The article highlights our own vision of solving this problem at a laboratory workshop on physics with ICT support. The use of ICT provides an opportunity to solve this problem more effectively. The authors show how in the process of performing a laboratory workshop future specialists learn to plan and organize research on a particular topic, interpret the results, design and present their own scientific achievements with the help of ICT. An example is the laboratory work to determine the velocity of a bullet, which combines traditional experiment with ICT support and model experiment. During its implementation, the stages of formation of research competence are traced.

It is shown that already in junior courses, in addition to gaining knowledge on the subject, the foundations are laid for the formation of a future specialist's research competence. Thus, the research competence of students is expedient and possible to form when performing an educational experiment in physics, which is modernized by the introduction of ICT achievements.

Key words: *research competence, laboratory workshop, physics, ICT, model experiment, students.*

УДК 378.147+372.851
DOI 10.5281/zenodo.6630564

І. А. Сверчевська
ORCID ID 0000-0001-7306-3836
Державний університет
«Житомирська політехніка»

ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ СТУДЕНТІВ У ПРОЦЕСІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІСТОРИЧНИХ ЗАДАЧ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Стаття присвячена актуальній проблемі впровадження компетентнісного підходу в навчанні здобувачів освіти. Розглянуто можливість формування математичної компетентності студентів шляхом залучення до розв'язування визначних історичних задач, вивчення методів їх розв'язування, створених математиками минулого. Зазначено, що знайомство з історією розвитку математики дозволяє вирішувати педагогічну задачу підвищення інтересу до вивчення предмету, мотивації до навчання. Метою статті є дослідження можливостей застосування історичних задач з математичного аналізу для формування математичної компетентності здобувачів освіти.

Зосереджено увагу на історичних задачах з математичного аналізу. Підібрано задачі до змістових модулів: границі, ряди, невизначений інтеграл, визначений інтеграл, диференціальні рівняння. Показано розв'язання цих задач, наведено історичні довідки про вчених, що сформулювали задачі, винайшли методи їх розв'язання, вплинули на розвиток теоретичних основ і шляхів вирішення проблем розділів математичного аналізу.

Використано визначні історичні задачі з посібника В. Г. Бевз «Практикум з історії математики». Розглянуто задачі Архімеда, Йогана Бернуллі, Хрістіана Гольдбаха, Гвідо Гранді, Хрістіана Гюйгенса, Жана Д'Аламбера, Леонарда Ейлера, Готфріда Лейбніца, Вільяма Нейла, Блеза Паскаля, Жуля Роберваля, Еванжелісти Торрічеллі.

Історія розвитку математичного аналізу дозволяє побачити творчу лабораторію вчених, зрозуміти розвиток наукових теорій як результат наполегливих наукових пошуків, зусиль і здобутків багатьох дослідників. Це сприяє свідомому засвоєнню знань, забезпечує позитивне ставлення до математичної діяльності, виховує наполегливість, прагнення до досягнення цілей, розвиває творчі здібності. Розв'язування визначних історичних задач з математичного аналізу сприяє формуванню математичної компетентності студентів та реалізації компетентнісного підходу до навчання математики.

***Ключові слова**: компетентнісний підхід, формування компетентностей, математична компетентність, навчання математики, визначні історичні задачі, математичний аналіз, мотивація, пізнавальний інтерес.*

Постановка проблеми. Провідним напрямом реалізації освітнього процесу в Україні є компетентнісний підхід. Основна увага при навчанні математичних дисциплін у ЗВО приділяється розвитку ключової математичної компетентності. Сукупність фундаментальних математичних знань, практичних умінь і навичок, здатності оперувати математичними відношеннями, формулами, моделями включає в себе математична компетентність. Серед компонентів математичної компетентності варто виділити мотиваційний, формування якого доцільно здійснювати на основі принципів історизму.

Систематичне використання історичного матеріалу підвищує пізнавальний інтерес до вивчення математичних дисциплін, сприяє внутрішній мотивації здобувачів освіти. Важливо під час вивчення тем математичного аналізу показувати, як розвивалися математичні поняття, теорії та методи. Ознайомлення студентів з творцями цієї галузі математики дає змогу продемонструвати непростий шлях пошуку розв’язання наукових проблем, стимулює творчу активність і наполегливість у досягненні поставлених завдань.

