Боднарук С., Шевчук Н., Стефурак Х. Факультативний курс ‹‹Гіперкомплексні системи чисел та їх застосування›› для старшої школи. *Освіта. Інноватика. Практика,* 2023. Том 11, № 7. С. 22-28. DOI: 10.31110/2616-650X-vol11i7-003

Bodnaruk S., Shevchuk N., Stefurak Kh. Fakultatyvnyi kurs ‹‹Hiperkompleksni systemy chysel ta yikh zastosuvannia›› dlia starshoi shkoly [Optional course ‹‹Hypercomplex systems of numbers and their application›› for high school]. *Osvita. Innovatyka. Praktyka – Education. Innovation. Practice,* 2023. Vol. 11, No 7. S. 22-28. DOI: 10.31110/2616-650X-vol11i7-003

УДК 51:371.214.4
DOI: 10.31110/2616-650X-vol11i7-003

Світлана БОДНАРУК
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна
https://orcid.org/0000-0002-4979-7669
s.bodnaruk@chnu.edu.ua
Наталія ШЕВЧУК
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна
https://orcid.org/0000-0002-5971-8557
n.shevchuk@chnu.edu.ua
Христина СТЕФУРАК
Уторопський ліцей Яблунівської селищної ради Косівського району Івано-Франківської області, Україна
kristinastefurak2401@gmail.com

ФАКУЛЬТАТИВНИЙ КУРС «ГІПЕРКОМПЛЕКСНІ СИСТЕМИ ЧИСЕЛ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ» ДЛЯ СТАРШОЇ ШКОЛИ

Анотація. *У статті розглядаються методичні особливості навчання матеріалу, пов'язаного з теорією гіперкомплексних числових систем, на факультативних заняттях з математики для учнів старших класів ЗЗСО.*

Хоча довгий час гіперкомплексні числа і вважалися абстрактною категорією, що не має застосування в реальному світі, проте за декілька останніх століть було неодноразово доведено, що це не так. На сучасному етапі розвитку математики спостерігається активізація наукових досліджень, пов'язаних з гіперкомплексними числовими системами. Це зумовлено розширенням області використання таких чисел і тим, що деякі математичні твердження мають значно простіший вигляд, або легше доводяться, якщо записати їх, наприклад, мовою дій над кватерніонами чи над комплексними числами.

Комплексні числа не вивчаються у курсі математики у ЗЗСО у класах рівня стандарт. Згідно ж навчальної програми з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (профільний рівень), вивченню теорії комплексних чисел відводиться в курсі алгебри 11 класу лише 34 аудиторних години.

Для учнів старших класів, які захоплюються математикою та хочуть отримати глибші знання про числа, ніж це передбачено шкільною програмою, доцільним буде розширення змістової числової лінії. У цьому їм допоможе факультативний курс "Гіперкомплексні числові множини", який передбачає знайомство учнів не тільки із комплексними числами, а й з подвійними, дуальними числами та кватерніонами.

У статті наведено орієнтовний тематичний план даного факультативу, проілюстровано ряд цікавих задач, пов'язаних із теорією розв'язання алгебраїчних рівнянь в окремих гіперкомплексних числових системах. Для кращого розуміння матеріалу учнями доцільно використовувати візуалізацію розв'язків за допомогою пакета динамічної геометрії GeoGebra 2D/3D.

Зауважимо, що даний факультатив може бути запропонований як учням старших класів, що вивчають математику на рівні стандарт, так і для учнів класів профільного рівня.

