

УДК 372.851: 371.3  
DOI 10.5281/zenodo.12190541

О. О. Одіцова  
ORCID ID 0000-0002-9948-3801  
Сумський державний педагогічний  
університет імені А.С.Макаренка

С. В. Красуцька  
Роменська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів №7  
Роменської міської ради Сумської області

**ДО ПИТАННЯ ВИЯВЛЕННЯ ПРОБЛЕМ ПРИ НАВЧАННІ  
ДЕЯКИМ ТЕОРЕМАМ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ  
ПОГЛИБЛЕНОГО РІВНЯ ТА ШЛЯХІВ ЇХ ПОДОЛАННЯ  
(Частина перша: проблеми)**

У 2008 році відбулися зміни у шкільній програмі з математики поглибленого рівня вивчення, зокрема поява в курсі геометрії питань, пов'язаних із зовнішнім колом та його властивостями, теоремами Чеви, Менелая, Ейлера тощо. Але на жаль ще й досі цей матеріал намагаються оминати вчителі при вивченні відповідних тем і, як наслідок, – геометричні задачі на математичних олімпіадах, конкурсах залишаються поза увагою переважної більшості учасників. Тому цікавою є думка вчителів, що навчають геометрії на поглибленому рівні в основній школі, стосовно проблем, які виникають у них при підготовці, розгляді та контролю знань із заявлених питань, а також пошук можливих шляхів для усунення чинного стану.

Відповідно до заявленого було проведено опитування серед частини вчителів закладів загальної середньої освіти Сумської області, які навчають геометрії на поглибленому рівні в основній школі, стосовно використання теорем Чеви та Менелая. Опитування було розроблено для двох груп вчителів: окремо для тих вчителів, що не навчають зазначеним іменним теоремам (перша група) та окремо для тих вчителів, що навчають учнів зазначеному матеріалу (друга група).

Аналіз відповідей опитаних вчителів з першої групи виявив, що головними причинами того, чому вчителі не пропонують учням розглядати теореми Чеви та Менелая є: важкість розуміння матеріалу учнями – 60%; обмаль часу під час уроків – 53,3%; складність теоретичного матеріалу – 46,7%. Для другої групи розподіл відповідей на аналогічне питання був наступним: найважчим для 86% опитаних було створення методично виваженої системи задач для закріплення (через відсутність потрібних завдань із точки зору вчителя у підручнику); далі для 57% опитаних іде складність теоретичного матеріалу; і на третьому місці для 43% – важкість розуміння матеріалу учнями. Тобто для вчителів після самотужки створеної системи задач та її застосування проблема нерозуміння матеріалу учнями (з точки зору вчителя) стає децю слабшою.

В опитуванні пропонувалися питання про доцільність використання зазначених теорем під час проведення уроків, з'ясування причин нерозуміння матеріалу учнями, застосування допоміжних джерел для створення системи завдань тощо.

Респондентам першої групи також було запропоновано висловити побажання щодо створення можливості навчати учнів теоремам Чеви та Менелая. Вони зазначили, що було б добре мати: можливість скористатися готовою системою задач для закріплення, у тому числі з розв'язками – 80%; наявність готових завдань для контролю знань (у тому числі і теоретичного) – 60%; допомога у опрацюванні теоретичного матеріалу – 27%.

Отже, підсумовуючи результати анкетування, можна стверджувати, що головною проблемою при навчанні учнів матеріалу, пов'язаного з теоремами Чеви та Менелая є обмаль часу у вчителів для створення методично виваженої системи задач, зокрема і для контролю знань. Тобто, не дивлячись на присутність даного матеріалу в

підручниках, система задач, що наявна там, не задовольняє потреб вчителів у цьому питанні. Крім того, слабо розвинена просторова уява сучасних учнів та упереджене ставлення їх до геометрії стають серйозними перешкодами на шляху опанування матеріалу та застосування його у майбутньому.

