

Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

<http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/>



Івашина Ю.К., Гончаренко Т.Л., Плоткін Я.Д. Похибка застосування моделі лінійного струму до розрахунку магнітного поля струму в провіднику квадратного перерізу. Фізико-математична освіта. 2020. Випуск 3(25). Частина 2. С. 56-60.

Ivashina Yu., Goncharenko T., Plotkin Ya. Error of the linear current model application to magnetic field of current in square conductor calculation. Physical and Mathematical Education. 2020. Issue 3(25). Part 2. P. 56-60.

DOI 10.31110/2413-1571-2020-025-3-026
УДК 537.8

Ю.К. Івашина
Херсонський державний університет, Україна
ivashinauriy@gmail.com
ORCID: 0000-0001-9569-2393

Т.Л. Гончаренко
Херсонський державний університет, Україна
goncharenkokspu@gmail.com
ORCID: 0000-0002-2021-9320

Я.Д. Плоткін
Херсонський державний університет, Україна
plotkin1938@gmail.com

ПОХИБКА ЗАСТОСУВАННЯ МОДЕЛІ ЛІНІЙНОГО СТРУМУ ДО РОЗРАХУНКУ МАГНІТНОГО ПОЛЯ СТРУМУ В ПРОВІДНИКУ КВАДРАТНОГО ПЕРЕРІЗУ

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. Розрахунок магнітного поля провідників різної конфігурації проводять за допомогою закону Біо-Савара-Лапласа. При цьому широко використовується модель лінійного струму, при застосуванні якої нехтують реальним перерізом провідника зі струмом. Умова використання цієї моделі чітко не визначена. Метою роботи є дослідження можливості застосування моделі лінійного струму до розрахунку магнітного поля провідника зі струмом і визначення похибки застосування моделі в залежності від відстані до точки спостереження.

Матеріали і методи. Розглянуто магнітне поле прямого довгого провідника квадратного перерізу. Істинне поле такого струму визначається на основі принципу суперпозиції полів елементарних трубок струму шляхом інтегрування по перерізу провідника. Це поле порівнюється із полем лінійного струму тієї ж величини, який проходить через вісь провідника.

Результати. Розраховано істинне магнітне поле провідника на основі інтегрування, поле лінійного струму, абсолютна і відносна похибка застосування моделі лінійного струму в залежності від відстані до точки спостереження R . Оскільки істинне поле залежить не тільки від положення точки спостереження, а і від розмірів провідника, визначалась відносна відстань R/a , де a – ширина перерізу. Дослідження проводились в напрямку осей симетрії перерізу.

Висновки. Розрахунки показали, що відносна похибка застосування моделі лінійного струму стрімко збільшується при наближенні до провідника (при $R/a < 2$), на великій відстані (при $R/a > 6$) стає меншою 0,5%, причому похибка в напрямку діагональної осі симетрії децю вища.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: магнітне поле струму, модель лінійного струму, похибка застосування моделі.

ВСТУП

Постановка проблеми. Фізичні моделі широко використовуються в різних розділах фізики. Матеріальна точка, ідеальний газ, точковий заряд – ці та інші моделі відомі всім із елементарного (шкільного) та загального курсів фізики. Застосування їх має важливе методичне і практичне значення, оскільки, на основі прийнятих спрощень, моделі дозволяють краще зрозуміти і описати явища і процеси, а також провести необхідні розрахунки їх параметрів. Але, внаслідок спрощень, моделі описують явища і процеси наближено, з деякою похибкою, величина якої залежить від умов застосування моделей, тому визначення цієї похибки має важливе значення. Визначення магнітного поля здійснюється при проведенні наукових експериментів і при проектуванні різноманітних електротехнічних пристроїв. При цьому широко використовується модель лінійного струму, в якій нехтують реальним перерізом провідника.

