of this topic. The introduction of fractional numbers significantly expands the cognitive abilities of primary school pupils and is the basis for further study of fractions in secondary school.

***Key words**: parts, fractional numbers, numerator, denominator, measuring quantities, nominal numbers.*

УДК 378.016:517
DOI 10.5281/zenodo.10214308

Н. С. Дзигарська
ORCID ID 0009-0009-6964-3163
В. В. Корольський
ORCID ID 0000-0002-7409-4201
Я. А. Михайлова
ORCID ID 0009-0009-3147-3410
О. В. Тураєва
ORCID ID 0009-0001-5707-6001
Криворізький державний педагогічний університет

ЗАСТОСУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ПРИ ВИВЧЕННІ ТЕМИ «ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ» УЧНЯМИ ЛІЦЕЇВ

У процесі вивчення математичних дисциплін будь-яка технологія навчання спрямована на розвиток компетентностей щодо розв'язання задач. В задачниках, які пропонуються для загальноосвітніх закладів пропонуються добірки задач з формально вираженими умовами без поєднання з параметрами реальних об'єктів і явищ. Особливо це стосується задач при вивченні одного з важливих розділів математики «Числові послідовності». Тому створення нових видів задач для вивчення цього розділу, в умовах яких реалізується дидактичний принцип візуалізації, має актуальне значення.

Метою дослідження є створення системи задач з теми «Числові послідовності» на основі геометричної моделі для учнів ліцеїв. Об'єкт дослідження – числові послідовності. Предмет дослідження – використання послідовностей геометричних образів, розміщених у межах побудованої геометричної моделі та визначення послідовностей різних математичних величин в залежності від рівня складності задач. Під час дослідження використовувались методи порівняння, аналогій, аналізу і синтезу, моделювання.

Результати дослідження: запропоновано алгоритм створення умов задач на тему «Числові послідовності» для учнів ліцеїв; продемонстровано процес виведення загального члена числової послідовності з використанням квадрата, розташованого в декартовій системі координат; розкрито можливість використання розглянутої моделі для створення інших видів задач; показано декілька методів розв'язання задач в залежності від рівня знань учня, його потенціалу та прагнень.

Проведене дослідження показало, що геометрична інтерпретація робить процес розв'язування задач більш наочним, дозволяє задіяти не тільки моторну, а й зорову пам'ять, показує тісний зв'язок між різними розділами математики, робить процес пізнання більш повним і ефективним. Метод моделювання дозволяє отримати ґрунтовні знання про таке поняття як «числова послідовність» не шляхом безпосереднього вивчення, а шляхом вивчення аналогічного явища за допомогою геометричної моделі.

***Ключові слова:** числова послідовність, геометрична модель, геометричні образи, система задач, візуалізація, послідовність величин.*

Постановка проблеми. На сучасному етапі розвитку математики числові послідовності розглядають як частинні випадки функцій. Функції проходять наскрізною лінією через увесь шкільний курс математики, тому і числові послідовності набувають великого значення і широкого застосування. Але, щоб глибше зрозуміти поняття «послідовність», слід звернути увагу на геометричну інтерпретацію. Для того, щоб процес навчання був ефективнішим, вчителем розробляються усіляки підходи для активізації інтересу учнів і саме геометрична модель є одним з цих підходів [5].

Аналіз актуальних досліджень. Числовими послідовностями займались Архімед, Дж. Валліс, К. Вейерштрас, Е. Гейне, Дж. Грегорі, О. Коші, Н. Орема та інші.

Генерацією числових послідовностей за допомогою геометричної моделі займалися: В. Бобирь [1], С. Габ [3; 4], Н. Дзигарська [2], В. Корольський [2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9], А. Римар [7], О. Тураєва [2; 8], А. Христюк [1].

Мета статті – створення системи задач, які можуть бути використані при вивченні числових послідовностей, а також у якості олімпіадних задач для учнів ліцею; процес виведення загального члена послідовності різних величин за допомогою геометричної інтерпретації.

Виклад основного матеріалу. Алгоритми створення умов задач, пов'язаних з вивченням розділу «Числові ряди» студентами спеціальності «Математика» у вищих педагогічних закладах на основі використання геометричних моделей, започатковані в роботах [1; 2; 3; 4; 5; 6; 7].

Але на нашу думку аналогічні алгоритми можна застосувати для створення задач при вивченні теми «Числові послідовності» учнями ліцеїв. Такі задачі мають різні рівні складності і можуть бути використані при проведенні олімпіад серед учнів ліцеїв.