**Ключові слова:** навчання геометрії, класи з поглибленим рівнем вивчення математики, теорема Чеви, теорема Менелая.

**Постановка проблеми.** Прагнення авторів програм з математики долучити якомога ширше коло учнів до геометричного матеріалу, який дозволив би розв'язувати задачі на різних математичних змаганнях, призвів до появи в шкільному курсі геометрії поглибленого рівня вивчення (з 2008 р.) [1] наступних питань, пов'язаних з геометрією трикутника: зовнівписане коло та його властивості, теореми Чеви, Менелая, Ейлера тощо. Але на жаль ще й досі ці питання намагаються оминати вчителі при вивченні відповідних тем і, як наслідок, – геометричні задачі на математичних олімпіадах, конкурсах залишаються поза увагою переважної більшості учасників. Тому цікавою є думка вчителів, що навчають геометрії на поглибленому рівні в основній школі, стосовно проблем, які виникають у них при підготовці, розгляді та контролю знань із заявлених питань, а також пошук можливих шляхів для усунення чинного стану.

**Аналіз актуальних досліджень.** Питанню розв'язування геометричних задач із використанням «некласичних» (для шкільного курсу) фактів з геометрії трикутника присвячено доволі велике число робіт: Кушніра І., Ясинського В., Жидкова С., Кадубовського О., Кобко Л., Кукуша О. та багатьох інших. Але проблемам, які виникають у вчителів при навчанні цим фактам, на жаль, раніше не розглядалися, як і пропозиції щодо їх усунення.

**Мета статті.** Розкриття проблем, які виникають у вчителів при навчанні геометричного матеріалу, пов'язаного з теоремами Чеви та Менелая, на основі аналізу спеціально проведеного анкетування та створення пропозицій щодо шляхів виходу із ситуації, що склалася.

**Виклад основного матеріалу.** Аналіз статистики розв'язування завдань з геометрії на III (обласному) етапі Всеукраїнської олімпіади з математики, зокрема тих, де потрібно застосовувати теореми Чеви та Менелая, за останні 15 років в Сумській області є невтішним: найчастіше учасники зупиняються лише на побудові рисунка, не переходячи до розв'язання.

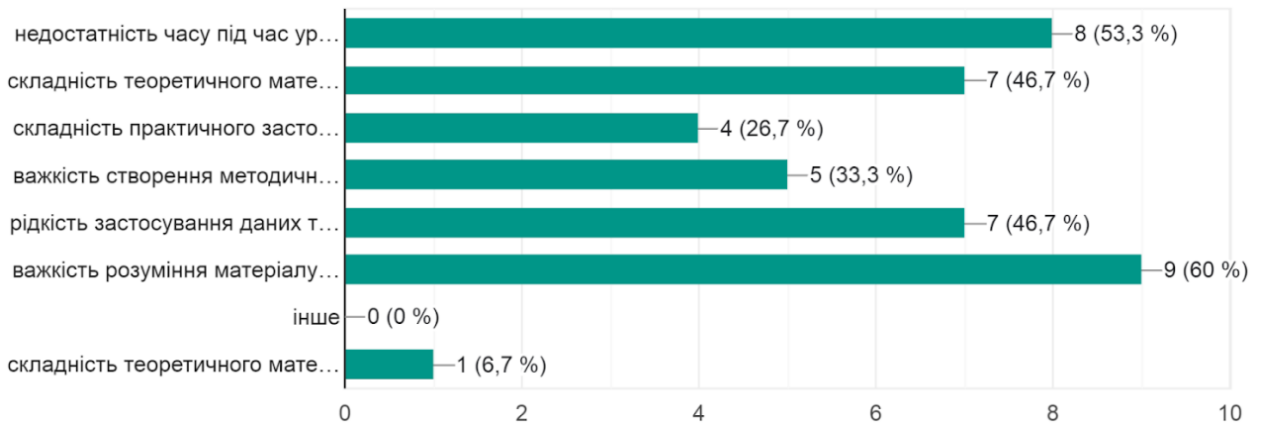
Щоби з'ясувати причини зазначеного стану було проведено опитування серед частини вчителів закладів загальної середньої освіти Сумської області, які навчають геометрії на поглибленому рівні в основній школі стосовно використання теорем Чеви та Менелая в своїй педагогічній діяльності. Опитування проводилося у другій половині 2023 року за допомогою анонімного онлайн-анкетування через Google Forms та було розроблено для двох груп вчителів:

- окремо для тих вчителів, що не навчають зазначеним іменним теоремам (перша група),
- окремо для тих вчителів, що навчають учнів зазначеному матеріалу (друга група). Участь в опитуванні взяли 28 осіб, співвідношення кількості респондентів першої групи до респондентів другої становить 2 : 1. Невелике число опитуваних пов'язане з невеликою кількістю 8-9 класів в Сумській області, що вивчають геометрію на поглибленому рівні.

Аналізуючи відповіді опитаних вчителів з першої групи, виявилось, що головними причинами того, чому вчителі не пропонують учням розглядати теореми Чеви та Менелая є:

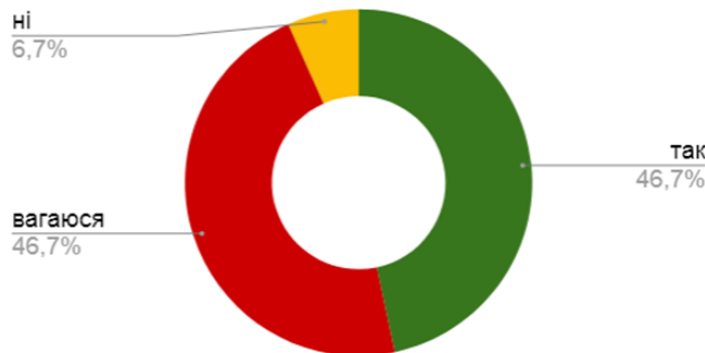
- важкість розуміння матеріалу учнями – 60%;
- обмаль часу під час уроків – 53,3%;
- складність теоретичного матеріалу (незрозумілість формулювання теорем, складність їх доведень) – 46,7%;
- рідкість використання матеріалу в регулярному курсі геометрії – 46,7%.

- важкість створення методично виваженої системи задач для закріплення (через відсутність потрібних з точки зору вчителя задач у підручнику) – 33,3%.  
Розподіл відповідей наведено на рис.1.



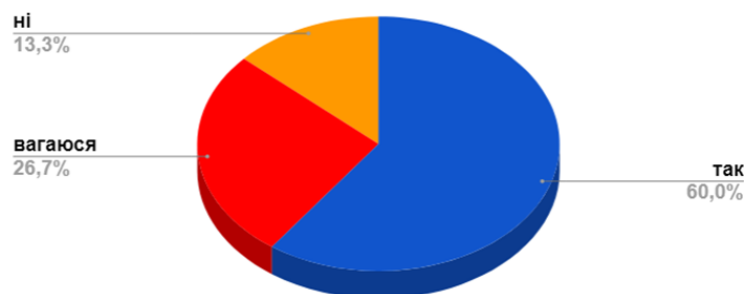
**Рис. 1. Розподіл відповідей на питання про причини оминання теорем Чеви та Менелая для першої групи вчителів**

Усі ці моменти призвели до того, що 46,7% респондентів першої групи вважають, що матеріал, пов'язаний із теоремами Чеви та Менелая, є зайвим у курсі геометрії поглибленого рівня основної школи. Така ж сама кількість респондентів вагається щодо цього питання (рис.2).



**Рис. 2. Розподіл відповідей на питання про зайвність теорем Чеви та Менелая серед обов'язкового матеріалу в першій групі вчителів**

Відповідно переважна більшість вчителів першої групи (60%) погоджуються з думкою, що зазначений матеріал варто розглядати лише під час позакласної роботи з предмету, а 26,7% вагаються у цьому питанні (рис.3).



**Рис. 3. Розподіл відповідей на питання про повне перенесення теорем Чеви та Менелая до позакласної роботи (гуртки, факультативи) в першій групі вчителів**

Серед вчителів, що на сьогодні не розглядають теореми Чеви, Менелая та суміжні питання, 53% тих, хто раніше їх не використовував, а 47% респондентів через зазначені вище причини відмовились від використання даного матеріалу.