Аналіз актуальних досліджень. Аналіз літератури дозволяє стверджувати, що:

– загальноприйнятим є розрахунок електричного поля заряджених тіл з допомогою моделі точкового заряду, в якій нехтують розмірами зарядженого тіла (Фейнман, Лейтон, Сэндс, 2016; Сивухин, 2004);

– модель лінійного струму і елемента струму відіграють при розрахунку магнітного поля струмів таку ж роль, що й модель точкового заряду при розрахунку електричного поля (Фейнман, Лейтон, Сендс, 2016; Сивухин, 2004; Мултановский, Василевский, 2006). При цьому, умова застосування моделі лінійного струму визначена нечітко, зокрема, застосовується означення «достатньо тонкий провідник» (Мултановский, Василевский, 2006);

– магнітне поле струму в масивному провіднику визначається рядом моментів перерізу відповідного порядку, із яких поле лінійного струму (момент нульового порядку) найменше змінюється з відстанню (Васецький, 2010);

– магнітне поле провідника з прямокутним перерізом визначено у (Иванова, Самодуров, Мартемьянов, 2015], але можливість спрощеного розрахунку з допомогою моделі лінійного струму не розглядається.

Наведене визначає мету дослідження.

Метою статті є висвітлення результатів дослідження щодо визначення похибки застосування моделі лінійного струму до визначення розрахунку магнітного поля провідника квадратного перерізу в залежності від відстані до точки спостереження.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для визначення магнітного поля провідників різної конфігурації застосовують закон Біо-Савара-Лапласа. В випадку лінійного струму магнітне поле визначається інтегруванням по всій довжині провідника зі струмом (Фейнман, Лейтон, Сендс, 2016)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{[d\vec{l} \vec{r}]}{r^3} \quad (1)$$

де \vec{r} - радіус-вектор точки спостереження.

У випадках, коли необхідно враховувати розподіл струму в просторі (по перерізу провідника), індукцію поля отримують інтегруванням по області V_0 , де розподілений струм

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{V_0} \frac{[\vec{j} \vec{r}]}{r^3} dV_0 \quad (2)$$

Очевидно, що знаходження магнітного поля в другому випадку, згідно (2), значно складніше.

Магнітне поле масивних провідників за (Васецький, 2010) визначається через векторний потенціал \vec{A} , який знаходиться з допомогою об'ємного інтегралу. В області зовні струму його подали у виді суми одновимірних інтегралів вздовж осьової лінії. Інтеграл від кожної складової представляє собою магнітне поле, що створене моментом плоского перерізу відповідного порядку (аналог розкладання по мультиполям). Індукцію магнітного поля визначають диференціюванням векторного потенціалу

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \quad (3).$$

Такий шлях розрахунку магнітного поля масивних провідників зі струмом вимагає глибоких знань і високої кваліфікації. Якщо обмежитися тільки першим членом розкладання, то ми отримуємо модель лінійного струму (момент нульового порядку). Для визначення поля в цьому випадку інтегрування проводиться вздовж осьової лінії (Васецький, 2010). Але таке спрощення приводить до виникнення похибки визначення магнітного поля струму, яка збільшується при наближенні до провідника.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для досягнення мети дослідження визначалося магнітне поле прямого довгого провідника з врахуванням розподілу струму по всьому перерізу. Порівнювалися результати розрахунку істинного магнітного поля провідника, визначеного на основі формули (2) і поле лінійного струму цієї ж величини, який проходить по осі струму.

Розглянуто найпростіший випадок – провідник прямий нескінчений (достатньо довгий). В силу симетрії магнітне поле лінійного струму буде циліндрично симетричним [1], яке визначається виразом:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad (4)$$

де R – відстань до точки спостереження.

Для визначення магнітного поля реального прямого провідника розіб'ємо його на трубки нескінченно малого перерізу, які можна представити як лінійні струми. Поле трубки:

$$dB = \frac{\mu_0 j dS}{2\pi r} \quad (5)$$

де dS – площа перерізу трубки, j – густина струму, r – відстань від трубки до точки спостереження. Поле всього провідника визначимо на основі принципу суперпозиції:

$$\vec{B} = \int_s d\vec{B} \quad (6)$$

Інтегрування проводиться по всій площі поперечного перерізу провідника S .

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Досліджено поле провідника квадратного перерізу зі стороною a в напрямку осі симетрії x , паралельної стороні перерізу. Поле елементарних трубок струму приведено на рис. 1.