Запропоновані у цій статті алгоритми базуються на використанні послідовностей геометричних образів, розташованих в межах побудованої геометричної моделі.

Геометрична модель згідно з запропонованим узагальненим алгоритмом будується за допомогою:

– декартової системи координат OXY;
– квадрата зі стороною $a = 1$, розташованого у I чверті системи координат OXY;
– загальних членів відомих послідовностей.

Пояснимо сказане на прикладі геометричної моделі, представленої на рис. 1.

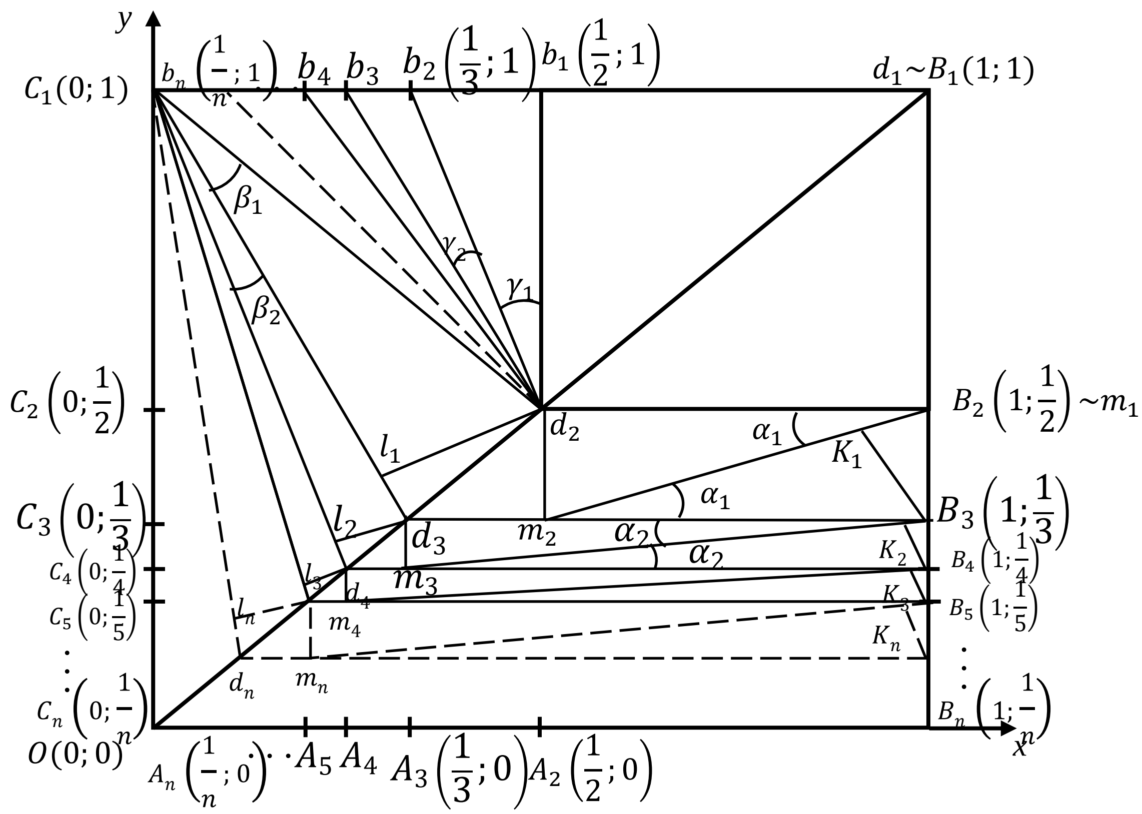

Рис. 1. На сторонах квадрата $OA_1B_1C_1$ зі стороною $a = 1$ розташовані послідовності точок $B_n\left(0;\frac{1}{n}\right)$, $A_n\left(\frac{1}{n};0\right)$, $C_n\left(0;\frac{1}{n}\right)$, $b_n\left(\frac{1}{n};1\right)$, $n \in \mathbb{N}$

Використовуючи послідовності координат точок B_n, A_n, C_n, b_n можна розв'язати наступні задачі.

I. Задачі першого рівня складності

1. Визначити послідовність координат точок d_n.
2. Визначити послідовність координат точок m_n.
3. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{B_n B_{n+1}}$.