Ключові слова: *факультатив з математики; гіперкомплексні числа; подвійні числа; дуальні числа; комплексні числа; кватерніони; GeoGebra.*

Svitlana BODNARUK
Chernivtsi National University named after Yury Fedkovich, Ukraine
https://orcid.org/0000-0002-4979-7669
s.bodnaruk@chnu.edu.ua
Natalia SHEVCHUK
Chernivtsi National University named after Yury Fedkovich, Ukraine
https://orcid.org/0000-0002-5971-8557
n.shevchuk@chnu.edu.ua
Khrystyna STEFURAK
Utoropsky lyceum of the Yabluniv settlement council, Kosiv district, Ivano-Frankivsk region, Ukraine
kristinastefurak2401@gmail.com

OPTIONAL COURSE «HYPERCOMPLEX SYSTEMS OF NUMBERS AND THEIR APPLICATION» FOR HIGH SCHOOL

Abstract. *This article examines the methodological features of teaching material related to the theory of hypercomplex numerical systems in elective classes in mathematics for students in high school.*

Although complex numbers were considered an abstract category that had no application in the real world for a long time, it has been repeatedly proven that this is not the case over the past several centuries. There is an intensification of scientific research related to hypercomplex numerical systems at the current stage of the development of mathematics. This is due to the expansion of the area of use of such *numbers and the fact that some mathematical statements have a much simpler form or are easier to prove if they are written, for example, in the language of operations on quaternions or complex numbers.*

Complex numbers are not studied in the mathematics course at the institutions of general secondary education in standard-level classes. Only 34 classroom hours are allocated to the study of the theory of complex numbers in the algebra course of grade 11, according to the mathematics curriculum for students in grades 10–11 at general educational institutions (professional level).

It will be appropriate to expand the meaningful number line for high school students who are interested in mathematics and want to gain a deeper knowledge of numbers than is provided by the school curriculum. The elective course "Hypercomplex Numerical Sets," which introduces students not only to complex numbers but also to doubles, dual numbers, and quaternions, will help them in this.

The article provides an approximate thematic plan of this elective and illustrates a number of interesting problems related to the theory of solving algebraic equations in individual hypercomplex numerical systems. It is advisable for students to use the visualization of solutions using the GeoGebra 2D/3D dynamic geometry package for a better understanding of the material.

Please note that this elective can be offered both to high school students studying mathematics at the standard level and to students in professional level classes.

Keywords: *elective subjects in mathematics; hypercomplex numbers; double numbers; dual numbers; complex numbers; quaternions; GeoGebra.*

Постановка проблеми. Історично відомості про числа формувались в математиці поступово в результаті тривалого розвитку, який відбувався під дією теоретичних і практичних потреб математики. Учням загальноосвітніх навчальних закладів добре відомий ланцюжок $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, який демонструє співвідношення між числовими множинами та ілюструє процес їх розширення. Багато в чому це розширення стимулювалося розвитком теорії розв'язування алгебраїчних рівнянь.

Першим узагальненням поняття дійсного числа стало введення комплексних чисел. Сучасні дослідники знаходять комплексним числам досить цікаві застосування, зокрема в фінансових розрахунках, при побудові математико-економічних моделей, комп'ютерній графіці та ін. [2, 7]

Гіперкомплексні числові системи є розширенням поля комплексних чисел. Їх вивчення – порівняно новий напрям сучасної математики, що був започаткований у дев'ятнадцятому столітті і активно розвивається у наші дні в роботах вітчизняних та зарубіжних вчених: Е. Садбері, А. Келі, І. Найвена, Ю.М. Березанського, О.Ф. Геруса, М.В. Синькова та інших. [1, 2, 3, 7]

Числова змістова лінія є однією з найважливіших змістових ліній курсу шкільної математики. В той же час, комплексні числа не вивчаються у курсі математики ЗЗСО у класах рівня стандарт. Згідно ж навчальної програми з математики для учнів 10-11 класів (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) загальноосвітніх навчальних закладів (профільний рівень), вивченню теорії комплексних чисел відводиться в курсі алгебри 34 години у 11 класі (Тема 10. Комплексні числа та многочлени) [5, 6].

Згідно програми, до змісту навчального матеріалу цієї теми відносять такі питання:

«Множина комплексних чисел. Геометрична інтерпретація комплексного числа. Алгебраїчна і тригонометрична форми запису комплексного числа. Дії над комплексними числами в різних формах запису. Формула Муавра. Корінь n-го степеня з комплексного числа.