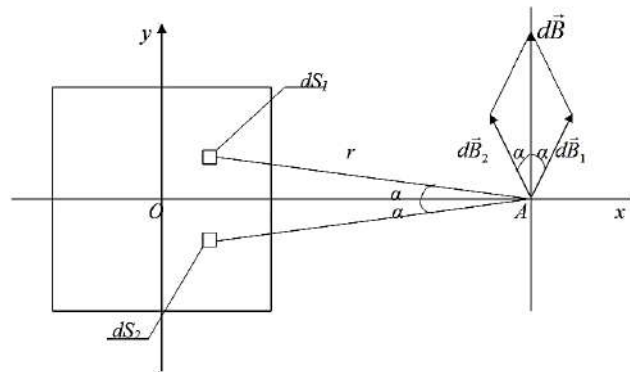


Рис. 1. Поле елементарних трубок струму

Струм I розподілений рівномірно по перерізу з густиною $j = \frac{I}{a^2}$. Прийнемо, що струм іде на нас. Виберемо довільний елемент перерізу $dS_1 = dx dy$, який знаходиться на відстані r від точки спостереження A . Магнітне поле dB_1 трубки струму перерізу dS_1 визначається на основі (5):

$$dB = \frac{\mu_0 I dx dy}{2\pi a^2 r} \tag{7}$$

У силу симетрії перерізу завжди можна знайти симетричний і рівний елемент dS_2 . Поле цієї трубки $dB_2 = dB_1$, так як $dI_1 = dI_2$. Результуюче поле цих трубок направлено в площині перерізу в напрямку осі y . Складові dB_y додаються, а складові dB_x – компенсуються.

Таким чином, магнітне поле всього струму

$$B = B_y = \int dB_y \tag{8}$$

$$dB_y = dB \cos \alpha = \frac{\mu_0 I (R-x) dx dy}{2\pi a^2 r^2} \tag{9}$$

де $r^2 = y^2 + (R-x)^2$, $R=OA$.

Магнітне поле струму в точці A

$$B_1 = B_{1y} = 2 \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \int_0^{\frac{a}{2}} dy \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{(R-x) dx}{y^2 + (R-x)^2} \tag{10}$$

Інтеграл по x є табличним

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{\pi a^2} \left(\int_0^{\frac{a}{2}} \ln \left[\left(R + \frac{a}{2} \right)^2 + y^2 \right] dy - \int_0^{\frac{a}{2}} \ln \left[\left(R - \frac{a}{2} \right)^2 + y^2 \right] dy \right) \tag{11}$$

Інтеграл (11) береться по частинах

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left[\ln \frac{2R^2 + 2aR + a^2}{2R^2 - 2aR + a^2} + \left(R + \frac{a}{2} \right) \operatorname{arctg} \frac{a}{2R+a} - \left(R - \frac{a}{2} \right) \operatorname{arctg} \frac{a}{2R-a} \right] \tag{12}$$

Істинне магнітне поле B_1 , що створюється прямим довгим провідником квадратного перерізу в напрямку осі симетрії, паралельної стороні перерізу, визначається (12).

Визначимо магнітне поле цього провідника в напрямку діагональної осі симетрії x_1 . На основі вищенаведених міркувань, магнітне поле B_2 на осі x_1 буде направлено в напрямку осі y_1 .

$$B_2 = B_{2y_1} = 2 \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} dy \int_{y-\frac{a}{\sqrt{2}}}^{\frac{a}{\sqrt{2}}-y} \frac{(R-x) dx}{y^2 + (R-x)^2} \tag{13}$$

Після перетворень одержимо:

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a \sqrt{2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{a}{R\sqrt{2}} + \frac{R \frac{a}{\sqrt{2}}}{R^2 + \frac{a^2}{2}} \right) \tag{14}$$

Так як поле залежить не тільки від відстані R від центру провідника до точки спостереження, а і від розмірів провідника, будемо розглядати залежність магнітного поля від відносної відстані R/a . Тоді вираз (4) матиме вигляд:

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \frac{R}{a} \tag{15}$$

Результати розрахунку залежності істинного магнітного поля B_1 струму квадратного довгого провідника в напрямку осі x , визначеного згідно (12), B_2 – в напрямку осі x_1 , визначеного (14), поля лінійного струму B_n , визначеного згідно (15), від відносної відстані до точки спостереження R/a , приведені в таблиці. В ній же наведені абсолютні похибки $\Delta B_1 = B_n - B_1$, $\Delta B_2 = B_n - B_2$ і відносні похибки $\Delta B_1/B_1$ і $\Delta B_2/B_2$ застосування моделі лінійного струму до прямого провідника з квадратним перерізом.