Найважливішим видом навчальної діяльності є розв’язування задач, що має велике значення для формування математичної компетентності. Так нами досліджено формування математичної компетентності як ключової в процесі вивчення історичних задач [5, с. 19]; приділено увагу дослідженню математичних моделей в історичних задачах [6, с. 99], [8, с. 107] та задачах природничого змісту [7, с. 93]. Зосередимо увагу на знайомстві та розв’язуванні історичних задач з математичного аналізу. Це задачі сформульовані і розв’язані видатними математиками.

Аналіз актуальних досліджень. Проблемам реалізації компетентнісного підходу в освіті присвячені роботи науковців: Акуленко І. А., Бурди М. І., Долгової О. Є., Кузьмінського А. І., Неліна Н. П., Овчарук О. В., Пометун О. І. Тарасенкової Н. А., Чашечникової О. С.

Аспекти формування математичної компетентності розглядали Ачкан А. А., Головань М. С., Зіненко М. І., Кірман В. Г., Матяш О. І., Раков С. А., Скворцова С. О., Хом’юк В. В.

Форми і методи використання історичного матеріалу в навчанні досліджували: Бевз В. Г., Вірченко Н. О., Годованюк Т. Л., Махомета Т. М., Пузирьов В. Є., Розуменко А. О., Шумигай С. М.

Мета статті: дослідження можливостей застосування історичних задач з математичного аналізу для формування математичної компетентності здобувачів освіти.

Виклад основного матеріалу. У процесі навчання студентів розв’язування задач з математичного аналізу важливо показати історичний шлях зародження і розробки методів та підходів до обчислення границь та інтегралів, дослідження рядів, розв’язування диференціальних рівнянь. Для цього пропонуємо використовувати визначні історичні задачі з математичного аналізу. Відомі задачі математиків минулого зібрано у посібнику Бевз В. Г. «Практикум з історії математики». Ці задачі можуть бути застосовані під час навчання розділів вищої математики не тільки студентів педагогічних ЗВО, а й технічних, економічних та інших спеціальностей. Нами запропоновано також задачі, що названі іменами вчених, які проводили дослідження у відповідній області, знайшли підходи до вирішення математичних проблем, запропонували підстановки, прийоми, методи розв’язання задач з математичного аналізу. Поряд з розв’язаннями задач подамо короткі історичні відомості про їх авторів.

Задача Й. Бернуллі. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-x}{x-\sin x}$.

Розв'язання. Використовуємо «правило Лопіталя», оскільки значення функцій у чисельнику і знаменнику прямують до нуля. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x-\sin x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x}=\frac{1+\cos 0}{\cos^2 0}=\frac{1+1}{1}=2$$

Історична довідка. Правило Лопіталя фактично потрібно було назвати правилом Й. Бернуллі. У 1696 р. маркіз Г. Лопіталь видав підручник з аналізу «Аналіз нескінченно малих для позначення кривих ліній», що поклав початок широкому знайомству з аналізом, характеризувався доступністю викладу матеріалу та містив це знамените правило обчислення границь. Виявляється, що до книжки ввійшла перша частина лекцій 23-річного Й. Бернуллі, які той прочитав та надав у письмовому вигляді Г. Лопіталю. Другу частину цих лекцій «Інтегральне числення» Й. Бернуллі опублікував сам у 1742 р. [2, с. 137].

Задача Х. Гольдбаха. Довести, що при a і b цілих і додатних сума всіх дробів виду $\frac{1}{(a+1)^{b+1}}$ має границею 1. [2, с. 151]

Розв'язання. Надамо значення b=1, 2, 3, …, тоді отримаємо ряд $\frac{1}{(a+1)^2}$, $\frac{1}{(a+1)^3}$, $\frac{1}{(a+1)^4}$, … Будемо надавати значення a=1, 2, 3, …, n, … і запишемо суму

$$S_n=\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots\right)+\ldots$$

$\ldots+\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\ldots\right)+\ldots$ Використаємо формулу суми нескінченної спадної геометричної прогресії для виразів у дужках, отримаємо

$$S_n=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{4}}+\ldots++\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{1-\frac{1}{n+1}}+\ldots=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+$$

$+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\ldots=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\ldots=1-\frac{1}{n+1}$. Знайдемо суму ряду $S=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1-0=1.$

Історична довідка. Христиан Гольдбах (1690-1764) – математик німецького походження, відомий як автор проблеми Гольдбаха-Ейлера про розклад цілого числа на суму простих чисел [3, с. 141].