Многочлен та його корені. Розклад многочлена на незвідні множники. Кратні корені. Основна теорема алгебри. Теорема Віета. Многочлен третього степеня. Рівняння вищих степенів. Формула Кардано». [6]

Паралельно із вивченням даного матеріалу на уроках алгебри та початків аналізу пропонуємо на факультативних заняттях з математики познайомити учнів старшої школи із окремими питаннями класичної теорії гіперкомплексних чисел та навести приклади застосування цієї теорії при розв'язуванні деяких простіших алгебраїчних задач.

Аналіз актуальних досліджень. Зауважимо, що в сучасній методичній літературі вивчення комплексних чисел та їх класичних застосувань в алгебрі, геометрії та фізиці пропонується в якості матеріалу факультативного курсу в класах з поглибленим вивченням математики. [1, 4]

Метою даної статті є дослідження можливості та методичних особливостей вивчення елементів теорії комплексних та гіперкомплексних числових систем (подвійних і дуальних чисел, кватерніонів) на факультативних заняттях з математики в старшій школі.

Методи дослідження: метод теоретичних досліджень, системно – структурний підхід, метод моделювання, логіко – аналітичний метод.

Виклад основного матеріалу. У статті наведемо перелік тем факультативних занять та, зокрема, проілюструємо методи розв'язання декількох цікавих задач практичного змісту, які можна запропонувати під час вивчення матеріалу факультативного курсу «Гіперкомплексні числові системи» для учнів 11 класу, що вивчають математику на рівні стандарт або на профільному чи поглибленому рівні (усього 35 годин).

Окрім цього, для якісного геометричного тлумачення розв'язків рівнянь та для оптимізації процесу контролю та самоконтролю отриманих знань, використовуватимемо пакет динамічної геометрії GeoGebra 2D/3D. [10] Зауважимо, що візуалізація за допомогою ППЗ значно збільшує зацікавленість навчальним матеріалом, мотивує школярів до потреби отримувати нові знання.

Орієнтовний тематичний план факультативного курсу:

1. Числові множини.

Поняття множини та її елементів. Скінченні та нескінченні множини. Множини натуральних, цілих, раціональних, ірраціональних, дійсних чисел. Розв’язання квадратних і кубічних рівнянь в множиніі дійсних чисел.

2. Множина комплексних чисел.

Розширення множини дійсних чисел. Історія виникнення комплексного числа. Алгебраїчна форма комплексного числа. Арифметичні операції над комплексними числами в алгебраїчній формі. Спряжені комплексні числа. Геометричне зображення комплексного числа.

3. Тригонометрична форма запису комплексного числа. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі.

Перехід від алгебраїчної до тригонометричної форми запису комплексного числа. Множення та ділення комплексних чисел в тригонометричній формі. Степінь комплексного числа з натуральним та цілим показником. Формула Муавра. Добування квадратного кореня з комплексного числа.

4. Застосування комплексних чисел у теорії многочленів.

Основна теорема алгебри. Розв’язування алгебраїчних рівнянь другого та вищих степенів у множині комплексних чисел.

5. Двовимірні гіперкомплексні числові системи.

Означення дуальних та подвійних чисел, основні їх відмінності від комплексних чисел.

Властивості дій над дуальними та подвійними числами. Квадратні рівняння в множинах дуальних та подвійних чисел. Геометрична інтерпретація розв’язків квадратних рівнянь в множинах дуальних та подвійних чисел. Квадратний корінь з дуального та подвійного числа. Кубічні рівняння в множинах дуальних та подвійних чисел. Корінь кубічний із дуального та подвійного числа.

6. Гіперкомплексні системи більших розмірностей. Кватерніони.

Означення кватерніонів. Властивості дій над кватерніонами. Таблиця множення в множині кватерніонів. Знаходження кореня квадратного з кватерніона. Розв’язування квадратних рівнянь в системі кватерніонів і геометрична інтерпретація розв’язків таких рівнянь.

7. Алгебри.

