Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики

Уварова Лідія Михайлівна

ОСОБЛИВОСТІ НАВЧАННЯ ЕЛЕМЕНТАМ ТРИГОНОМЕТРІЇ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Спеціальність: 014 Середня освіта (Математика)
Галузь знань: 01 Освіта / Педагогіка

Кваліфікаційна робота
на здобуття освітнього ступеню Магістр

Науковий керівник
________________ О.О. Одінцова,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
доцент кафедри математики
«____»_____________ 20__ року
Виконавець
________________ Л.М. Уварова
«____» _________________ 20__ року

Суми – 2020

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність. Не дивлячись на те, що тригонометрія є розділом елементарної математики, вона широко застосовується в астрономії, фізиці, геодезії, топографії, архітектурі, медицині та біології. Сміливо можна сказати, що тригонометрія не залежить від інших наук, а інші науки залежать від тригонометрії.

В основу побудови змісту та організації процесу вивчення математики в сучасній школі покладено компетентнісний підхід, кінцевим результатом якого є здатність учня застосовувати свої знання в навчальних та реальних життєвих ситуаціях. На сьогоднішній день виникає потреба удосконалення математичної освіти тому, що учні не бачать зв'язку між матеріалом, який вивчається на уроках математики, і застосуванням цих знань у реальному житті, особливо, коли мова йде про тригонометрію.

У шкільному курсі математики приділяється значна увага вивченню тригонометричного матеріалу, але складність полягає в невідповідності між достатньо великим обсягом та відносно невеликою кількістю годин, відведених на його вивчення. Зрозуміло, що в класах із поглибленим вивченням математики часу відводиться більше, але все одно тема залишається складною.

Можна виокремити два етапи вивчення тригонометрії в школі: 1)початкове ознайомлення з тригонометричними функціями гострого кута в курсі геометрії (8-9клас); 2) систематизація і поглиблення знань про тригонометричні функції в курсі алгебри та початків аналізу (математики) (10-11клас). Вивчення тригонометричних функцій сприяє забезпеченню практичної та прикладної спрямованості навчання математики, розвитку математичних здібностей і розширенню кругозору учнів.

Проаналізувавши наукову та методичну літературу, можна зробити висновок, що багато науковців відмічають типові труднощі в учнів при вивченні тригонометричних величин та невміння застосовувати отримані знання до розв'язування прикладних задач.

Отже, методика навчання тригонометрії в сучасній школі потребує оновлення, тому наразі тема дослідження є актуальною.

Об'єкт дослідження – процес навчання учнів математиці.

Предмет дослідження – особливості навчання елементам тригонометрії в основній та старшій школах.

Мета дослідження: розкрити науково – методичні особливості навчання елементам тригонометрії в основній та старшій школах.

Відповідно до мети, були сформульовані наступні **завдання:**

1) опрацювати науково – методичну літературу за темою дослідження;
2) зробити стислий огляд матеріалу з тем тригонометрії, що вивчаються в шкільному курсі математики;
3) проаналізувати шкільні підручники та чинні програми в контексті дослідження;
4) розглянути основні науково – методичні підходи до вивчення тригонометричних функцій;
5) розробити приклади конспектів уроків для різних класів з тем, що стосуються тригонометрії.

Структура та обсяг роботи. Магістерська робота складається з вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел, додатків.

У вступі обґрунтовано актуальність теми, визначено об'єкт, предмет, вказано мету та завдання дослідження.

У першому розділі «Теоретичні основи дослідження» стисло розглянуто як геометричні, так і алгебраїчні властивості тригонометричних функцій. Зокрема наведено: означення синуса, косинуса, тангенса та котангенса (через співвідношення сторін прямокутного трикутника та за допомогою одиничного кола), графіки (тригонометричних функцій та обернених тригонометричних функцій) властивості тригонометричних функцій, що випливають з їх графіків, способи розв'язування тригонометричних рівнянь (найпростіших й тих, які відрізняються від найпростіших), способи розв'язування основних тригонометричних нерівностей.

У другому розділі «Методичні особливості навчання тригонометрії в основній і старшій школі» проведено ґрунтовний аналіз чинних програм (за рівнем стандарту та поглибленим рівнем вивчення математики) в контексті дослідження та підручників на подання елементів тригонометрії, розроблено методичні схеми розв’язування прямокутних та косокутних трикутників, виокремлено методичні особливості навчання тригонометричних функцій в основній та старшій школі, розроблено конспекти уроків за темами: «Розв’язування трикутників. Прикладні задачі» (8 клас), «Розв’язування трикутників. Прикладні задачі» (9 клас), «Радіанна міра кутів» (10 клас), «Основі співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу» (10 клас).

У висновках узагальнено результати дослідження.

У додатках міститься аналіз підручників з геометрії для 8, 9 класу та аналіз підручників з алгебри і початків аналізу для 10 класу у контексті дослідження, опитування учнів 8 класу на тему «Розв’язування трикутників».

Апробація результатів. За результатами дослідження було написано статтю на тему «Реалізація принципу неперервності навчання на прикладі вивчення елементів тригонометрії» до збірника студентських наукових робіт фізико-математичного факультету СумДПУ ім. А.С. Макаренка «Студентська звітна конференція 2020. Матеріали результатів наукових досліджень молодих науковців» (Суми, 2020 рік) та тези на І Всеукраїнську науково-методичну конференцію студентів, аспірантів та молодих вчених «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу- ІТМ*плюс-2020. Форум молодих дослідників» (Суми, листопад 2020 рік) на тему «Реалізація принципу неперервності навчання на прикладі вивчення елементів тригонометрії».

РОЗДІЛ І. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Означення синуса, косинуса, тангенса через прямокутний трикутник

У прямокутному трикутнику *ABC* (рис.1.1.1.) відношення двох його сторін, наприклад катета *a* до гіпотенузи *c,* цілком залежить лише від величини одного з гострих кутів, наприклад кута *A*. Відношення різних пар сторін прямокутного трикутника називаються тригонометричними функціями його гострого кута. По відношенню до кута *A* ці функції мають наступні назви та позначення:

Означення 1.1.1.[4,148] Синусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до гіпотенузи:

$$sin\ A = \frac{a}{c}.$$

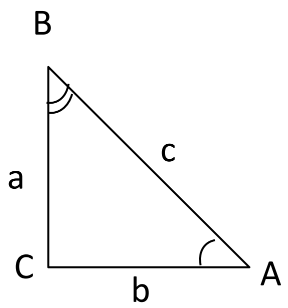


Рис 1.1.1.

Означення 1.1.2.[4,149] Косинусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення прилеглого катета до гіпотенузи:

$$cos\ A = \frac{b}{c}$$

Означення 1.1.3.[4,150]Тангенсом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета, до прилеглого:

$$tg\ A = \frac{a}{b}.$$

Означення 1.1.4.[4,150] Котангенсом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення прилеглого катета до протилежного:

$$ctg\ A = \frac{b}{a}$$

Означення 1.1.5. [1,168] Доповняльними називають кути, які в сумі становлять 90°.

Відносно кута *B* (“доповняльному” до кута *A*, $\angle A + \angle B = 90°$), назви відповідно змінюються:

$$\sin B = \frac{b}{c}; \ \cos B = \frac{a}{c}; \ tg\, B = \frac{b}{a}; \ ctg\, B = \frac{a}{b}.$$

Якщо $\angle A = \alpha$, тоді $\angle B = (90° - \alpha)$, звідси маємо зв'язок тригонометричних функцій кутів *A* і *B* [1, 168]:

1. $\sin \alpha = \frac{a}{c} = \cos B = \cos (90° - \alpha)$ (синус кута *A* дорівнює косинусу доповняльного кута *B*);
2. $\cos \alpha = \frac{b}{c} = \sin B = \sin (90° - \alpha)$ (косинус кута *A* дорівнює синусу доповняльного кута *B*);
3. $tg \alpha = \frac{a}{b} = ctg B = ctg (90° - \alpha)$ (тангенс кута *A* дорівнює котангенсу доповняльного кута *B*);
4. $ctg \alpha = \frac{b}{a} = tg B = tg (90° - \alpha)$ (котангенс кута *A* дорівнює тангенсу доповняльного кута *B*).

Для деяких кутів можна записати точні значення їх тригонометричних величин. Найважливіші випадки подані в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1.

Значення синуса, косинуса, тангенса, котангенса для кута *A*, який дорівнює *0°, 30°, 45°, 60°, 90°*

A	*sin A*	*cos A*	*tg A*	*ctg A*
0°	0	1	0	-
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
90°	1	0	-	0

Приклад 1.1.1. Обчисліть $\sqrt{3}\sin 60° - 2\sin 90° \cdot \cos 60° + 0,5\ \mathrm{tg}\ 45°$

Розв'язання. $\sqrt{3}\sin 60° - 2\sin 90° \cdot \cos 60° + 0,5\ \mathrm{tg}\ 45° = \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2} +$ $+0,5\cdot 1 = 1$.

Відповідь. 1.

Кути *0*° та *90*° градусів не можуть входити в прямокутний трикутник як його гострі кути. Однак при розширенні поняття тригонометричних функцій розглядають значення тригонометричних функцій і для цих кутів. З іншого боку один із гострих кутів прямокутного трикутника може як завгодно приблизитись до *90*°, інший тоді наблизиться до нуля, і відповідні тригонометричні величини будуть наближені до значень,указаних у таблиці.

Таблиця 1.1. має більш теоретичне ніж практичне значення, оскільки містить корені, які неможливо точно добути, але можна обчислити наближені значення з будь –яким бажаним ступенем точності. Таким чином були створені чотиризначні таблиці синусів, косинусів, тангенсів та котангенсів.

1.1. Означення синуса, косинуса, тангенса через одиничне коло

Можна було б побудувати всю тригонометрію, користуючись тільки тригонометричними величинами гострих кутів. Але тоді б при розв'язуванні довільних трикутників та й в інших питаннях, які вимагають застосування тригонометрії, потрібно було б розрізняти множину окремих випадків до однієї й тієї ж задачі, дивлячись, якою є величина даного кута. Однак розв'язок усіх задач приймає однакову форму, якщо поширити поняття синуса, косинуса, тангенса і котангенса на кути від *0*° до *360*°, не тільки додатні,але й від'ємні.

На рівні з градусною мірою кутів у тригонометрії використовується й інша міра, яка називається *радіанною*.

Означення 1.2.1. [5,77] Кутом в 1 (один) радіан називають центральний кут, довжина дуги якого дорівнює довжині радіуса кола.

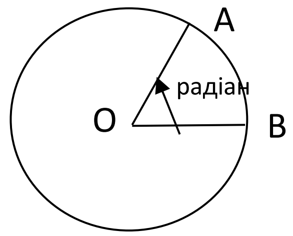


Рис.1.2.1.

Кут в один радіан *(рад.)* – це центральний кут кола *AOB* (рис.1.2.1.), що спирається на дугу, довжина якої дорівнює радіусу ($\cup AB = OB$). Величина цього кута не залежить від радіуса кола та від положення дуги *AB* на колі. Оскільки півколо видно з центра кола під кутом 180^0, а довжини півкола дорівнює π радіусам, то один радіан в π раз менше, ніж кут в 180^0 тобто:

$$180^0 = \pi \text{ рад}$$

$$1 \text{ рад.} = \frac{180^0}{\pi} \approx 57^0 18',$$

і навпаки один градус дорівнює $\frac{\pi}{180^0}$ радіан а $1^0 = \frac{\pi}{180^0}$ *рад.* $\approx$ *0,017453* радіана.

Введення радіанної міри кута дозволяє деяким формулам надати більш простий вигляд.

Приклад 1.2.1. Виразіть в радіанах величини кутів 1) 30°; 2) 90°; 3) 72°.

Розв'язання. З рівності $180^0 = \pi$ маємо:1) $30° = \frac{\pi}{6}$ рад, 2) $90° = \frac{\pi}{2}$ рад.

3) $1° = \frac{\pi}{180^\circ}$ рад, $72° = 72 \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$ рад $= \frac{2\pi}{5}$ рад $\approx$ 1,3 рад.

Відповідь. 1) $\frac{\pi}{6}$ рад; 2) $\frac{\pi}{2}$ рад; 3) $\approx$ 1,3 рад.

Приклад 1.2.2. Виразіть в градусах величини кутів:1) $\frac{\pi}{5}$ рад.; 2) $\frac{\pi}{18}$ рад.; 3) 3,5 рад.

Розв'язання. З рівності $180^0 = \pi$ маємо: 1) $\frac{\pi}{5}$ рад. = 36º; 2) $\frac{\pi}{18}$ рад. = 10º;

3) 1 рад $= \frac{180^\circ}{\pi}$, 3,5 рад $= 3{,}5 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{630^\circ}{\pi} \approx 201°$.

Відповідь. 1) 36º; 2)10º; 3) $\approx$ 201°.

Означення 1.2.2. [6] Одиничне коло - це коло з радіусом 1 та центром в початку координат.

Візьмемо одиничне коло (рис.1.2.2.). Напрям, протилежний до руху годинникової стрілки вважають за додатній, за годинниковою стрілкою – за від'ємний.

Позначимо на колі точки $P_0(1;\ 0)$, $P_\alpha\ (x;\ y)$. При повороті на кут α будемо вважати, що радіус OP_0 будемо

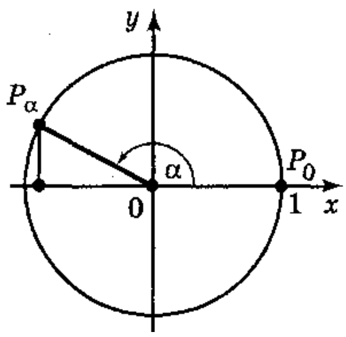


Рис.1.2.2.

вважати переходить у радіус OP_α. Тоді точка P_α відповідає куту α одиничного кола.

Означення 1.2.3. [5,71] Синусом кута α називають ординату точки P_α *(x;y)* одиничного кола, тобто

$$sin\,\alpha = y.$$

Означення 1.2.4.[5,71] Косинусом кута α називають абсцису точки P_α *(x;y)* одиничного кола, тобто

$$cos\alpha = x.$$

Означення 1.2.5.[5,71] Тангенсом кута α називають відношення ординати точки P_α *(x;y)* одиничного кола, до її абсциси, тобто

$$tg\alpha = \frac{y}{x} \text{ (якщо } x \neq 0).$$

Означення 1.2.6.[5,71] Котангенсом кута α називають відношення абсциси точки P_α *(x;y)* одиничного кола, до її ординати, тобто

$$ctg\alpha = \frac{x}{y} \text{ (якщо } y \neq 0).$$

Тангенсу і котангенсу кута можна дати означення і дещо по-іншому.

Означення 1.2.7.[5,71] Тангенсом кута α називають відношення синуса цього кута до його косинуса, тобто

$$tg\alpha = \frac{y}{x} = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}, \text{ де } cos\alpha \neq 0.$$

Означення 1.2.8.[5,71] Котангенсом кута α називають відношення косинуса цього кута до його синуса, тобто

$$ctg\alpha = \frac{x}{y} = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}, \text{ де } sin\alpha \neq 0.$$

Таблиця 1.2. є певним розширенням таблиці 1.1., оскільки в ній подані значення синуса, косинуса, тангенса і котангенса для деяких кутів від 0° до 360°.

Таблиця 1.2.

Значення синуса, косинуса, тангенса і котангенса для деяких кутів від 0° до 360°.

$\alpha°$	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
α(*радіан)*	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$sin\ \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$cos\ \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$tg\ \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	- $\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	-	0
$ctg\ \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	-$\sqrt{3}$	-	0	-

Уведені означення дозволяють розглядати тригонометричні функції числа α, як відповідні тригонометричні функції кута в α радіан.

Означення 1.2.9. [8] Тригонометрична функція – функція кута, що змінюється зі зміною кута, якому вона відповідає. Функції виду $f(\alpha) = sin\alpha$, $g(\alpha) = cos\alpha$, $h(\alpha) = tg\ \alpha$ – тригонометричні функції кута повороту α.

1.2.1. Знаки значень тригонометричних функцій у різних чвертях

Спираючись на означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса, можна визначити знаки цих функцій у різних координатних чвертях (рис. 1.3.1). Вибір знака залежить від того, в якій із координатних чвертей лежить кут:

α – кут I чверті, тоді $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$, $tg\alpha > 0$, $ctg\alpha > 0$.

α – кут II чверті, тоді $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$, $tg\alpha < 0$, $ctg\alpha < 0$.

α – кут III чверті, тоді $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha < 0$, $tg\alpha > 0$, $ctg\alpha > 0$.

α – кут IV чверті, тоді $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$, $tg\alpha < 0$, $ctg\alpha < 0$.

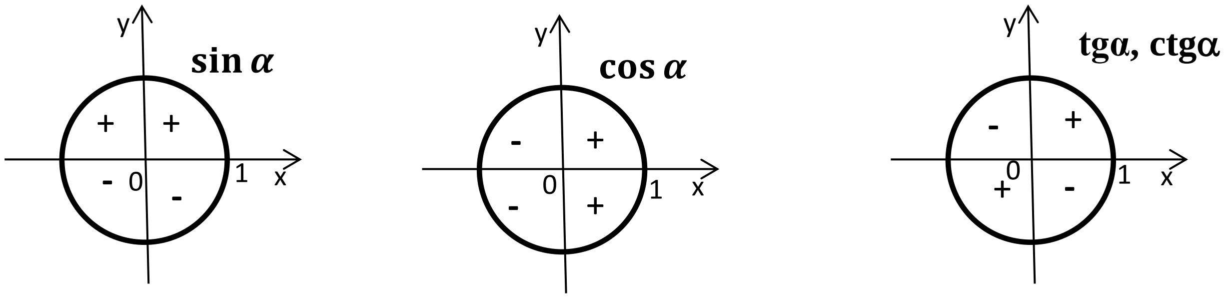


Рис. 1.3.1.

Приклад 1.2.3. З'ясувати, який знак має вираз: 1) *sin 280°*; 2) *tg (-140°)*; 3) $tg\ 2$.

Розв'язання. 1) Оскільки кут 280^0 є кутом IV чверті, то *sin 280°* < 0;

2) оскільки кут (-140^0) є кутом III чверті, то *tg (-140°)* > 0;

3) оскільки $\pi/2 < 2 < \pi$, то кут 2 рад є кутом II чверті, тому $tg\ 2 < 0$.

Відповідь: 1) *sin 280°* < 0; 2) *tg (-140°)* > 0; 3) $tg\ 2 < 0$.

Приклад 1.2.4. Визначити знак виразу $\cos 123^0 \cdot tg 231^0 \cdot \sin 312^0$.

Розв'язання. Оскільки 123^0 - кут II чверті, то $\cos 123^0 < 0$, 231^0 - кут III чверті, $tg 231^0 > 0$, 312^0 - кут IV чверті, $\sin 312^0 < 0$ і їх добуток є величиною додатною, тобто $\cos 123^0 \cdot tg 231^0 \cdot \sin 312^0 > 0$.

Відповідь. $\cos 123^0 \cdot tg 231^0 \cdot \sin 312^0 > 0$

1.2.2. Періодичність тригонометричних функцій

Означення 1.2.9. [9, 247] Функція *y = f(x)* називається періодичною з періодом $T \neq 0$, якщо для будь-якого *x* з області визначення функції числа *(x+T)* і *(x – T)* також належать області визначення і виконується рівність

$$f(x+T) = f(x - T) = f(x).$$

Теорема 1.2.1. [10, 64] Головним періодом функцій *y = sinx, y = cosx* є число 2π, головним періодом функцій *y = tgx, y = ctgx* є число π. Тобто

$\sin(\alpha+2\pi k) = \sin\alpha$, $\quad tg(\alpha+\pi k) = tg\,\alpha$,

$\cos(\alpha+2\pi k) = \cos\alpha$, $\quad ctg(\alpha+\pi k) = ctg\,\alpha$, де $k \in Z$.

Приклад 1.2.5. Обчислити: 1) $sin780°$; 2) $tg\left(-\frac{14\pi}{3}\right)$.

Розв'язання. 1) $sin780° = sin(60° + 2\cdot 360°) = sin60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) $tg\left(-\frac{14\pi}{3}\right) = tg\left(\frac{\pi}{3} - 5\pi\right) = tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

Відповідь. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sqrt{3}$.

1.2.3. Співвідношення між тригонометричними функціями одного і того самого аргументу

У прямокутному трикутнику *ABC* (рис1.2.3.), *a, b* - катети, *c*- гіпотенуза, $\angle A = \alpha$. Значення тригонометричних функцій кута *A* виразимо через довжини сторін трикутника *ABC*:

$$sin\alpha = \frac{a}{c},\ cos\ \alpha = \frac{b}{c},\ tg\alpha = \frac{a}{b},\ ctg\alpha = \frac{b}{a}.$$

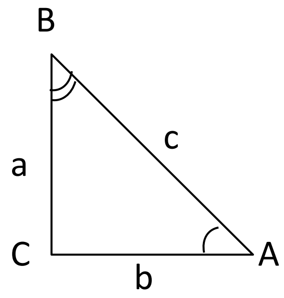


Рис. 1.2.3.

Якщо поділимо чисельник і знаменник останніх двох дробів на *c*:

$\frac{a}{b} = \frac{a:c}{b:c}, \frac{b}{a} = \frac{b:c}{a:c}$, отримаємо такі співвідношення:

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{cos\alpha};\ ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};\ \text{а}\ tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1\ [1, 169].$$

За теоремою Піфагра $a^2 + b^2 = c^2$. Якщо поділити обидві частини цієї рівності на c^2, то отримаємо: $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$, або $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ – основна тригонометрична тотожність [1, 169].

Якщо поділити рівність $a^2 + b^2 = c^2$ на b^2, то отримаємо рівність: $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = \left(\frac{c}{b}\right)^2$, або $tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha}$, тому $cos^2\alpha = \frac{1}{1+tg^2\alpha}$ [1, 169].

Якщо ж поділити $a^2 + b^2 = c^2$ на a^2, то отримаємо:

$1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2$, *або* $ctg^2\alpha + 1 = \frac{1}{sin^2\alpha}$, тому $sin^2\alpha = \frac{1}{1+ctg^2\alpha}$ [1, 169].

Знаючи одну з тригонометричних функцій деякого гострого кута, можна за вище наведеними формулами вирахувати всі інші. Але головне їх значення полягає в тому, що з їх допомогою можна значно спростити вигляд багатьох загальних формул, чим значно пришвидшити процес обчислення.

Ці формули є справедливими і для тригонометричних функцій будь-якого кута. Вони так само носять назву *основних тригонометричних тотожностей*.

Приклад 1.2.6. Знайти *tgx, sinx, cosx,* якшо *ctgx = -2,4 і* $\frac{3\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Розв'язання.1) $tgx = \frac{1}{ctg\, x} = 1: \left(-\frac{12}{5}\right) = -\frac{5}{12}$.

2) Маємо: $ctg^2\alpha + 1 = \frac{1}{sin^2\,\alpha}$. Звідси $sin^2\alpha = \frac{1}{ctg^2\,\alpha + 1}$; $sin^2\alpha = \frac{1}{(-2{,}4)^2 + 1}$;

$sin^2\alpha = \frac{25}{169}$. Оскільки *x* – кут IV чверті, то $sinx < 0$, тому $sinx = -\sqrt{\frac{25}{169}} = -\frac{5}{13}$.

3) $ctg\, x = \frac{cos\, x}{sin\, x}$, тому $cos\, x = ctg\, x \cdot sin\, x = \left(-\frac{12}{5}\right) \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{12}{13}$.

Відповідь.1) $-\frac{5}{12}$; 2) $-\frac{5}{13}$; 3)$\frac{12}{13}$.

Приклад 1.2.7. Спростити вираз 1) *(1-cosx) (1 + cosx);* 2) $\frac{\sin^2 2\alpha - 1}{\cos 2\alpha}$.

Розв'язання. 1) $(1- cosx)\,(1 + cosx) = 1 - cos^2x = sin^2\, x$.

2) $\frac{\sin^2 2\alpha - 1}{\cos 2\alpha} = \frac{-(1-\sin^2 2\alpha)}{\cos 2\alpha} = \frac{-\cos^2 2\alpha}{\cos 2\alpha} = -\cos 2\alpha$.

Відповідь.1) $\sin^2 x$; 2) $-\cos 2\alpha$.

Приклад 1.2.8. Довести тотожність: $\frac{sin\,\alpha}{1+cos\,\alpha} + ctg\,\alpha = \frac{1}{sin\,\alpha}$.

Доведення. $\frac{sin\,\alpha}{1+cos\,\alpha} + ctg\,\alpha = \frac{sin\,\alpha}{1+cos\,\alpha} + \frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha} = \frac{sin^2\,\alpha + cos\,\alpha + cos^2\,\alpha}{(1+cos\,\alpha)\,sin\,\alpha} =$

$= \frac{1+cos\,\alpha}{(1+cos\,\alpha)\,sin\,\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}$.

Відповідь.Тотожність доведено

Тригонометричні функції кутів $\frac{\pi}{2} \pm\alpha$, $\pi \pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm\alpha$, $2\pi \pm\alpha$ можна виразити через функції кута α за допомогою формул, які називаються формулами зведення [27]. Ці основні формули зведення подані у таблиці 1.3. Усі інші випадки може бути зведено до них за допомогою використання періодичності відповідних тригонометричних функцій.

Таблиця 1.3.