Аналізуючи відповіді вчителів другої групи, тобто тих, що пропонує учням матеріал, пов'язаний з теоремами Чеви, Менелая, були виокремлені наступні труднощі, з якими вчителі стикалися на перших етапах навчання зазначеним іменним теоремам:

- найважчим (86%) було створення методично виваженої системи задач для закріплення (через відсутність потрібних з точки зору вчителя у підручнику);
- на другому місці (57%) йде складність теоретичного матеріалу (незрозумілість формулювання теорем, складність їх доведень);
- на третьому (43%) – важкість розуміння матеріалу учнями.

Розподіл відповідей – рис. 4.

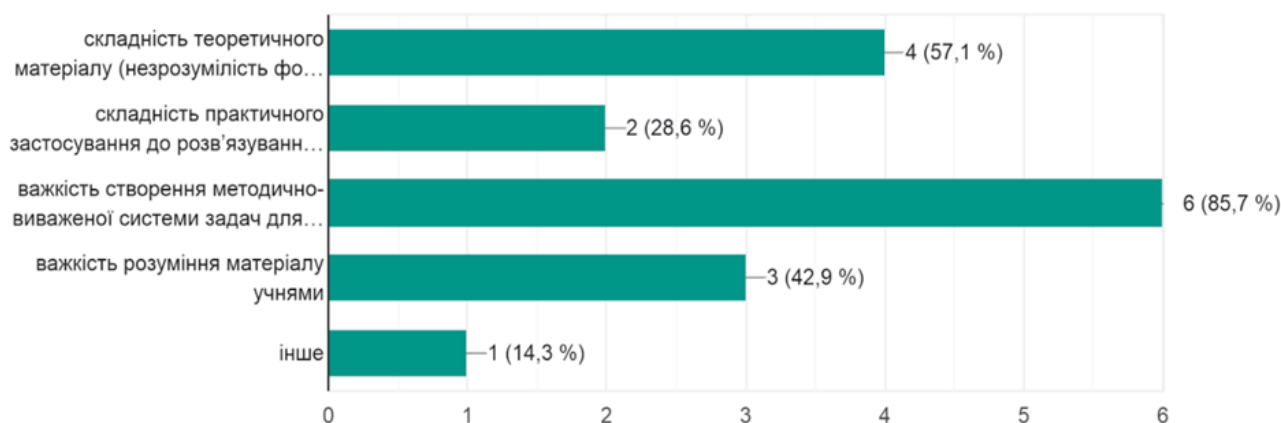


Рис. 4. Розподіл відповідей на питання про труднощі, що виникають на початках навчання теоремам Чеви та Менелая в другій групі вчителів

Отримані результати в цій групі інверсні до результатів, отриманих на аналогічні запитання в першій групі, тобто після створення системи задач та її застосування нерозуміння матеріалу учнями (з точки зору вчителя) стає дещо слабшим.

Серед проблем важкості сприйняття учнями матеріалу, пов'язаного із використанням теорем Чеви та Менелая, респонденти виокремили такі:

- слаборозвинуте просторове мислення (невміння працювати з рисунком, невміння «бачити» суттєве та несуттєве в умові задачі, на рисунку) – 86%;
- нестандартність формування відношень та їх перетворень – 29%;
- упереджене ставлення до геометрії – 29%.

Розподіл відповідей подано на рис.5.