Означення алгебри розмірності n. Гіперкомплексна система – окремий випадок алгебри. Комутативні, асоціативні алгебри, алгебри з діленням. Ізоморфні алгебри. Алгебри з одиницею. Теорема Фробеніуса.

8. Застосування гіперкомплексних чисел.

Застосування гіперкомплексних чисел в математиці. Застосування при розв’язуванні задач з електротехніки. Застосування в комп'ютерній графіці й програмуванні ігор.

Оскільки теми 1-4 із запропонованого плану факультативу охоплені навчальною програмою для класів із поглибленим вивченням математики в 11 класі, то пропонуємо виділити на опрацювання на факультативі цього матеріалу для учнів, що вивчають математику на поглибленому рівні, мінімальну кількість годин, приділивши більше уваги та часу темам 5-8. Для рівня стандарт чи профільного рівня теми 1-4 можуть бути викладені на факультативі повною мірою передбачити при цьому в пункті 2 більшу кількість годин для розв’язування квадратних рівнянь (знаходження коренів квадратних з комплексних чисел в алгебраїчній формі) та побудови геометричних образів множин (зокрема із використанням GeoGebra 2D). При цьому вивчення тем 6 і 7 може мати суто оглядовий, ознайомчий характер.

Зупинимось детальніше на окремих темах запропонованого факультативу.

Нагадаємо, що комплексні числа – це числова система із виразів $a+bi$, $i^2=-1$, додавання та множення яких здійснюється за формулами:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i, \tag{1}$$

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+dc)i. \tag{2}$$

Відомо, що із цих же виразів $a+bi$ можна отримати ще дві числові системи, зберігши правило додавання (1), але змінивши при цьому (2) новим законом множення:

I) числа $a+bi$, де $i^2=-1$ (комплексні числа);

II) числа $a+bi$, де $i^2=1$ (подвійні числа);

III) числа $a+bi$, де $i^2=0$ (дуальні числа). [3 ,7]

Основна відмінність подвійних і дуальних чисел від комплексних чисел полягає в тому, що не для кожного подвійного чи дуального числа (відмінного від нуля) є обернений, що обмежує виконання ділення. [3 ,7]

Після вивчення означення, правил виконання дій над подвійними та дуальними числами, доцільно на наступному факультативному занятті запропонувати школярам розв’язати в множинах подвійних і дуальних чисел простіші алгебраїчні рівняння (лінійні, квадратні тощо). Наведемо нижче фрагмент одного з таких занять.

Квадратні рівняння в системі дуальних чисел

Нехай $x+iy$ – невідоме дуальне число, $i^2=0$, та α, b, c, d – відомі дійсні числа. Розв'яжемо наступне квадратне рівняння:

$$(x+iy)^2+(\alpha+bi)(x+iy)+(c+di)=0+i0. \quad (4)$$

Виконуємо дії в лівій частині рівняння:

$$x^2+2xiy+\alpha x+\alpha iy+bix+c+di=0+i0. \quad (5)$$

Прирівнюємо дійсну частину рівності (5) до дійсної, а уявну – до уявної:

$$\begin{cases} x^2+\alpha x+c=0, \\ 2xy+\alpha y+bx+d=0. \end{cases} \quad (6)$$

Надзвичайно цікаво спостерігати за поведінкою графічних образів, які задаються системою

$$\begin{cases} x^2+\alpha x+c=0, \\ 2xy+\alpha y+bx+d=0, \end{cases}$$

за допомогою пакета динамічної геометрії GeoGebra [10], змінюючи значення параметрів α, b, c, d.