Формули зведення

x	$\pi + \alpha$	π - α	$2\pi + \alpha$	2π - α	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\frac{\pi}{2}$ - α	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$\frac{3\pi}{2}$ - α
sin x	*-sin α*	*sin α*	*sin α*	*-sin α*	*cos α*	*cos α*	*-cos α*	*-cos α*
cos x	*cos α*	*-cos α*	*cos α*	*cos α*	*-sin α*	*sin α*	*sin α*	*-sin α*
tg x	*tg α*	*-tg α*	*tg α*	*-tg α*	*-ctg α*	*ctg α*	*-ctg α*	*ctg α*
ctg x	*ctg α*	*-ctg α*	*ctg α*	*-ctg α*	*-tg α*	*tg α*	*-tg α*	*tg α*

Приклад 1.2.9. Обчисліть за допомогою формул зведення: 1) *cos 210°*; 2) $tg\frac{3\pi}{4}$.

Розв'язання.1) *cos 210° = cos (180°+30°)* $=\ cos\, 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *;*

2) $tg\,\frac{3\pi}{4} = tg\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = -\,ctg\,\frac{\pi}{4} = -1.$

Відповідь. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) -1.

1.3. Графіки тригонометричних функцій та їх властивості

1.3.1. Парність і непарність тригонометричних функцій

Розглянемо коло одиничного радіуса (рис.1.3.2.). Точки P_1 та P_2 отримано в результаті повороту точки P_0 на кути α та –α відповідно. Точки P_1 та P_2 мають рівні абсциси та протилежні ординати. Тоді

cos (-α) = cosα, sin (-α) = - sinα

Таким чином функція cos*x* – парна, функція sin*x* – непарна.

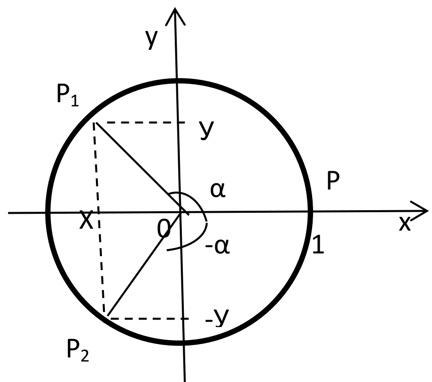


Рис.1.3.2.

Відповідно, $tg\ (-\alpha) = \frac{sin\,(-\alpha)}{cos\,(-\alpha)} = \frac{-\,sin\alpha}{cos\alpha} = -tg\ \alpha$; $ctg\ (-\alpha) = \frac{cos\,(-\alpha)}{sin\,(-\alpha)} = \frac{cos\alpha}{-\,sin\alpha} = -ctg\ \alpha$. Отже, функції тангенс та котангенс є непарними.

Приклад 1.3.1. Дослідити функції на парність: 1) $f(x)=\dfrac{1+\cos x}{x^2-3}$; 2) $f(x)=1+\sin x$; 3) $f(x)=\dfrac{tg\ x}{\cos^2 x}$;

Розв'язання.

1) $f(x)=\dfrac{1+\cos x}{x^2-3}$. $D(f)$ = $(-\infty;\ -\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3};\ \sqrt{3})\cup(\sqrt{3};\infty)$ - симетрична відносно початку координат. Маємо: $f(-x)=\dfrac{1+\cos(-x)}{(-x)^2-3}=\dfrac{1+\cos x}{x^2-3}=f(x)$.

Отже, дана функція є парною.

2) $f(x)=1+\sin x$. $D(f)=(-\infty;+\infty)$ - симетрична відносно початку координат. Маємо: $f(-x)=1+\sin(-x)=1-\sin x$.

Тоді $f(-x)\neq f(x)$ і $f(-x)\neq -f(x)$, тому дана функція не є ні парною, ні непарною.

3) $f(x)=\dfrac{tg\ x}{\cos^2 x}$. Область визначення даної функції – усі дійсні числа, крім чисел виду $\pi/2+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, – є симетричною відносно початку координат. Маємо: $f(-x)=\dfrac{tg\,(-x)}{\cos^2(-x)}=-\dfrac{tg\ x}{\cos^2 x}=-f(x)$. Отже, дана функція є непарною.

Відповідь.1) парна; 2) ні парна, ні непарна; 3) непарна.

1.3.2. Графік функції *y = sinx* та пов'язані з ним властивості функції.

Графік функції *y = sinx* - синусоїда (рис. 1.3.3.)

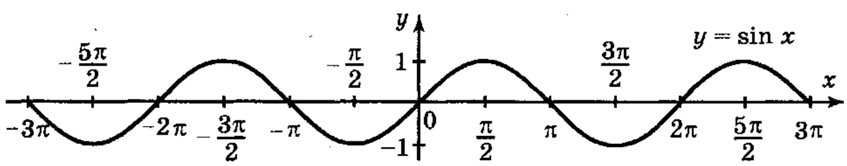


Рис. 1.3.3. Графік функції y = sin x

Враховуючи вище розглянуті властивості тригонометричних функцій та зовнішній вигляд синусоїди, можна записати такі властивості функції *y = sinx*.

1°. [9, 252] Область визначення: $x \epsilon R$. $D(sinx)=R$.

Область значень: $y \epsilon [-1;1]$, $E(sinx)= [-1;1]$.

2°. [9, 252] Функція непарна: $sin(-x) = -sinx$ (графік симетричний відносно початку координат).

3° . [9, 252] Функція періодична з періодом $T = 2\pi$: $sin(x+2\pi k) = sinx$, $k \epsilon Z$.

4° . [9, 252] Точки перетину з осями координат:

$$Oy: \begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases} \quad Ox: \begin{cases} y = 0, \\ x = \pi k, k \in Z. \end{cases}$$

5° . [9, 252] Проміжки знакосталості функції $y = sinx$

$sinx > 0$ при $x \epsilon (2\pi k; \pi+2\pi k)$, $k \epsilon Z$,

$sinx < 0$ при $x \epsilon (\pi+2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$, $k \epsilon Z$.

6° . [9, 252] Проміжки зростання і спадання:

Функція $y = sinx$ зростає на кожному з проміжків $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \epsilon Z$.

Функція $y = sinx$ спадає на кожному з проміжків $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \epsilon Z$.

7° . [9, 252] Найбільше значення функції дорівнює 1 при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \epsilon Z$.

Найменше значення функції дорівнює -1 при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \epsilon Z$.

Приклад 1.3.6. Побудуйте графік фукції $y = 2sinx$.

Розв'язання. Графік функції $y = 2sinx$ одержуємо із графіка функції $y = sinx$ розтягуванням його вдвічі вздовж осі Oy (рис. 1.3.4.).

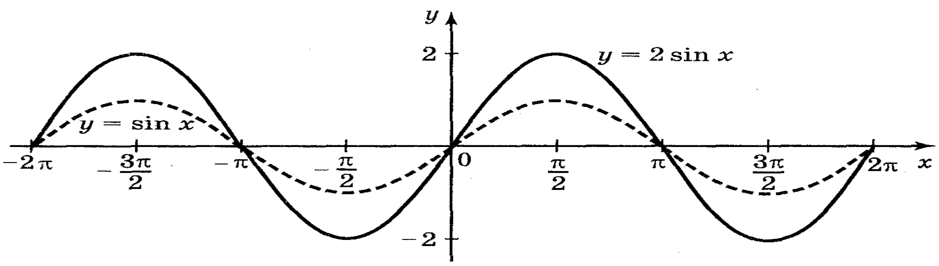


Рис. 1.3.4. Графік функції y = 2 sin x

Нулі функції: $x = \pi k$, $k \epsilon Z$.

Проміжки знакосталості: $2sinx > 0$ при $x \epsilon (2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k\epsilon Z$;

$2sinx < 0$ при $x \epsilon (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k;)$, $k \epsilon Z$.

1.3.3. Графік функції *y = cosx* та пов'язані з ним властивості функції

Графік функції $y = cosx$ – косинусоїда (рис. 1.3.5.)

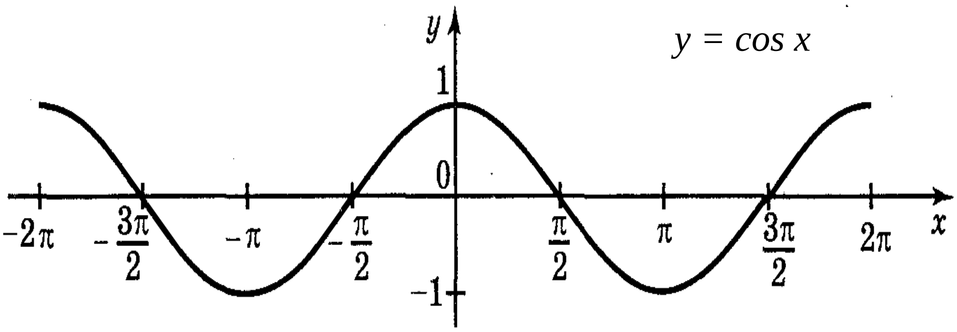


Рис. 1.3.5. Графік функції $y = cos\,x$

1°. [9, 256] Область визначення: $x \in R$. $D(cosx) = R$. Область значень: $y \in [-1;1]$, $E\,(cosx) = [-1;1]$.

2°. [9, 257] Функція парна: $\cos(-x) = \cos x$ (графік симетричний відносно осі Oy)

3°. [9, 257] Функція періодична з періодом $T = 2\pi$: $cos(\alpha+2\pi k) = cos\alpha$.

4°. [9, 257] Точки перетину з осями координат:

$$Oy: \begin{cases} x = 0, \\ y = 1; \end{cases} \qquad Ox: \begin{cases} y = 0, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z. \end{cases}$$

5°.[9, 257] Проміжки знакосталості функції $y = cosx$:

$$cosx > 0 \text{ при } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in Z,$$

$$cosx < 0 \text{ при } x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in Z.$$

6°.[9, 257] Проміжки зростання і спадання:

Функція $y = cosx$ зростає на кожному з проміжків $(\pi + 2\pi k;\ 2\pi + 2\pi k)$, $k \in Z$.

Функція $y = cosx$ спадає на кожному з проміжків $(2\pi k;\ \pi + 2\pi k)$, $k \in Z$.

7°. [9, 257] Найбільше значення функції дорівнює 1 при $x = 2\pi k$, $k \in Z$.

Найменше значення функції дорівнює -1 при $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$.

Приклад 1.3.6. Побудуйте графік функції $y = cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Розв'язання. Графік функції $y = cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ одержуємо із графіка функції $y = cosx$ його паралельним перенесенням вздовж осі Ox на $\frac{\pi}{3}$ одиниць ліворуч (рис. 1.3.6.).

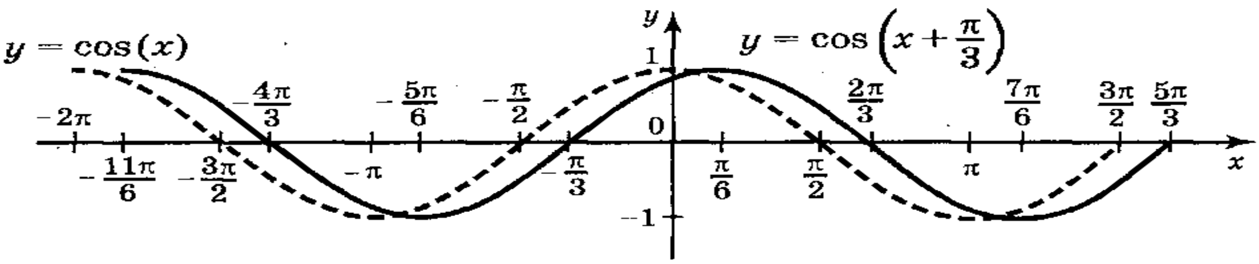


Рис. 1.3.6.Графік функції $y = cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

Функція спадає на кожному з проміжків $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{7\pi}{6} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$, і зростає на кожному з проміжків $\left(-\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$.

1.3.4. Графік функції *y = tgx* та пов'язані з ним властивості функції

Графік функції $y = tgx$ - тангенсоїда (рис. 1.3.7.)

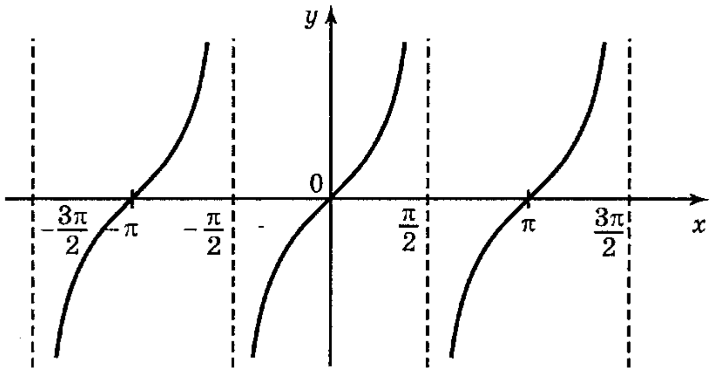


Рис. 1.3.7. Графік функції $y = tgx$

1°. [9, 260] Область визначення $D(tgx)$: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, k є Z. Область значень: $y \in R$, $E\ (tgx) = R$.

2°. [9, 261] Функція непарна: *tg (-x)* = - *tg x* (графік симетричний відносно початку координат).

3°. [9, 261] Функція періодична з періодом $T = \pi$: $tg\,(x+\pi k) = tgx$, k є Z.

4°. [9, 261] Точки перетину з осями координат:

$$Oy: \begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases} \qquad Ox: \begin{cases} y = 0, \\ x = \pi k, \ k \in Z. \end{cases}$$

5°. [9, 261] Проміжки знакосталості функції $y = tgx$:

$$tgx > 0 \text{ при } x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in Z,$$

$$tgx < 0 \text{ при } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in Z.$$

6°.[9, 261] Проміжки зростання і спадання функції $y = tgx$.

Функція зростає на кожному з проміжків своєї області визначення, тобто на кожному з проміжків $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k;\right)$, $k \in Z$.

7°. [9, 261] Найбільшого і найменшого значення функція не має.

Приклад 1.3.7. Побудуйте графік функції$y = tg\,(-x)$.

Розв'язання. Графік функції $y = tg\,(-x)$ одержуємо симетричним відображенням графіка функції $y = tgx$ відносно осі Ox (рис. 1.3.8.).

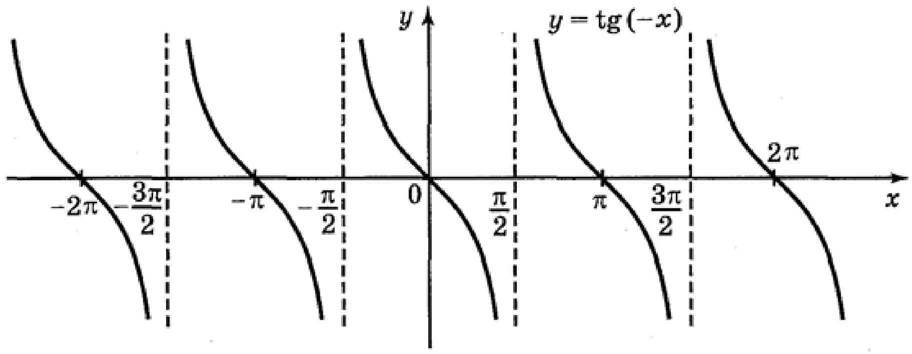


Рис. 1.3.8.Графік функції $y = tg\,(-x)$

Функція спадає на кожному з проміжків $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k;\right)$, $k \in Z$.

1.3.5. Графік функції *y = ctgx* та пов'язані з ним властивості функції

Графік функції *y = ctgx* - котангенсоїда (рис. 1.3.9.)

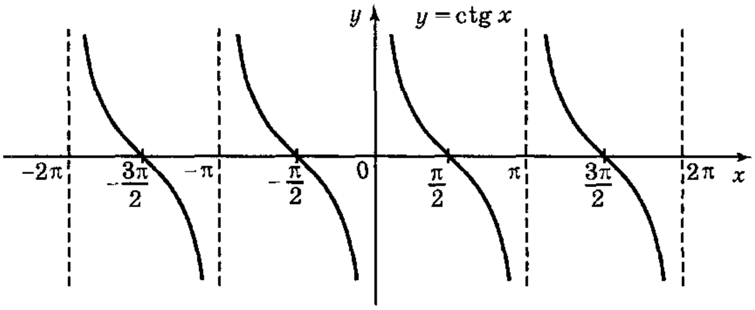


Рис.1.3.9. Графік функції *y = ctgx*

1°.[9, 264] Область визначення: $D(ctgx)$: $x \neq \pi k, k \in Z$. Область значень: $y \in R$. $E(ctgx) = R$.

2°.[9, 264] Функція непарна: $ctg(-x) = -ctgx$, графік симетричний відносно початку координат.

3°. [9, 264] Функція періодична з періодом $T = \pi$: $ctg(x + \pi k) = ctgx, k \in Z$.

4°. [9, 264] Точки перетину з осями координат:

$$Oy\text{: немає,} \quad Ox\text{: } \begin{cases} y = 0, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \end{cases}$$

5°. [9, 264] Проміжки знакосталості функції *y = ctgx*:

$$ctgx > 0 \text{ при } x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in Z,$$

$$ctgx < 0 \text{ при } x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k;\right), k \in Z.$$

6°. [9, 264] Проміжки зростання і спадання функції *y = ctg x*.

Функція *y = ctgx* спадає на кожному з проміжків своєї області визначення, тобто на кожному з проміжків $(\pi k; \pi + \pi k)$, $k \in Z$.

7°. [9, 264] Найбільшого і найменшого значення функція не має.

Приклад 1.3.8. Побудуйте графік функцій *y = -2 ctg x*.

Розв'язання. Графік функції *y = -2ctgx* одержуємо симетричним відображенням графіка функції *y = ctgx* відносно осі *Ox* (рис. 1.3.10.), та розтягуванням його в 2 рази вздовж осі *Oy*.

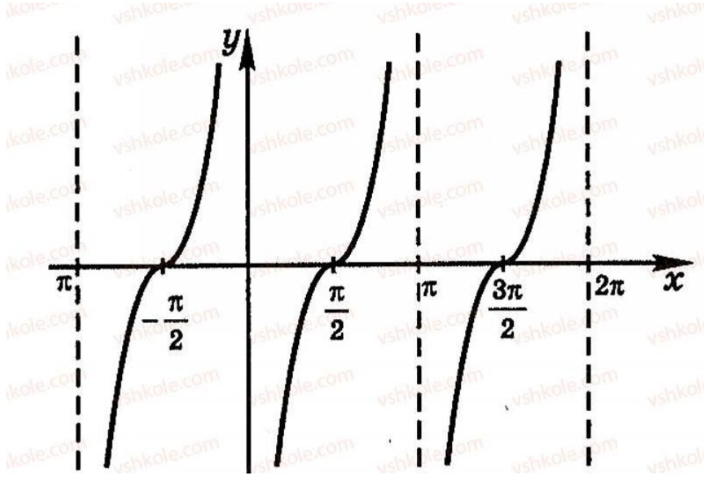


Рис. 1.3.10. Графік функції *y = -2 ctg x*

Функція зростає на кожному з проміжків $[\pi k;\ 2\pi + \pi k;]$, $k \in Z$.

1.4. Тригонометричні тотожності та їх застосування. Формули додавання

1.4.1. Косинус суми і різниці

Нехай $\alpha > \beta$ і $\alpha - \beta < \pi$. При повороті на кут α початковий радіус OP_0 одиничного кола перейшов у радіус OP_α, $P_\alpha\ (x;\ y)$ (рис.1.4.1.). Оскільки $x = \cos\alpha;\ y = \sin\alpha$, то маємо вектор $\overline{OP}_\alpha\ (\cos\alpha;\ \sin\alpha)$. Аналогічно $\overline{OP}_\beta\ (\cos\beta;\ \sin\beta)$.

Тоді: $\overline{OP}_\alpha \cdot \overline{OP}_\beta = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

З іншого боку: $\overline{OP}_\alpha \cdot \overline{OP}_\beta = |\overline{OP}_\alpha| \cdot |\overline{OP}_\beta| \cdot \cos\angle P_\alpha O P_\beta$.

Але $|\overline{OP}_\alpha| = 1;\ |\overline{OP}_\beta| = 1;\ \angle P_\alpha O P_\beta = \alpha - \beta$. Тому

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

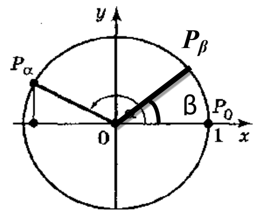


Рис.1.4.1.

Аналогічно розглядають і випадки, коли $\alpha < \beta$ і $\alpha - \beta > \pi$.

З формули $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ маємо: $\cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha + \beta)$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$ [20, 225]

Приклад 1.4.1. Знайдіть значення виразу $\cos 37°\cos 23° - \sin 37°\sin 23°$.

Розв'язання. $\cos 37°\cos 23° - \sin 37°\sin 23° = \cos(37° + 23°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$.

Відповідь. $\frac{1}{2}$.

1.4.2. Синус суми і різниці

$$\sin(\alpha-\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\beta)\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta.$$

Аналогічно $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha-(-\beta))=\sin\alpha\cdot\cos(-\beta)-\cos\alpha\cdot\sin(-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta++\cos\alpha\cdot\sin\beta$;

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta++\cos\alpha\sin\beta$$ [20, 226].

Приклад 1.4.2. Обчисліть sin 15°.

Розв'язання. $\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}==\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Відповідь. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

1.4.3. Тангенс різниці і суми

Якщо виразити $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$ через $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{tg}\beta$ за умови, що кожен із цих виразів має зміст, тобто за умови, що $\cos(\alpha-\beta)\neq 0$, $\cos\alpha\neq 0$, $\cos\beta\neq 0$, то будемо мати:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}.$$

Поділимо чисельник і знаменник на $\cos\alpha\cdot\cos\beta\neq 0$.

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}.$$

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\,\alpha-tg\,\beta}{1+tg\,\alpha\,tg\,\beta}.$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}(\alpha-(-\beta))=\frac{tg\,\alpha-tg\,(-\beta)}{1+tg\,\alpha\,tg\,(-\beta)}=\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\,tg\,\beta}.$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\,tg\,\beta}$$ [20, 227].

Приклад 1.4.3. Обчислити $\frac{tg\,42^\circ+tg\,18^\circ}{1-tg\,42^\circ\,tg\,18^\circ}$.

Розв'язання. $\frac{tg\,42^\circ+tg\,18^\circ}{1-tg\,42^\circ\,tg\,18^\circ}=\operatorname{tg}(42^\circ+18^\circ)=\operatorname{tg}60^\circ=\sqrt{3}$.

Відповідь. $\sqrt{3}$

1.4.4. Формули подвійного кута

Синус подвійного кута

З формули$sin\ (\alpha+\beta) = sin\alpha\cdot cos\beta + + cos\alpha\cdot sin\beta$, якщо α = β, то

$$sin\ (\alpha + \alpha) = sin\ \alpha\cdot cos\ \alpha + + cos\ \alpha\ \cdot sin\ \alpha, \Rightarrow$$

$$sin\ 2\alpha = 2\ sin\alpha\ \cdot cos\ \alpha$$ [20, 234].

Косинус подвійного кута

Аналогічно $cos(\alpha + \beta) = cos\alpha\ \cdot cos\beta - sin\alpha\cdot sin\beta$, якщо α = β, то

$$cos(\alpha + \alpha) = cos\alpha\ \cdot cos\alpha - sin\alpha\cdot sin\alpha, \Rightarrow$$

$cos\ 2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha;\ cos\ 2\alpha = 1 - 2\ sin^2\alpha;\ cos\ 2\alpha = 2\ cos^2\alpha - 1$ [20, 235].

Тангенс подвійного кута

З формули $tg\ (\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}$, ,якщо α = β, то $tg\ (\alpha+\alpha) = \frac{tg\alpha + tg\alpha}{1 - tg\alpha tg\alpha} \Rightarrow$

$$tg\ 2\alpha = \frac{2\ tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$ [20, 235].

Приклад 1.4.3. Обчислити 1) $\cos^2\frac{3\pi}{8} - \sin^2\frac{3\pi}{8}$; 2) sin 45° ·cos 45°.

Розв'язання. 1) $\cos^2\frac{3\pi}{8} - \sin^2\frac{3\pi}{8} = \cos\left(2\cdot\frac{3\pi}{8}\right) = \cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} =$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\sin 45°\cos 45° = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sin 45°\cos 45° = \frac{1}{2}\sin(2\cdot 45°) = \frac{1}{2}\sin 90° = \frac{1}{2}$.

Відповідь.1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$.

1.4.5. Формули пониження степеня

Якщо з формули $cos\ 2\alpha = 1 - 2\ sin^2\alpha$ виразимо $sin^2\alpha$, а з формули $cos\ 2\alpha = 2\ cos^2\alpha - 1$ виразимо $cos^2\alpha$, то отримаємо:

$$sin^2\alpha = \frac{1 - cos2\alpha}{2};\ cos^2\alpha = \frac{1 + cos2\alpha}{2}.$$

Оскільки $tg^2\alpha = \frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha} = \frac{\frac{1 - cos2\alpha}{2}}{\frac{1 + cos2\alpha}{2}} = \frac{1 - cos2\alpha}{1 + cos2\alpha}$, при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ і $2\alpha \neq \frac{\pi}{2} + +\pi k, k \in Z$

маємо:

$$tg^2\alpha = \frac{1 - cos2\alpha}{1 + cos2\alpha}$$ [20, 236].

Приклад 1.4.4. Виконайте пониження степеня у виразі: 1) $\cos^2 3\alpha$; 2) $\sin^2\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)$; 3) $\mathrm{tg}^2\left(\alpha+\frac{3\pi}{4}\right)$.