Задача Гвідо Гранді. Нехай $1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n+1}+\ldots=S$, тоді $S-1=-1+1-1+\ldots+(-1)^n=-S$, або $S-1=-S$. Звідки $S=\frac{1}{2}$. Шукану суму можна обчислити, згрупувавши попарно члени ряду так: $(1-1)+(1-1)+\ldots=S$, звідки

$S=0$, або $\frac{1}{2}=0$, або $0=1$. Отже, будь-яке натуральне число дорівнює нулю. Знайдіть помилки у міркуваннях [4, с. 49].

Розв'язання. Даний ряд є розбіжним, оскільки не виконується необхідна умова збіжності ряду $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|(-1)^n\right|=1\neq 0$. Тому сума ряду не існує. При обчисленні неіснуючої суми використано сполучний закон додавання, який можна використовувати лише для скінченних сум та збіжних рядів.

Історична довідка. Гвідо Гранді (1671-1742) – італійський математик. Досліджував криві, що називаються криві Гранді або троянди Гранді, пропагував нову теорію про нескінченно малі [3, с. 144].

Задача Х. Гюйгенса. Знайти суми рядів а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n(n+1)(n+2)}$ [2, с. 152]

Розв'язання. Ряди збіжні за ознакою порівняння. Щоб знайти суму виконаємо перетворення.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\cdot(n+1)}=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$. Сума перших n членів ряду $S_n=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$. Отже, сума ряду $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n(n+1)(n+2)}=3\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$. Перетворимо суму в дужках

$$S_n=\left(1-1+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{7}+\frac{1}{8}\right)+...+\left(\frac{1}{n-3}-\frac{2}{n-2}+\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{2}{n-1}+\frac{1}{n}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$. Частина доданків знищується. Залишається сума $S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}$. Сума ряду $S=3\cdot\lim\limits_{n\to\infty}S_n=3\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)=3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

Історична довідка. Хрістіан Гюйгенс (1629-1695) – нідерландський фізик, математик, астроном. Його математичні роботи присвячені аналізу нескінченно малих, дослідженню кривих, деяких функцій, обчисленню площ поверхонь обертання [3, с. 153].

Задача Ж. Д'Аламбера. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ \ x>0$.

Розв'язання. Скористаємося ознакою Д'Аламбера, визначимо границю $k=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$, де $a_n=\frac{x^n}{n\,!}$, $a_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)\,!}$, $k=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot x^n}=$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n \cdot x \cdot n!}{n! \cdot (n+1) \cdot x^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{(n+1)} = x \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{(n+1)} = x \cdot 0 = 0 < 1$. Оскільки границя $k < 1$, то за ознакою Д'Аламбера ряд збіжний.

Історична довідка. Жан Лерон Д'Аламбер (1717-1783) – французький математик. Отримав важливі результати в теорії диференціальних рівнянь, його ім'ям названо ознаку збіжності рядів [3, с. 155].

Задача Й. Бернуллі. Довести, що $arctgx = \dfrac{1}{2i} \ln \dfrac{1+xi}{1-xi}$ [2, с. 152]

Доведення. Зауваживши, що функція $arctgx$ є первісною функції $\dfrac{1}{1+x^2}$, почнемо з розкладу на суму елементарних дробів цієї дробової функції $\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{A}{1-ix} + \dfrac{B}{1+ix} = \dfrac{A(1+ix)+B(1-ix)}{1+x^2} = \dfrac{(A+B)+(A-B)ix}{1+x^2}$. Прирівняємо чисельники $(A+B)+(A-B)ix = 1+0ix$, прийдемо до системи рівнянь $\begin{cases} A+B=1 \\ A-B=0 \end{cases}$,

$\begin{cases} 2A=1 \\ A=B \end{cases}$, $\begin{cases} A=\dfrac{1}{2} \\ B=\dfrac{1}{2} \end{cases}$. Отримали рівність $\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{2(1-ix)} + \dfrac{1}{2(1+ix)}$, яку проінтегруємо

$\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{dx}{1-ix} + \dfrac{1}{2}\int \dfrac{dx}{1+ix}$, $\quad arctgx = \dfrac{1}{2} \cdot \left(-\dfrac{1}{i}\right) \ln|1-ix| + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{i} \ln|1+ix|$,

$arctgx = \dfrac{1}{2i} \cdot (\ln|1+ix| - \ln|1-ix|)$, $arctgx = \dfrac{1}{2i} \cdot \ln \dfrac{1+ix}{1-ix}$.