Таблиця 1

Залежність магнітного поля струму квадратного довгого провідника від відносної відстані в напрямках осей симетрії перерізу

Параметр	Відносна відстань $\frac{R}{a}$					
	1	1,5	2	3	4	6
$B_n, \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$	1,0000	0,6667	0,5000	0,3333	0,2500	0,1667
$B_1, \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$	0,8482	0,6250	0,4820	0,3286	0,2480	0,1661
$\Delta B_1, \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$	0,1518	0,0416	0,0180	0,0047	0,0020	0,0006
$\frac{\Delta B_1}{B_1}, \%$	17,9	6,7	3,7	1,4	0,8	0,4
$B_2, \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$	0,8357	0,5842	0,4642	0,3214	0,2447	0,1655
$\Delta B_2, \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$	0,1643	0,0805	0,0358	0,0119	0,0053	0,0012
$\frac{\Delta B_2}{B_2}, \%$	19,7	13,8	7,7	3,7	2,2	0,7

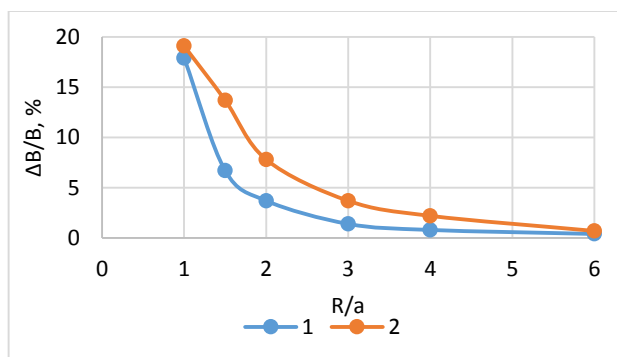


Рис. 2. Залежність відносної похибки застосування моделі лінійного струму від відносної відстані в напрямку осей симетрії (1 - в напрямку осі симетрії x , паралельній стороні перерізу, 2 – в напрямку діагональної осі x_1)

ОБГОВОРЕННЯ

Як видно з таблиці і рисунка із збільшенням відносної відстані від точки спостереження до осі провідника похибки застосування моделі лінійного струму різко зменшуються, при цьому похибка в напрямку осі симетрії x менша ніж в напрямку діагональної осі x_1 , що свідчить, що магнітне поле такого провідника в напрямку цієї осі більш відрізняється від циліндрично симетричного поля лінійного струму, ніж в напрямку осі x_1

Згідно (Васецкий, 2010) магнітне поле струму в масивному провіднику визначається рядом моментів перерізу відповідного порядку, із яких поле лінійного струму (момент нульового порядку) найменше змінюється з відстанню; поля інших моментів затухають обернено-пропорційно більш високим степеням відстані до точки спостереження, тому їх вплив на поле зменшується при віддаленні від осі струму, що приводить до зменшення похибки застосування моделі лінійного струму.

Магнітне поле поблизу провідника зі струмом залежить від форми перерізу. Відомо, що поле прямого довгого циліндричного провідника в силу симетрії є циліндрично симетричним, як і поле лінійного струму (Фейнман, Лейтон, Сендс, 2016), тому до нього можна застосувати модель лінійного струму. Згідно наведеної вище методики ми провели розрахунки магнітного поля циліндричного провідника, які підтвердили, що поле циліндричного прямого довгого провідника зовні провідника еквівалентне магнітному полю лінійного струму тієї ж величини, який проходить по осі циліндра, що підтверджує коректність застосованої в дослідженні методики.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ.

1. Магнітне поле поблизу провідника зі струмом залежить від форми перерізу. На великій відстані від осі його можна визначати з допомогою моделі лінійного струму.

2. Похибка застосування моделі лінійного струму до розрахунку магнітного поля прямого довгого провідника з квадратним перерізом залежить від відносної відстані R/a до осі струму і різко збільшується при $R/a < 2$. При $R/a = 6$ відносна похибка стає рівною 0,7 % і 0,4 % в напрямках осей симетрії перерізу – діагональної і паралельної стороні перерізу відповідно.