Розв'язання. 1) $\cos^2 3\alpha = \frac{1+\cos(2\cdot3\alpha)}{2} = \frac{1+\cos 6\alpha}{2}$;

2) $\sin^2\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right) = \frac{1-\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right)}{2} = \frac{1+\sin 2\alpha}{2}$;

3) $\mathrm{tg}^2\left(\alpha+\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1-\cos(2\alpha+\frac{3\pi}{2})}{1+\cos(2\alpha+\frac{3\pi}{2})} = \frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$.

Відповідь. 1) $\frac{1+\cos 6\alpha}{2}$; 2) $\frac{1+\sin 2\alpha}{2}$; 3) $\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$.

1.4.6. Формули перетворення суми і різниці однойменних тригонометричних функцій на добуток

Додамо формули додавання: $\sin(x+y)+\sin(x-y) = \sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y + \sin x\cos y - \cos x\sin y = 2\sin x\cos y$.

Нехай $x+y=\alpha$ а $x-y=\beta$. Тоді $2x=\alpha+\beta$; $2y=\alpha-\beta \Rightarrow x=\frac{\alpha+\beta}{2}$; $y=\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Зробимо заміну у виразі $\sin(x+y)+\sin(x-y = 2\sin x\cdot\cos y$, маємо

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

Якщо замінити β на $-\beta$, отримаємо:

$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Аналогічно можна отримати формули суми та різниці косинусів:

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

Для суми тангенсів маємо:

$$tg\alpha+tg\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Замінимо β на $(-\beta)$, враховуючи, що $tg(-\beta) = -tg\,\beta$, маємо:

$$tg\,\alpha - tg\,\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$ [20, 245].

Приклад 1.4.5. Подайте вираз у вигляді добутку: 1) cos 36° −cos 18°; 2) cos 32° + sin 40°

Розв'язання.1) $\cos 36° - \cos 18° = -2\sin\frac{36°+18°}{2}\sin\frac{36°-18°}{2} = -2\sin 27° \cdot \sin 9°$;

2) $\cos 32° + \sin 40° = \sin 58° + \sin 40° = 2\sin 49° \sin 9°$.

Відповідь.1) $-2\sin 27° \cdot \sin 9°$; 2) $2\sin 49° \sin 9°$.

1.4.7. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму

Додамо формули косинус різниці та косинус суми кутів:

$$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) =$$

$$= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = 2\cos\alpha\cos\beta \Rightarrow$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)).$$

Віднімемо від косинуса різниці кутів косинус суми кутів:

$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = = 2\sin\alpha\sin\beta \Rightarrow$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta));$$

Додамо формули додавання: $\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) =$

$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta = 2\sin\alpha\cdot\cos\beta \Rightarrow$

$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$ [20, 249].

Приклад 1.4.6. Спростити вираз: 2 cos7x·cos 5x – cos 2x.

Розв'язання. $2\cos 7x\cdot\cos 5x - \cos 2x = 2\,\frac{1}{2}(\cos(7x - 5x) + \cos(7x + 5x)) - \cos 2x =$

$= \cos 2x + \cos 12x - \cos 2x = \cos 12x$.

Відповідь. cos 12x.

1.4.8. Формули половинного кута

Якщо у формулах

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2};\quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2};\ tg^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha},$$

замість кута α підставити кут $\frac{\alpha}{2}$ отримаємо формули половинного кута:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2};\quad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2};\ tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}; \Rightarrow$$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{2}}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+cos\alpha}{2}}$; $\text{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}}$ (знак перед радикалом залежить від того, в якій координатній чверті знаходиться кут $\frac{\alpha}{2}$).

Для $tg\frac{\alpha}{2}$ існує ще дві формули, адже

$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{sin\frac{\alpha}{2}}{cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\,sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}}{2\,cos^{2}\frac{\alpha}{2}} = \frac{sin\,\alpha}{1+\,cos\alpha}$; $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{sin\frac{\alpha}{2}}{cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\,sin^{2}\frac{\alpha}{2}}{2\,sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\,cos\alpha}{sin\,\alpha}$.

Отже, $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{sin\,\alpha}{1+\,cos\alpha}$ ($\alpha \neq \pi k,\ k \in$ Z); $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\,cos\alpha}{sin\,\alpha}$ *($\alpha \neq \pi + 2\pi k,\ k \in Z$).*

А, $ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{1+cos\alpha}{sin\alpha}$ *($\alpha \neq \pi k,\ k \in Z$);* $ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{sin\alpha}{1-cos\alpha}$ *($\alpha \neq 2\pi k,\ k \in Z$)* [20, 237] .

Приклад 1.4.7. Обчислити 1) cos 15°; 2) sin 15°; 3) tg 15°.

Розв'язання. 1) $\cos 15° = \sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$;

2) $\sin 15° = \sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$;

3) $\text{tg}\ 15° = \frac{1-\cos 30°}{\sin 30°} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = 2-\sqrt{3}$.

Відповідь. 1) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; 3) $2-\sqrt{3}$.

1.4.9. Формули потрійного кута

Застосуємо наступні перетворення: $sin\ 3\alpha = sin\ (2\alpha+\alpha) =$

$= sin\ 2\alpha \cdot cos\alpha + cos\ 2\alpha \cdot sin\alpha = 2\ sin\ \alpha \cdot cos^{2}\alpha + (1-2\ sin^{2}\alpha)\cdot sin\alpha =$

$= 2\ sin\ \alpha \cdot (1-sin^{2}\alpha) + (1-2\ sin^{2}\alpha)\cdot sin\alpha = 3sin\alpha - 4\ sin^{3}\alpha.$

Отже,

$$sin\ 3\alpha = 3\ sin\alpha - 4\ sin^{3}\alpha.$$

$cos\ 3\alpha = cos(2\alpha+\alpha) = cos\ 2\alpha \cdot cos\alpha - sin\ 2\alpha \cdot sin\ \alpha = (2\ cos^{2}\alpha - 1)\cdot cos\alpha -$

$-\ 2\ sin^{2}\alpha \cdot cos\alpha = (2\ cos^{2}\alpha - 1)\cdot cos\alpha - 2\cdot(1-cos^{2}\alpha)\cdot cos\alpha = 4\ cos^{2}\alpha - 3\ cos\alpha.$

Отже, $cos\ 3\alpha = 4\ cos^{2}\alpha - 3\ cos\alpha.$

$tg\,3\alpha = tg\,(2\alpha + \alpha) = \frac{tg2\alpha + tg\alpha}{1 - tg\,2\alpha \cdot tg\alpha} = \frac{\frac{2\,tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} + tg\alpha}{1 - \frac{2\,tg^2\alpha}{1 - tg^2\alpha}} = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3\,tg^2\alpha}, (\alpha \neq \frac{\pi}{6}(2k+1), k \in Z).$

$$\text{Отже, } tg\,3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3\,tg^2\alpha}.$$

$ctg\,3\alpha = \frac{1}{tg\,3\alpha} = \frac{1 - 3\,tg^2\alpha}{3tg\alpha - tg^3\alpha} = \frac{1 - \frac{3}{ctg^2\alpha}}{\frac{3}{ctg\alpha} - \frac{1}{ctg^3\alpha}} = \frac{(ctg^2\alpha - 3)ctg\alpha}{3ctg^2\alpha - 1} = \frac{3\,ctg\alpha - ctg^3\alpha}{1 - 3ctg^2\alpha},\ (\alpha \neq \frac{\pi k}{3}, k \in Z).$

Отже, $ctg\,3\alpha = \frac{3\,ctg\alpha - ctg^3\alpha}{1 - 3ctg^2\alpha}$ [20, 239].

Приклад 1.4.8. Доведіть тотожність: $\frac{\cos^3\alpha - \cos 3\alpha}{\cos\alpha} + \frac{sin^3\alpha + sin3\alpha}{\sin\alpha} = 3.$

Розв'язання. $\frac{\cos^3\alpha - \cos 3\alpha}{\cos\alpha} + \frac{sin^3\alpha + sin3\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\cos^3\alpha - (4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)}{\cos\alpha} + \frac{sin^3\alpha + 3sin\,\alpha - 4sin^3\alpha}{\sin\alpha}$

$= \frac{3\cos\alpha - 3cos^3\alpha}{\cos\alpha} + \frac{3\sin\alpha - 3\sin^3\alpha}{\sin\alpha} = \frac{3\cos\alpha\,(1 - cos^2\alpha)}{\cos\alpha} + \frac{3\sin\alpha\,(1 - sin^2\alpha)}{\sin\alpha} =$

$= 3\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha = = 3(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 3.$

Тотожність доведено.

1.4.10. Формули, які дають раціональний вираз тригонометричних функцій через тангенс половинного кута

$sin\alpha = 2sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2} = 2\,tg\frac{\alpha}{2}cos^2\frac{\alpha}{2} = 2\,tg\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}}, (\alpha \neq \pi + 2\pi k, k \in Z);$

$$sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}}..$$

$cos\alpha = 2\,cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = 2 \cdot \frac{1}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}} - 1 = \frac{2 - \left(1 + tg^2\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}},\ (\alpha \neq \pi + 2\pi k, k \in Z);$

$$cos\,\alpha = \frac{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}}.$$

$$tg\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}, (\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \alpha \neq \pi + 2\pi k, k \in Z);$$

$ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}{2tg\frac{\alpha}{2}}\ (\alpha \neq k, k \in Z)$ [20, 239].

Приклад 1.4.9. Знайти:1) sin 2α; 2) cos 2α, якщо $tg\frac{\alpha}{2} = 2.$

Розв'язання. $sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \cdot 2}{1 + 2^2} = \frac{4}{5};\ cos\alpha = \frac{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - 2^2}{1 + 2^2} = -\frac{3}{5}.$

1) $sin\ 2\alpha = 2\ sin\alpha \cdot cos\alpha = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(-\ \frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$;

2) $cos\ 2\alpha = 1 - 2\ sin^2\alpha = 1 - 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = -\frac{7}{25}$.

Відповідь. 1) $\sin 2\alpha = -\frac{24}{25}$; 2) $\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$.

1.4.11. Метод допоміжного кута

Крім основних формул тригонометрії, при розв'язуванні задач часто використовують метод введення допоміжного кута для виразів виду

$c = a\ sin\alpha + b\ cos\alpha$, де $a \neq 0,\ b \neq 0$. Цей вираз можна перетворити у добуток у такий спосіб:

$$c = a \cdot sin\alpha + b \cdot cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a\ sin\alpha + b cos\alpha}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} sin\,\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} cos\,\alpha\right) = \sqrt{a^2+b^2}(cos\varphi sin\alpha + sin\varphi cos\alpha)$$

$== \sqrt{a^2+b^2} sin\ (\alpha+\varphi)$, *де* $cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (такий кут φ існує, оскільки $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$).

Таким чином, $a \cdot sin\alpha + b \cdot cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2} sin\ (\alpha+\varphi)$, де аргумет φ визначається із співвідношень: $cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\left(tg\ \varphi = \frac{b}{a}\right)$ [20,227].

Приклад 1.4.10. Знайдіть усі значення параметра *a,* при яких можлива рівність: 12sin 4x – 5cos 4x = a.

Розв'язання. 12 sin 4x – 5cos 4x = a;

$\sqrt{12^2+5^2} = 13$;

12 sin 4x – 5 cos 4x = $13\left(\frac{12}{13}\sin 4x - \frac{5}{13}\cos 4x\right) =$

= 13(cos α sin 4x − cos 4x sin α) = 13 sin (4x – α), 13 sin (4x – α) = a

sin (4x – α) = $\frac{a}{13}$, $-1 <$ sin (4x – α) < 1 ⇒ $-1 < \frac{a}{13} < 1$, $-13 \le a \le 13$.

Відповідь. $-13 \le a \le 13$.

1.5. Тригонометричні рівняння

1.5.1. Обернені тригонометричні функції та їх властивості

Функції, обернені функціям *y = sinx, y = cosx, y = tgx, y = ctgx* на відповідних інтервалах монотонності, називають *оберненими триногонометричними функціями.* Вони позначаються: *y = arcsinx, y = arccosx, y = arctgx, y = arcctgx.*

Функція *y = arcsinx* та її графік (рис.1.5.1.)

Означення 1.5.1. [20, 256] Функцію, обернену до функції *y = sinx,* де *x* є $\left[-\frac{\pi}{2};\,\frac{\pi}{2}\right]$, називають арксинусом і позначають *y = arcsinx.*

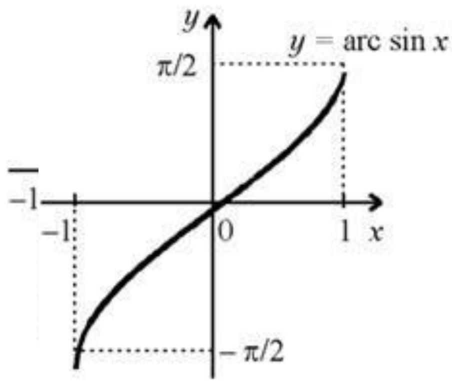


Рис. 1.5.1. Графік функції *y = arcsinx*

1°. Область визначення функції*: D (arcsinx)* = $= [-1; 1]$. Область значення функції: *E (arcsinx)* = $= \left[-\frac{\pi}{2};\,\frac{\pi}{2}\right]$.

2°. Функція *y = arcsinx* зростає на всій області визначення.

3°. Функція *y = arcsinx* є непарною, тобто *arcsin(–x) =* $-$*arcsinx.*

Означення 1.5.2. [20, 257] *Арксинусом числа a*, де $|a| \leq 1$, називають такий кут із проміжка $\left[-\frac{\pi}{2};\,\frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює *a*: *sin (arcsina) = a* при a є $[-1; 1]$.

Приклад 1.5.1. Обчислити:1) arcsin0 + arcsin$\frac{1}{\sqrt{2}}$ + arcsin$\frac{\sqrt{3}}{2}$ + arcsin 1; 2) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{7}\right)$.

Розв'язання. 1) Оскільки arcsin 0 = 0, arcsin $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$, arcsin $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, arcsin 1 = $\frac{\pi}{2}$, то дістанемо $0 + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{13\pi}{12}$.

2) Оскільки $\frac{\pi}{7}$ є $\left[-\frac{\pi}{2};\,\frac{\pi}{2}\right]$, то $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{7}$.

Відповідь. 1) $\frac{13\pi}{12}$; 2) $\frac{\pi}{7}$.

Функція *y = arccosx* та її графік (рис. 1.5.2.)

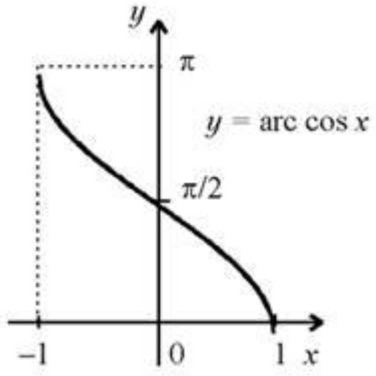


Рис. 1.5.2. Графік функції *y = arccosx*

Означення 1.5.3. [20, 259]Функцію, обернену до функції $y = cosx$, $x \in [0; \pi]$, називають арккосинусом і позначають $y = arccosx$.

1°. Область визначення функції: $D(arccosx)=$ $=[-1; 1]$. Область значення функції: $E\ (arccosx) = [0; \pi]$.

2°. Функція $y = arccosx$ спадає на всій області визначення.

3°. $arccos\ (-x) = \pi - arccosx$, тобто функцію$y = arccosx$ ні парна, ні непарна.

Означення 1.5.4. [20, 259] *Арккосинусом числа а,* де $|a| \leq 1$, називають такий кут із проміжку [0; π], косинус якого дорівнює a: $cos\ (arccosa) = a$, при $a \in [-1; 1]$.

Приклад 1.5.2. Обчислити: 1) $\arccos(-1) - \arccos 1 - \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $\arccos\left(\cos\frac{\pi}{7}\right)$.

Розв'язання. 1) Оскільки, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$, $\arccos 1 = 0$, $\arccos(-1) = \pi$, то дістанемо $\pi - 0 - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$.

2) Оскільки $\frac{\pi}{7} \in [0; \pi]$, то $\arccos\left(\cos\frac{\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{7}$.

Відповідь. 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{7}$.

Функція *y = arctgx* та її графік (рис. 1.5.3.)

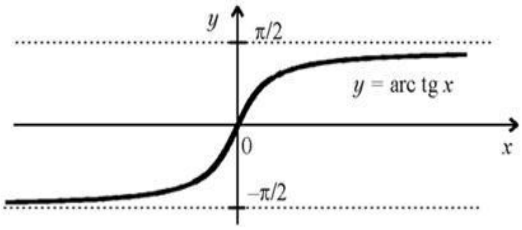


Рис. 1.5.3. Графік функції *y = arctgx*

Означення 1.5.5. [20, 259] Функцію, обернену до функції $y = tgx$, де $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, називають арктангенсом і позначають $y = arctgx$.

1°. Область визначення функції*: D(arctgx)* = =$(-\infty; \infty)$. Область значення функції: *E (arctgx)* = $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

2°. Функція *y = arctgx* зростає на всій області визначення.

3°. *arctg (−x) = −arctgx,* тобто функція *y = arctgx* є непарною.

Означення 1.5.6. [20, 261] *Арктангенсом числа a*, де *a* – будь-яке число, називають такий кут із проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює *a*: *tg(arctga) = a,* при *a* ∈ $(-\infty; \infty)$.

Приклад 1.5.3. Обчислити:

1) $\mathrm{arctg}0 + \mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \mathrm{arctg}\sqrt{3}$ +arctg 1;

2) $\mathrm{arctg}\left(\mathrm{ctg}\frac{\pi}{7}\right)$.

Розв’язання. 1) Оскільки, arctg0 = 0, $\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$, $\mathrm{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, arctg 1 = $\frac{\pi}{4}$, то дістанемо $0 + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$.

2) Оскільки $\frac{\pi}{7}$ є $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\mathrm{arctg}\left(\mathrm{ctg}\frac{\pi}{7}\right) = \mathrm{arctg}\left(tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right)\right) = \mathrm{arctg}\left(tg\ \frac{5\pi}{14}\right) =$ $= \frac{5\pi}{14}$.

Відповідь. 1) $\frac{3\pi}{4}$; 2) $\frac{5\pi}{14}$.

Функція *y = arcctgx* та її графік (рис. 1.5.4.)

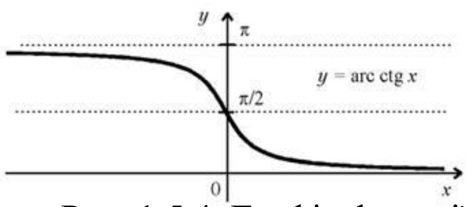


Рис. 1.5.4. Графік функції *y = arctgx*

Означення 1.5.7. [20, 262] Функцію, обернену до функції *y = ctgx, x* є (0; π), називають арккотангенсом і позначають *y = arcctgx.*

1°. Область визначення функції*: D (arcctgx)* = $(-\infty; \infty)$. Область значення функції: *E (arcctgx)* = (0; π).

2°. Функція *y = arcctgx* спадає на всій області визначення.

3°. *arcctg (−x) =π – arcctgx,* тобто функція *y = arctgx* ні парна, ні непарна.

Означення 1.5.8. [20, 262] Арккотангенсом числа *a*, де *a* – будь-яке число, називають такий кут із проміжку (0; π), котангенс якого дорівнює *a*: *ctg (arcctga) = a* при а є $(-\infty; \infty)$.

Приклад 1.5.4. Обчислити:1) arcctg0 +arcctg$\frac{1}{\sqrt{3}}$ +arcctg$\sqrt{3}$+ arcctg 1;

2) cos (arcctg (-1)).

Розв'язання. 1) Оскільки, arcctg0 = $\frac{\pi}{2}$, arctg$\frac{1}{\sqrt{3}}$ = $\frac{\pi}{3}$, arctg$\sqrt{3}$ = $\frac{\pi}{6}$, arctg 1 = $\frac{\pi}{4}$, то дістанемо $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{15\pi}{12} = \frac{5\pi}{4}$.

2) Оскільки arcctg (-1) = $\frac{3\pi}{4}$, то cos (arcctg (-1)) = cos$\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Відповідь. 1) $\frac{5\pi}{4}$; 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Проведемо огляд способів розв'язування тригонометричних рівнянь.

1.5.2. Найпростіші тригонометричні рівняння

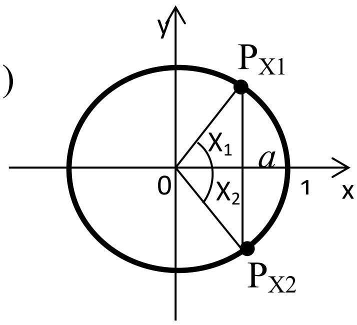


Рис. 1.5.5.

Рівняння *cosx = a* (рис. 1.5.5.)

При |a|>1, *x є ∅*,

|a| ≤ 1, *x =± arccosa +2πn, n∈ Z.*

Окремі випадки розв'язування рівняння *cosx = a*.

$$cosx = 0;\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z;$$

$$cosx = 1;\ x = 2\pi k,\ k \in Z;$$

$$cosx = -1;\ x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Приклад 1.5.5. Розв'яжіть рівняння: 1) cosx = $\frac{1}{2}$; 2) cos 2x = $\frac{1}{2}$; 3) cos $(\frac{\pi}{6} - 2x) = -1$; 4) cosx = $\sqrt{5}$;

Розв'язання. 1) cosx = $\frac{1}{2}$;

$$x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

2) $\cos 2x = \frac{1}{2}$;

$$2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$$

3) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -1$;

$$\frac{\pi}{6} - 2x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$-2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$x = \frac{-5\pi}{12} \pm \pi n,\ n \in Z.$$

4) $\cos x = \sqrt{5}$, $x \in \emptyset$, бо $\sqrt{5} > 1$.

Відповідь. 1) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$; 2) $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; 3) $x = \frac{-5\pi}{12} \pm \pi n$, $n \in Z$; 4) $x \in \emptyset$;

Рівняння *sinx* = *a* (рис. 1.5.6.)

При $|a|>1$, $x \in \emptyset$

$|a| \le 1$, $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z.$

Окремі випадки розв'язування рівняння *sinx = a*

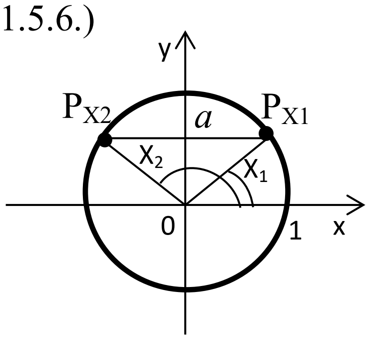


Рис. 1.5.6.

$$\sin x = 0,\ x = \pi n,\ n \in Z;$$

$$\sin x = 1,\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$\sin x = -1,\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z;$$

Приклад 1.5.6. Розв'яжіть рівняння: 1) $\sin x = \frac{1}{2}$; 2) $\sin x = -2$; 3) $\sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}\right) = \sqrt{3}$.

Розв'язання. 1) $\sin x = \frac{1}{2}$;

$$x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$$

2) $\sin x = -2$, $x \in \emptyset$, бо $-2 < -1$.

3) $\sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$2x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi n,\ n \in Z;$$

$$2x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z.$$

4) $2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}\right) = \sqrt{3}$;

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$-\sin\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sin\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3} = (-1)^n \arcsin -\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3} = (-1)^n\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n,\ n \in Z;$$

$$\frac{x}{4} = \frac{\pi}{3} + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n = \frac{\pi}{3}\left(1+(-1)^{n+1}\right) + \pi n,\ n \in Z;$$

$$x = = \frac{4\pi}{3}\left(1+(-1)^{n+1}\right) + 4\pi n,\ n \in Z.$$

Відповідь. 1) $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; 2) $x \in \emptyset$; 3) $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 4) $x = = \frac{4\pi}{3}\left(1+(-1)^{n+1}\right) + 4\pi n$, $n \in Z$.

Рівняння *tgx = a, ctgx = a*

tgx = a, x = arctg a + πn, n∈ Z;

ctgx = a, x = arcctg a + πn, n∈ Z;

Окремі випадки розв'язування рівнянь *tgx = a, ctgx = a*

tgx = 0, x = πn, n∈ Z;

ctgx =0, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$*, n∈ Z;*

Приклад 1.5.7. Розв'яжіть рівняння: 1) tg 3x = 1; 2) $\text{ctg}^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}$.

Розв'язання. 1) tg 3x = 1;

$$3x = \text{arctg } 1 + \pi n,\ n \in Z;$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3},\ n \in Z.$$

2) $ctg^2(2x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{3}$;

$$ctg\,(2x - \frac{\pi}{4}) = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{4} = \mathrm{arcctg}\,\frac{\sqrt{3}}{3} + \pi n, n \in Z; \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \mathrm{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi k, k \in Z; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z; \\ 2x = \frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3} + \pi k, k \in Z; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z; \\ x = \frac{11\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь. 1)$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$; 2) $x_1 = \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$; $x_2 = \frac{11\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$.

1.5.2. Розв’язування тригонометричних рівнянь, які відрізняються від найпростіших

1) **Заміна змінних при розв’язуванні тригонометричних рівнянь** [9, 335]

Якщо до рівняння, нерівності або тотожності змінна входить в одному і тому самому вигляді, то відповідний вираз зі змінною зручно позначити однією буквою (новою буквою). Розв’язавши отримане рівняння, перейти до розв’язування найпростіших тригонометричних рівнянь.