Історична довідка. Йоган Бернуллі (1667-1748) – швейцарський математик. Йому належить перший систематичний виклад диференціального та інтегрального числення Й. Бернуллі розробив методи інтегрування раціональних дробів, обчислення площ плоских фігур, отримав визначні результати в теорії диференціальних рівнянь, варіаційному численні, геометрії та механіці [3, с. 45]

Задача Е. Торрічеллі. Довести, що площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком показникової функції, пропорційна різниці значень цієї функції на кінцях відрізка [2, с. 152].

Доведення. Нехай показникова функція $y = a^x$ визначена на відрізку $[x_1, x_2]$, тоді площа криволінійної трапеції $S = \int\limits_{x_1}^{x_2} a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} \Big|_{x_1}^{x_2} = \; = \dfrac{a^{x_2} - a^{x_1}}{\ln a} = \dfrac{1}{\ln a}(y_2 - y_1)$, де y_1, y_2 – значення функції на кінцях відрізка, $\dfrac{1}{\ln a}$ – коефіцієнт пропорційності.

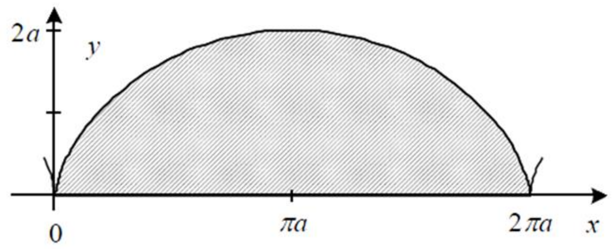
Історична довідка.

Еванжеліста Торрічеллі (1608-1647) – італійський математик і фізик. У математиці вдосконалив метод неподільних, визначив квадратуру циклоїди, довжину дуги логарифмічної спіралі [3, с. 470]

Задача Е. Торрічеллі та Ж. Роберваля. Показати, що площа арки циклоїди дорівнює потроєній площі круга, що її утворює [2, с. 152]

Розв'язання. Використаємо рівняння циклоїди у параметричній формі $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$. Побудуємо арку циклоїди, обчисливши координати точок за таблицею. З'ясовуємо, що параметр t змінюється в межах [0; 2π].

t	x	y
0	0	0
π/2	*a*(π/2–1)	*a*
π	π*a*	2*a*
3π/2	*a*(3π/2+1)	*a*
2π	2π*a*	*0*



Скористаємося формулою $S = \int\limits_a^b y(t)x'(t)dt$. Оскільки $x'(t) = a(1 - \cos t)$, маємо

$$S = \int\limits_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 dt = \quad a^2 \int\limits_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right)dt = \quad a^2(t - 2\sin t)\Big|_0^{2\pi} +$$

$$+ a^2 \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)dt = a^2(2\pi - 2\sin 2\pi + 2\sin 0) + \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= 2\pi a^2 + \frac{a^2}{2}\left(2\pi + \frac{1}{2}\sin 4\pi - \frac{1}{2}\sin 0\right) = 2\pi a^2 + \frac{2\pi a^2}{2} = 3\pi a^2.$$ Оскільки радіус круга, що утворює циклоїду, дорівнює *a*, то площа круга $S_{кр.} = \pi a^2$. Отже, площа арки циклоїди дорівнює потроєній площі круга $S = 3S_{кр}$.

Історична довідка. Жуль Роберваль (1604-1675) – французький математик. Розробив метод неподільних, побудував теорію дотичних до кривих, розв'язував задачі визначення довжин кривих, площ фігур, об'ємів деяких тіл, в тому числі визначив квадратуру циклоїди [3, с. 419]

Задача Паскаля. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням арки циклоїди навколо осі абсцис [2, с. 152].

Розв'язання. Скористаємося формулою $V = \pi\int\limits_a^b y^2(t)x'(t)dt$ та рівнянням циклоїди у параметричній формі $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$. Оскільки параметр t змінюється в межах [0; 2π], а $x'(t) = a(1 - \cos t)$, отримаємо

$$V = \pi \int\limits_0^{2\pi} a^3(1-\cos t)^3 dt = \pi a^3 \int\limits_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t\right)dt =$$

$$= \pi a^3(t - 3\sin t)\Big|_0^{2\pi} + \pi a^3 \int\limits_0^{2\pi} 3\cdot\frac{1}{2}(1 + \cos 2t)dt - \pi a^3 \int\limits_0^{2\pi} \cos^2 t \cos t dt =$$

$$= \pi a^3(2\pi - 3\sin 2\pi + 3\sin 0) + \frac{3}{2}\pi a^3\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} + \pi a^3 \int\limits_0^{2\pi} \left(1 - \sin^2 t\right)d(\sin t) =$$