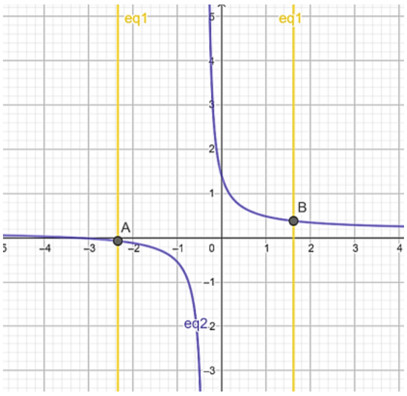

Рис. 1

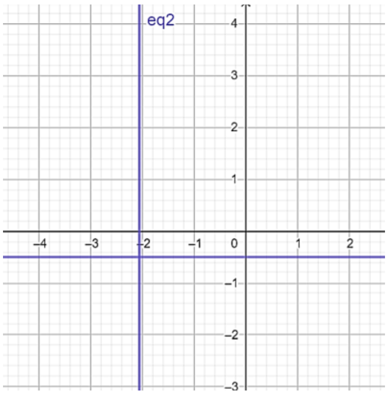

Рис. 2

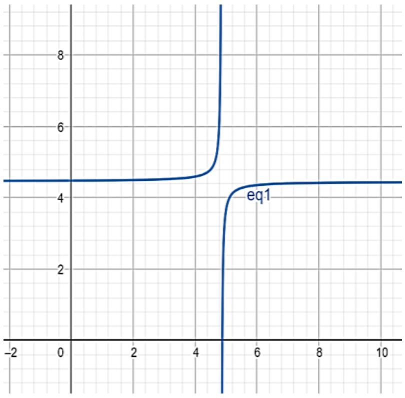

Рис. 3

Провівши з учнями відповідні спостереження за допомогою пакета динамічної геометрії GeoGebra та розглянувши конкретні приклади рівнянь типу (4), можна побачити, що в залежності від значення коефіцієнтів, рівняння (4) може мати два (рис. 1), або безліч (рис. 2), або ж не мати жодного розв'язку (рис. 3).

Квадратні рівняння в системі подвійних чисел

Щодо цієї теми, то зупинимось в статті детальніше на прикладі, розв'язання якого можна запропонувати учням на занятті факультативу.

Приклад 1. Привести рівняння до системи рівнянь у дійсних числах; визначити лінії, які задані рівняннями такої системи; записати розв'язки заданого рівняння, скориставшись ППЗ**.**

$$(x+iy)^2+(3-6i)(x+iy)+(2-9i)=0+i0,\ i^2=1.$$

Розкриваємо дужки:

$$x^2+2xiy+y^2+3x+3iy-6ix-6y+2-9i=0+i0.$$

Прирівнюємо дійсну частину до дійсної, а уявну – до уявної:

$$\begin{cases} x^2+y^2+3x-6y+2=0, \\ 2xy+3y-6x-9=0. \end{cases}$$

Перетворимо перше рівняння, виділивши повні квадрати в лівій частині рівності:

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y-3)^2=\frac{37}{4}.$$

Графічним образом цього рівняння в прямокутній системі координат xOy є коло з центром в точці O$(-\frac{3}{2};3)$ радіуса $r=\sqrt{\frac{37}{4}}$.

Для розпізнання графіка другого рівняння системи достатньо його записати у вигляді: $2x(y-3)+3(y-3)=0, (2x+3)(y-3)=0$, звідки $x=-3/2$ або $y=3$ – пара прямих, що перетинаються. [9]

Зобразимо ці об'єкти на площині за допомогою програми GeoGebra в прямокутній системі координат xOy (див. рис. 4).

Отже, розв'язком системи є чотири точки: (-1.5; 6.04), (1.54; 3), (-1.5; -0.04), (-4.54;3). Тоді розв'язки початкового рівняння, відповідно: -1.5+ 6.04i, 1.54+3i, -1.5 -0.04i, -4.54+3i.

В якості домашнього завдання для закріплення знань, набутих в аудиторії, можна запропонувати наступні приклади.