Приклад 1.5.8. Розв’язати рівняння: 1) $4\cos^2 x + 4\cos x + 1 = 0$; 2) $\sqrt{5 - 4tgx} = tgx$.

Розв’язання. 1) $4\cos^2 x + 4\cos x + 1 = 0$:

Нехай $cosx = t$, $|t| \leq 1$, тоді маємо рівняння:

$$4t^2 + 4t + 1 = 0;$$

$(2t + 1)^2 = 0;$

$2t + 1 = 0;$

$t= -\frac{1}{2};$

$\cos x = -\frac{1}{2};$

$x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) +2\pi n,\ n \in Z;$

$x = \pm\frac{2\pi}{3} +2\pi n,\ n \in Z.$

2) Нехай *tg x = t*, тоді маємо рівняння $\sqrt{5-4t} = t$, яке рівносильне системі:

$$\begin{cases} 5-4t = t^2 \\ t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} t^2+4t-5 = 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$t_1 = 1$; $t_2 = -5$ (сторонній корінь)

$\text{tg}\, x = 1;$

$x = \text{arctg}\, 1 + \pi n,\ n \in Z;$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

Відповідь. 1) $x = \pm\frac{2\pi}{3} +2\pi n,\ n\in Z$; 2) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$.

2) Розв’язування тригонометричних рівнянь зведенням до однієї функції (з однаковим аргументом).

Цей спосіб розв’язування тригонометричних рівнянь базується на тотожних перетвореннях тригонометричних виразів.

Приклад 1.5.9. Розв’язати рівняння: $\text{tg}x + 2\,\text{ctg}x = -3$.

Розв’язання. ОДЗ: $\cos x \neq 0$; $\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n\in Z$

$\text{ctg}x = \frac{1}{\text{tg}x};$

$\text{tg}x + \frac{2}{\text{tg}x} = -3.$

Нехай *tgx = t*, тоді маємо рівняння:

$t + \frac{2}{t} = -3;$

$\frac{t^2+2+3t}{t} = 0;$

$$t^2 + 3t + 2 = 0;$$

$$t_1 = -1;\ t_2 = -2;$$

1) $\operatorname{tg} x = -1;$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;$$

2) $\operatorname{tg} x = -2;$

$$x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi k,\ k \in Z.$$

Відповідь. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$; $x_2 = -\operatorname{arctg} 2 + \pi k,\ k \in Z$.

3) Розв'язування однорідних тригонометричних рівнянь та зведення тригонометричного рівняння до однорідного.

Якщо всі члени рівняння, у лівій і правій частинах якого стоять многочлени від двох змінних (або від двох функцій однієї змінної), мають однаковий сумарний степінь, то рівняння називається однорідним. Розв'язують однорідне рівняння діленням на найвищий степінь однієї зі змінних.

Приклад 1.5.10. Розв'язати рівняння: $\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 0$.

Розв'язання. Розділимо на $\cos^2 x \neq 0$ обидві частини рівняння. Якщо $\cos^2 x = 0$, то рівняння буде мати вигляд $\sin^2 x = 0$, а одночасно $\cos^2 x = 0$ та $\sin^2 x = 0$ не можуть. Будемо мати:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} - \frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0;$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x} - 2 = 0;$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x;\ \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 2 = 0;$$

Нехай $tgx = t$, тоді маємо рівняння:

$$t^2 - t - 2 = 0;$$

$$t_1 = -1,\ t_2 = 2.$$

1) $\operatorname{tg} x = -1;\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$;

2) $\operatorname{tg} x = 2;\ x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k,\ k \in Z.$

Відповідь. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$; $x_2 = \operatorname{arctg} 2 + \pi k,\ k \in Z$.

4) Розв'язування тригонометричних рівнянь виду *f (x) = 0* за допомогою розкладання на множники.

Нехай маємо рівняння *f(x) = 0*, ліву частину якого можна розкласти на множники, тобто звести до вигляду $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)$. Тоді рівняння *f(x) = 0* буде рівносильне сукупності рівнянь виду: $f_1(x) = 0$; $f_2(x) = 0$; $f_n(x) = 0$ за умови урахування його ОДЗ.

Приклад 1.5.11. Розв'язати рівняння: sinx + sin 3x = 0.

Розв'язання. $\sin x + \sin 3x = 2\sin\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2}$;

$$2\sin 2x\cos(-x) = 2\sin 2x\cos x = 0;$$

$$2\sin 2x\cos x = 0 \ |: 2$$

$$\sin 2x\cos x = 0$$

$$\sin 2x = 0 \qquad \text{або} \qquad \cos x = 0$$

$$2x = \pi k,\ k \in Z; \qquad x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$x_1 = \frac{\pi k}{2},\ k \in Z;$$

і разом $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

Відповідь. $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

Приклад 1.5.12. Розв'язати рівняння: 3sinx− 4 cosx = 3.

Розв'язання. $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$; $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$; $1 = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}$;

$$3 \cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 4\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = 3\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right);$$

$$6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 4\cos^2\frac{x}{2} + 4\sin^2\frac{x}{2} - 3\sin^2\frac{x}{2} - 3\cos^2\frac{x}{2} = 0;$$

$$\sin^2\frac{x}{2} + 6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 7\cos^2\frac{x}{2} = 0,$$

Отримали однорідне рівняння. Поділимо його на $\cos^2\frac{x}{2}\left(\cos^2\frac{x}{2} \neq 0\right)$. Маємо:

$$\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} + \frac{6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} - 7\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = 0;$$

$$\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} + 6\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 7 = 0;$$

Нехай *tgx = t*, тоді маємо рівняння:

$$t^2 + 6t - 7 = 0$$

$$t_1 = -7;\ t_2 = 1.$$

1) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -7$; або 2) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1$;

$x = -2\operatorname{arctg} 7 + 2\pi n,\ n \in Z$; $\qquad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Відповідь. $x_1 = -2\operatorname{arctg} 7 + 2\pi n,\ n \in Z$; $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$.

5) Розв'язування тригонометричних рівнянь за допомогою метода допоміжного кута.

Метод уведення допоміжного кута розглянуто в пункті 1.4., Покажемо його застосування до розв'язування рівнянь на прикладі.

Приклад 1.5.13. Розв'язати рівняння: $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$.

Розв'язання. $\sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$;

$$\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1 | : 2;$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2};$$

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6};\ \sin\varphi = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6};$$

$$\cos\frac{\pi}{6}\sin x - \sin\frac{\pi}{6}\cos x = \frac{1}{2};$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2};$$

$$x - \frac{\pi}{6} = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$$

Відповідь. $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$.

1.6. Основні тригонометричні нерівності

Означення 1.6.1. [20, 315] Нерівність, що містить змінну під знаком тригонометричних функцій, називають тригонометричною нерівністю.

Тригонометричні нерівності виду $sinx > a$, $cosx > a$, $tgx > a$, $ctgx > a$ та ті, які отримаємо, якщо в них знак > замінимо на один із знаків <, ≤, ≥ називають найпростішими.

Приклад 1.6.1. Розв’язати нерівність $sinx \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

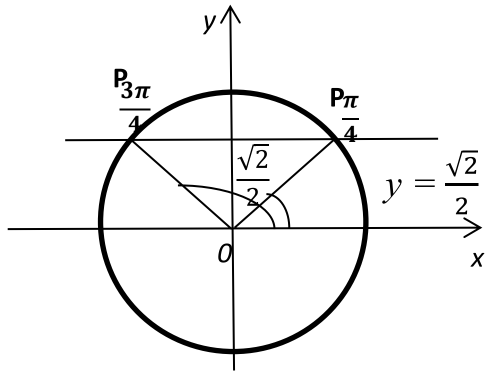


Рис.1.6.1.

Розв’язання. $sinx$ - це ордината точки одиничного кола, що відповідає куту x. На одиничному колі позначимо всі точки, ординати яких більші за $\frac{\sqrt{2}}{2}$, вони лежать вище прямої $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (рис 1.6.1.). Множина таких точок утворює дугу *l*. Якщо рухатися проти годинникової стрілки, тобто в додатньому напрямі, то перша точка дуги *l* відповідає куту $x_1 = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, кінцева $x_2 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

$sinx \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$. Період функції синуса дорівнює 2π, тому множиною розв’язків нерівності є : $\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, k ∈ Z.

Відповідь. $\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in$ Z.

Приклад 1.6.2. Розв’язати нерівність: $cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{2}$.

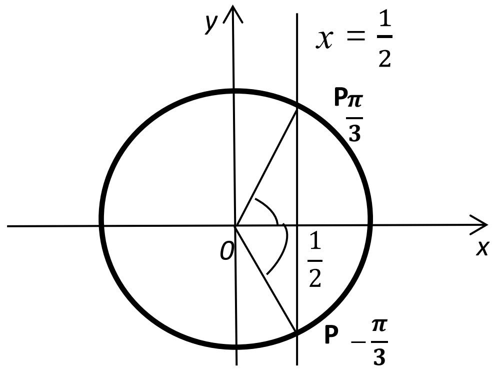


Рис.1.6.2.

Розв’язання. Нехай $x + \frac{\pi}{3} = t$, тоді $cost > \frac{1}{2}$.

На одиничному колі (рис.1.6.2.)

позначимо всі точки, абсциси яких більші за $\frac{1}{2}$.

Всі вони належать дузі *l*, де перша точка відповідає куту $t_1 = -\arccos\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{3}$, остання куту $t_2 = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

$\cos t > \frac{1}{2}; -\frac{\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z.$

Повернемося до заміни:

$-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z,\ -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < x < 2\pi k,\ k \in Z.$

Відповідь. $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < x < 2\pi k,\ k \in Z.$

Для розв'язання нерівностей виду $tgx > a$, $ctgx > a$ використовують лінії тангенсів та котангенсів.

Лінії тангенсів та котангенсів

Означення 1.6.2. [9, 244] Тангенс кута (числа) α – це ордината відповідальної точки на лінії тангенсів.

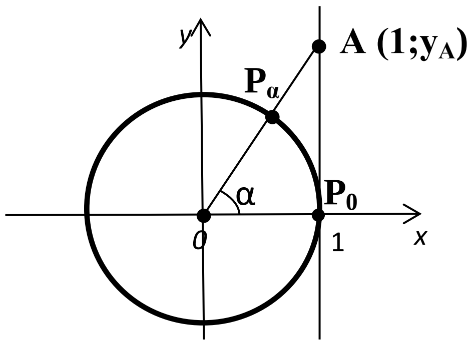


Рис.1.6.3.

Через точку P_0 одиничного кола проведемо пряму AP_0, паралельну осі Oy (рис.1.6.3.). Ця пряма називається *лінією тангенсів.*

Нехай α – довільне число (кут), для якого $\cos\alpha \neq 0$. Тоді точка P_α не лежить на осі Oy і пряма OP_α перетинає лінію тангенсів в точці A.

Рівнянням прямої OP_α є рівняня $y = kx$, тому що пряма OP_α проходить через початок координат. Оскільки дана пряма проходить через точку $P_\alpha(\cos\alpha; \sin\alpha)$, то координати точки P_α задовольняють рівняння прямої $y = kx$, тобто $\sin\alpha = k\cos\alpha$. Тому $k = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha$. Отже, пряма OP_α має рівняння $y = (tg\alpha)x$.

Пряма AP_0 має рівняння $x = 1$. У рівняння прямої OP_α, $y = (tg\alpha)x$, підставимо $x = 1$, маємо $y_A = tg\alpha$.

Означення 1.6.3. [9, 244] Котангенс кута (числа) α – це абсциса відповідної точки на лінії котангенсів.

Поняття про лінію котангенсів вводиться аналогічно до поняття про лінію тангенсів. Пряма CB проходить через точку $C(0; 1)$ одиничного кола паралельно осі Ox (рис.1.6.4.).

Якщо α – довільне число (чи кут), для якого $\sin\alpha \neq 0$, то пряма OP_α перетинає лінію котангенсів у деякій точці В (x_B ;1).

Аналогічно попередньому обґрунтуванню $x_B = ctg\alpha$.

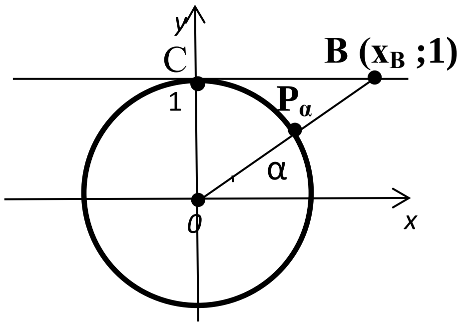


Рис.1.6.4.

Приклад 1.6.3. Розв'язати нерівність $tgx \leq \sqrt{3}$.

Розв'язання. Проведемо лінію тангенсів. Тоді tgx – це ордината точки на лінії тангенсів, що відповідає куту x. На лінії тангенсів позначимо точку, ордината якої дорівнює $\sqrt{3}$ (рис.1.6.5.) . Ця точка відповідає куту $x = arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, точки лінії тангенсів у яких ординати менші за $\sqrt{3}$, відповідають кутам від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{3}$.

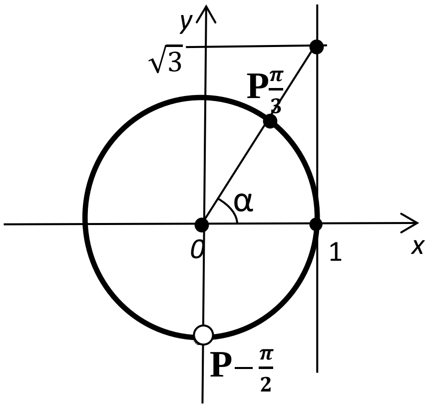


Рис.1.6.5.

На проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ маємо:$-\frac{\pi}{2}< x \leq \frac{\pi}{3}$. Враховуючи період функції тангенс, який дорівнює π, отримаємо:$-\frac{\pi}{2} + \pi k< x \leq \frac{\pi}{3}+ \pi k,\ k \in$ Z.

Відповідь. $-\frac{\pi}{2} + \pi k< x \leq \frac{\pi}{3}+ \pi k,\ k \in$ Z.

Приклад 1.6.4. Розв'язати нерівність $ctgx > -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Розв'язання. Використовуючи лінію котангенсів (рис.1.6.6.), маємо розв'язки нерівності на проміжку (0; π): $0 < x < \frac{2\pi}{3}$. Враховуючи період функції котангенс, маємо: $\pi k< x < \frac{2\pi}{3}+ \pi k,\ k \in$ Z.

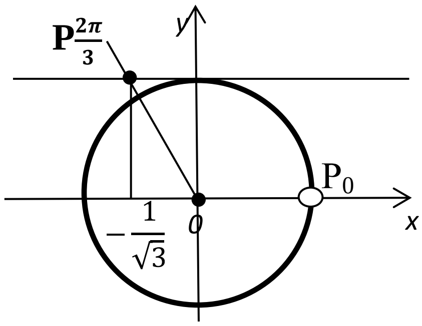


Рис.1.6.6.

Відповідь. $\pi k< x < \frac{2\pi}{3}+ \pi k,\ k \in$ Z.

РОЗДІЛ ІІ. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ НАВЧАННЯ ТРИГОНОМЕТРІЇ В ОСНОВНІЙ І СТАРШІЙ ШКОЛІ

2.1. Реалізація принципу неперервності навчання на прикладі вивчення елементів тригонометрії

У законі України «Про освіту» зазначено, що однією з обов'язкових умов реалізації неперервності навчання є принцип наступності, який у свою чергу має забезпечити єдність, взаємоузгодженість та взаємозв'язок мети, змісту, форм та методів навчання й виховання, враховуючи вікові особливості учнів на суміжних ступенях освіти.

М. М. Волчаста [15, с.6] виділяє такі основні ознаки поняття наступності:

1) послідовність і систематичність викладу навчального матеріалу, поступове зростання його складності;

2) зв'язок і узгодженість змістово – методичних ліній розміщення матеріалу між різними ступенями навчання;

3) узгодженість обсягу навчального матеріалу в початковій, основній та старшій школі;

4) взаємодія нових знань із раніше засвоєними і, на цій основі, досягнення учнями вищого рівня підготовки;

5) використання методів і засобів, що відповідають віковим особливостям учнів на певному етапі навчання.

Вивчення елементів тригонометрії в основній та старшій школі якомога яскравіше демонструє реалізацію принципу неперервності навчання.

Процес вивчення тригонометрії в основній та старшій школі можна розділити на два етапи: 1) початкове ознайомлення з тригонометричними функціями гострого кута в курсі геометрії (8-9 клас); 2) систематизація і поглиблення знань про тригонометричні функції в курсі алгебри та початків аналізу (математики) (10-11 клас).

На першому етапі починаючи з 8 класу, в курсі геометрії вивчаються основні поняття тригонометрії, сам термін «тригонометричні функції» не вводиться. Тригонометричні поняття досить абстрактні, тому учні їх сприймають складно. Так у 8 класі означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса кута вводиться, як відношення сторін у прямокутному трикутнику і використовується для розв'язування прямокутних трикутників. Також у цьому класі учні знайомляться з основними тригонометричними тотожностями та формулами зведення для кутів виду (90°-α).

У 9 класі у курсі вивчення геометрії учні розширюють поняття синуса, косинуса, тангенса, котангенса для будь – яких кутів від 0° до 180° на прикладі півкола одиничного радіуса за допомогою координат, що є своєрідною пропедевтичною роботою перед введенням тригонометричних функцій числового аргументу за допомогою одиничного кола в 10 класі.

Довівши, що співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого кута, які вивчалися у 8 класі, є справедливими для кутів від 0° до 180°, учні вчаться перетворювати тригонометричні вирази. До формул зведення виду (90° − α) додаються нові формули зведення для кутів (180°− α). Доведення теорем синусів та косинусів, дає змогу учням розв'язувати косокутні трикутники. Учні поверхнево знайомляться з радіанною системою вимірювання кутів та дуг.

У 10 класі в курсі алгебри і початків аналізу здійснюється заключний етап вивчення теми «Тригонометричні функції» на основі здобутих у попередніх класах знаннях та уміннях учнів про функцію в цілому і синус, косинус, тангенс, котангенс зокрема.

Однією з найголовніших змістових ліній курсу «Математика» в старшій школі є функціональна лінія. Для того, щоб підготувати учнів до вивчення тригонометричних функції та їх властивостей, доцільно повторити, систематизувати матеріал стосовно функцій, який вивчався в основній школі, поглибити і розширити його за рахунок вивчення степеневих функцій.

Лінія тотожних перетворень також розвивається у зв'язку з вивченням тригонометричних функцій. Тригонометричні функції пов'язані між собою багатьма співвідношеннями, які в свою чергу можна умовно поділити на три групи: 1) основні співвідношення; 2) формули зведення; 3) формули додавання. Формули тригонометрії застосовуються для спрощення виразів, доведення тотожностей, розв'язування рівнянь та їх систем, нерівностей.

Лінія рівнянь і нерівностей не тільки розвивається у зв'язку з вивченням властивостей функцій, зазначених у програмі, а й виступає самостійними темами (тригонометричні рівняння, нерівності та їх системи). Зокрема розглядаються методи розв'язування рівнянь та сфери їх застосувань.

Перш ніж розглядати тригонометричні функції числового аргументу докладніше ніж у 9 класі, розглядається поняття «радіанної міри кутів». Потім вивчається поняття тригонометричних функцій числового аргументу шляхом розширення вже вивчених тригонометричних функцій кута на будь – яку градусну міру, вводиться кут повороту.

Довівши періодичність тригонометричних функцій і користуючись означенням синуса, косинуса, тангенса, котангенса будують графіки цих функцій та виконують деякі перетворення цих графіків. За допомогою графіків виявляють та обґрунтовують властивості тригонометричних функцій. Вивчаючи обернені тригонометричні функції, застосовують їх до розв'язування тригонометричних рівнянь. У програмі курсу алгебри і початків аналізу навіть поглибленого рівня передбачено ознайомлення учнів лише із найпростішими тригонометричними нерівностями.

Таким чином, врахування принципів наступності математичної освіти в основній та старшій школі, дозволяє вчителю створювати оптимальні умови для оволодіння учнями навчальним матеріалом.

2.2. Аналіз програм і підручників у контексті дослідження

Неперервність навчання реалізується в програмі, зокрема через принцип систематичності та послідовності навчання, з урахуванням вікових особливостей учнів.

За результатами аналізу навчальних програм з математики в основній школі (8-9 клас) рівня стандарту [11] та поглибленого рівня вивчення математики [12], складено таблицю 2.2.1., в якій порівнюються теми та кількість годин, які відводяться на вивчення тригонометричних функцій у кожному з класів.

Таблиця 2.2.1.

Аналіз програм з геометрії для 8-9 класу

<table>
<tr><td>Рівень стандарту</td><td>Поглиблений рівень вивчення математики</td></tr>
<tr><td colspan="2">8 клас (Геометрія)</td></tr>
<tr><td>2 год на тиждень (14 годин)</td><td>3 год на тиждень (21 година)</td></tr>
<tr><td>Тема 3. РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ
Синус, косинус, тангенс гострого кута прямокутного трикутника.
Теорема Піфагора.
Перпендикуляр і похила, їх властивості.
Співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника.
Значення синуса, косинуса, тангенса деяких кутів.
Розв’язування прямокутних трикутників</td><td>Тема 5. РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ
Пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику.
Теорема Піфагора.
Теорема, обернена до теореми Піфагора.
Перпендикуляр і похила, їх властивості.
Синус, косинус, тангенс і котангенс гострого кута прямокутного трикутника.
Тотожності:
$sin(90^\circ - \alpha) = cos\alpha$,
$cos(90^\circ - \alpha) = sin\alpha$,
$tg(90^\circ - \alpha) = ctg\alpha$,
$ctg(90^\circ - \alpha) = tg\alpha$,
$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$,
$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.
Сспіввідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника.
Значення синуса, косинуса, тангенса і котангенса деяких кутів. Розв’язування прямокутних трикутників.</td></tr>
<tr><td colspan="2">9 клас (Геометрія)</td></tr>
<tr><td>2 год на тиждень (3 + 10 годин)</td><td>3 год на тиждень (20 годин)</td></tr>
<tr><td>Тема 1. КООРДИНАТИ НА ПЛОЩИНІ
Синус, косинус, тангенс кутів від 0° до 180°.
Тотожності:
$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$;
$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$.

Тема 3. РОЗВ’ЯЗУВАННЯ</td><td>Тема 2. РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ
Синус, косинус, тангенс і котангенс як функції кута від 0° до 180°. Тотожності:
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,
$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$,
$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$,
$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$,</td></tr>
</table>

ТРИКУТНИКІВ Теореми косинусів і синусів. Формули для знаходження площі трикутника	$tg(180°-\alpha)=-tg\alpha$, $ctg(180°-\alpha)=-ctg\alpha$. Теореми косинусів і синусів. Властивість сторін і діагоналей паралелограма. Формула для знаходження довжини медіани через сторони трикутника. Застосування формули $a = 2R\sin\alpha$. Розв'язування трикутників. [*Тригонометрична форма теореми Чеви. Формула Ейлера для знаходження відстані між центрами вписаного і описаного кіл трикутника*]. Формули для знаходження площі трикутника. Формула для знаходження площі чотирикутника через його діагоналі та кут між ними

Однією з основних задач вивчення курсу геометрії є розв'язування трикутників. У 8 класі учні вчаться розв'язувати прямокутні трикутники, для цього вводиться означення синуса, косинуса, тангенса і конгангенса, як відношення сторін прямокутного трикутника. Тема розв'язування трикутників продовжується у 9 класі, учні вчаться розв'язувати косокутні трикутники. Реалізація цього завдання відбувається за рахунок введення формул для знаходження синуса і косинуса тупого кута та доведення теореми синусів і теореми косинусів.

Проаналізувавши навчальні програми з математики, можна зробити висновок, що на поглибленому рівні вивчення математики кількість годин на тиждень не значно збільшена, а тема розкривається значно ширше за рахунок цікавих тем. Таких як: теорема Чеви, коло Ейлера, терема Менелая.

За результатами аналізу навчальних програм із математики в старшій школі (10 клас) рівня стандарту [13], поглибленого рівня вивчення математики (початок вивчення з 10 класу) [21] та поглибленого рівня вивчення математики (початок вивчення на з 8 класу) [14] складено таблицю 2.2.2, у якій порівнюються теми та кількість годин, які відводяться на вивчення тригонометричних функцій у кожному з класів.