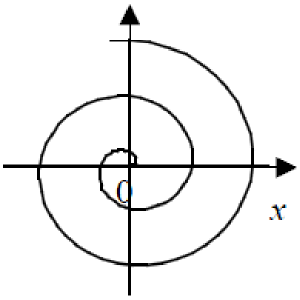
$$= 2\pi^2 a^3 + \frac{3}{2}\pi a^3\left(2\pi + \frac{1}{2}\sin 4\pi - \frac{1}{2}\sin 0\right) + \pi a^3\left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= 2\pi^2 a^3 + 3\pi^2 a^3 + \pi a^3\left(\sin 2\pi - \frac{1}{3}\sin^3 2\pi - \sin 0 + \frac{1}{3}\sin^3 0\right) = 5\pi^2 a^3$$

Історична довідка. Блез Паскаль (1623-1662) – французький математик, фізик і філософ. Один з творців числення нескінченно малих у математичному аналізі, теорії ймовірностей та проективної геометрії. Відкрив формулу біноміальних коефіцієнтів, провів фундаментальне дослідження циклоїди [3, с. 372].

Задача Архімеда Обчислити площу фігури, обмеженої спіраллю Архімеда $\rho = a\varphi \ (\varphi \in [0; 2\pi])$ і полярною віссю [2, с. 153].

Розв’язання.



Скористаємося формулою $S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 d\varphi$.

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2\varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\varphi^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{a^2}{6}\cdot 8\pi^3 = \frac{4}{3}\pi^3 a^2$$

Історична довідка. Архімед (бл. 287-212 до н. е.) – давньогрецький математик. Одним з його численних математичних досягнень є обчислення площ поверхонь і об’ємів фігур методами, що були розвинені через тисячоліття в інтегральне числення. Архімед обчислив значення числа π, запропонував систему найменувань як завгодно великих чисел, дослідив спіраль, що названа його ім’ям, та обчислив площу витка цієї кривої [3, с. 27].

Задача В. Нейла. Обчислити довжину дуги напівкубічної параболи $y^2 = x^3$ [2, с. 153].

Розв’язання.

Довжину дуги кривої шукаємо за формулою $l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx$. Оскільки напівкубічна парабола складається з двох симетричних відносно осі OX віток, знайдемо спочатку довжину дуги верхньої вітки $y = \sqrt{x^3}$ на відрізку [0; x]. Використаємо, що $y = x^{\frac{3}{2}}$, $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, $(y')^2 = \frac{9}{4}x$, отримаємо

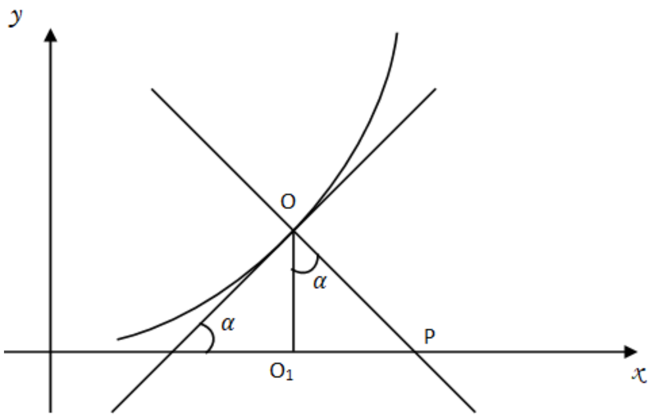
$$l_1 = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx = \frac{4}{9}\cdot\left(\frac{9}{4}x + 1\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{3}\Big|_0^x = \frac{8}{27\cdot\sqrt{4^3}}\sqrt{(9x+4)^3}\Big|_0^x =$$

$= \frac{1}{27}\left(\sqrt{(9x+4)^3} - 8\right)$. Отже, довжина дуги з двох віток $l = \frac{2}{27}\left(\sqrt{(9x+4)^3} - 8\right)$.

Історична довідка. Вільям Нейл (1637-1670) – англійський математик, що в 1657 р. обчислив довжину дуги напівкубічної параболи, яку називають параболою Нейла [3, с. 350].

Задача Лейбніца. Знайти криву, в якої піднормаль у будь-якій точці обернено пропорційна ординаті цієї точки [2, с. 153].

Розв’язання.