3. При $R/a > 6$ модель лінійного струму можна застосовувати для практичного розрахунку магнітного поля провідників з квадратним перерізом.

Наукова новизна роботи полягає у визначенні похибки застосування моделі лінійного струму до провідника з квадратним перерізом в залежності від відстані від осі струму до точки спостереження.

Перспективами подальшого дослідження вбачаємо визначення похибки застосування моделі лінійного струму до довгого прямого провідника прямокутного перерізу в залежності від ступеню витягнутості перерізу і відстані до точки спостереження.

Список використаних джерел

1. Васецкий Ю.М. Асимптотические методы решения задач электродинамики в системах с массивными криволинейными проводниками. К.: Наукова думка, 2010. 271 с.
2. Иванова А.Г., Самодуров И.Н., Мартемьянов В.М. Магнитное поле прямоугольного проводника с током. Международный студенческий научный вестник. 2015. № 6. С. 55. URL: <http://www.eduherald.ru/ru/article/view?id=14265> (дата обращения: 11.04.2020)
3. Мултановский В. В., Василевский А.С. Курс теоретической физики для педвузов. Книга 2. Классическая электродинамика. М.: Дрофа, 2006. 347 с.
4. Ричард Фейнман, Роберт Лейтон, Мэтью Сэндс Фейнмановские лекции по физике. Том 5. Изд.: Либроком, Едиториал УРСС, 2016. 304 с.
5. Сивухин Д.В. Общий курс физики. В 5 т. Том III. Электричество. 4-е изд., стереот. М.: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2004. 656 с.

References

1. Vasetsky Yu.M. (2010). Asymptotic methods for solving electrodynamics problems in systems with massive curvilinear conductors. K.: Naukova dumka. [in Russian]
2. Ivanova A.G., Samodurov I.N., Martemyanov V.M. (2015). The magnetic field of a rectangular conductor with current. Mezhdunarodnyj studencheskij nauchnyj vestnik. 6, 55. URL: <http://www.eduherald.ru/ru/article/view?id=14265> (accessed: 04/11/2020) [in Russian]
3. Multanovsky V.V., Vasilevsky A.S. (2006). The course of theoretical physics. Volume 2. Classical electrodynamics. M.: Prosveshchenie [in Russian]
4. Richard Feynman, Robert Leighton, Matthew Sands (2016). Feynman Lectures in Physics. Volume 5. Izd.: Librokom, Editorial URSS [in Russian]
5. Sivukhin D.V. (2004). General physics course. In 5 vol. Volume III. Electricity. 4-e izd., stereot. M.: FIZMATLIT; Izd-vo MFTI [in Russian]

**ERROR OF THE LINEAR CURRENT MODEL APPLICATION TO MAGNETIC FIELD OF CURRENT
IN SQUARE CONDUCTOR CALCULATION**

Yu.K. Ivashina, T.L. Goncharenko, Ya.D. Plotkin

Kherson State University, Ukraine

Abstract.

Formulation of the problem. The calculation of the magnetic field of conductors of different configurations is carried out using the law of Bio-Savar-Laplace. In this case, the linear current model is widely used, in the application of which the real cross-section of the current-carrying conductor is neglected. The condition for using this model is not clearly defined. The work aims to study the possibility of applying the linear current model to the calculation of the magnetic field of a current-carrying conductor and to determine the error of the model application depending on the distance to the observation point.

Materials and methods. The magnetic field of a straight long conductor of the square cross-section is considered. The true field of such a current is determined based on the principle of superposition of the fields of elementary current tubes by integrating the cross-section of the conductor. This field is compared with a field of the linear current of the same magnitude that passes through the axis of the conductor.

Results. The true magnetic field of the conductor based on integration, linear current field, absolute and relative error of linear current model application depending on the distance to the observation point R . Since the true field depends not only on the position of the observation point but also on the conductor size R/a , where a is the width of the section. The studies were performed in the direction of the axes of symmetry of the section.

Conclusions. Calculations have shown that the relative error of the linear current model increases rapidly when approaching the conductor (at $R/a < 2$), at a great distance (at $R/a > 6$) becomes less than 0.5%, and the error in the direction of the diagonal axis of symmetry slightly higher.

Keywords: magnetic field of current, linear current model, model application error.