Таблиця 2.2.2. Аналіз програм з алгебри та початків аналізу для 10класу

Рівень стандарту	Поглиблений рівень вивчення математики (початок вивчення на поглибленому рівні з 10 класу)	Поглиблений рівень вивчення математики (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу)
10 клас (Алгебра і початки аналізу)		
1,5 години на тиждень (18 годин)	6 годин на тиждень (34 + 32 = 66 годин)	6 годин на тиждень (42 + 42=84 годин)
Тема 2. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ Синус, косинус, тангенс, кута. Радіанне вимірювання кутів. Тригонометричні функції числового аргументу. Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу. Формули зведення. Періодичність функцій. Властивості та графіки тригонометричних функцій. Формули додавання для тригонометричних функцій та наслідки з них. Найпростіші тригонометричні	**Тема 3. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ** Радіанне вимірювання кутів. Синус, косинус, тангенс, котангенс кута. Тригонометричні функції числового аргументу. Періодичність функцій. Властивості та графіки тригонометричних функцій. Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу. Формули зведення. Тригонометричні формули: формули додавання, формули подвійного аргументу, формули перетворення суми і різниці тригонометричних функцій у добуток, формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму,	**Тема 2. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ** Радіанне вимірювання кутів. Синус, косинус, тангенс, котангенс кута. Тригонометричні функції числового аргументу. Періодичність функцій. Властивості та графіки тригонометричних функцій. Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу. Формули зведення. Тригонометричні формули: формули додавання, формули подвійного аргументу, формули перетворення суми і різниці тригонометричних функцій у добуток, формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму,

рівняння.	формули пониження степеня, формули потрійного аргументу, формули половинного аргументу. Вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного аргументу. **Тема 4. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ** Обернені тригонометричні функції: означення, властивості, графіки. Найпростіші тригонометричні рівняння. Основні способи розв’язування тригонометричних рівнянь. Тригонометричні нерівності. Тригонометричні рівняння і нерівності з параметрами. Рівняння і нерівності, які містять обернені тригонометричні функції.	формули пониження степеня, формули потрійного аргументу, формули половинного аргументу. Вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного аргументу. **Тема 3. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ** Обернені тригонометричні функції: означення, властивості, графіки. Найпростіші тригонометричні рівняння. Тригонометричні нерівності. Тригонометричні рівняння і нерівності з параметрами. Рівняння і нерівності, які містять обернені тригонометричні функції. Побудова графічних образів.

Проаналізувавши програми на різних рівнях вивчення математики, ми бачимо значну різницю у кількості годин на вивчення тригонометричних елементів у курсі алгебри та початків аналізу. На рівні вивчення стандарту – це всього 18 годин, початок вивчення на поглибленому рівні з 10 класу – 66 годин, початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу – 84 години.

Це зумовлено тим, що програми вивчення математики на різних рівнях (рівень стандарту та поглиблений рівень) ставлять перед собою різні цілі та завдання.

Головним завданням вивчення математики на рівні стандарту є забезпечення умов для досягнення кожним учнем практичної компетентності. Запровадження компетентнісного підходу в освітній процес закладу загальної середньої освіти передбачає формування в учнів умінь застосовувати набуті знання в реальних життєвих ситуаціях та під час розв’язування практичних завдань [13, 1].

Метою вивчення математики на профільному рівні є забезпечення свідомого і міцного оволодіння системою математичних знань, навичок і умінь, які потрібні у повсякденному житті і у майбутній трудовій діяльності [14, 1].

Основним джерелом знань, крім знань вчителя, для учнів є підручник. Дослідивши підручники, за якими навчаються діти, можна краще зрозуміти методику вивчення тригонометрії в шкільному курсі математики. Крім того, зміст підручників повинен відповідати чинній програмі з математики.

Проведемо аналіз таких підручників:

1. Підручники з геометрії для 8 класу:

1.1. Істер О.С., Геометрія підручник для 8 класу 2016р. (рівень стандарту) [3].

1.2. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія підручник для 8 класу 2016р. (рівень стандарту) [25].

1.3. Апостолова Г.В. Геометрія дворівневий підручник для 8 класу 2008р.[1].

1.4. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія підручник для 8 класу 2016р. (поглиблений рівень)[4].

2. Підручники з геометрії для 9 класу:

2.1. Істер О.С., Геометрія , 2017р. (рівень стандарту)[18].

2.2. Апостолова Г.В. Геометрія : 9 : дворівневий підручник 2009р.[17].

2.3. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія 2017р. (рівень стандарту)[22].

2.4.Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С., Геометрія, 2017р. (поглиблений рівень)[23].

3. Підручники з математики та алгебри і початків аналізу для 10 класу:

3.1. Істер О.С.,Математика, 2018р. (рівень стандарту) [5].

3.2. Нелін Є.П., Алгебра і початки аналізу, підручник для 10 класу, 2010р. (академічний рівень) [9].

3.3. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С., Математика підручник для 10 класу 2018р. (рівень стандарту) [10].

3.4. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Д.А. Номіровський, Якір М.С., Алгебра і початки аналізу, підручник для 10 класу, 2018р. (профільний рівень) [24].

Під час проведення аналізу підручників ми звернули увагу на такі особливості: назви розділів та параграфів, що стосуються досліджуваної теми; виділення математичних об’єктів; наявність прикладів та їх відповідність завданням для розв’язування; наявність питань після параграфа; розподіл завдань за рівнями складності; наявність завдань для підготовки до контрольної або самостійної роботи в кінці вивченої теми; нестандартні задачі в параграфі або пункті.

Результати аналізу підручників для 8 класу висвітлені в таблиці 2.2.3. (додаток А). Підручники з геометрії для 8 класу створено відповідно до Державного стандарту загальної середньої освіти і нової програми з математики (від 07.06.2017 № 804). У всіх розглянутих підручниках уводиться означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса та основні співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника. Автори всіх підручників в останньому параграфі вивченої теми пропонують учням чотири види задач на розв'язування прямокутних трикутників та дають зразки запису їх розв'язування у загальному вигляді.

У підручнику Істер О.С, Геометрія для 8 класу 2016 р. (рівень стандарту) вивчення 3 розділу «Розв'язування прямокутних трикутників» розпочинається з вивчення теореми Піфагора, яка доводиться за теоремою про середні пропорційні відрізки. Потім вивчаються перпендикуляр і похила та їх властивості.Вивчається означення синуса, косинуса і тангенса (означення котангенса автор не дає), як відношення сторін прямокутного трикутника. Твердження, що синус, косинус та тангенс гострого кута прямокутного трикутника залежить лише від градусної міри кута доводиться за другою ознакою подібності трикутників. Автор не знайомить учнів з основними тригонометричними тотожностями та формулами зведення для кутів виду $(90° - \alpha)$.

Апостолова Г.В. у дворівневому підручнику з геометрії для 8 класу 2008р., вивчення IV розділу "Тригонометричні функції гострого кута. Обчислення прямокутного трикутника" розпочинає з встановлення відповідностей між відношеннями сторін та мірою гострих кутів у прямокутному трикутнику. На прикладі чверті одиничного кола доводить твердження, що при зростанні кута від $0°$ до $90°$синус цього кута зростає від 0 до 1, а косинус спадає від 1 до 0.Тригонометричні функції доповняльних кутів вивчає в окремому параграфі. Співвідношення між тригонометричними функціями одного і того самого кута доводить за допомогою теореми Піфагора.

У підручнику Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С., Геометрія, підручник для 8 класу 2016 р. (рівень стандарту) третій параграф "Розв'язування прямокутних трикутників" розпочинається з вивчення метричних співвідношень у прямокутному трикутнику. Потімавтори доводять теорему Піфагора за теоремою 15.1. [25, 113]. У пункті 18 «Тригонометричні функції гострого кута прямокутного трикутника» автори дають означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса прямокутного трикутника, доводять, що синус, косинус, тангенса і котангенса гострого кута залежить тільки від величини цього кута. На відміну від інших авторів вводиться означення *тригонометричної функції*. В цьому ж пункті за теоремою Піфагора доводять основні тригонометричні тотожності. Вивчають формули зведення для кутів виду $(90° - \alpha)$.

У підручнику Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С., Геометрія для 8 класу 2016р. (поглиблений рівень) теоретичний матеріал поданий аналогічно до підручника цих же авторів рівня стандарту. Єдина відмінність, що в кожному пункті додано для прикладу одна задача з розв'язанням та коментарями. Але значно збільшено кількість задач та вправ для розв'язування. Ключові задачі виділені спеціальними позначками.

Результати аналізу підручників для 9 класу висвітлені в таблиці 2.2.3. (додаток Б). Підручники створено відповідно до Державного стандарту загальної середньоїосвіти і нової програми з математики. Автори всіх розглянутих підручників розширюють поняття синуса, косинуса, тангенса і котангенса кутів від *0*° до *180*° на прикладі півкола одиничного радіуса за допомогою координат. Усі автори підручників в останньому параграфі вивченої теми пропонують учням чотири види задач на розв'язування косокутних трикутників та дають зразки запису їх розв'язування в загальному вигляді.

У підручнику Істер О.С. Геометрія для 9 класу, 2017р. (рівень стандарту) синус, косинус, тангенс, тригонометричні тотожності та формули зведення для кутів *0*° до *180*° вивчаються у 1 розділі «Метод координат на площині». У 3 розділі «Розв'язування трикутників» доводиться теорема косинусів для трьох різних випадків (∠C – гострий, прямий, тупий). У цьому параграфі автор дає для прикладу 6 різних типів задач із розв'язуванням та коментарями. Перш ніж довести теорему синусів, автор доводить лему, що хорда кола дорівнює добутку діаметра та синуса будь-якого вписаного кута, який спирається на цю хорду [22, 21], далі пропонує учням 3 задачі з розв'язанням та коментарями до їх розв'язування.У §13 «Розв'язування трикутників» вдало підібрані задачі прикладногозмісту.

У підручнику Апостолової Г.В. Геометрія, дворівневий підручник для 9 класу, 2009 р. у I розділі «Координатна площина. Тригонометричні функції кутів від *0°* до *180°*. Розв’язування трикутників» спочатку вивчаються тригонометричні функції кутів від *0°* до *180°*, потім доводиться справедливість основних тригонометричних тотожностей для кутів від *0°* до *180°* та вивчаються формули зведення для кутів виду $(180° - \alpha)$, на основі отриманих співвідношень формулюється твердження про значення кутового коефіцієнта прямої. Теорему синусів авторка доводить двома способами: 1) за теоремою про площу трикутника [17, 46]; 2) за допомогою кола описаного навколо трикутника, розглядаючи три випадки ($\angle$ A – гострий, прямий, тупий). Теорему косинусів доводить за допомогою системи координат та основної тригонометричної тотожності.

У підручнику Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С., Геометрія підручник для 9 класу (рівень стандарту) у §1 «Розв’язування трикутників» дається означення синуса, косинуса і тангенса кутів від 0° до 180, вводяться формули зведення для кутів виду $(180° - \alpha)$ та повторюються основні тригонометричні тотожності. Потім доводиться теорема косинусів, розглядають 3 випадки ($\angle$ A – гострий, прямий, тупий), автори пропонують чотири види задач із розв’язанням та коментарями. Теорема синусів доводиться на основі леми, що хорда кола дорівнює добутку діаметра та синуса будь-якого вписаного кута, який спирається на цю хорду [22, 21], також для прикладу наводять 4 види задач. Вдало підібрані задачі прикладного змісту.

У підручнику Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С., Геометрія, підручник для 9 класу (поглиблений рівень) теоретичний матеріал поданий майже такий самий, як і в підручнику цих же авторів рівня стандарту. Відмінність утому, що автори у першому пункті до означень синуса, косинуса, тангенса додають означення котангенса. У кожному пункті додані для прикладу задачі з розв’язанням та коментарями. Порівняно з підручником рівня стандарт значно збільшено кількість задач та вправ для розв’язування. Ключові задачі виділені спеціальними позначеннями.

Результати аналізу підручників для 10 класу висвітлені в таблиці 2.2.3. (додаток В). Проаналізувавши підручники на предмет вивчення тригонометричних функцій числового аргументу, можна зробити висновок, що теоретичний матеріал відповідає чинним навчальним програмам із математики. Всі проаналізовані підручники повністю охоплюють теоретичний матеріал.

2.3. Особливості навчання тригонометричним функціям в основній школі

Як вже зазначалося раніше, поняття синуса, косинуса, тангенса і котангенса гострого кута вперше вводиться у 8 класі, як відношення сторін прямокутного трикутника через означення, що подані у пункті 1.1. Попередньо учні повинні засвоїти назви сторін прямокутного трикутника (катети і гіпотенуза) і їх положення відносно прямого кута. Доцільно розглянути прямокутні трикутники, в яких вершина прямого кута має різне розташування, при цьому назвати сторони, прилеглі та протилежні, відносно кутів трикутника.

З метою попередження типових помилок учнів варто звернути увагу на позначення тригонометричних функцій, наголосити, що скорочення «sinα» означає «синус кута альфа», і ні в якому разі це не добуток, а записи sin, cos, tg не мають змісту, так як вони безпосередньо пов’язані з певним гострим кутом прямокутного трикутника.

Важливо, щоб, учні усвідомили, що синус, косинус, тангенс і котангенс гострого кута прямокутного трикутника залежить лише від градусної міри кута. У підручнику з геометрії Істер О.С, для 8 класу 2016р. (рівень стандарту) дане твердження доводиться на основі подібності трикутників [3, 134]:

Нехай дано ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$, у яких $\angle C=\angle C_1=90°$, $\angle A = \angle A_1$ (рис. 2.3.1.).

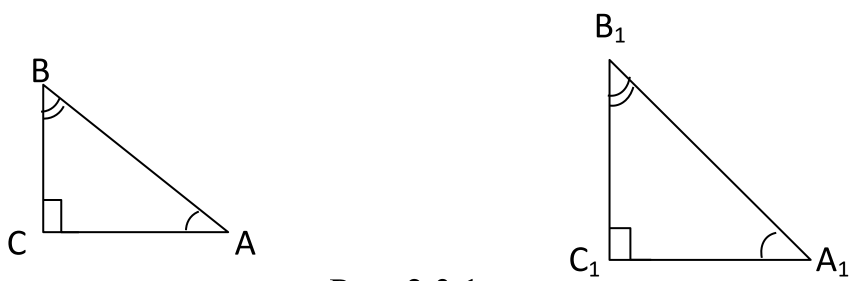


Рис. 2.3.1.

Тоді $\Delta\ ABC \sim \Delta\ A_1B_1C_1$ (за гострим кутом). Тому $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ і $\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1}$, а $sin\ A = sin\ A_1$, $\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}$, $cos\ A = cos\ A_1$, $\frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1}$, тому $tg\ A = tg\ A_1$.

Після ознайомлення учнів із вказаними співвідношеннями потрібно навчити їх за допомогою таблиць визначати синуси, косинуси, тангенси і котангенси гострих кутів і навпаки та навчити знаходити значення тригонометричних функцій гострих кутів за допомогою мікрокалькулятора.

Властивість – зростання синуса гострого кута при зростанні кута і спадання косинуса гострого кута за зростання кута. На цьому етапі вивчення тригонометрії може бути сформульовано у вигляді твердження: більшому гострому куту прямокутного трикутника відповідає більше значення синуса і менше значення косинуса.

Основні тригонометричні тотожності доводяться за допомогою теореми Піфагора. При цьому слід наголосити, що тригонометричні тотожності застосовують длязнаходження невідомих тригонометричних величин деякого гострого кута, знаючи одну з них. Учні повинні навчитися перетворювати тригонометричні вирази та доводити тригонометричні тотожності.

Формули зведення для кутів виду $(90° - \alpha)$ доводять відразу після вивчення основних тригонометричних тотожностей.

Методична схема розв'язування прямокутних трикутників

Розв'язування прямокутних трикутників зводиться до знаходження невідомих сторін та кутів за відомими сторонами та кутами.:

1) **За двома сторонами.** Якщо дані дві сторони прямокутного трикутника то третю сторону знаходять за "теоремою Піфагора". Визначення гострих кутів здійснюється за однією з формул вказаних в пункті 1.1., в залежності від того, які сторони дані в умові задачі.

Приклад 2.3.1. Дано катети a = 8,3 см, b = 12,4см. Знайти гіпотенузу та гострі кути *A* та *B*.

Розв'язання. 1)$\angle C = 90^0$; a = 8,3 см; в = 12,4 см $\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8{,}3^2 + 12{,}4^2} \approx 14{,}9$ (см);

2) tg A= $\frac{a}{b} = \frac{8,3}{12,4} \approx 0,67$; $\angle A \approx 34^0$;

3) $\angle B = 90^0 - 34^0 = 56^0$

Відповідь. c ≈14,9 (см); A ≈ 34^0;$\angle B = 56^0$.

2) За стороною та гострим кутом. Якщо дано гострий кут *A*, то кут *B* знайдемо за формулою $\angle B = 90^0 - \angle A$. Сторони можна знайти за формулами, вказаними в пункті 1.1., які можна представити у вигляді:

$a = c \sin A$; $b = c \cos A$; $a = b \, tg \, A$;

$b = c \sin B$; $a = c \cos B$; $b = a \, tg \, B$;

$$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\cos B} = \frac{b}{\sin B} = \frac{b}{\cos A}.$$

Обирати потрібно ті формули, в які входить дана або вже знайдена сторона.

Деякі автори підручників пропонують ці формули вивчати напам'ять, у цьому немає необхідності. Оскільки учні, витративши багато зусиль на запам'ятовування, досить швидко забувають їх і починають плутати, допускаючи грубі помилки. Потрібно навчити учнів знаходити їх із основних тригонометричних співвідношень (знаходити невідомий член пропорції) :

$$\frac{\sin A}{1} = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \sin A;\ c = \frac{a}{\sin A}.$$

Приклад 2.3.2. Дано гіпотенуза c = 79,79(м) та $\angle A = 66^0 36'$. Знайти $\angle B$, катети *a* та *b*.

Розв'язання. 1) $\angle B = 90^0 - 66^0 36' = 23^0 24'$;

2) $a = c \sin A = 79,79 \cdot \sin 66^0 36' = 79,79 \cdot 0,9178 \approx 73,23$ (м);

3) $b = c \cos A = 79,79 \cdot \cos 66^0 36' = 79,79 \cdot 0,3971 \approx 31,68$ (м).

Відповідь.1) $\angle B = 23^0 24'$;2) $a \approx 73,23$ (м); 3) $b \approx 31,68$ (м).

У 9 класі розширюють поняття синуса, косинуса, тангенса і котангенса для будь-яких кутів від 0° до 180°. Розглянемо на координатній площині півколо одиничного радіуса з центром у початку координат (рис.2.3.2.).

З ΔOKA ($\angle K=90°$), α – гострий кут, якому відповідає точка $A\ (x;y)$, $OA = 1$, $OK = x$, $AK = y$ маємо: $cos\alpha = \frac{OK}{OA} = \frac{x}{1} = x$; $sin\alpha = \frac{AK}{OA} = \frac{y}{1} = y$; $tg\alpha = \frac{y}{x}$; $ctg\alpha = \frac{x}{y}$.

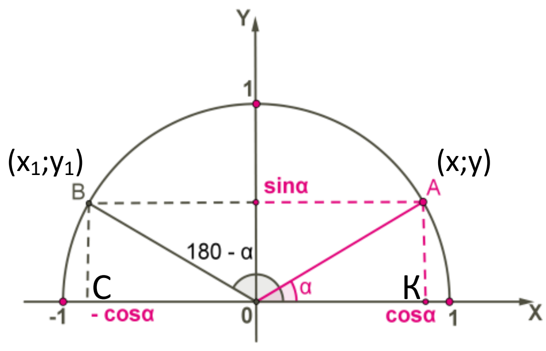


Рис.2.3.2.

Приходимо до висновку, що, косинус гострого кута α – це абсциса точки A одиничного півкола, що відповідає цьому куту, синус гострого кута α – це ордината точки A одиничного півкола, що відповідає цьому куту, тангенс гострого кута α – це відношення ординати до абсциси точки A одиничного півкола, що відповідає цьому куту, котангенс гострого кута α це відношення абсциси до ординати точки A одиничного півкола, що відповідає цьому куту.

За такою ж схемою даємо означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса довільного кута α, де $0° \leq \alpha \leq 180°$.

Формули зведення для кутів $(180° - \alpha)$ вводяться наступним чином: нехай кутам α і $(180° - \alpha)$ відповідають точки $A\ (x;y)$ і $B(x_1;y_1)$ одиничного півкола (рис.2.3.2.). ΔOKA $(\angle K=90°) = \Delta OCB$ $(\angle C=90°)$:

$(OA= OB=1,\ \angle AOK=\angle BOC=\alpha) \Longrightarrow\ y= y_1$ і $x=-\,x_1$. Отже,

$sin\ (180° - \alpha) = sin\alpha;\ cos\ (180° - \alpha) = -\ cos\alpha;$

$tg\ (180° - \alpha)=\frac{sin\ (180° - \alpha)}{cos\ (180° - \alpha)}=\frac{sin\alpha}{-\ cos\alpha}=-\ tg\ \alpha$ (*при* $\alpha \neq 90°$);

$ctg\ (180°\text{-}\alpha)=\frac{cos\ (180° - \alpha)}{sin\ (180° - \alpha)}=\frac{-\ cos\alpha}{sin\alpha}=-\ ctg\ \alpha$ (*при* $\alpha \neq 0°,\ \alpha \neq 180°$).

Учням можна запропонувати самостійно переконатися в тому, що ці рівності є справедливими для кутів $\alpha = 0°$, $\alpha = 90°$, $\alpha = 180°$. Доводимо, що тригонометричні тотожності, які вивчалися у 8 класі, справедливі для кутів $0° \leq \alpha \leq 180°$. Таким чином, продовжується робота з перетворенням тригонометричних виразів та доведення тригонометричних тотожностей.

Теорема косинусів є узагальнення теореми Піфагора на видадок довільного трикутника.

Теорема косинусів [18, 94]. *Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними.*

Доведення. У $\triangle ABCAB = c, AC=b, BC=a$.

1) $\angle C=90°$. Тоді $cosC = 0 \Longrightarrow c^2=a^2+b^2 - 2ab\cdot 0 = a^2+b^2$.

2)$\angle C$ – гострий. Тоді $\angle B$ також гострий, проведемо висоту AD, *т.* D належить стороні BC оскільки $\angle C$ і $\angle B$ – гострі (Рис.2.3.3.).

У $\triangle ADC(\angle D=90°)$:

$AD = b \sin C$, $CD = b \cos C$, а $BD = BC - CD = a - b\cdot cosC$.

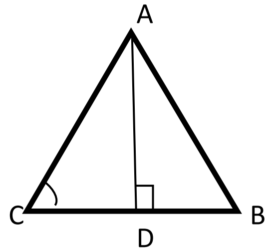


Рис.2.3.3.

У $\triangle ADB(\angle D=90°)$:

$c^2= AB^2 = AD^2+BD^2 = (b \cdot \sin C)^2+(a - b \cdot \cos C)^2=$

$= b^2\cdot \sin^2C+a^2\cdot 2ab \cdot \cos C+b^2\cdot \cos^2 C=$

$= a^2+b^2\cdot (\sin^2C+ \cos^2C) - 2ab \cdot \cos C,$

$c^2=a^2+b^2 - 2ab \cos C.$

3) $\angle C$ – тупий (рис.2.3.4.). Позначимо $\angle ACB = \alpha$, проведемо висоту AD, *т.*D лежить на продовженні променяBC, тому $\angle ACD = 180° - \alpha$.

У $\triangle ADC(\angle D=90°)$:

$AD = b\cdot \sin(180° - \alpha) =b\cdot \sin \alpha$

$CD = b \cdot \cos (180° - \alpha) = - b \cdot \cos \alpha$

$BD = BC+ CD = a - b\cdot cos\alpha$, далі доведення аналогічне, коли $\angle C$ – гострий.

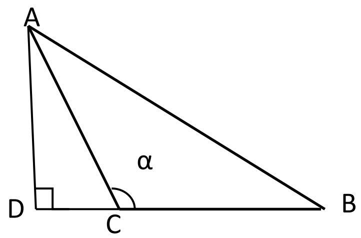


Рис.2.3.4.

Теорема синусів [18,с.104] Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних до них кутів: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

Теорему синусів можна доводити спираючись на формулу знаходження площі трикутника $S = \frac{1}{2}ab \sin C$, якщо така формула на момент вивчення теореми синусів учням невідома, то можна скористатися властивостями висоти трикутника або властивостями кола описаного навколо трикутника.

Доведення. Який би не був $\triangle ABC$: $AC = b$, $AB = c$, $BC = a$.

Опустивши з його вершини C висоту CD (рис.2.3.5.), матимемо

$$CD = a \cdot sinB,$$

$CD = b \cdot sinA$, якщо $\angle A < 90°$ і $CD = b \cdot sin\,(180° – A) = b \cdot sinA$, якщо $\angle A > 90°$.

Отже, в кожному трикутнику $a \cdot sinB = b \cdot sinA$, тому $\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB}$, аналогічно $\frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC}$. Тому в кожному ΔABC $\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC}$.

Якщо описати навколо трикутника коло, то $a = 2R \cdot sinA$, $b = 2R \cdot sinB$, $c = 2R \cdot sinC$, *тому* $\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC} = 2R$, де R–радіус описаного кола.

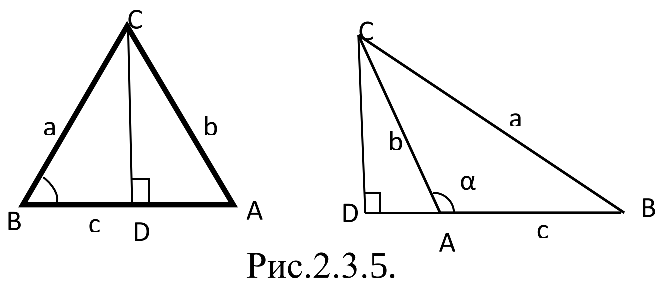


Рис.2.3.5.

Методична схема розв'язування довільних трикутників. Розв'язування довільних трикутників, так як і прямокутних, зводиться до знаходження невідомих сторін і кутів за відомими сторонами і кутами. Задачі можна поділити на такі типи:

1) Розв'язування трикутника за трьома сторонами.

Дано три сторони *a,b,c*. Знайти кути $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

а) Спочатку знайдемо один із кутів за теоремою косинусів: $cosA = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$;

б) другий кут B знайдемо за теоремою синусів: $\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB}$, $sinB = \frac{b sinA}{a}$;

в) третій кут знаходимо за формулою: $\angle C = 180^0 - (\angle A + \angle B)$.