Нехай координати довільної точки кривої O(x, y). Піднормаль l кривої – це проекція O_1P відрізка нормалі OP до кривої на вісь абсцис. За умовою l обернено пропорційна ординаті y, тому $l=\dfrac{k}{y}$ (1), де k – коефіцієнт пропорційності. З прямокутного трикутника OO_1P $tg\alpha=\dfrac{O_1P}{OO_1}=\dfrac{l}{y}$, де $\alpha=\angle O_1OP$. Оскільки кути між взаємно перпендикулярними сторонами рівні, то α – рівний куту нахилу дотичної до осі абсцис. За геометричним змістом похідної $tg\alpha=y'$, тоді маємо рівність $y'=\dfrac{l}{y}$ (2). З рівностей (1) та (2) маємо диференціальне рівняння $y'=\dfrac{k}{y^2}$. Це рівняння з відокремлюваними змінними $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{k}{y^2}$, $y^2dy=kdx$, $\int y^2dy=\int kdx$, $\dfrac{y^3}{3}=kx+C_1$, $y^3=3kx+3C_1$.

Отже, рівняння кривої $y^3=3kx+C$.

Історична довідка. Готфрід Лейбніц (1646-1716) – німецький математик, один з творців диференціального та інтегрального числення [3, с. 285].

Задача Ейлера. Розв’язати рівняння $y'''+y''-2y'=0$

Розв’язання. Зробимо підстановку Ейлера $y=e^{kx}$, тоді $y'=ke^{kx}$, $y''=k^2e^{kx}$, $y'''=k^3e^{kx}$. Маємо рівняння $k^3e^{kx}+k^2e^{kx}-2ke^{kx}=0$, оскільки $e^{kx}\neq 0$, отримаємо характеристичне рівняння $k^3+k^2-2k=0$, $k\left(k^2+k-2\right)=0$. Корені рівняння $k_1=0$, $k_2=1$, $k_3=-2$. Частинні розв’язки диференціального рівняння $y=e^{0x}$, $y=e^{x}$, $y=e^{-2x}$. Загальний розв’язок – їх лінійна комбінація $y=C_1+C_2e^{x}+C_3e^{-2x}$.

Історична довідка. Леонард Ейлер (1707-1783) – швейцарський математик. Вважається одним з найвидатніших математиків XVIII століття. Ейлер автор більше, ніж 800 наукових публікацій, зокрема в галузях математичного аналізу, теорії чисел, диференціальної геометрії, теорії графів [3, с. 181].

Задача Д’Аламбера. Розв’язати рівняння $y''-3y'+2y=e^{2x}$

Розв’язання. Знайдемо загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння $y''-3y'+2y=0$. Характеристичне рівняння $k^2-3k+2=0$, його корені $k_1=1$, $k_2=2$. Розв’язок $y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}$.

Частинний розв’язок даного диференціального рівняння відповідно до правої частини рівняння e^{2x} будемо шукати у вигляді $y_ч=Ax^me^{ax}$, де a=2, m=1 – кратність кореня a=k_2=2 характеристичного рівняння, тобто $y_ч=Axe^{2x}$. Знайдемо коефіцієнт А, підставивши частинний розв’язок у дане рівняння. $y_ч'=Ae^{2x}+2Axe^{2x}$,

$y_ч'' = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x} = \qquad = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}$,

$4Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - 3\left(Ae^{2x} + 2Axe^{2x}\right) + 2Axe^{2x} = e^{2x}$,

$e^{2x}(4A + 4Ax - 3A - 6Ax + 2Ax) = e^{2x}$, оскільки $e^{2x} \neq 0$, маємо A=1. Частинний розв'язок $y_ч = xe^{2x}$, загальний розв'язок диференціального рівняння дорівнює сумі загального розв'язку однорідного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного $Y = y + y_ч$, $Y = C_1e^x + C_2e^{2x} + xe^{2x}$.

Висновки та перспективи подальших наукових розвідок. Вагомим внеском у формування математичної компетентності студентів під час навчання розділів вищої математики, зокрема математичного аналізу, є розв'язування задач. Однією з ознак математичної компетентності є цілісне сприйняття світу, розуміння ролі математики в пізнанні реальності. Варто звертати увагу на визначні історичні задачі, що створені математиками минулого. Знайомство з історичними постатями вчених, які формулювали і знаходили шляхи розв'язання математичних задач дозволить підсилити мотивацію до навчання, підвищить реалізацію формування математичної компетентності.

