

ВИВЧЕННЯ МЕТОДУ СТИСКАЮЧИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Кінець ХХ століття характеризується вступом загальноосвітньої та професійної школи на новий етап свого розвитку, характерними рисами якого є розбудова освіти на нових прогресивних концепціях, запровадження у навчально-виховний процес сучасних педагогічних та інформаційних технологій, науково-методичних досягнень. Поряд із збереженням шкіл загального профілю, значного поширення в Україні набуває процес створення шкіл нового типу (профільні школи, гімназії, ліцеї), широкого розповсюдження набули профільні класи різного спрямування. У зв'язку із змінами, які відбуваються на ниві шкільництва, особливо актуальною постає проблема вдосконалення професійної підготовки вчителів математики. Навчання у вищій педагогічній школі здійснюється в умовах підготовки вчителів математики до викладання в різних типах навчальних закладів, у класах різного спрямування, тобто в умовах диференційованої підготовки. Тому виникає потреба в розкритті можливостей математичного аналізу у підготовці вчителів до викладання математики в різних типах навчальних закладів, у класах різного профілю.

В традиційних курсах математики вивчають різні способи розв'язування рівнянь. Вивчення курсу функціонального аналізу, задачі якого відрізняються від задач алгебра та геометрія, розвивають у студентів нестандартне мислення, вміння аналізувати проблему та знаходити раціональні шляхи її вирішення. Задача пошуку точного розв'язку рівняння вимагає використання як традиційних методів математики, так і більш сучасних. В основу методичної системи знаходження коренів рівнянь покладено принципи, які складають основу концепції професійно-педагогічної спрямованості навчання математичного аналізу (фундаментальність, бінарність, провідна ідея, неперервність).

Питання про можливість існування і єдиність розв'язку зводиться до питання про існування нерухомої точки при деякому відображенні метричного простору в себе. Серед різних критеріїв існування єдиної нерухомої точки таких відображень варто особливо виділити принцип стискаючих відображень, який в свою чергу дає і метод наближеного знаходження розв'язку рівняння. Він застосовується в алгебрі, геометрії, фізиці, медицині, інформатиці. Метод стискаючих відображень лежить в основі нестандартного підходу до розв'язування рівнянь. Використання обчислювальної техніки дає можливість працювати з великою кількістю складних рівнянь, полегшувати та перевіряти загальний алгоритм їх розв'язків.

Уперше метод стискаючих відображень зустрічається у грецького філософа Зенона Елейського, який жив за 500 років до нашої ери. Поступово зміст удосконалювався, перекладався на математичну мову і сьогодні метод стискаючих відображень має точне математичне обґрунтування і широке застосування.

Відповідь на питання про існування розв'язків рівняння дає теорема Больцано-Коші:

Нехай дана неперервна функція на відрізку $f \in C([a, b])$ і $f(a) \neq f(b)$, і $f(a) = A < B = f(b)$. Тоді для будь-якого $C \in [A, B]$ існує точка $c \in [a, b]$, що $f(c) = C$.

Нехай $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ неперервна $[a, b]$ функція і $f(a) \cdot f(b) < 0$, тобто на кінцях відрізка вона приймає значення різних знаків, тоді існує принаймні одна точка $c \in [a, b]$, така, що $f(c) = 0$.

Питання про існування та єдиність розв'язку зводиться до питання про існування нерухомої точки.

Відображення $f: X \rightarrow X$ метричного простору X в себе називається стискаючим, якщо існує таке число $q (0 < q < 1)$, що для будь-яких точок $x \in X, y \in Y$ виконується нерівність:

$$\rho(f(x), f(y)) \leq q\rho(x, y) \quad (1)$$

Із виконання цієї умови випливає, що якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ покласти $\delta = \varepsilon$, то для будь-яких двох точок $x \in X, y \in Y$, які задовольняють умову $\rho(x, y) < \delta$ виконується нерівність:

$$\rho(f(x), f(y)) \leq q\rho(x, y) < q\delta = q\varepsilon$$

Стискаюче відображення є рівномірно неперервним, а отже і неперервним в кожній точці $x \in X$:

$$\lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x)$$

Точка $x \in X$ називається нерухомою точкою відображення $f: X \rightarrow X$, якщо $f(x) = x$.