Приклад 2.3.3. Дано: ΔABC, $a = 7$ см, $b = 8$ см, $c = 9$ см. Знайти: кути A, B та C.

Розв'язання. 1) $cosA = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; $cosA = \frac{8^2 + 9^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{2}{3} \approx 0{,}6666$, $\angle A \approx 48°12'$;

2) $sin\,B = \frac{b\,sin\,A}{a}$; $sin\,B = \frac{8\,sin 48°12'}{7} = \frac{8 \cdot 0{,}7455}{7} \approx 0{,}852$, $\angle B = 58°30'$;

3) $\angle C = 180^0 - (\angle A + \angle B)$; $\angle C = 180^0 - (48°12' + 58°30') = 73°18'$.

Відповідь. 1) $\angle A \approx 48°12'$; 2) $\angle B = 58°30'$; 3) $\angle C = 73°18'$.

2) Розв’язування трикутника за двома сторонами і кутом між ними.

Дано дві сторони *a,b* і кут між ними $\angle C$. Знайти сторону *c*, і кути *A* та *B*.

а) спочатку за теоремою косинусів знаходимо сторону *c*: $c^2=a^2+b^2 - 2ab \cdot cosC;$

б) потім кут $\angle A$ за теоремою косинусів: $cosA = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$;

в) третій кут знаходимо за формулою $\angle B = 180^0 - (\angle A + \angle C)$.

Приклад 2.3.4. Дано: ΔABC, a = 4 см, b = 7 см, $\angle C$ = 40°. Знайти: сторону *c*, кути *A* та *B*.

Розв'язання.1) За теоремою косинусів $c^2 = a^2+b^2 - 2ab \cdot cosC$

$c^2 = 16 + 49 - 2\cdot 4\cdot 7cos40° = 65 - 56 \cdot 0{,}766 = 22{,}104$, $c \approx 4{,}7$ см;

2) $cosA = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$; $cosA = \frac{7^2+4{,}7^2-4^2}{2\cdot 7\cdot 4{,}7} \approx 0{,}8372$, $\angle A = 33°09'$;

3) $\angle B = 180^0 - (\angle A + \angle C)$, $\angle B = 180^0 - (33°09' + 40°) = 106°51'$.

Відповідь. $c \approx 4{,}7$ см; $\angle A = 33°09'$; $\angle B = 106°51'$.

3) Розв'язування трикутників за стороною і двома прилеглими кутами.

Дано два кути $\angle C$ та $\angle B$ і сторона *a*. Знайти кут ∠A та сторони *c, b*.

а) спочатку знаходимо третій кут трикутника: $\angle A = 180^0 - (\angle C + \angle B)$;

б) сторони *c* та *b* знаходимо за теоремою синусів: $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$; $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$.

Приклад 2.3.5. Дано: ΔABC, a = 8 см, $\angle B$ = 40°, $\angle C$ = 80°. Знайти *c*, *b*, $\angle A$.

Розв'язання.1)$\angle A = 180^0 - (\angle C + \angle B)$, $\angle A = 180^0 - (80° + 40°) = 60°$.

2) $b = \frac{a sinB}{sinA}$; $b = \frac{8 \sin 40°}{\sin 60°} \approx 5{,}94$ см;

3) $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$; $c = \frac{8 \sin 80°}{\sin 60°} \approx 9{,}1$ см.

Відповідь. $\angle A = 60°$; $b \approx 5{,}94$ см; $c \approx 9{,}1$ см.

4) Розв’язування трикутників за двома сторонами і кутом протилежним до однієї з них. Дано дві сторонни *a* і *b* та кут $\angle B$протилежний до сторони *b*. Знайти сторону *c*, кути $\angle A$ і $\angle C$.

а) Спочатку знаходимо кут $\angle A$ за теоремою синусів: $\sin A = \frac{a \sin B}{b}$.

При цьому можуть виникнути наступні варіанти:

- $a > b;\ a\ sinB > b$ - задача не має розв'язку;
- $a > b;\ a\ sinB = b$ - один розв'язок, кут А- прямий;
- $a > b;\ a\ sinB < b$ - задача має два розв'язки: кут$\angle A$, який відповідає знайденому синусу, можна вважати гострим або тупим;
- $a \leqslant b$ - задача має один розв'язок: кут $\angle A$ - гострий.

б) Знайшовши кут $\angle A$, знаходимо $\angle C$ за формулою: $\angle C = 180^0 - (\angle A + \angle B)$. Якщо кут $\angle A$ може мати два значення, то два значення матиме і кут $\angle C$.

в) третю сторону c знаходимо за теоремою синусів $c = \frac{b \sin C}{\sin B}$, якщо знайдено два значення кута $\angle C$, то і для сторони c отримуємо два значення, таким чином умову задовольняють два різних трикутники.

Приклад 2.3.6. Дано: ΔABC, a = 8 см, b = 10 см, $\angle B$ = 70°. Знайти сторону c, кути A та C.

Розв'язання.1) За теоремою синусів: $\sin A = \frac{a \sin \mathrm{B}}{b}$; $\sin A = \frac{8\ \sin 70°}{10} =$

$= \frac{8 \cdot 0{,}9397}{10} \approx 0{,}7518$, $\angle A$ = 48°45' або $\angle A$ =180° $-$ 48°45' = 131°15'. Оскільки

$\angle A + \angle B$ =131°15'+ 70°> 180°, то $\angle A$ =131°15' не є розв'язком задачі.

2) $\angle C = 180^0 - (\angle A + \angle B)$; $\angle C = 180^0 - (48°45' + 70°) = 61°15'$;

3) $c = \frac{b \sin C}{\sin B}$; $c = \frac{10 \sin 61°15'}{\sin 70°} = \frac{10 \cdot 0{,}8763}{0{,}9397} \approx 9{,}33$ см.

Відповідь. 1) $\angle A$ = 48°45'; 2) $\angle C$ =61°15'; 3) $c \approx 9{,}33$ см.

2.4. Особливості навчання тригонометричних функцій у старшій школі

У курсі алгебри і початків аналізу в 10 класі вивчається тема «Тригонометричні функції числового аргументу», навчання якої спирається на знання учнів про функції взагалі та синус, косинус, тангенс і котангенс зокрема.

Перш ніж розглядати тригонометричні функції числового аргументу, розглядається поняття «радіанної міри кутів» та проводиться робота з колом довільного радіуса. Важливо наголосити на перевагах використання радіанної міри кутів. Як пропедевтичну роботу доцільно розглядати з учнями геометричні завдання на знаходження довжини дуги половини кола, його чверті та третини, тощо. У процесі виконання завдань необхідно підвести учнів до того, що для подальшого вивчення теми вигідніше обирати коло одиничного радіуса. Вводиться поняття «кут повороту».Особливу увагу слід звернути на те, що додатнім вважається рух початкового радіуса проти годинникової стрілки, а від'ємним – за годинниковою стрілкою

У процесі роботи з одиничним колом в учнів мають бути сформовані наступні вміння: знаходити на числовому колі точки, що відповідають заданим числам; складати аналітичні записи для дуг числового кола; визначати належність точки певній координатній чверті; знаходити координати точок числового кола та за заданими координатами точку на колі; визначати знаки тригонометричних функцій у різних координатних чвертях [28]. Особливих труднощів застосування формул переходу від градусної міри до радіанної і навпаки в учнів не виникає.

Після вивчення тригонометричного кола, як самостійного об'єкта, переходимо до вивчення тригонометричних функцій. Оскільки первинне означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса було введене за допомогою відношення сторін прямокутного трикутника, то означення тригонометричних функцій за допомогою тригонометричного кола важко вкладаються в свідомості учнів.

Вивчення поняття тригонометричних функцій числового аргументу відбувається шляхом розширення вже вивчених тригонометричних функцій кута на будь – яку градусну міру. Слід переконати учнів, що існує відповідність між множиною дійсних чисел і множиною точок одиничного кола. Означення тригонометричних функцій числового аргументу вводиться поступово. Спочатку учні згадують означення тригонометричних функцій для гострих кутів прямокутного трикутника, потім означення тригонометричних функцій для кутів від 0° до 180°, які були введені у 9 класі, за допомогою одиничного півкола з центром у початку координат. Означення синуса, косинуса, тангенса, котангенса довільного кута спочатку вводяться для кола довільного радіуса R

із центром у початку координат, потім розглядають коло, в якому $R = 1$ і формулюють остаточні означення синуса, косинуса, тангенса, котангенса числового аргументу. Для кращого усвідомлення вивченого матеріалу учням доцільно дати завдання для знаходження значень тригонометричних функцій числового аргументу. Учням потрібно наголосити на тому, що таким чином можна знайти тригонометричні функції тільки деяких кутів. Тригонометричні функції довільних кутів, зазвичай, знаходять за допомогою чотиризначних таблиць або калькулятора

Доведення періодичності тригонометричних функцій відбувається за допомогою методу від супротивного.Користуючись означенням синуса, косинуса, тангенса, котангенса, будують графіки тригонометричних функцій виду: $y = sinx, y = cosx, y = tgx, y = ctgx$ та виконують деякі перетворення цих графіків. За допомогою графіків виявляють та обґрунтовують 7 властивостей тригонометричних функцій:

1) область визначення та область значень;

2) парність або непарність функції;

3) період функції;

4) нулі функції;

5) проміжки знакосталості функції;

6) проміжки зростання і спадання функції;

7) найбільше і найменше значення функції.

З метою закріплення вивчених властивостей учням можна запропонувати такі вправи: на знаходження області значень та області визначення складних функцій, у формули яких входять тригонометричні функції; на порівняння числових значень тригонометричних виразів; побудова графіків функції за допомогою геометричних перетворень відомих графіків функцій.

Потім учні повторюють основні тригонометричні тотожності та наслідки з них, приходять до висновку, що вони є справедливими для будь – яких кутів.

Вивчаючи формули зведення, для полегшення запам’ятовування, доцільно користуватися таким правилом:

«У правій частині формули зведення записуємо той знак (+ або $-$), який має ліва частина формули за умови, що кут α – гострий, при цьому для кутів $\pi \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ назву тригонометричної функції не змінюємо, а для кутів $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ $-$ назву змінюємо на конфункцію» [20, 202].

Вивчаючи обернені тригонометричні функції, застосовують їх до розв'язування тригонометричних рівнянь.

При розв'язуванні тригонометричних рівнянь, слід наголосити на принциповій відмінності тригонометричних рівнянь від алгебраїчних: тригонометричні рівняння, в яких змінна входить під знак тригонометричної, або зовсім не мають розв'язків, або мають їх здебільшого безліч. Це пов'язано з періодичністю тригонометричних функцій.

Важливо щоб учні, під час розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь, не формально запам'ятовували формули загального розв'язку, а усвідомлювали, чому одержуються саме такі формули, а не інші. Це допоможе уникнути помилок при розв'язуванні складніших тригонометричних рівнянь.

Зазвичай, розглядають два способи розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь:

1) графічний спосіб;

2) знаходження розв'язків за допомогою одиничного кола.

Розв'язування рівнянь, які відрізняються від найпростіших, можна класифікувати за такими способами розв'язання:

1) заміна змінних при розв'язуванні тригонометричних рівнянь;

2) зведення до однієї тригонометричної функції;

3) розкладання на множники;

4) розв'язування однорідних рівнянь;

5) введення допоміжного аргументу.

Особливу увагу учнів слід звернути на втрату коренів та появу сторонніх коренів при розв'язуванні тригонометричних рівнянь. Така ситуація може виникнути: при піднесенні обох частин рівняння до квадрату, тому що можуть з'явитися сторонні корені; при діленні обох частин рівняння на вираз, що містить невідому, зокрема при необгрунтованому діленні обох частин однорідного рівняння на вираз $\cos x$; при використанні підстановки $t = tg\frac{x}{2}$. А при застосування теорем додавання тригонометричних функцій, може призвести до втрати розв'язків.

У програмі курсу алгебри і початків аналізу для 10 класу поглибленого рівня вивчення передбачено ознайомлення учнів лише з найпростішими тригонометричними нерівностями, при чому найзручніше це робити за допомогою одиничного кола.

Таким чином, врахування принципів наступності математичної освіти в основній та старшій школі, дозволяє вчителю створювати оптимальні умови для оволодіння учнями навчальним матеріалом.

2.5. Приклади конспектів уроків із використанням елементів тригонометрії

Геометрія, 8 клас

(згідно чинної програми з математики для 5-9 класів (рівень стандарту))

Тема. Розв'язування трикутників. Прикладні задачі.

Мета: узагальнити, систематизувати та закріпити знання учнів про теорему Піфагора, про вивчені співвідношення сторін і кутів у прямокутному трикутнику. Навчити учнів застосовувати набуті знання і вміння у практичній діяльності. Розвивати вміння аналізувати, робити висновки, знаходити власні способи розв'язку. Виховувати акуратність під час оформлення математичних записів.

Тип уроку: узагальнення та систематизації знань.

Хід уроку

І. Організаційна частина.

ІІ. Повідомлення теми і мети уроку.

Сьогодні ми з вами проведемо урок, на якому узагальнимо та систематизуємо знання з вивченої теми «Розв’язування трикутників» і вдосконалимо вміння застосовувати отримані знання в реальному житті. Скажіть, будь ласка, що означає розв’язати трикутник?

ІІІ. Актуалізація опорних знань.

Повторимо матеріал, який ви вивчили на уроках.

1. Онлайн опитування з використанням Google-форм.

https://docs.google.com/forms/d/1-n19abNzP9UOTujKo2FmIvRvrO2ulhSTtoQu_Rbrnso/edit (Додаток Г)

2. Гра «Продовж речення».

1. Трикутник, що має прямий кут, називається… (прямокутним)
2. Трикутник, у якого дві сторони рівні називається … (рівнобедреним)
3. Трикутник, у якого всі сторони рівні називається … (рівностороннім)
4. Сторони прямокутного трикутника називаються … (катет, катет, гіпотенуза)
5. Твердження, що потребує доведення – це… (теорема)
6. Промінь, який виходить з вершини кута і ділить його навпіл – це… (бісектриса)
7. Прямі, які не перетинаються, називаються … (паралельними)
8. Прямі, які перетинаються під прямим кутом, називаються … (перпендикулярними)
9. Запишіть основну тригонометричну тотожність … ($\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$)
10. Синус кута ($90° - \alpha$) дорівнює … ($\cos\alpha$)
11. Косинус кута ($90° - \alpha$) дорівнює … ($\sin\alpha$)

3. Фронтальне опитування (Учні по черзі виходять до дошки, всі інші пишуть у зошити)

1. Запишіть формулу для обчислення квадрату гіпотенузи в прямокутному трикутнику.($c^2 = a^2 + b^2$)

2. Запишіть формулу для обчислення синуса гострого кута прямокутного трикутника. ($\sin A = \frac{a}{c}$)

3. Запишіть формулу для обчислення катета протилежного до одного з гострих кутів прямокутного трикутника, якщо відома довжина гіпотенузи і градусна міра кута. ($a = c\ sinA$)

4. Запишіть формулу для знаходження невідомого катета в прямокутному трикутнику. ($a^2 = c^2 - b^2$)

5. Запишіть формулу для обчислення косинуса гострого кута прямокутного трикутника. ($cos\ A = \frac{b}{c}$)

6.Запишіть формулу для обчислення тангенс гострого кута прямокутного трикутника. ($tg\ A = \frac{a}{b}$)

7. За якою формулою знайдемо довжину прилеглого катета, якщо відома градусна міра кута і довжина гіпотенузи? ($b = c\ cosA$)

IV.Застосування знань на практиці.

1. **Задача**. Знайдіть синус кута підйому драбини, якщо на кожний метр довжини вона піднімається на 0,75 м [1, 181].

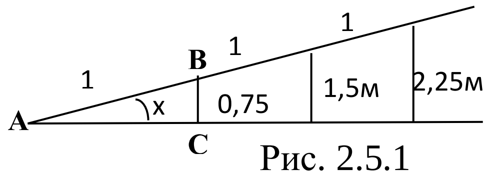


Рис. 2.5.1

Розв'язання. Розглянемо прямокутний трикутник *ABC* (рис 2.5.1), у якому гіпотенуза дорівнює 1 м, а катет протилежний до шуканого кута 0,75 м. За означенням синуса маємо:

$\mathrm{sinA} = \frac{BC}{AB} = \frac{0,75}{1} = 0,75$

Відповідь. 0,75

2. **Задача.** Людина, яка йде шляхом, практично не спостерігає підйому, якщо висота підйому менша ніж 1/25 пройденого шляху. Чому дорівнює синус кута підйому? [1, 181]

Розв'язання. Пройдений шлях приймемо за 1 (гіпотенуза), тоді висота підйому 1/25 (катет) . У прямокутному трикутнику з означення синуса маємо:

$\sin x = \frac{a}{c} = \frac{1}{25} : 1 = \frac{1}{25}$

Відповідь. $\frac{1}{25}$.

3. **Задача**. Висота сонця становить 48°. Довжина тіні телевежі — 76 м. Знайдіть висоту телевежі [1, 181].

Розв'язання. Зобразимо дані задачі на рисунку (рис 2.5.2.) . З ΔABC маємо: AC = 76 м (довжина тіні), ∠ A = 48° (висота сонця) (за умовою). Знайти BC (висота телевежі). За означенням тангенса кута прямокутного трикутника маємо:

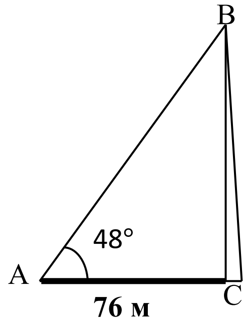


Рис. 2.5.2.

tg 48° $= \frac{BC}{AC}$; BC= AC · tg 48° = 76 · 1,1106 =84,4 (м).

Відповідь. 84,4 м.

4. **Задача.** Кут підйому шляху дорівнює 15°30'. На яку висоту підніметься пішохід, якщо він пройде 200 метрів? [1, 181]

Розв'язання. Зобразимо дані задачі на рисунку (рис 2.5.3.) . З ΔABC маємо: AB = 200 м (пройдений шлях),∠ A = 15°30' (кут підйому) (за умовою). Знайти BC (висоту). З означення синуса маємо: sin$A$ $= \frac{BC}{AB}$; BC = AB ·sin$A$ = 200 · 0,2672 = 53,44 м

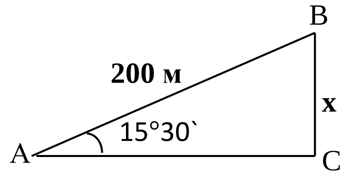


Рис 2.5.3.

Відповідь. 53,44 м.

5. **Задача**. Знайдіть ширину річки, якщо з верхнього краю вежі висотою 14 м, що знаходиться на березі річки, видно інший берег під кутом 24° до вертикалі [1, 182].

Розв'язання. Зобразимо дані задачі на рисунку (рис 2.5.4.) . З ΔABC маємо:

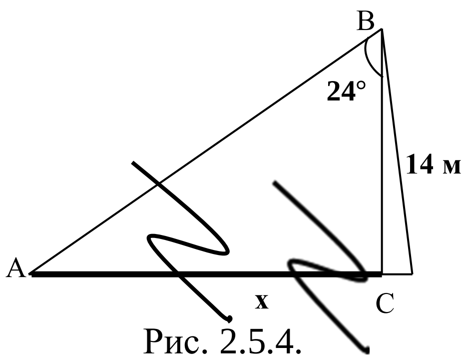


Рис. 2.5.4.

BC = 14 м (висота вежі), ∠B = 24° (кут огляду) (за умовою). Знайти AC (ширину річки). З означення синуса маємо:

tg$B$ $= \frac{AC}{BC}$; $AC = BC$ ·tg$B$ = 14 · 0,4452 = 6,2 м

Відповідь. 6,2 м

6. Задача. Знайдіть довжину газопроводу *ABCDE,* схему якого зображено на малюнку (рис 2.5.5) [1, 182].

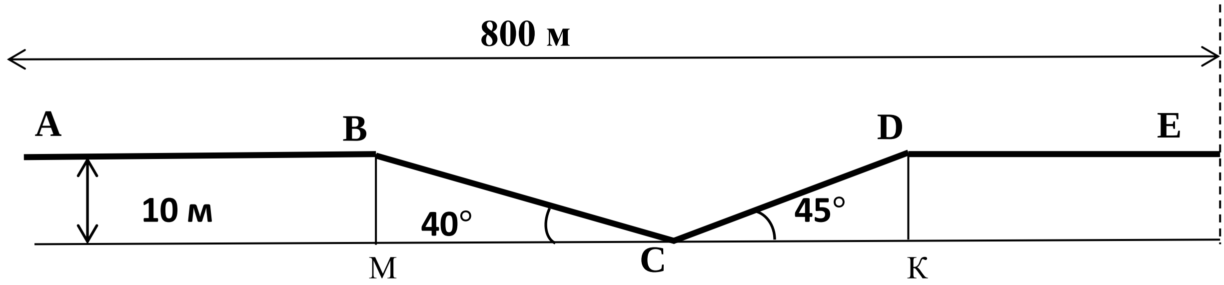


Рис 2.5.5

Розв'язання. *ABCDE* = 800 – *BD* + *BC* + *CD.*

З точок *D* та *B* опустимо перпендикуляри *BM =DK* = 10 м (за умовою).

З $\triangle$ CKD ($\angle$ K = 90°) CD = $\frac{DK}{\sin 45°} = \frac{10}{0{,}7071} \approx$ 14,14 (м);

З $\triangle$ CMB ($\angle$M = 90°) CB = $\frac{BM}{\sin 40°} = \frac{10}{0{,}6428} \approx$ 15,56 (м);

BD = MK, MK = MC + CK,

MC = BM · ctg 40° = 10 · 1,1918 ≈ 11, 91 (м);

CK = DK · ctg 45° = 10 · 1 ≈ 10 (м);

MK = MC + CK ≈ 11,91 + 10 ≈ 21,91(м);

ABCDE = 800 – BD + BC + CD = 800 - 21,91 + 14,14 + 15,56 ≈ 807,79(м).

Відповідь. ≈ 807,79(м).

V. Підсумок уроку.

Сьогодні на уроці ми з вами узагальнили знання, отримані під час вивчення теми «Розв'язування трикутників», і навчилися застосовувати їх до розв'язування прикладних задач. Для узагальнення вивченого матеріалу, я пропоную вам розгадати кросворд.

Розгадайте кросворд (рис 2.5.6.)

1. Назва прямокутного трикутника зі сторонами 3, 4, 5.
2. Учений, ім'ям якого названа теорема про суму квадратів катетів прямокутного трикутника.
3. Острів, на якому народився цей учений.
4. Катет, який не лежить проти даного кута.

5. Там Піфагор прожив 12 років.

6. Сторона прямокутного трикутника, яка лежить проти прямого кута.

7. Кількість биків, було принесено Піфагором у жертву богам після доведення теореми.

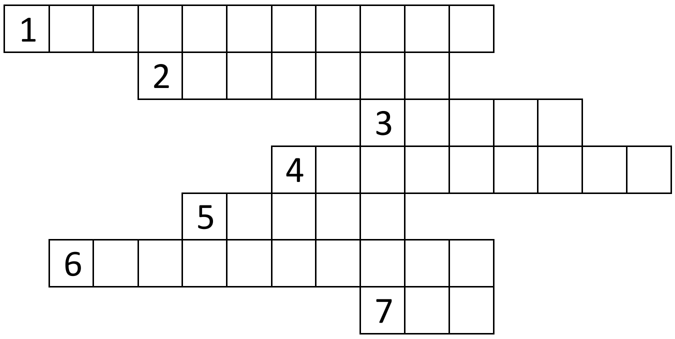


Рис 2.5.6.

VI. Домашнє завдання.

Геометрія, 9 клас

(згідно чинної програми з математики для 5-9 класів (рівень стандарту))

Тема. Розв’язування трикутників. Прикладні задачі.

Мета: узагальнити, систематизувати та закріпити знання учнів про теорему синусів та теорему косинусів. Закріпити основні алгоритми розв’язування трикутників. Навчити учнів застосовувати набуті знання і вміння до розв’язування прикладних задач. Розвивати вміння аналізувати, робити висновки, знаходити власні способи розв’язку. Виховувати акуратність під час оформлення математичних записів, наполегливість, інтерес до математики.

Тип уроку: урок – практикум.

Хід уроку

I. Організаційна частина.

II. Повідомлення теми і мети уроку.

Сьогодні ми з вами проведемо урок, на якому узагальнимо та систематизуємо знання з вивченої теми, вдосконалимо вміння застосовувати отримані знання до розв’язування задач прикладного змісту.

III. Мотивація навчальної діяльності

Слово “тригонометрія” штучно складене з грецьких слів: “тригонон” - трикутник та “метрео” - міряю, виміряю (відповідним українським терміном було б “трикутниковимірювання”).

Основна задача тригонометрії полягає в розв’язуванні трикутників, тобто знаходження невідомих величин трикутника за даними значеннями інших його величин. Так, у тригонометрії розв’язують задачу на знаходження кутів трикутника за даними його сторонами, задачу на знаходження сторін трикутника - за площею та двома кутами тощо.

Тригонометрія широко застосовується у фізиці, геодезії, топографії, архітектурі, медицині та біології. Без тригонометрії не можна обійтися у випадках, коли необхідно знайти результати з досить великою точністю.

Вимірювання кутів транспортиром або іншими найпростішими кутомірними приладами дає дуже грубе наближення, внаслідок чого кінцеві результати матимуть дуже великі похибки. Тригонометрія дає можливість знаходити кути не безпосереднім їх вимірюванням, а за допомогою обчислень.

