УДК 538.3+372.853

МОРОЗ И. А.
кандидат технических наук, доктор педагогических наук, доцент, заведующей кафедрой экспериментальной и теоретической физики Сумского государственного педагогического университета им. А.С. Макаренко morozeitf@mail.ru

МЕТОДИКА ОБОСНОВАНИЯ ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА В СТО

Рассматривается общепринятая методика обоснования закона сохранения момента импульса в курсе теоретической физики при подготовке учителей физики. Предлагается методика изложения закона сохранения релятивистского момента импульса и использованием современного ковариантного математического языка.

Ключевые слова: момент импульса, тензор, тензор, функция Лагранжа.

Постановка проблемы. Развитие современной науки, внедрение ее достижений в производство и быт, стремление высшего образования России, Украины и некоторых других стран бывшего Советского Союза к подготовке специалистов, способных работать по европейским стандартам, требует значительного усиления фундаментальной компоненты в учебном процессе всех ВУЗов. Поэтому современные учебные пособия и все научно-методическое обеспечение учебного процесса должны основываться на неких общих теориях, которые являются фундаментом всей теоретической подготовки. Таким фундаментом при подготовке специалистов физико-математического профиля и в особенности - учителей физики, является специальная теория относительности (СТО) с использованием современного ковариантного математического языка [1].

Как показывает анализ литературных источников, учебных программ и учебных пособий [2-6], студентам педагогических учебных заведений специальная теория относительности излагается лишь как теория, которая уточняет и расширяет пределы применения законов механики в случае движения тел с большими скоростями. Это значительно суживает возможности общеобразовательного и мировоззренческого влияния теории относительности на студенческую молодежь и поэтому методические разработки, касающиеся как собственно курсов СТО, так и использования методов СТО в различных разделах физики представляется **актуальным**. Понятно, что в одной статье невозможно даже перечислить нерешенные методические проблемы, касающиеся фундаментализации физического образования. Поэтому **в данной статье** по результатам анализа методических разработок, касающихся изложения законов сохранения в учебном процессе подготовки учителей физики, предлагается один из возможных вариантов решения частного, но имеющего важное значение в формировании научного мировоззрения, вопроса о методике рассмотрения в лекционной практике закона сохранения момента импульса в случае релятивистских скоростей.

Изложение основного материала. В существующей учебно-методической литературе для педагогических специальностей обоснование релятивистской динамики и законов сохранения осуществляется на основе механики Ньютона с учетом свойств пространства и времени [2, 7]. При рассмотрении этих вопросов в СТО, как правило, производится элементарное обобщение полученных выводов на случай релятивистских скоростей. А именно: в выражение для определения классического момента импульса $\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$ подставляется релятивистское выражение для импульса $\vec{p} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$.

Тогда $\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}] = \left[\vec{r} + \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\right]$ или $\vec{L} = \frac{[\vec{r} \times \vec{p}_{кл}]}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = \frac{\vec{L}_{кл}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$.

Далее, по аналогии с классической механикой, и используя выкладки, аналогичные тем, что применяются при рассмотрении закона сохранения классического момента импульса утверждается, что в инерциальной системе отсчета момент импульса замкнутой системы частиц остается величиной постоянной: $\vec{L} = \sum_{a=1}^{N} \vec{L}_a(t) = const$ и что существование этого закона обусловлено изотропностью пространства. На наш взгляд, такая методика является упрощенной, воспитывает догматическое восприятие физических теорий и поэтому нами предлагается рассматривать закон сохранения момента импульса с использованием современного ковариантного математического языка, принятого в СТО. С этой целью, запишем превращение координат в тензорном виде, используя определение векторного произведения векторов через символ Леви-Чивита [1]:

$$x^{\alpha}{}' = x^{\alpha} + \delta x^{\alpha} = x^{\alpha} + \delta\Omega^{\alpha\gamma} x_{\gamma}, \qquad (1)$$

где

$$\delta\Omega^{\alpha\gamma} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \delta\varphi_{\beta} \qquad (2)$$

- тензор поворота, а индексы (по договоренности - греческие буквы) пробегают значение 1,2,3. Из свойства антисимметричности символа Леви-Чивита вытекает, что тензор поворота тоже является антисимметричным: $\delta\Omega^{\alpha\gamma} = -\delta\Omega^{\gamma\alpha}$.

Проведем обобщение превращения (1) на 4-мерное пространство-время Минковского:

$$x^{i}{}' = x^{i} + \delta x^{i}, \quad \delta x^{i} = \delta\Omega^{ik} x_{k}, \qquad (3)$$

где индексы (латинские буквы) пробегают значение 0,1,2,3. Такое превращение означает бесконечно малый поворот в четырехмерном мире.