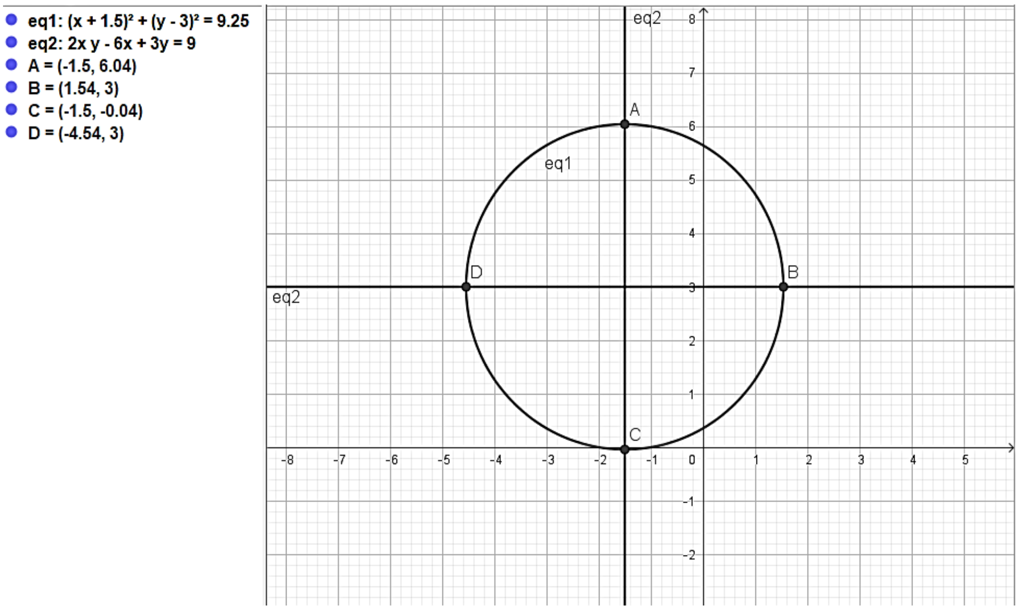

Рис. 4

Приклад 2. Привести рівняння до системи рівнянь у дійсних числах; визначити лінії, які задані рівняннями такої системи; записати розв'язки заданого рівняння, скориставшись ППЗ.

$$(x + iy)^2 + (1 + i)(x + iy) + (-2 + 2i) = 0 + i0, i^2 = 1.$$

Графічне тлумачення розв'язків останнього рівняння подано на рисунку 5.

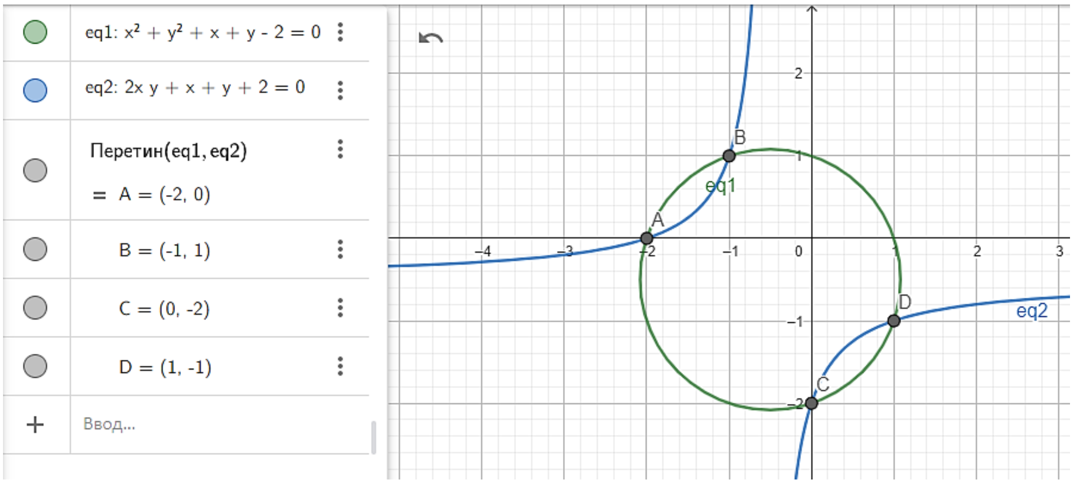

Рис. 5

Отже, розв'язкам рівняння є такі подвійні числа: -2; $-2i$; $-1 + i$; $1 - i$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$(x + iy)^2 + 2(x + iy) + (1 + i) = 0. \, i^2 = 1.$$

Рівняння рівносильне наступній системі:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 1 = 0, \\ 2xy + 2y + 1 = 0. \end{cases}$$

Зобразимо за допомогою програми GeoGebra лінії, задані двома останнімии рівняннями (див. рис. 6), аби наочно побачити, що система не має розв'язків.