IV. Актуалізація опорних знань.

Повторимо матеріал, який ви вивчили на уроках.

1. Математичний диктант

1. Запишіть теорему косинусів для сторони c.
2. Запишіть теорему косинусів для сторони a.
3. Запишіть теорему косинусів для сторони b.
4. З останньої формули виразіть $\cos\beta$.
5. Запишіть теорему синусів.
6. Запишіть рівності, що випливають із теореми синусів для $\triangle MKB$.
7. Відомо, що сторона a менша за кожну з двох інших сторін. Який кут трикутника найменший?
8. Який кут трикутника найбільший, якщо його сторони $a = 7$, $b = 8$, $c = 3$?
9. Запишіть чому дорівнює квадрат сторни MK $\triangle MKB$.

1. Знайдіть невідому величину за малюнком (рис 2.5.7.)

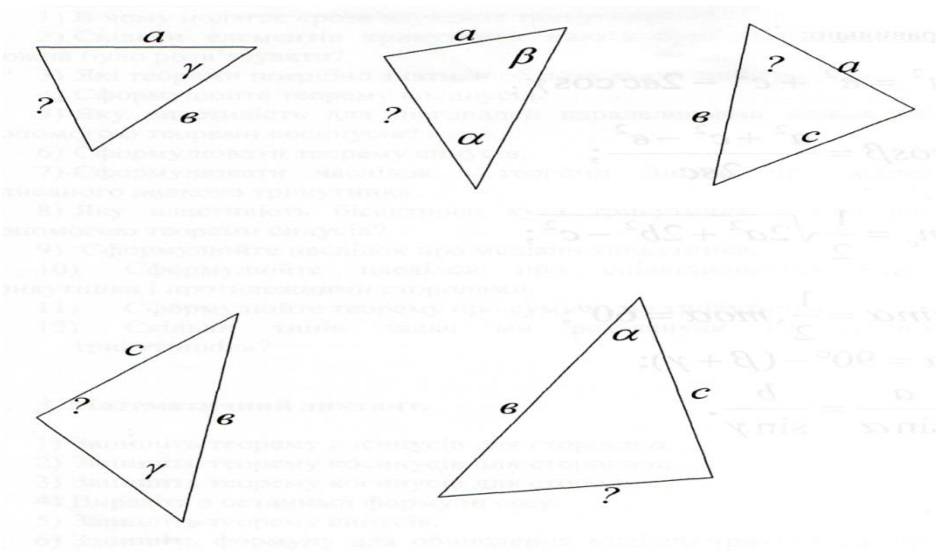
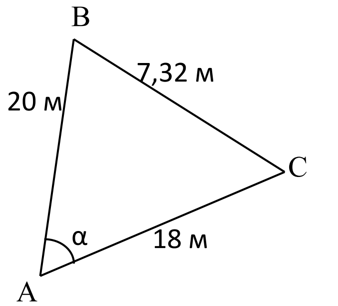


Рис. 2.5.7.

IV. Використання знань на практиці

Задача 1. Футбольний м'яч знаходиться у точці *A* футбольного поля на відстанях 18 м і 20 м від основ *B* та *C* стійок воріт. Футболіст спрямовує м'яч у ворота. Зайдіть кут α (з точністю до градуса), під яким м'яч влучає у ворота, якщо ширина воріт дорівнює 7,32 м. [18, 116]



(Рис 2.5.8.)

Розв'язання. Зобразимо дані задачі на рисунку (рис 2.5.8.) За теоремою косинусів маємо:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\, AB \cdot AC \cdot \cos\alpha;$$

$$\cos\alpha = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2\, AB \cdot AC} = \frac{20^2 + 18^2 - 7.32^2}{2 \cdot 20 \cdot 18} \approx 0{,}9311;$$

α = 21°24'.

Відповідь. α = 21°24'.

Задача 2. За допомогою дальноміра були виміряні відстані *AC* = 30 м і *BC* = 45 м, а за допомогою астролябії ∠ *ACB* = 40 (рис 2.5.9.). Більшою чи меншою

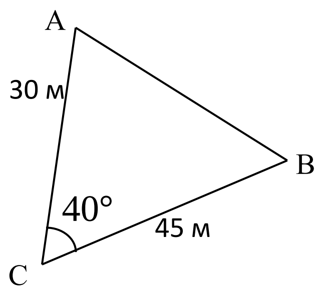


Рис 2.5.9.

за 30 м є відстань між двома недоступними точками *A* і *B*? [18, 117]

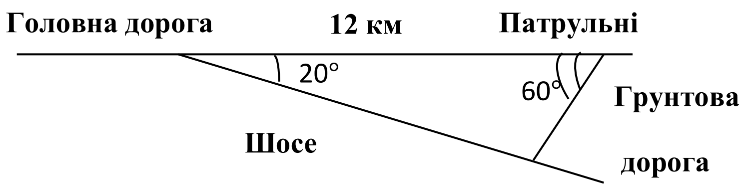
Розв'язання. За теоремою косинусів маємо:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\ BC \cdot AC \cdot \cos 40° =$$

$= 30^2 + 45^2 - 2 \cdot 30 \cdot 45 \cdot 0{,}7660 = 225$, $AB = \sqrt{856{,}8} \approx\ \approx 29{,}27$ (м), 29,27 м < 30 м

Відповідь. *AB* **=** 29,27 м < 30 м.

Задача 3. О 8:00 порушник правил дорожнього руху повернув із головної дороги і помчав уздовж шосе зі швидкістю 150 км/год. О 8:01 екіпаж патрульної поліції отримав наказ затримати порушника й помчав йому на переріз грунтовою дорогою зі швидкістю 80 км/год (рис 2.5.10.). Чи встигнуть патрульні зупинити порушника на перехресті шосе і грунтової дороги? [18, 118]



(Рис 2.5.10.).

Розв'язання.Зобразимо дані задачі на рисунку (рис 2.5.11.)

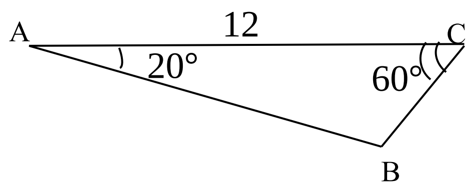


Рис 2.5.11.

$\angle\ ABC = 180° - (\angle CAB + \angle\ ACB) =$

$= 180° - (20° + 60°) = 100°$

За теоремою синусів маємо: $\frac{AC}{\sin 100°} = \frac{AB}{\sin 60°} = \frac{BC}{\sin 20°}$

$$AB = \frac{AC \sin 60°}{\sin 100°} = \frac{12 \cdot 0{,}866}{0{,}9848} \approx 10{,}55 \text{ (км)}$$

$$BC = \frac{AC\ \sin 20°}{\sin 100°} = \frac{12 \cdot 0{,}342}{0{,}9848} \approx 4{,}17 \text{ (км)}$$

10,55 : 150 = 0,07 (год), 0,07 (год) = 4,2 хв

4,17 : 80 = 0,05 (год), 0,05 (год) = 3 хв, отже патрульні прибудуть на місце події на 12 секунд раніше, ніж порушник.

Відповідь. Так.

Задача 4. Щоб за відсутності дальноміра знайти відстань між двома недоступними точками *A* і *B*, вибрали дві доступні точки *C* і *D*, провели вимірювання й отримали, що *CD* = 50 м, ∠*ADB* = 50°, ∠*ADC* = 80°, ∠*ACB* = 40°, ∠*BCD* = 45° (Рис 2.5.12.). Знайдіть відстань *AB* (з точністю до метра).

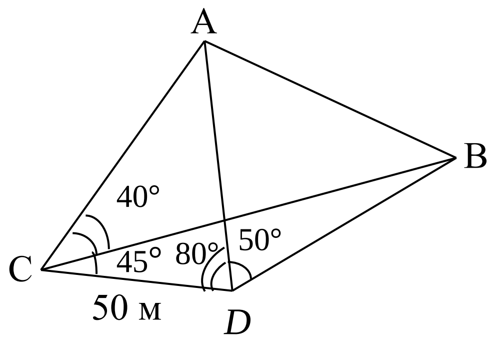


Рис 2.5.12.

Розв'язання. З ⊿ *CAD:*

∠*ACD* = ∠*ACB* + ∠*BCD* = 45° + 40° = 85°

∠*CAD = 180*° - *(*∠*ACD +*∠*ADC) = =180*° – *(*85° + 80°) = 15°

За теоремою синусів маємо:

$$\frac{CD}{sin\,A} = \frac{AD}{sin\,C}; \; AD = \frac{CD\sin 85°}{\sin 15°} = \frac{50\cdot 0{,}9962}{0{,}2588} \approx$$

$$\approx 192{,}46 \text{ м};$$

$$\frac{CD}{sin\,A} = \frac{AC}{sin\,D}; \; \text{AC} = \frac{CD\sin 80°}{\sin 15°} = \frac{50\cdot 0{,}9848}{0{,}2588} \approx 190{,}26;$$

З⊿ *CBD:* ∠*CDB* = ∠*CDA* + ∠*ADB* = 80° + 50° =130°;

∠*CBD = 180*° - *(*∠*BCD +*∠*CDB) = =180*° – *(*45° + 130°) = 5°;

$$\frac{CD}{sin\,B} = \frac{BC}{sin\,D}; \; BC = \frac{CD\sin 130°}{\sin 5°} = \frac{50\cdot 0{,}766}{0{,}0872} \approx 439{,}2;$$

З⊿ *CAB* за теоремою косинусів маємо: $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\cdot AC\cdot BC\cos C =$ $= 190{,}26^2 + 439{,}2^2 - 2\cdot 190{,}26\cdot 439{,}2\cdot 0{,}766 \approx 36\,198{,}87 + 192\,896{,}64 -$ $-128\,017{,}28 \approx 101\,078{,}23$;

$$\text{AB} = \sqrt{101\,078{,}23} \approx 317{,}9 \text{ (м)};$$

Відповідь. AB ≈ 317,9 м.

V. Підсумок уроку

Сьогодні на уроці ми з вами навчилися розв'язувати прикладні задачі.

Що вам сподобалося найбільше?

Що вам не сподобалося?

Які труднощі виникли під час розв'язування задач?

V. Домашнє завдання

Алгебра і початки аналізу, 10 клас

(рівень стандарту)

(за підручником А.Г.Мерзляк «Математика» алгебра і початки аналізу та геометрія, 2018р.)

Тема уроку. Радіанна міра кутів

Мета уроку: сформувати в учнів поняття радіанної міри кутів; виробити вміння переходити від радіанної міри кутів до градусної і навпаки; розвивати критичне мислення, інтелектуальні здібності, вміння аналізувати та робити висновки; виховувати акуратність при оформленні математичних записів.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Хід уроку

І Організаційна частина

ІІ. Актуалізація опорних знань учнів та мотивація навчальної діяльності

Сьогодні ми розпочинаємо вивчення нового розділу «Тригонометричні функції». І розпочинає вивчення даного розділу з теми «Радіанна міра кутів».

Слово "тригонометрія" штучно складене з грецьких слів: "трігонон" - трикутник та "метрео" - міряю, виміряю (відповідним українським терміном було б "трикутниковимірювання").

Крім градусної міри кутів використовують й інші одиниці вимірювання кутів. Вам було дане завдання підготувати інформацію про те, якими одиницями можуть вимірюватися кути.

В астрономії одиницею вимірювання кутів є кутова година. 1 кутова година дорівнює 1/6 частині прямого кута.

У техніці одиницею вимірювання кутів є повний оберт.

В артилерії кути вимірюють у «поділках кутоміра». Велика поділка – це 1/60 частина повного оберту, а мала поділка – це 1/100 частини великої поділки (позначення 22-39, означає 22 великі і 39 малих поділок кутоміра).

У моряків кути вимірюються в румбах. 1 румб = 1/16 частині розгорнутого кута.

У картографії в деяких країнах одиницею вимірювання є 1 град.(g) 1g = 1/200 частині розгорнутого кута.

У математиці та фізиці використовують поряд градусною мірою кутів ще й радіанну міру.

ІІІ. Повідомлення теми та мети уроку.

Сьогодні на уроці ми з вами ознайомимося з радіанною мірою кутів та навчимося переходити з градусної міри в радіанну і навпаки.

IV.Вивчення нового матеріалу.

Означення. [10, 49] Кутом в один радіан називають центральний кут кола, що спирається на дугу, довжина якої дорівнює радіусу кола.

Кут в один радіан *(рад.)*– це центральний кут кола *AOB* (рис. 2.5.13.), що спирається на дугу, довжина якої дорівнює радіусу($\cup AB=OB$). Величина цього кута не залежить від радіуса кола та від положення дуги *AB* на колі. Оскільки півколо видно з центра кола під кутом 180^0, а довжина півкола дорівню є π радіусам, то один радіан в π раз менше, ніж кут в 180^0 тобто:

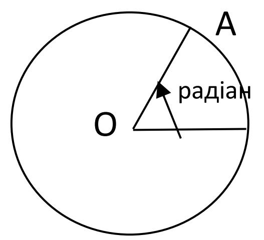


Рис. 2.5.13.

$$180^0 = \pi \text{ рад}$$

$$1 \text{ рад.} = \frac{180^0}{\pi} \approx 57^0 18',$$

і навпаки один градус дорівнює $\frac{\pi}{180^0}$ радіана $1^0 = \frac{\pi}{180^0}$ рад $\approx$ 0,017453 радіана.

Таблиця 2.5.1. градусних та радіанних мір кутів, які трапляються найчастіше:

Градусна міра кута	0°	30°	5°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Радіанна міра кута	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Приклад 1. Виразіть у радіанах величини кутів 30°; 90°.

Розділимо ліву і праву частини рівності 180° = π рад послідовно на 6, 2, одержимо 30° = $\frac{\pi}{6}$ рад, 90° = $\frac{\pi}{2}$ рад.

Приклад 2. Виразітьуградусахвеличиникутів $\frac{\pi}{5}$ рад, $\frac{\pi}{18}$ рад.

Розділимо ліву і праву частини рівності 180° = π рад послідовно на 5; 18, одержимо $\frac{\pi}{5}$ = 36º; $\frac{\pi}{18}$ рад = 10º.

Приклад 3. Знайдіть у градусах 3,5 рад.

Через те що 1 рад =$\frac{180°}{\pi}$, 3,5 рад = 3,5 · $\frac{180°}{\pi}$ = $\frac{630°}{\pi}$ = 201° .

Приклад 4. Знайдіть радіанну міру кута в 72°.

Через те що 1° = $\frac{180°}{\pi}$ рад, 72° = 72 · $\frac{\pi}{180°}$ рад = $\frac{2\pi}{5}$ рад ≈ 1,3 рад.

Радіанна міра кута зручна для обчислення довжини дуги кола. Оскільки центральний кут в 1 рад спирається на дугу, довжина якої дорівнює радіусу R, то кут в α рад спирається на дугу, довжина якої дорівнює ***αR.*** Довжину дуги позначимо через ***l***, тоді маємо:

$$l = \alpha R.$$

Якщо радіус кола дорівнює одиниці, то ***l* = *α***, тобто довжина дуги дорівнює величині центрального кута, що опирається на цю дугу в радіанах.

IV. Формування умінь визначати радіанну міру кута за градусною і навпаки

1. **Виконання вправ.** Робота з підручником

№ 8.1. Знайдіть радіанну міру кута, який дорівнює:

1) 25°; 2) 40°; 5) 210°; 6) 300° [10, 53].

1) 25° = $\frac{\pi}{180°}$·25° = $\frac{5\pi}{36}$;
2) 40° = $\frac{\pi}{180°}$·40° = $\frac{2\pi}{9}$;
5) 210° = $\frac{\pi}{180°}$ ·210° = $\frac{7\pi}{6}$;
6) 300° = $\frac{\pi}{180°}$ ·300° =$\frac{5\pi}{3}$;

Відповідь.1) $\frac{5\pi}{36}$; 2) $\frac{2\pi}{9}$; 5) $\frac{7\pi}{6}$; 6) $\frac{5\pi}{3}$.

№ 8.2. Знайдіть градусну міру кута, радіанна міра якого дорівнює:

2) $\frac{2\pi}{5}$; 3) $\frac{\pi}{9}$; 4) $1{,}2\,\pi$; 5) 3π [10, 53].

2) $\frac{2\pi}{5} = 72°$;

3) $\frac{\pi}{9} = 20°$;

4) $1{,}2\,\pi = 216°$;

5) $3\pi = 540°$;

Відповідь.2) 72°; 3) 20°; 4) 216°; 5) 540°.

№ 8.3. Заповніть таблицю градусних та радіанних мір кутів [10, 53].

Градусна міра кута	**10°**	12°	6°	**80°**	**108°**	105°	225°	**720°**	**324°**	240°
Радіанна міра кута	$\frac{\pi}{18}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{15}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{5}}$	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\boldsymbol{\frac{7\pi}{12}}$	$\boldsymbol{\frac{5\pi}{4}}$	4π	1,8π	$\boldsymbol{\frac{4\pi}{3}}$

№ 8.4. Чому дорівнює довжина дуги кола, радіус якої дорівнює 12 см, якщо радіанна міра дуги становить: 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 2; 3) $\frac{5\pi}{6}$ [10, 53].

R= 12 см, l = α*R*.

1) $l = \frac{\pi}{2} \cdot 12 = 6\pi$ см;

2) $l = 2 \cdot 12 = 24$ см;

3) $l = \frac{5\pi}{6} \cdot 12 = 10\pi$ см.

Відповідь. 1) 6π см; 2) 24 см; 3)10π см.

№ 8.5. Обчисліть довжину дуги кола, якщо відомо її радіанну міру α та радіус R кола: 1) α =3, R =5 см; 2) α =0,4π, R =2 см; [10, 53].

1) α =3, R =5 см; $l = \alpha R$, $l = 3\cdot 5 = 15$ см;

3) α =0,4π, R =2 см; $l = \alpha R$, $l = 0{,}4\pi \cdot 2 = 0{,}8\pi$ см.

Відповідь.1) 15 см; 2) 0,8π см.

V. Підведення підсумків уроку.

Продовжіть речення:

Сьогодні я дізнався…

Було цікаво…

Було не зрозуміло…

Тепер я знаю…

VI. Домашнє завдання:

Алгебри і початки аналізу, 10 клас

(профільний рівень)

(за підручником А.Г.Мерзляк «Алгебра і початки аналізу» початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу,2018р.)

Тема уроку: Основі співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу.

Мета уроку: розширити знання учнів про основні співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу, формувати вміння і навички застосовувати вивчені співвідношення для тотожних перетворень (спрощення) виразів, вчити знаходити значення тригонометричних функцій за однією відомою функцією.

Розвивати вміння самостійно міркувати, аналізувати та використовувати набуті знання на практиці, увагу, інтелектуальні здібності.

Виховувати акуратність при оформленні математичних записів.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Хід уроку

I Організаційний етап.

II. Актуалізація опорних знань учнів та мотивація навчальної діяльності.

1. Фронтальне опитування

1. Дайте означення синуса, косинуса, тангенса та котангенса довільного кута.

2. Назвіть головний період функції: $y = sinx$, $y = cosx$, $y = tgx$, $y = ctgx$.

3. Назвіть область значень функції: $y = sinx, y = cosx, y = tgx, \quad y = ctgx.$

4. Назвіть область визначень функції: $y = sinx, y = cosx, y = tgx, \quad y = ctgx.$

5. Чому дорівнює $cos\ (-\alpha), sin\ (-\alpha), tg(-\alpha), ctg(-\alpha)?$

III. Повідомлення теми та мети уроку.

Сьогодні на уроці ми з вами встановимо тотожності, які пов'язують значення тригонометричних функцій одного й того самого аргументу.

IV.Вивчення нового матеріалу.

1. Співвідношення між синусом і косинусом одного і того ж аргумента.

Нехай точка $P_\alpha(x, y)$ одиничного кола отримана поворотом точки $P_0(1; 0)$ на кутα радіан, тоді згідно з означенням синуса і косинуса:$x = cos\ \alpha$, $y == sin\ \alpha$ (рис. 2.5.14). Оскільки точка $P_\alpha(x;y)$ належить одиничному колу, то координати $(x; y)$ задовольняють рівняння $x^2 + y^2 = 1$. Підставивши в це рівняння замість x і y значення $cos\ \alpha$ і $sin\alpha$, отримаємо:

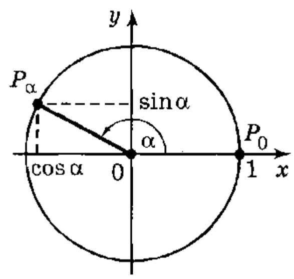


Рис. 2.5.14

$$(cos\ \alpha)^2 + (sin\ \alpha)^2 = 1 \text{ або}$$

(враховуючи, що $(cos\ \alpha)^2 = cos^2\alpha$, $(sin\alpha)^2 = sin^2\alpha$))

$$cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1.$$

Ця рівність називається основною тригонометричною тотожністю.

З основної тригонометричної тотожності маємо:

$$cos\ \alpha = \sqrt{1 - sin^2\alpha};\ sin\ \alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha}.$$

2. Співвідношення між тангенсом і котангенсом одного і того ж аргумента.

$$tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha};\ \ ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$$

Перемноживши ці рівності, одержимо

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1;$$

Отже, $\boldsymbol{tg\alpha \cdot ctg\alpha = l}$ для всіх значень α, крім $\alpha = \frac{\pi}{2}, k, k \in Z.$

Із одержаної рівності можна виразити $tg\ \alpha$ через $ctg\alpha$ і навпаки:

$$tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha};\ ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}.$$

3. Співвідношення між тангенсом і косинусом, котангенсом і синусом одного і того ж аргумента.

Розділимо ліву і праву частину рівності $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ на $cos^2\alpha$, вважаючи, що $cos^2\alpha \neq 0$, одержимо:

$$\frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha} + \frac{cos^2\alpha}{cos^2\alpha} = \frac{1}{cos^2\alpha}\,;\ \ 1+ \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}\text{, при } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z.$$

Розділимо ліву і праву частину рівності $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ на $sin^2\alpha$, вважаючи, що $sin\alpha \neq 0$, одержимо:

$$\frac{sin^2\alpha}{sin^2\alpha} + \frac{cos^2\alpha}{sin^2\alpha} = \frac{1}{sin^2\alpha}\,;\ \ 1+ \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha}\text{, при } \alpha \neq \pi k,\ k \in Z.$$

V. Первинне застосування знань, умінь і навичок

1. Спростити вираз (усно):

1) $\sin^2 27° + \cos^2 27°$; **2)** $\mathrm{tg}\frac{2\pi}{3} \cdot \mathrm{ctg}\frac{2\pi}{3}$.

Відповідь. 1) 1 ; 2) 1.

2. Спростити вираз (усно):

1) $1 - \sin^2 42°$; **2)** $-\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi$.

Відповідь. 1) $\cos^2 42°$; 2) -1.

3. Спростити вираз**:** $(1- \cos^2 x) \cdot \mathrm{ctg}^2 x$.

$(1- \cos^2 x) \cdot \mathrm{ctg}^2 x = \sin^2 x \cdot \frac{cos^2\alpha}{sin^2\alpha} = \cos^2 x$.

Відповідь. $\cos^2 x$.

4. Обчислити**:** $2 \cos^2 45^0 + 6 \sin^2 45^0$

1) $2 \cos^2 45^0 + 6 \sin^2 45^0 = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 6 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4$.

Відповідь. 4.

5. Спростити вираз**:** $\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} + \mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$.

$\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} + \mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{cos^2\alpha}{sin^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

Відповідь. $\frac{1}{\sin^2\alpha}$.

6. Спростити вираз: $\cos^2 t - \cos^4 t + \sin^4 t$.

$\cos^2 t - \cos^4 t + \sin^4 t = \cos^2 t \cdot (1 - \cos^2 t) + \sin^4 t = \cos^2 t \cdot \sin^2 t + \sin^4 t =$

$= \sin^2 t \cdot (\cos^2 t + \sin^2 t) = \sin^2 t \cdot 1 = \sin^2 t$.

Відповідь. $\sin^2 t$.

7. Довести тотожність: $\mathrm{ctg}^2\,\alpha - \cos^2\alpha = \cos^2\alpha \cdot \mathrm{ctg}^2\,\alpha$.

$$\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \cos^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha - \cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha\cdot(1-\sin^2\alpha)}{\sin^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \cos^2\alpha \cdot \mathrm{ctg}^2\,\alpha.$$

Відповідь. Тотожність доведено.

V. Удосконалення набутих знань, умінь і навичок

1. Розв’язування вправ із підручника

№ 16.5. Спростіть вираз**:**1) $(1 + \mathrm{tg}\alpha)^2 + (1 - \mathrm{tg}\alpha)^2$; 2) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$;

3) $\frac{1+\sin(-\beta)}{\cos(-\beta)} - \mathrm{tg}\,(-\beta)$ [24, 129].

1) $(1 + \mathrm{tg}\alpha)^2 + (1 - \mathrm{tg}\alpha)^2 = 1 + 2\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}^2\alpha + 1 - 2\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}^2\alpha = 2 + 2\mathrm{tg}^2\alpha = 2(1 + \mathrm{tg}^2\alpha) =$

$= \frac{2}{\cos^2\alpha}$;

3) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha - \sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos\alpha\cdot\sin\alpha + \sin\alpha}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)} = \frac{2\sin\alpha}{1-\cos^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}$;

10) $\frac{1+\sin(-\beta)}{\cos(-\beta)} - \mathrm{tg}\,(-\beta) = \frac{1+\sin(-\beta)}{\cos(-\beta)} - \frac{\sin(-\beta)}{\cos(-\beta)} = \frac{1+\sin(-\beta)-\sin(-\beta)}{\cos(-\beta)} = \frac{1}{\cos\beta}$.