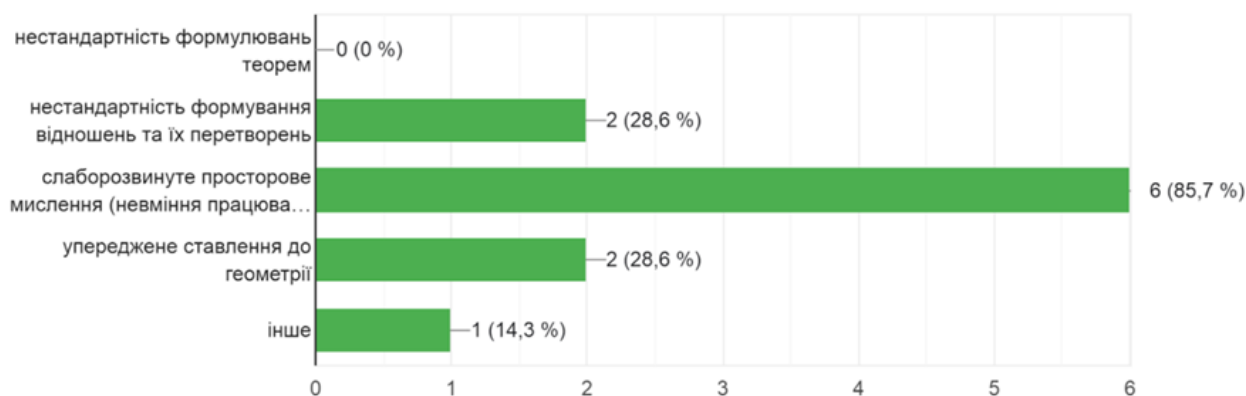
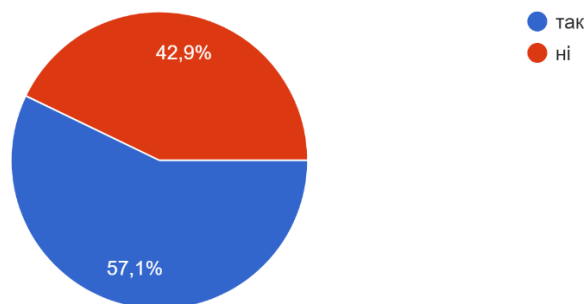


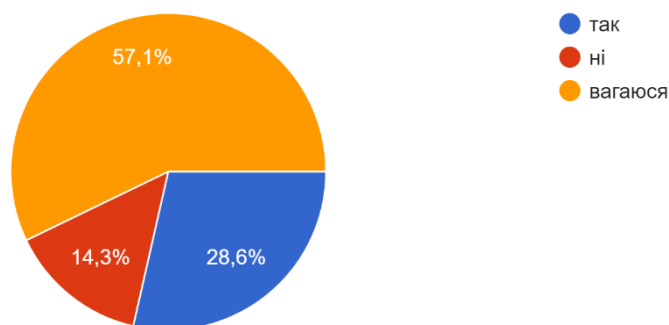
Рис. 5. Розподіл відповідей на питання про труднощі, що виникають на початках навчання теоремам Чеви та Менелая в другій групі вчителів

Абсолютна більшість респондентів другої групи відповіли ствердно щодо використання додаткових джерел при створенні системи задач на закріплення під час вивчення теорем Чеви та Менелая, при цьому для 57% опитаних вчителів другої групи ця система складається лише із задач на доведення (рис. 6).



**Рис. 6. Розподіл відповідей на питання про систему задач до застосування теорем Чеви та Менелая в другій групі вчителів**

Також переважна більшість вчителів (86%) пропонують до вивчення обидві теореми у формі відношення відрізків та лише 14% відсотків (1 вчитель) пропонує обидві форми: і через відрізки і тригонометричну. Зазначений матеріал 57% опитуваних пропонують під час проведення уроків, 29% лише під час позакласної роботи, а 14% використовують обидві форми роботи (рис. 7).