Робимо висновок, що початкове рівняння не має розв'язків.

Висновки. В математиці поняття числа розширювалось з плином часу. Було додано такі поняття як нуль, від'ємні числа, раціональні числа, дійсні, а пізніше і комплексні числа, які розширюють дійсні числа введенням поняття про $\sqrt{-1}$.

Гіперкомплексні числові системи – це розширення поля комплексних чисел. Вивчення гіперкомплексних чисел є відносно новим напрямом сучасної математики, що бере початок у дев'ятнадцятому столітті та інтенсивно розвивається у наші дні в роботах вітчизняних та зарубіжних вчених.

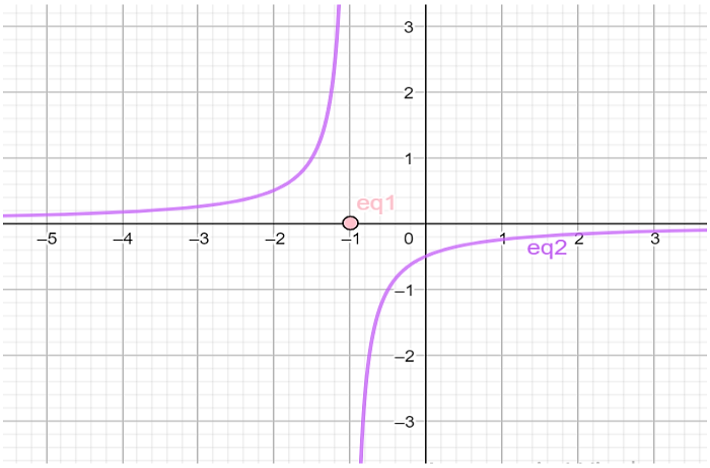

Рис. 6

Оскільки вивченням елементів теорії комплексних чисел завершується одна з найбільш об'ємних змістових ліній шкільного курсу математики – числова змістова лінія, то доцільно учнів, які цікавляться математикою, ознайомити ще й з іншими гіперкомплексними числами: подвійними, дуальними числами, кватерніонами, октавами та їх застосуваннями.

Запропонований в статті матеріал може стати основою факультативного курсу «Гіперкомплексні числові системи» для учнів 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів, враховуючи при конкретизації кількості годин та наповненні кожної теми специфіку рівня, за яким навчаються учні (стандарт/профільний/поглиблений).

Список використаних джерел

1. Боднарук С.Б., Сумарюк М.І. Алгебраїчні рівняння та кватерніони. *У світі математики*. Т.20, випуск 2. Київ, 2014. С 22-26.
2. Боярінова Ю.Є. Історія та розвиток методів гіперкомплексного подання інформації. Розвиток технічних ідей. URL: http://journal.museum.kpi.ua/archive/2010-vol-12/proceedings-2010-vol-12-page-065-075.pdf
3. Городецький В.В., Боднарук С.Б. *Вступ до теорії гіперкомплексних чисел та їх функцій*: навч. посібник. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2021. 136 с. https://archer.chnu.edu.ua/xmlui/handle/123456789/1521
4. Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). Ч. ІІ. Профільне навчання / Упоряд. Н. С. Прокопенко, О.П. Вашуленко, О. В. Єргіна. Х.: Вид-во «Ранок», 2011. 384 с. (Факультативи та курси за вибором). https://docplayer.net/52145109-Matematika-zbirnik-program-chastina-ii-profilne-navchannya-fakultativi-ta-kursi-za-viborom.html
5. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б. *Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл. : проф. рівень* : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Х. : Гімназія, 2019. 304 с.
6. *Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів* (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) загальноосвітніх навчальних закладів. URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv.
7. Синьков М.В., Синькова Т.В., Боярінова Ю.Є. *Гіперкомплексні числові системи: основи теорії, практичні використання, бібліографія*. К.: ІПРІ НАНУ, 2009. 43 с.
8. Тарасенкова Н. А., Акуленко І. А., Лов'янова І. В., Сердюк З. О. *Організація навчання математики у старшій профільній школі* : монографія / за ред. Н. А. Тарасенкової. Черкаси: Видавець ФОП Гордієнко, 2017. 216 с.
9. Яковець В.П., Боровик В.Н., Ваврикович Л.В. *Аналітична геометрія*: навч. посібник для студ. вищих навч. закл. Суми: Університетська книга, 2004. 296 с
10. *GeoGebra для викладання та вивчення математики*. Безкоштовні цифрові інструменти для класних занять, побудови графіків, геометрії, спільної дошки тощо. URL: https://www.geogebra.org/?lang=uk.