Відповідь.1) $\frac{2}{\cos^2\alpha}$; 3) $\frac{2}{\sin\alpha}$; 10) $\frac{1}{\cos\beta}$.

№ 16.7 Знайдіть значення тригонометричних функцій аргументу α, якщо:

2) $\sin\alpha = 0{,}6$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ [24, 129].

$1 - \sin^2\alpha = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$; $\cos^2\alpha = 0{,}64$; $\cos\alpha = -0{,}8 = -\frac{4}{5}$;

$\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{3}{4}$; $\mathrm{ctg}\,\alpha = -\frac{4}{3}$.

Відповідь. $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$; $\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{3}{4}$; $\mathrm{ctg}\,\alpha = -\frac{4}{3}$.

№16.9 Чи можуть одночасно виконуватися рівності: 1)$\sin\alpha = \frac{1}{4}$ і $\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$;

2) $\mathrm{tg}\alpha = 2{,}5$ і $\mathrm{ctg}\alpha = 0{,}6$; 3) $\cos\alpha = \frac{5}{7}$ і $\mathrm{tg}\alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$ [24, 129]?

1) $\sin\alpha = \frac{1}{4}$ і $\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$; $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 = \frac{16}{16} = 1$ (можуть).

2) $\mathrm{tg}\alpha = 2{,}5$ і $\mathrm{ctg}\alpha = 0{,}6$;

$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$; 2,5 ·0,6 =1,5 ≠ 1 (не можуть)

3) $\cos\alpha = \frac{5}{7}$ і $tg\alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$;

$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$; $1 + \frac{24}{25} = 1 + \frac{25}{49} = \frac{49}{25} = \frac{49}{25}$ (можуть).

Відповідь.1) можуть; 2) не можуть; 3) можуть.

№ 16.12. Доведіть тотожність: 1) $\sin^4\alpha \cdot \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos^4\alpha = \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$;

2) $ctg^2\alpha - \cos^2\alpha = ctg^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$; 3) $(tg^2\alpha - \sin^2\alpha) \cdot \frac{ctg^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 1$ [24, 130].

1) $\sin^4\alpha \cdot \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos^4\alpha = \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha\,(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$– тотожність доведено;

2) $ctg^2\alpha - \cos^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \cos^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha(1 - \sin^2\alpha)}{\sin^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} \cdot \cos^2\alpha =$
$= ctg^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$ – тотожність доведено;

3) $(tg^2\alpha - \sin^2\alpha) \cdot \frac{ctg^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \sin^2\alpha\right) \cdot \frac{ctg^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \left(\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right) \cdot \frac{ctg^2\alpha}{\sin^2\alpha} =$
$= \left(\frac{\sin^2\alpha\,(1 - \cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha}\right) \cdot \frac{ctg^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} \cdot \sin^2\alpha \cdot \frac{ctg^2\alpha}{\sin^2\alpha} = tg^2\alpha \cdot ctg^2\alpha = 1$– тотожність доведено.

Відповідь. Тотожності доведено.

VI. Домашнє завдання.

VII. Підведення підсумків уроку.

- Сьогоднішній урок був для мене корисним, тому що ….

- Я дізнався …

- Я навчився …

- Мені сподобалось …

ВИСНОВКИ

Однією з найважливіших складових змісту шкільної математичної освіти є тригонометричний матеріал. Він в свою чергу забезпечує прикладну спрямованість навчання математики, розвиток практичних навичок і вмінь, науковий світогляд учнів.

На сьогоднішній день тригонометрія – це дисципліна, що вивчає тригонометричні функції та їх застосування. Тригонометричні функції застосовуються: при вивченні геометрії, комплексних чисел, при розв'язуванні рівнянь, при вивченні коливальних процесів, при вивченні функцій загального вигляду.

У магістерській роботі виконано такі завдання:

1) з'ясовано обсяг матеріалу з тригонометрії, який вивчається в основній та старшій школі;

2) проаналізовано чинні програми (рівень стандарту, поглиблений рівень вивчення математики) та підручники: з геометрії для 8, 9 класу та аналіз підручників з алгебри і початків аналізу для 10 класу в контексті дослідження;

3) виокремлено методичні особливості навчання тригонометричних функцій в основній та старшій школі;

4) розроблено методичні схеми розв'язування прямокутних та косокутних трикутників;

5) написані приклади конспектів уроків з використанням елементів тригонометрії.;

6) розроблено уроки для різних класів з тем, що стосуються тригонометрії, в основі яких лежить компетентністний підхід.

Магістерська робота може бути використана педагогами і студентами фізико – математичних факультетів, вчителями математики при підготовці та проведенні уроків з даної теми.

СПИСОК ВИКОРИСАНИХ ДЖЕРЕЛ

1.Апостолова Г.В. Геометрія 8 клас, дворівневий підручник для загальноосвітніх навчальних закладів / Г.В. Апостолова.- К.: Генеза, 2008. – 278с.

2. Довідник з елементарної математики, механіки та фізики / Ред. С.Г. Максимова ,1996, 192 с.

3. Істер О.С. Геометрія: підруч. Для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / О.С. Істер. – Київ: Генеза, 2016. – 216с.

4. Мерзляк А.Г. Геометрія: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів з поглибл. вивч. Математики / А.Г.Мерзляк, В.Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2016. – 224 с. : іл.

5. Істер О.С. Математика: (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти / О.С. Істер. – Київ: Генеза, 2018. – 384с. : іл.

6. Вікіпедія. Одиничне коло [Електронний ресурс] Режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%B5_%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D0%BE

7. Значення тригонометричних функцій для деяких значень аргументу. [Електронний ресурс] Режим доступу: https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/fmib/7mihalevich_elementarna_matematika_algebra_ch2/8.htm

8. Тригонометрична функція. [Електронний ресурс] Режим доступу: https://formula.co.ua/uk/content/trigonometric-functions.html

9. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів: академ. рівень / Є.П. Нелін. – Х.: Гімназія, 2010. – 416с.: іл.

10. Мерзляк А.Г. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2018 – 256 с.: іл.

11. Навчальна программа з математики (5 – 9клас) для загальноосвітніх навчальних закладів (рівень стандарту). [Електронний ресурс] Режим доступу:

https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas

12. Навчальна програма для поглибленого вивчення математики в 8–9 класах загальноосвітніх навчальнихз акладів. [Електронний ресурс] Режим доступу: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-5-9-klas/matematika-algebra-geometriya.pdf

13. Навчальна програма з математики (АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ ТА ГЕОМЕТРІЯ) для учнів 10 – 11 класів загальноосвітніх навчальних закладів Рівень стандарту. [Електронний ресурс] Режим доступу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv

14. Навчальна програма з математикидля учнів 10-11 класів (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. [Електронний ресурс] Режим доступу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv

15. Волчаста М. М. Наступність у вивченні геометричного матеріалу в початковій та основнійшколі: автореф. дис на здобуття ступеня канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Теорія та методика навчання математики»/ Марія Миколаївна Волчаста. –Київ, 2003. –20 с. [Електронний ресурс] Режим доступу: http://enpuir.npu.edu.ua/bitstream/123456789/6003/1/Vo

16. Означення синуса, косинуса, тангенса та котангенса [Електронний ресурс] Режим доступу: http://geom9klas.blogspot.com/2015/01/blog-post_31.html

17. Апостолова Г.В. Геометрія : 9: дворівн.підруч. для загальноосвіт. навч. закл. / Г.В. Апостолова.- К.: Генеза, 2009. – 304 с.

18. Істер О.С. Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / О.С. Істер. – Київ: Генеза, 2017. – 240с.

19. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. – К.: Зодіак – ЕКО, 2000.- 512с.

20. Істер О.С. Алгебра і початки аналізу : (профіл. рівень) : підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти / О.С. Істер, О.В. Єргіна. – Київ: Генеза, 2018. – 448 с.

21.Навчальна програма з математикидля учнів 10 – 11 класів загальноосвітніх навчальних закладів Профільний рівень. [Електронний ресурс] Режим доступу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv

22. Мерзляк А.Г. Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2017. – 240 с.

23. Мерзляк А.Г. Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2017. – 304 с.

24. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу: початок вивчення на поглиб. Рівні з 8 кл., проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2018. – 512 с.

25. Мерзляк А.Г. Геометрія: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2016. – 208с.

26. Офіційний веб – сайт Міністерства освіти і науки України [Електронний ресурс] Режим доступу: https://mon.gov.ua/ua

27. Означення формул зведення [Електронний ресурс] Режим доступу: https://infopedia.su/9x52df.html

28. Житарюк І. В. Методичні особливості викладання теми "тригонометричні функції" у старшій школі / І. В. Житарюк // Наука і освіта. - 2014. - № 1. - С. 127-131. [Електронний ресурс] Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/NiO_2014_1_29.

29. Уварова Л.М. Реалізація принципу неперервності навчання на прикладі вивчення елементів тригонометрії / Л.М. Уварова // Студентська звітна конференція: Матеріали результатів наукових досліджень молодих

науковців. – Суми: Вид-во фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2020. – Випуск 14. – Том 1. – 88 с.

30. Уварова Л.М. Реалізація принципу неперервності навчання на прикладі вивчення елементів тригонометрії // Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-2020 Форум молодих дослідників»: матеріали І Всеукраїнської науково-методичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу - ІТМ*плюс-2020. Форум молодих дослідників» (Суми, 2020 рік), упорядн. Чашечникова О.С.

ДОДАТКИ

Додаток А

Таблиця 2.2.3. Аналіз підручників щодо вивчення елементів тригонометрії у 8 класі

8 клас				
Автори, назва	Істер О.С, Геометрія підручник для 8 класу 2016р. (рівень стандарту)	Апостолова Г.В. Геометрія дворівневий підручник для 8 класу 2008р.	Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С., Геометрія підручник для 8 класу 2016р. (рівень стандарту)	Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С., Геометрія підручник для 8 класу 2016р. (поглиблений рівень)
Назви розділів та параграфів, що відносяться до даної теми	Розділ 3. «Розв'язування прямокутних трикутників»: § 18. Теорема Піфагора. § 19. Перпендикуляр і похила, їх властивості. § 20. Синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника. Співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника. §. 21. Розв'язування	IV розділ "Тригонометричні функції гострого кута. Обчислення прямокутного трикутника": § 26. Відповідність між відношеннями сторін і мірою гострих кутів у прямокутному трикутнику. § 27.(додатковий) Побудова кута за його тригонометричними функціями. Зміна значень тригонометричних функцій на інтервалі (0;90) §28.Тригонометричні функції доповняльних кутів §29.Співвідношення між	§ 3. "Розв'язування прямокутних трикутників": 15. Метричні співвідношення в прямокутному трикутнику; 16.Теорема Піфагора 17.Тригонометричні функції гострого кута прямокутного трикутника 18.Розв'язування прямокутних трикутників	§5. "Розв'язування прямокутних трикутників": 22. Метричні співвідношенняв прямокутному трикутнику; 23. Теорема Піфагора 24.Тригонометричні функції гострого кута прямокутного трикутника 25. Розв'язування прямокутних трикутників

	прямокутних трикутників.	тригонометричними функціями одного і того самого кута §30.Значення тригонометричних функцій деяких кутів §31.Розв’язування прямокутних трикутників §32.(додатковий) Практичні задачі із застосуванням тригонометрії		
Виділення математичних об’єктів	Теореми, означення, властивості, аксіоми позначені спеціальним знаком, надруковані жирним шрифтом та надруковані на кольоровому фоні.	Основний теоретичний матеріал позначено вертикальною кольоровоюрискою,за нею,нібизамітки на полях, розміщено головну опорну інформацію.	Означення, теореми, основні математичні твердження виділені жирним шрифтом, жирним курсивом та курсивом, формули виділені синьою рамкою	Означення, теореми, основні математичні твердження виділені жирним шрифтом, жирним курсивом та курсивом, формули виділені синьою рамкою
Наявність прикладів, та їх віцдповідність завданням для розв’язування	У підручнику достатня кількість прикладів із детальними поясненнями, які відповідають завданням для розв’язування.	Приклади з поясненнями є, але не в усіх параграфах. Ті, що, є відповідають завданням для розв’язування	У підручнику недостатня кількість прикладів з детальними поясненнями. Ті, що є, відповідають завданням для розв’язування	У підручнику достатня кількість прикладів із детальними поясненнями, які відповідають завданням для розв’язування
Наявність питань після параграфа для повторення	+	-	+	+

Розподіл завдань за рівнями складності	Завдання розподілено за 4 рівнями складності: 1.Початковий рівень 2. Достатній рівень; 3.Середній рівень; 4.Високий рівень	Завдання поділено на чотири рівні: 2. Найпростіші 3. Дещо складніші 4. Завдання, які вимагають більш глибоких міркувань 5. Найскладніші	Завдання в кожному пункті розподілено за 4 рівнями складності: 2. Початковий та середній рівень навчальних досягнень 3. Достатній рівень навчальних досягнень 4. Високий рівень навчальних досягнень завдання підвищеної складності	Завдання в кожному пункті розподілено за 4 рівнями: 2. Початковий та середній рівень навчальних досягнень 3. Достатній рівень навчальних досягнень 4. Високий рівень навчальних досягнень завдання підвищеної складності
Наявність прикладу контрольної або самостійної роботи з теми	+	+	+	+
Нестандартні задачі в параграфі	Виділені окремою рубрикою «Цікаві задачі для учнів неледачих».	Виділені окремою рубрикою «Для допитливих»	Виділені окремою рубрикою «Спостерігайте, рисуйте, конструюйте, фантазуйте»	Відсутні

Додаток Б

Продовження таблиці 2.2.3. Аналіз підручників щодо вивчення елементів тригонометрії в 9 класі

9 клас				
Автори, назви	Істер О.С. Геометрія; підручник для 9 класу, 2017р. (рівень стандарту)	Апостолова Г.В. Геометрія,дворівневийпідручник для 9 класу, 2009р.	Мерзляк А.Г., Полонський В.Б. Якір М.С., Геометрія, підручник для 9 класу (рівень стандарту)	Мерзляк А.Г., Полонський В.Б. Якір М.С., Геометрія, підручник для 9 класу (поглиблений рівень)
Назви розділів та параграфів, що відносяться до даної теми	Розділ 1. Метод координат на площині §2. Синус, косинус, тангенс кутів від 0° до 180°. Тригонометричні тотожності Розділ 3. Розв'язування трикутників § 11. Теорема косинусів § 12. Теорема синусів § 13. Розв'язування трикутників. Прикладні задачі § 14. Формули для знаходження площі трикутника	Розділ І. Координатна площина. Тригонометричні функції кутів від 0° до 180°. Розв'язування трикутників: § 4. Тригонометричні функції кутів від 0° до 180° §5. Теорема синусів §6. Теорема косинусів §7. Розв'язування трикутників §8. Площа трикутника і чотирикутника §9. (додатковий) Метод площ у теоремах і задачах §10.(додатковий) Метод координат як засіб розв'язування геометричних задач	§1. Розв'язування трикутників 1.Синус, косинус і тангенс кута від 0° до 180° 2.Теорема косинусів 3.Теорема синусів 4.Розв'язування трикутників 5.Формули для знаходження площ трикутника	§2. Розв'язування трикутників 2.Синус, косинус, тангенс і котангенс кута від 0° до 180° 3. Теорема косинусів 4. Теорема синусів 5.Розв'язування трикутників 6. Формули для знаходження площі трикутника
Виділення математичних об'єктів	Теореми, означення, властивості, аксіоми позначені спеціальним знаком, надруковані жирним шрифтом та надруковані на кольоровому фоні.	Означення, теореми, основні математичні твердження виділені жирним шрифтом, жирним курсивом та курсивом. Основний теоретичний матеріал позначено вертикальною кольоровою рискою,за нею ніби замітки на полях, розміщено головну	Означення, теореми, основні математичні твердження виділені жирним шрифтом, жирним курсивом та курсивом, формули виділені синьою рамкою	Означення, теореми, основні математичні твердження виділені жирним шрифтом, жирним курсивом та курсивом, формули виділені синьою рамкою

		опорну інформацію.		
Наявність прикладів, та їх відповідність завданням для розв’язування	У підручнику достатня кількість прикладів із детальними поясненнями, які відповідають завданням для розв’язування.	Приклади з поясненнями є, але не в усіх параграфах. Ті, що є, відповідають завданням для розв’язування.	У підручнику достатня кількість прикладів із детальними поясненнями, які відповідають завданням для розв’язування.	У підручнику достатня кількість прикладів із детальними поясненнями, які відповідають завданням для розв’язування.
Наявність питань після параграфа для повторення	+	-	+	+
Розподіл завдань за рівнями складності	Завдання розподілено за 4 рівнями складності: 1. Початковийрівень; 2. Достатній рівень; 3. Середній рівень; 4. Високий рівень	Завдання поділено на чотири рівні: 1.найпростіші; 2.дещо складніші; 3.завдання, які вимагають більш глибоких міркувань; 4.найскладніші	Завдання в кожному пункті розподілено за 4 рівнями складності: 1.Початковий та середній рівень навчальних досягнень; 2.Достатній рівень навчальних досягнень; 3.Високий рівень навчальних досягнень; 4. Завдання підвищеної складності	Завдання в кожному пункті розподілено за 4 рівнями складності: 1.Початковий та середній рівень навчальних досягнень; 2.достатній рівень навчальних досягнень; 3.високий рівень навчальних досягнень; 4. завдання підвищеної складності
Наявність контрольної або самостійної роботи з теми	+	+	+	-
Нестандартні задачі в параграфі	Виділені окремою рубрикою «Цікаві задачі для учнів неледачих».	Виділені окремою рубрикою «Для допитливих»	Виділені окремою рубрикою «Спостерігайте, рисуйте, конструюйте, фантазуйте»	Відсутні

Додаток В

Продовження таблиці 2.2.3. Аналіз підручників щодо вивчення елементів тригонометрії у 10 класі

10 клас				
Автори, назви	Істер О.С. Математика, підручник для 10 класу, 2018 р. (рівень стандарту)	Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу, підручник для 10 класу, 2010 р. (академічний рівень)	Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С., Математика, підручник для 10 класу (рівень стандарту)	Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Д.А. Номіровський, Якір М.С., Алгебра і початки аналізу, підручник для 10 класу, 2018р.(профільний рівень)
Назви розділів та параграфів, що відносяться до даної теми	Розділ 2. Тригонометричні функції §7. Синус, косинус, тангенс і котангенс кута §8. Радіанне вимірювання кутів. Тригонометричні функції числового аргументу. §9.Властивості тригонометричних функцій §10.Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу §11.Формули зведення §12.Періодичність функцій. Властивості та графіки тригонометричних функцій. §13.Тригонометричні формули додавання	Розділ3.Тригонометричні функції §16.Радіанна міра кутів §17.тригонометричні функції кута і числового аргументу §18.Властивості тригонометричних функцій §19.Графіки функцій синуса, косинуса, тангенса і котангенса та їх властивості. §20.Співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу §21.Формули додавання та їх наслідки §22.Додаткові формули тригонометрії Розділ4.Тригонометричні рівняння й нерівності §23.Обернені тригонометричні функції	§2. Тригонометричні функції 8. Радіанна міра кутів 9.Тригонометричні функції числового аргументу 10.Знаки значень тригонометричних функцій. Парність і непарність тригонометричних функцій 11. Властивості та графіки тригонометричних функцій 12.Основні співвідношенняміж тригонометричними функціями одного й того самого аргументу 13.Формули додавання 14.Формули зведення 15.Рівняння $cosx = b$ 16. Рівняння $sinx = b$і	§3.Тригонометричні функції 10.Радіанна міра кута 11.Тригонометричні функції числового аргументу 12..Знаки значень тригонометричних функцій. 13.Періодичні функції 14.Властивості та графіки функцій $y = sinx$і$y = cosx$ 15. Властивості та графіки функцій $y = tgx$і$y = ctgx$ 16. Основні співвідношенняміж тригонометричними функціями одного й того самого аргументу 17. Формули додавання 18. Формули зведення

	§14. Формули подвійного і половинного кута. Формули пониження степеня. §15.Формули суми й різниці однойменних тригонометричних функцій. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму. §16.Найпростіші тригонометричні рівняння	§24.Розв’язування найпростіших тригонометричних рівнянь §25. .Розв’язування тригонометричних рівнянь, які відрізняються від найпростіших §26.Розв’язування систем тригонометричних рівнянь §27.Найпростіші тригонометричні нерівності §28.Приклади розв’язування більш складних тригонометричних рівнянь та їх систем §29.Тригонометричні рівняння з параметрами §30.Розв’язування тригонометричних нерівностей.	$tgx = b$ 17. Тригонометричні рівняння, які зводяться до алгебраїчних	19.Формули подвійного, потрійного та половинного кутів 20.Формули для перетворення суми, різниці та добутку тригонометричних функцій §4.Тригонометричні рівняння і нерівності 21. Рівняння $cosx = b$ 22. Рівняння $sinx = b$ 23. Рівняння $ctgx = b$ $tgx = b$ 24.Функції $y=arccosx$ $y=arcsin\ x$ 25. Функції $y=arctgx$ $y=arcctg\ x$ 26. Тригонометричні рівняння, які зводяться до алгебраїчних 27.Розв’язування тригонометричних рівнянь методом розкладання на множники 28. Приклади розв’язування більш складних тригонометричних рівнянь 29.Про рівносильні переходи під час розв’язування тригонометричних рівнянь

				30.Тригонометричні нерівності 31. Тригонометрична підстановка
Виділення математичних об'єктів	Теореми, означення, властивості, аксіоми позначені спеціальним знаком, надруковані жирним шрифтом та надруковані на кольоровому фоні.	Теореми, означення, властивості, аксіоми надруковані жирним шрифтом та виділені іншим кольором. Основні формули виділені синьою рамкою	Означення, теореми, основні математичні твердження виділені жирним шрифтом, жирним курсивом та курсивом, формули виділені синьою рамкою	Означення, теореми, основні математичні твердження виділені жирним шрифтом, жирним курсивом та курсивом, формули виділені синьою рамкою
Наявність прикладів, та їх відповідність завданням для розв'язування	У підручнику достатня кількість прикладів з детальними поясненнями, які відповідають завданням для розв'язування.	У підручнику достатня кількість прикладів з детальними поясненнями, які відповідають завданням для розв'язування.	У підручнику достатня кількість прикладів із детальними поясненнями, які відповідають завданням для розв'язування.	У підручнику достатня кількість прикладів із детальними поясненнями, які відповідають завданням для розв'язування.
Наявність питань після параграфа для повторення	-	+	+	-
Розподіл завдань за рівнями складності	Завдання розподілено за 4 рівнями складності: 1.початковий рівень 2. середнійрівень; 3.достатнійрівень; 4.високий рівень	Завдання розподілено за 3 рівнями складності: 1.середній рівень; 2.достатній рівень; 3.високий рівень.	Завдання в кожному пункті розподілено за 4 рівнями складності: 1.початковий та середній; 2.достатній рівень; 3.високий рівень; 4. завдання підвищеної складності;	Завдання в кожному пункті розподілено за 4 рівнями складності: 1.початковий та середній; 2.достатній рівень; 3.високий рівень; 4. завдання підвищеної складності;
Нестандартні задачі в параграфі	-	-	-	-

Додаток Г

Розв'язування трикутників

*Обов'язкове поле

1. Прізвище ім'я *

2. Синус гострого кута прямокутного трикутника це * — 1 бал

Виберіть лише один варіант.

- відношення протилежного катета до гіпотенузи
- відношення прилеглого катета до гіпотенузи
- відношення протилежного катета до прилеглого катета
- відношення гіпотенузи до протилежного катета

3. Чи правильно, що в прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів? * — 1 бал

Виберіть лише один варіант.

- Так
- Ні

4. Чи правильно, що sin (90°-α) = cos α — 1 бал

Виберіть лише один варіант.

- Так
- Ні

5. Чи правильно, що cos (90°-α) = sin α * 1 бал

Виберіть лише один варіант.

- Так
- Ні

6. Чому дорівнює тангенс кута, якщо прилеглий катет дорівнює 6 см, а протилежний - 2 см 1 бал

Виберіть лише один варіант.

- 2/6
- 6/2
- 1/4
- 2/3

7. Чому дорівнює довжина гіпотенузи прямокутного трикутника, якщо катети дорівнюють 3 і 4 см відповідно? * 1 бал

Виберіть лише один варіант.

- 7 см
- 8 см
- 2 см
- 5 см

8. Чи правильне твердження, що синус прямокутного трикутника не залежить від градусної міри кута? * 1 бал

Виберіть лише один варіант.

- Так
- Ні

9. Чи правильне твердження, що якщо гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнює гострому куту іншого прямокутного трикутника, то синуси цих кутів рівні? * 1 бал

Виберіть лише один варіант.

- Так
- Ні

10. Косинус гострого кута прямокутного трикутника це * 1 бал

Виберіть лише один варіант.

- відношення протилежного катета до гіпотенузи
- відношення прилеглого катета до гіпотенузи
- відношення протилежного катета до прилеглого катета
- відношення гіпотенузи до протилежного катета

11. Тангенс гострого кута прямокутного трикутника це * 1 бал

Виберіть лише один варіант.

- відношення протилежного катета до прилеглого катета
- відношення прилеглого катета до гіпотенузи
- відношення гіпотенузи до протилежного катета