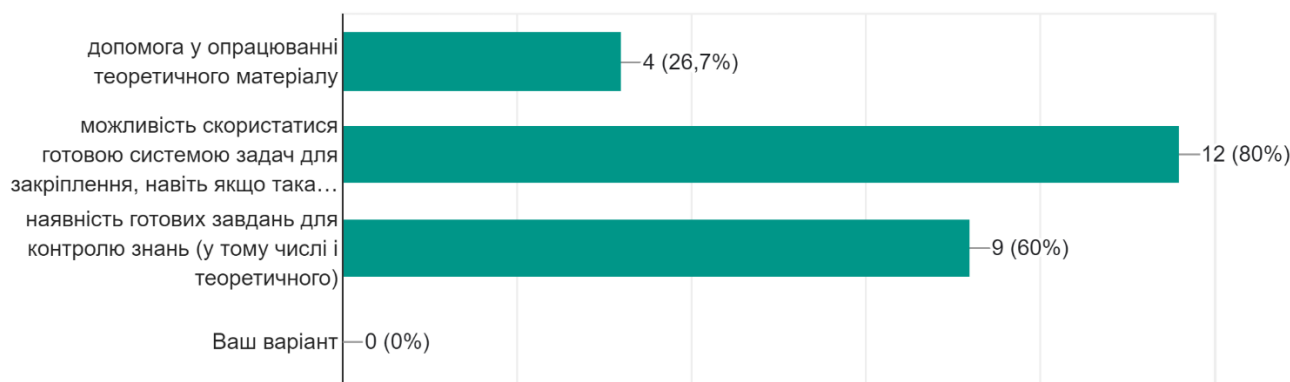
**Рис. 7.**

Але при цьому 57% вагаються щодо повного перенесення матеріалу до позакласної роботи, а 29% з цим не погоджуються.

Респондентам першої групи також було запропоновано висловити побажання щодо створення можливості навчати учнів теоремам Чеви та Менелая і вони зазначили, що було б добре мати:

- можливість скористатися готовою системою задач для закріплення, навіть якщо така буде містити надлишкову кількість задач, у тому числі з розв'язками – 80%;
- наявність готових завдань для контролю знань (у тому числі і теоретичного) – 60%;
- допомога у опрацюванні теоретичного матеріалу – 27% (рис. 8).

**Висновки та перспективи подальших наукових розвідок.** Отже, підсумовуючи результати анкетування, можна стверджувати, що головною проблемою при навчанні учнів матеріалу, пов'язаного з теоремами Чеви та Менелая (так само, як й іншого «некласичного» матеріалу з геометрії трикутника) є обмаль часу у вчителів для створення методично виваженої системи задач, зокрема і для контролю знань. Тобто, не дивлячись на присутність даного матеріалу в підручниках, система задач, що наявна там, не задовольняє потреб вчителів у цьому питанні. Крім того, слабо розвинена просторова уява сучасних учнів та упереджене ставлення їх до геометрії стають серйозними перешкодами на шляху опанування матеріалу та застосування його у майбутньому.



**Рис. 8. Розподіл відповідей на питання про форми допомоги для полегшення включення матеріалу із застосування теорем Чеви та Менелая в першій групі вчителів**

Для подолання виявлених при опитуванні труднощів, на наш погляд, потрібно під час проведення уроків знаходити час для ознайомлення учнів з даними теоремами та їх застосуванням. По-перше, це демонструє, як витончено можна доводити два важко встановлювані геометричні факти: перетин трьох прямих в одній точці та належність трьох точок одній прямій. По-друге, сам спосіб використання розглядуваних теорем є доволі незвичним, дозволяє розвивати просторове мислення учнів та використовувати широкий спектр знань про трикутники та інші геометричні фігури.

#### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ / REFERENCES

1. Програма для класів з поглибленим вивченням математики, 8–9 класи. (2008). Рекомендовано МОН України (лист № 1/11 – 2151 від 30.05.2008 р.). Математика в школі, 10(86). (Program for classes with in-depth study of mathematics, grades 8-9. (2008). Recommended by the Ministry of Education and Culture of Ukraine (letter No. 1/11 – 2151 dated May 30, 2008). Mathematics in school, 10(86)).
2. Мерзляк, А. Г., Полонський, М. С., Якір, В. Б. (2016). Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підручник для 8 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Харків: Гімназія. (Merzlyak, A. G., Polonskyi, M. S., Yakir, V. B. (2016). Geometry for secondary schools with advanced mathematics: a textbook for 8th grade secondary schools. Kharkiv: Gymnasium).
3. Мерзляк, А. Г., Полонський, М. С., Якір, В. Б. (2016). Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підручник для 9 класів загальноосвітніх навчальних. Харків: Гімназія. (Merzlyak, A. G., Polonskyi, M. S., Yakir, V. B. (2016). Geometry for general educational institutions with in-depth study of mathematics: a textbook for 9th grade of general education. Kharkiv: Gymnasium).