References

1. Bodnaruk S.B., Sumariuk M.I. Alhebraichni rivniannia ta kvaterniony. *U sviti matematyky*. T.20, vypusk 2. Kyiv, 2014. S. 22-26.
2. Boiarinova Yu.Ie. Istoriia ta rozvytok metodiv hiperkompleksnoho podannia informatsii. *Rozvytok tekhnichnykh idei*. URL: http://journal.museum.kpi.ua/archive/2010-vol-12/proceedings-2010-vol-12-page-065-075.pdf
3. Horodetskyi V.V., Bodnaruk S.B. *Vstup do teorii hiperkompleksnykh chysel ta yikh funktsii*: navch. posibnyk. Chernivtsi : Chernivetskyi nats. un-t, 2021. 136 s. https://archer.chnu.edu.ua/xmlui/handle/123456789/1521
4. *Zbirnyk prohram z matematyky dlia doprofilnoi pidhotovky ta profilnoho navchannia* (u dvokh chastynakh). Ch. II. Profilne navchannia / Uporiad. N. S. Prokopenko, O.P. Vashulenko, O. V. Yerhina. Kh.: Vyd-vo «Ranok», 2011. 384 s. (Fakultatyvy ta kursy za vyborom). https://docplayer.net/52145109-Matematika-zbirnik-program-chastina-ii-profilne-navchannya-fakultativi-ta-kursi-za-viborom.html
5. Merzliak A. H., Nomirovskyi D. A., Polonskyi V. B. *Alhebra i pochatky analizu* : pochatok vyvchennia na pohlyb. rivni z 8 kl. : prof. riven : pidruch. dlia 11 kl. zakladiv zahalnoi serednoi osvity. Kh. : Himnaziia, 2019. 304 s.

6. *Navchalna prohrama z matematyky dlia uchniv 10-11 klasiv* (pochatok vyvchennia na pohlyblenomu rivni z 8 klasu) zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv. URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv.
7. Synkov M.V., Synkova T.V., Boiarinova Yu.Ie. *Hiperkompleksni chyslovi systemy: osnovy teorii, praktychni vykorystannia, bibliohrafiia*. K.: IPRI NANU, 2009. 43 s.
8. Tarasenkova N. A., Akulenko I. A., Lovianova I. V., Serdiuk Z. O. *Orhanizatsiia navchannia matematyky u starshii profilnii shkoli* : monohrafiia / za red. N. A. Tarasenkovoi. Cherkasy: Vydavets FOP Hordiienko, 2017. 216 s.
9. Iakovets V.P., Borovyk V.N., Vavrykovych L.V. *Analitychna heometriia*: navch. posibnyk dlia stud. vyshchykh navch. zakl. Sumy: Universytetska knyha, 2004. 296 s
10. *GeoGebra dlia vykladannia ta vyvchennia matematyky*. Bezkoshtovni tsyfrovi instrumenty dlia klasnykh zaniat, pobudovy hrafikiv, heometrii, spilnoi doshky toshcho. URL: https://www.geogebra.org/?lang=uk.