Стискаюче відображення повного метричного простору в себе має, і до того ж єдину, нерухому точку. Більш того, якщо маємо $f: X \rightarrow X$, де a – нерухома точка: $f(a) = a$ то для будь-якої точки $x_0 \in X$ ітераційна послідовність

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_{n+1} = f(x_n), \dots \quad (2)$$

збігається в точці a і відображення f задовольняє умову (1), то має місце наступна оцінка збіжності послідовності (2):

$$\rho(x_n, a) \leq \frac{q^n}{1-q} \rho(x_0, f(x_0))$$

Розглянемо задачу знаходження коренів рівняння

$$f(x) = 0 \quad (3),$$

де $f(x)$ – задана функція дійсної змінної.

Розв'язування цієї задачі відбувається в декілька етапів:

- 1) дослідження розташування коренів (в загальному випадку на комплексній площині) та їх кратність;
- 2) відділення коренів, тобто виділення областей, що містять лише один корінь;
- 3) обчислення кореня з заданою точністю за допомогою одного з ітераційних алгоритмів (в основі лежить принцип стискаючих відображень)

Рівняння $f(x) = 0$ запишемо у вигляді

$$x = f(x) \quad (4)$$

Нехай маємо початкове наближення x_1 , підставимо його в праву частину (4). Отримане значення $x_2 = f(x_1)$ приймемо за друге наближення кореня. Якщо відоме наближення x_n , то наступне x_{n+1} знаходять за формулою:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Після декількох кроків наближень ми отримуємо, що із заданою точністю виконується рівність $x_n \approx x_{n+1}$. Оскільки $x_{n+1} = f(x_n)$, то із заданою точністю виконується рівність $x_n \approx f(x_n)$, тобто x_n є наближеним значенням кореня рівняння

$$x = f(x).$$

До ітераційних процесів, що дають можливість побудувати числову послідовність x_n , яка збігається до шуканого кореня рівняння (3) належать:

- метод ділення проміжку навпіл (метод дихотомії)
- метод простої ітерації;
- метод релаксації;
- метод Ньютона;
- модифікований метод Ньютона.

В останні десятиліття математика зазнала серйозних змін, пов'язаних як з розвитком обчислювальної техніки, так і з розвитком обчислювальних методів. При цьому абстрактні методи дозволяють для різних класів рівнянь знайти певні алгоритми розв'язування. Метод стискаючих відображень лежить в основі ітераційних методів і дає можливість знаходити наближені розв'язки рівнянь. Одночасно метод стискаючих відображень дає нестандартний алгоритм розв'язування цікавих задач, що в свою чергу розвиває інтелектуальні вміння студентів та учнів.

Анотація. Гордієнко І.С. Вивчення методу стискаючих відображень та його застосування. У тезах розкривається актуальність застосування студентами фізико-математичного факультету знань з математичного аналізу при знаходженні точних та наближених коренів рівнянь. Описується зміст методу стискаючих відображень та наводиться операційний апарат ітераційного процесу до розв'язування задач.

Ключові слова: рівняння; стискаючі відображення; нерухома точка; ітераційний процес.

Аннотация. Гордиенко И.С. Изучение метода сжимающих отображений и его применение. В тезисах показывается актуальность применения студентами физико-математического факультета знаний из математического анализа при нахождении точных и приближенных корней уравнений. Описывается содержание метода сжимающих отображений и наводится операционный аппарат итерационного процесса к решению задач.

Ключевые слова: уравнение; сжимающие отображения; неподвижная точка; итерационный процесс.

Summary. Gordienko I. In actuality rozkryvayetsya theses students use physics and mathematics faculty of knowledge of mathematical analysis in finding exact and approximate roots of equations. Describes the content and method compressive vidoprazhen given operating unit iteration process for solving problems

Keywords: equations, squeezing display, fixed point, iterative process.

Література

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Физматгиз, 1976. – 542 с.
2. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ в III томах. Т.3. 2 изд. – М.: Высшая школа, 1989. – 351 с.