По определению тензора, величина $\delta\Omega^{ik}$ является тензором второго ранга (скалярное произведение этой величины на 4-вектор x_k дает 4-вектор). Из свойства инвариантности длины 4-радиус-вектора

$$x^{i} x_{i} = x^{i}{}' x_{i}{}' \qquad (4)$$

вытекает свойство антисимметричности тензора □:

$$\delta\Omega^{ik} = -\delta\Omega^{ik}. \qquad (5)$$

Действительно, подставляя превращение (3) в равенство (4), раскрывая скобки и пренебрегая квадратом бесконечно малых $\delta\Omega^{ik}$, находим:

$$x'^i x'_i = (x^i + \delta\Omega^{ik} x_k)(x_i + \delta\Omega_{im} x^m) \approx x^i x_i + \delta\Omega^{ik} x_k x_i + x^i x^m \delta\Omega_{im}$$

Откуда, следует [1]: $\delta\Omega^{ik} x_k x_i = 0$. Это равенство должно выполняться при произвольных x^i. Поскольку $x^i x^k$ (прямое произведение двух 4-векторов) является симметричным тензором второго ранга, то $\delta\Omega_{ik}$ должен быть антисимметричным тензором, поскольку скалярное произведение симметричного тензора на антисимметричный тождественно равняется нулю.

Теперь обратимся к принципу наименьшего действия. Изменение действия при бесконечно малом изменении координат согласно [1]:имеет вид: $\delta S = -\sum p^i \delta x_i$, где суммирование проводится по всем частицам системы. В случае поворота имеем $\delta x_i = \delta\Omega_{ik} x^k$. Поэтому $\delta S = -\delta\Omega_{ik} \sum p^i x^k$. Здесь тензор поворота вынесен за знак суммы, поскольку он описывает поворот системы как целого и не зависит от индекса конкретной частицы системы. Разбивая величину $p^i x^k$ на симметричную и антисимметричную части, последнее выражение превращаем к виду:

$$\delta S = -\delta\Omega_{ik} \sum \left(\frac{p^i x^k + p^k x^i}{2} + \frac{p^i x^k - p^k x^i}{2} \right)$$

или

$$\delta S = -\delta\Omega_{ik} \sum \frac{p^i x^k + p^k x^i}{2} - \delta\Omega_{ik} \sum \frac{p^i x^k - p^k x^i}{2}.$$

Первое слагаемое в правой части этого выражения тождественно равно нулю, поскольку он является скалярным произведением антисимметричного $\delta\Omega_{ik}$ и симметричного $p^i x^k + p^k x^i$ тензоров. В итоге имеем:

$$\delta S = -\delta\Omega_{ik} \frac{1}{2} \sum (p^i x^k - p^k x^i). \qquad (6)$$

Для замкнутой системы, из-за изотропности пространства, при повороте в 4-х мерном пространстве-времени функция Лагранжа не изменяется. В этом случае параметры поворота $\delta\Omega_{ik}$ являются циклическими координатами (от них не зависит функция Лагранжа). Поэтому частные производные от действия по этим параметрам $\partial S / \partial\Omega_{ik}$, так называемые обобщенные импульсы, являются **величинами постоянными**. Для этих обобщенных импульсов, согласно (6), имеем:

$$\frac{\partial S}{\partial\Omega_{ik}} = -\frac{1}{2} \sum (p^i x^k - p^k x^i). \qquad (7)$$

Таким образом, мы пришли к выводу, что для замкнутой механической системы сохраняется антисимметричный тензор второго ранга следующего вида: $L^{ik} = \sum (x^i p^k - x^k p^i) = const.$ Это выражение является наиболее общей математической записью закона сохранения момента импульса. Пространственные компоненты тензора момента импульса совпадают с компонентами трехмерного вектора момента $\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$. Действительно, если в (7) выбрать индексы равными i=1, k=2, то получим: $L^{12} = \sum(x^1 p^2 - x^2 p^1) = \sum(xp_y - yp_x)$, что совпадает из *z*-компонентою вектора момента импульса $L_z = [\vec{r} \times \vec{p}]_z = L_{12}$. Аналогично можно убедиться, что $L^{12} = \sum(x^1 p^2 - x^2 p^1) = \sum(xp_y - yp_x)$. Следовательно $L^{23} = L_x, \quad L^{13} = -L_y, \quad L^{12} = L_z$.