У подальших дослідженнях доцільно розглянути історичні задачі до інших розділів вищої математики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ / REFERENCES

1. Бевз, В. Г. (2005). Історія математики у фаховій підготовці майбутніх учителів: Монографія. Київ: НПУ ім. М. П. Драгоманова (Bevz, V. H. (2005) History of mathematics in teacher training: Monograph. Kyiv: NPU imeni M. P. Drahomanova)
2. Бевз, В. Г. (2004). Практикум з історії математики. Київ: НПУ ім. М. П. Драгоманова (Bevz, V. G. (2004). Workshop in History of Mathematics. Kyiv: NPU named after M. P. Drahomanov).
3. Бородін, О. І., Бугай, А. С. (1973). Біографічний словник діячів у галузі математики. Київ: Вища школа. (Borodin, O. I., Buhai, A. S. (1973). Biographical dictionary of prominent figures in the field of mathematics. Kyiv: Vushcha shkola).
4. Конфорович, А. Г. (1981). Визначні математичні задачі. Київ: Радянська школа. (Konforovytch, A. H. (1981). Famous mathematical problems. Kyiv: Radianska shkola).
5. Сверчевська, І. А. (2020). Історичний підхід у формуванні ключових компетентностей при навчанні математики. Інноваційна педагогіка, Одеса, 21(3), 19–23. (Sverchevska, I. A. (2020). Historical approach to the formation of key competences in teaching mathematics. Innovative Pedagogics, Odesa, 21(3), 19–23).
6. Сверчевська, І. А. (2020). Математичні моделі в історичних задачах. Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс – 2020»: матеріали ІІІ Міжнародної дистанційної науково-методичної конференції, (квітень-травень 2020 р., м. Суми). Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка, Інститут педагогіки АПН України. Суми: ФОП Цьома С. П. (с. 99–100). (Sverchevska, I. A. (2020). Mathematical models in historical tasks. The development of intellectual and creative students' skills while teaching Science and Mathematics «ITM*plus – 2020»: The Proceedings of the III International distance scientific and methodological conference, (Apr-May, 2020, Sumy). Sumy State Pedagogical University named after A.S. Makarenko, Institute of Pedagogy of the Academy of Pedagogical Sciences of Ukraine. Sumy: FOP Tsyoma S. P. (p. 99–100)).
7. Сверчевська, І. А. (2021). Математичні моделі у задачах природничого змісту як засіб формування компетентностей здобувачів освіти. Актуальні питання природничо-математичної освіти, 1(17), 93–102. (Sverchevska, I. A. (2021). Mathematical models in problems with scientific meaning as a tool for students' competencies formation. Topical issues of natural science and mathematics education, 1(17), 93–102).

8. Сверчевська, І. А. (2021). Розвиток інтелектуальних умінь студентів при вивченні вищої математики. Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс – 2021». Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка, Інститут педагогіки АПН України. (с. 107–108). (Sverchevska, I. A. (2021). The development of intellectual students' skills while teaching higher mathematics. The development of intellectual and creative students' skills while teaching Science and Mathematics «ІТМ*plus – 2021». Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка, Інститут педагогіки АПН України. (р. 107–108)).

Сверчевская И. А. Формирование математической компетентности студентов в процессе решения исторических задач по математическому анализу.

Аннотация. *Статья посвящена актуальной проблеме внедрения компетентностного подхода в обучении. Рассмотрена возможность формирования математической компетентности студентов с помощью решения исторических задач, изучения методов решения, созданных математиками пошлого. Отмечено, что знакомство с историей развития математики позволяет решать педагогическую задачу повышения интереса к изучению предмета, мотивации к обучению. Целью статьи является исследование возможности использования исторических задач по математическому анализу для формирования математической компетентности учащихся.*

Сосредоточено внимание на исторических задачах по математическому анализу. Подобрано задачи к содержательным модулям: пределы, ряды, неопределенный интеграл, определенный интеграл, дифференциальные уравнения. Показано решения этих задач, приведены исторические справки об ученых, которые сформулировали задачи, нашли методы их решения, повлияли на развитие теоретических основ и путей решения проблем разделов математического анализа.

Использовано замечательные исторические задачи из пособия В. Г. Бевз «Практикум по истории математики». Рассмотрено задачи Архимеда, И. Бернулли, К. Гольдбаха, Г. Гранди, К. Гюйгенса, Д'Аламбера, Л. Эйлера, Г. Лейбница, У. Нейля, Б. Паскаля, Ж. Роберваля, Э. Торричелли.