**Odintsova O. O. Krasuts'ka S. V. On the issue of identifying problems in teaching some theorems in the advanced geometry's school curriculum and the ways to overcome them. Part 1: problems.**

*In 2008, there were changes in the advanced mathematics's school curriculum, in particular, the appearance of questions related to the incircle and its properties, Ceva theorem, Menelaus theorem, Euler theorem, etc. in the geometry curriculum. But unfortunately, teachers still try to avoid this material when they study relevant topics and, as a result, geometric tasks at Math Olympiads and competitions are remained unattended by the vast majority of participants. Therefore, it is interesting to hear the opinion of teachers who teach geometry at the advanced level in secondary school about the problems which they face in preparing, reviewing, and controlling knowledge of the stated issues, as well as finding possible ways to eliminate the current situation.*

*In order to find out the reasons for this situation, a survey was conducted among some secondary schools' teachers in Sumy region who teach geometry at the advanced level regarding the*

use of Ceva and Menelaus theorems. The survey was designed for two groups of teachers: separately for those teachers who do not teach these named theorems (the first group) and separately for those teachers who teach students this material (the second group).

An analysis of the answers of the surveyed teachers from the first group revealed that the main reasons why teachers do not offer students to consider the Ceva and Menelaus theorems are: difficulty of understanding the material by students – 60%; lack of time during lessons – 53.3%; complexity of theoretical material – 46.7%. For the second group, the distribution of answers to a similar question was as follows: the most difficult for 86% of respondents was creating a methodologically sound system of tasks for consolidation (due to the lack of necessary tasks in the textbook from the teacher's point of view); next for 57% of respondents was the theoretical material's complexity; and the third for 43% was the difficulty of understanding the material by students. That is, for teachers, after creating a system of tasks and applying it, students' misunderstanding of the material (from the teacher's point of view) becomes somewhat weaker.

The survey asked questions about the appropriateness of using these theorems in classes, finding out why students don't understand the material, using auxiliary sources to create a system of tasks, etc.

The respondents of the first group were also asked to express their wishes regarding the creation of opportunities to teach students the Ceva and Menelaus theorems. They noted that it would be good to have: the ability to use a ready-made system of tasks for consolidation, including solutions – 80%; the availability of ready-made tasks for controlling knowledge (including theoretical knowledge) – 60%; assistance in working out theoretical material – 27%.

So, summarizing the results of the survey, we can say that the main problem in teaching students the Ceva and Menelaus theorems' material is that teachers have little time to create a methodologically sound system of tasks, including for knowledge control. That is, despite the presence of this material in textbooks, the system of tasks available there does not meet the needs of teachers in this regard. In addition, the underdeveloped spatial imagination of modern students and their prejudiced attitude toward geometry become serious obstacles to mastering the material and applying it in the future.

**Key words:** teaching geometry, classes with an advanced level of mathematics, Ceva theorem, Menelaus theorem.

УДК 372.851

DOI 10.5281/zenodo.12190824

**М. В. Працьовитий**

ORCID ID 0000-0001-6130-9413

**Н. С. Правіцка**

ORCID ID 0009-0004-7651-9105

Український державний університет  
імені Михайла Драгоманова

## МЕТОД ГЕОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ – ОДИН З ОСНОВНИХ МЕТОДІВ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Не завжди у навчальній літературі автори дотримуються загальноприйнятих у науці термінів, означень та позначень, що іноді приводить до непорозумінь, спотворення наукової істини або суперечностей. Це стосується і елементів теорії геометричних перетворень площини та простору (рухів і перетворень подібності) у шкільному курсі математики. Аналіз змісту шкільних підручників (діючих та бувших) змушує переусвідомлювати мету, завдання, ресурс засобів і уявний кінцевий результат курсу навчання та констатувати, що виклад теоретичного матеріалу має бути суттєво вдосконаленим, а добірка задач істотно збалансованою. У роботі обговорюється це коло питань на основі аналізу змісту шкільних підручників. Грунтуючись на виявлених логічних,