Компоненты L^{01}, L^{02}, L^{03} представляют собой постоянный вектор:

$$L^{0\alpha} = \sum(x^0 p^\alpha - x^\alpha p^0) = \sum\left(ctp^\alpha - x^\alpha \frac{\varepsilon}{c}\right) = const,$$

или в векторной форме: $\sum\left(ct\vec{p} - \vec{r}\,\frac{\varepsilon}{c}\right) = const.$

Выясним физический смысл этого постоянного вектора. Умножим его величину на (- c) (скорость света в вакууме) и разделим на полную энергию $\sum\varepsilon$ системы:

$$\frac{\sum\varepsilon\vec{r}}{\sum\varepsilon} - c^2 \frac{\sum\vec{p}}{\sum\varepsilon} \cdot t = const. \tag{8}$$

Первое слагаемое в левой части этого уравнения есть радиус-вектор центра инерции (центра масс) $\vec{R} = \dfrac{\sum\varepsilon\vec{r}}{\sum\varepsilon}$, который в нерелятивистском случае переходит в известное выражение для классического радиус-вектора центра масс. Действительно, при $\upsilon << c$ энергия частицы практически равняется энергии покоя mc^2. В этом случае выражение для радиус-вектора приобретает вид:

$$\vec{R} = \frac{\sum\varepsilon\vec{r}}{\sum\varepsilon} = \frac{\sum mc^2\vec{r}}{\sum mc^2} = \frac{\sum m\vec{r}}{\sum m} = \vec{R}_{кл}.$$

Во втором слагаемом в левой части уравнения (8) величина $\sum\vec{p} = \vec{P}$ - это полный импульс замкнутой механической системы, а величина $\sum\varepsilon = E$ - ее полная энергия, которую можно представить в виде [1]: $c^2 \dfrac{\sum\vec{p}}{\sum\varepsilon} \cdot t = \dfrac{c^2\vec{P}}{E} \cdot t = \vec{V} \cdot t$, где $\vec{V}$ - скорость движения механической системы как целого. Окончательно, уравнение (8) можно записать в виде $\vec{R} - \vec{V} \cdot t = const$. Следовательно, мы получили уравнение движения замкнутой механической системы как целого - замкнутая механическая система двигается равномерно и прямолинейно с постоянной скоростью $\vec{V}$.

Согласно общим свойствам симметрии, любой антисимметричный тензор второго ранга можно представить как два вектора - полярного и аксиального [1]. В данном случае:

$$L^{ik} = \left(\vec{A}, \vec{B}\right) = \begin{pmatrix} 0 & A_x & A_y & A_z \\ -A_x & 0 & -B_z & B_y \\ -A_y & B_z & 0 & -B_x \\ -A_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix},$$

где $\vec{A} = \sum(ct\vec{p} - \vec{r}\,\frac{\varepsilon}{c})$ или компактно:

$$L^{ik} = \left(\sum(ct\vec{p} - \vec{r}\,\frac{\varepsilon}{c}), -\vec{L}\right). \qquad (9)$$

Таким образом, 4-тензор момента импульса L^{ik} однозначно определяется двумя векторами (9), при этом постоянство пространственных компонент тензора $L^{\alpha\beta}$ означает постоянство вектора момента импульса $\vec{L}$, то есть означает закон сохранения момента импульса, а постоянство смешанных компонент тензора $L^{0\beta}$ дает закон движения замкнутой механической системы как целого.

Выводы: 1. Предложенная методика обоснования закона сохранения момента импульса системы материальных точек существенно углубляет и расширяет знания студентов о ковариантном описании физических законов.

2. Использование свойств пространства и времени, формализма Лагранжа и тензорного описания физических величин (и законов) в большей мере, нежели существующие методики, соответствует уровню современной теоретической физики и способствует фундаментализации физического образования.

Литература

1. Мороз І.О. Спеціальна теорія відносності: навчальний посібник (гриф МОН України лист №1/11-3525 від 11.05.11) / І.О. Мороз, В.С. Іваній, Р.І. Холодов. – Суми: Видавництво «МакДен», 2011. – 336 с.
2. Макс Борн. Эйнштейновская теория относительности. М., Мир,1972, с.366.
3. Бергман П.Г. Введение в теорию относительности. М. Ин. Лит.1947, с.380.
4. Денвид Бом. Специальная теория относительности. М, Мир. 1967, с.285.
5. Ю.И.Соколовский. Теория относительности в элементарном изложении М. Наука, 1964, с.196.
6. В.А.Угаров. Специальная теория относительности. М. Наука, 1969, с.303.
7. Эйнштейн А. Сущность теории относительности. – М.: ИЛ, 1955. - 160 с.