История развития математического анализа позволяет увидеть творческую лабораторию ученых, понять развитие научных теорий как результат научных поисков многих исследователей. Это способствует сознательному усвоению знаний, обеспечивает позитивное отношение к математической деятельности, воспитывает настойчивость, стремление к достижению целей, развивает творческие способности. Решение замечательных исторических задач по математическому анализу способствует формированию математической компетентности студентов и реализации компетентностного подхода в обучении математике.

Ключевые слова: *компетентностный подход, формирование компетентностей, математическая компетентность, обучение математике, замечательные исторические задачи, математический анализ, мотивация, познавательный интерес.*

Sverchevska I. A. The formation of mathematical competence of mathematics teachers through solving historical mathematical analysis problems.

Summary. *The paper investigates the problem of competency-based approach implementation for teaching the applicants for higher education.*

The author considers the opportunity to formate students' mathematical competence by involving them in solving famous historical problems as well as learning the methods of solving these problems suggested by mathematicians of different epochs. It should be noted that the familiarity with the history of mathematics contributes to the solution of the pedagogical problem of increasing students' interest in the discipline itself and their learning motivation. The purpose of the study is to investigate the opportunities of using historical mathematical analysis problems for students' mathematical competence formation.

The paper focuses on historical mathematical analysis problems. The author selects problems for the following modules: limits, rows, indefinite integral, definite integral, and differential equations. The author also shows the solving of these problems and also gives historical background about the scientists who formulated these problems, discovered the solving methods, and influenced theoretical foundations and ways to solve problems in mathematical analysis.

The study uses famous historical problems from the "Workshop on the history of mathematics" handbook by V. H. Bevz. The problems of Archimedes, Johann Bernoullim, Christian Goldbach, Guido Grandi, Christiaan Huygens, Jean d'Alembert, Leonhard Euler, Gottfried Leibniz, William Neile, Blaise Pascal, Gilles Roberval, Evangelista Torricelli.

The history of mathematical analysis sheds light on the scientist's creative laboratory and gives an understanding of scientific theories as a result of persistent scientific research, as well as the efforts and achievements of many scientists. It facilitates conscious learning, provides a positive attitude to mathematical activities, and cultivates perseverance, the pursuit of goals, and creative skills. Solving famous mathematical analysis problems contributes to the formation of students' mathematical competence and the implementation of a competency-based approach to teaching mathematics.

***Key words**: competency-based approach, competence formation, mathematical competence, teaching mathematics, famous historical problems, mathematical analysis, motivation, cognitive interest.*

УДК 378.147
DOI 10.5281/zenodo.6618613

І. В. Хом'юк
ORCID ID 0000-0002-2516-2968
С. А. Кирилащук
ORCID ID 0000-0002-8972-3541
В. В. Хом'юк
ORCID ID 0000-0003-1704-570X
Вінницький національний технічний університет

ВИКОРИСТАННЯ ЗАДАЧ НА ДОВЕДЕННЯ ЯК ЗАСОБУ ФОРМУВАННЯ ЛОГІЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ МАЙБУТНІХ ІНЖЕНЕРІВ

У дослідженні висвітлено проблему формування логічної компетентності майбутніх інженерів. Проаналізовано погляди вітчизняних та зарубіжних науковців щодо дефініції поняття «логічна компетентність» та констатовано, що спільним для них є наявність логічного мислення та виконання інтелектуальної роботи. Підсумовуючи наведені погляди на поняття «логічна компетентність», авторами визначено логічну компетентність майбутнього інженера як одну із сутнісних характеристик особистості, яка проявляється в професійній діяльності логічним мисленням, вільним володінням математичним інструментарієм,здатністю аналізувати, синтезувати та узагальнювати значний обсяг інформації, знаходженням нестандартних рішень в нових ситуаціях, здатністю і вмінням спрогнозувати та оцінити свою діяльність.

Визначено, що в структурі математичної компетентності присутня логіко-аналітична складова, яку автори пропонують формувати за допомогою задач на доведення. Знаходження різних способів розв'язування тієї чи іншої задачі, і задачі на доведення особливо, надає можливість студентам застосовувати весь багаж математичних знань, і таким чином, активізувати мислення. Авторами запропоновано в доведенні задач умовно виокремити дві складові: 1) логічну складову (ЛС), яка містить в собі основну ідею доведення; 2) технічну складову (ТС), яка здійснює реалізацію цієї ідеї засобами математичних символів і співвідношень. Наведено приклади задач на доведення,