знайшов вихід: він відкрив кватерніони (вектори у чотиривимірному просторі), але тут довелось відмовитись від такої важливої властивості для них, як комутативність. Історичний внесок кватерніонів у розвиток математики був неоціненний. Відомий французький фізик і математик А. Пуанкаре писав: «Це була революція в арифметиці, подібна до тієї, яку здійснив Лобачевський у геометрії».

Висновки та перспективи подальших наукових розвідок. Таким чином, наведені приклади свідчать про цінність аналогії як евристичного методу та ілюструють можливості використання методу аналогії у навчанні математики для формування у студентів умінь переносу знань від відомого об'єкта до невідомого. Сформованість у студентів вміння застосовувати аналогію слугує чудовим підґрунтям для глибокого розуміння матеріалу та виробленням навичок розв'язування задач.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ / REFERENCE

1. Алексюк, А. М. (1980). Методи навчання і методи учіння. Київ : Знання. (Aleksyuk, A. M. (1980). Learning methods and learning methods. Kyiv: Znannia).
2. Бевз, Г. П. (1989). Методика викладання математики: Навчальний посібник. Київ : Вища школа. (Beves, H. P. (1989). Methods of teaching mathematics: Study guide. Kyiv: Vyshcha shkola).
3. Бондар, С. П. (1975). Дидактичні основи застосування аналогії на уроці (на матеріалі предметів природничо-математичного циклу) (дис. ... канд. пед. наук : 13.00.01). Київ. (Bondar, S P. Didactic basis of using analogy in the lesson (on the material of the subjects of the science and mathematics cycle) (PhD thesis). Kyiv).

4. Бурда, М. І. (1994). Методичні основи диференційованого формування геометричних умінь учнів основної школи (автореф. дис. ... д-ра пед. наук: 13.00.02). Київ. (Burda, M. I. (1994). Methodological basis of differentiated formation of geometric skills of elementary school students (DSc thesis abstract). Kyiv).
5. Гордієнко, І. В. (2013). Метод аналогії у вивченні шкільного курсу стереометрії (дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02). Київ (Hordiienko, I. V. The method of analogy in the studied school course of stereometry (PhD thesis). Kyiv).
6. Скафа, О. (2004). Методичні вимоги щодо організації евристичного навчання математики. Рідна школа, 1, 32–35. (Skafa, O. (2004). Methodological requirements for the organization of heuristic teaching of mathematics. Native school, 1, 32–35).
7. Метод аналогії як засіб поглиблення фундаментальної математичної підготовки студентів технічних університетів. Режим доступу: http://dspace.tnpu.edu.ua/bitstream/123456789/15318/1/Kolomiets_Klochko.pdf. (The method of analogy as a means of deepening the fundamental mathematical training of students of technical universities. Retrieved from: http://dspace.tnpu.edu.ua/bitstream/123456789/15318/1/Kolomiets_Klochko.pdf).

Hordiienko I. V., Komarnytska L. I. Using the analogy in teaching Higher Algebra.

In the article the basic principles of using the analogy in teaching practice, in particular, in teaching Higher Algebra are analyzed and considered. The methodical features of analogy in teaching Mathematics as a means of activating the educational activity of students are substantiated. The peculiarities of using the analogy in the learning process as an important component of students' creative thinking, which are based on the principles of gradualness and consistency, integration, integrity and openness, are revealed. With the help of analogy, the cognitive activity of students based on the establishment of similarities between objects is directed to the realization of certain didactic goals – the acquisition of new educational information; specification, awareness of the material being studied; consolidation, memorization, generalization and systematization of acquired knowledge. Conclusions by the analogy are one of the main ones in the emergence of educational hypotheses, in the establishment of new regularities, ways of introducing concepts, proving statements and theorems, solving mathematical problems. The examples of the using of analogy in teaching Linear Algebra, Algebra and Number Theory are given. In particular, by analogy with two- and three-dimensional vectors, the concept of an n -dimensional vector is considered; matrices as a generalization of the concept of numbers and their properties; performing operations on numbers written in different positional counting systems; properties of comparisons, which are closely related to the properties of equalities; divisibility of integers and polynomials; definition of the senior term of a polynomial of one and several variables; definition of the greatest common divisor of numbers and polynomials; definitions of reducible and irreducible polynomials and the theorem on the presentation of a polynomial of non-zero degree in the form of a product of irreducible polynomials as an analogue of the main theorem of Arithmetic. The example of a historical nature when conclusions made by analogy do not give the expected result is given. The value of analogy as the heuristic method is illustrated and the necessity of using the method of analogy in teaching Mathematics for the formation of students' ability to transfer knowledge from a known object to an unknown one is substantiated.

Key words: *Teaching Methods of Mathematics, higher Algebra teaching, methods and techniques of educational activity, techniques of mental activity, search and research activity, problem-based learning, analogy.*