II. Задачі другого рівня складності

1. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{d_n d_{n+1}}$.
2. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{d_2 b_n}$.
3. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{C_1 d_{n+1}}$.
4. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{m_{n+1} B_{n+2}}$, $\overline{m_{n+1} B_{n+1}}$.
5. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{d_{n+1} B_{n+1}}$.
6. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{m_n b_n}$.
7. Визначити послідовність величин площ послідовності прямокутників $d_{n+1} B_{n+1} B_{n+2} m_{n+1}$.
8. Визначити послідовність величин площ $\Delta d_n d_{n+1} m_n$.
9. Визначити послідовність величин площ послідовності трапецій $d_{n+1} B_{n+1} B_{n+2} d_{n+2}$.

III. Задачі третього рівня складності

1. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{l_n d_{n+1}}$, які є висотами послідовності $\Delta C_1 d_{n+1} d_{n+2}$.
2. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{K_n B_{n+2}}$, які є висотами послідовності $\Delta B_{n+1} m_{n+1} B_{n+2}$.
3. Визначити послідовність величин площ $\Delta d_2 b_n b_{n+1}$.
4. Визначити послідовність величин площ $\Delta d_{n+1} d_{n+2} C_1$.
5. Визначити послідовність величин площ $\Delta d_{n+1} d_{n+2} l_n$.
6. Визначити послідовність величин площ $\Delta d_{n+1} l_n C_1$.
7. Визначити послідовність величин площ $\Delta K_n B_{n+1} B_{n+2}$.
8. Визначити послідовність величин площ $\Delta m_{n+1} K_n B_{n+2}$.
9. Визначити послідовність величин: $\sin\alpha_n$, $\cos\alpha_n$, де $\angle\alpha_n = \angle K_n m_{n+1} B_{n+2}$. Показати, що $sin^2\alpha_n + cos^2\alpha_n = 1$.
10. Визначити послідовність величин: $\sin\beta_n$, $\cos\beta_n$, де $\angle\beta_n = \angle d_{n+1} C_1 l_n$. Показати, що $sin^2\beta_n + cos^2\beta_n = 1$.
11. Визначити послідовність величин: $\sin\gamma_n$, $\cos\gamma_n$, де $\angle\gamma_n = \angle b_1 d_2 b_{n+1}$. Показати, що $sin^2\gamma_n + cos^2\gamma_n = 1$.

Для розв'язання задач першого рівня складності достатньо скористатися можливістю візуалізації умов задач і послідовностями координат точок B_{n+1} і A_{n+1}. Після чого шляхом аналізу записати відповідь у вигляді загального члена досліджуваної послідовності.

Задача I (1). Визначити послідовність координат точок d_n.

Розв'язання

Візуально на моделі видно, що координати точок послідовності d_n безпосередньо пов'язані з їх проекціями на сторони квадрата $\overline{OA_1}$ і $\overline{B_1 A_1}$, що дає можливість стверджувати:

$x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = \frac{1}{4}, \ldots, x_n = \frac{1}{n}; y_1 = 1, y_2 = \frac{1}{3}, y_3 = \frac{1}{4}, \ldots, y_n = \frac{1}{n}.$

Таким чином, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ точка d_n задається послідовністю $d_n\left(\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right)$.

Задача I (2). Визначити послідовність координат точок m_n.

Розв'язання

Візуально на моделі видно, що:

- абсциси точок m_n задаються послідовністю $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{1}{4}$, $x_4 = \frac{1}{5}$, …, тобто $x_n = \frac{1}{n+1}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$;
- ординати точок m_n задаються послідовністю $y_1 = \frac{1}{3}$, $y_2 = \frac{1}{4}$, $y_3 = \frac{1}{5}$, $y_4 = \frac{1}{6}$, …, тобто $y_n = \frac{1}{n+2}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Таким чином $\forall\, n \in \mathbb{N}$ точка m_n має координати $\left(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n+2}\right)$.

Задача I (3). Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{B_n B_{n+1}}$.

Розв'язання

В залежності від рівня логічного мислення і попередніх знань з геометрії учень може розв'язати цю задачу одним із способів.

1 спосіб

Візуально спостерігаючи відрізки $\overline{B_1B_2}$, $\overline{B_2B_3}$, $\overline{B_3B_4}$, … і логічно мислити можна одержати відповідь: $\overline{B_1B_2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $\overline{B_2B_3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$; $\overline{B_3B_4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}$; $\overline{B_4B_5} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{5-4}{20} = \frac{1}{20}$…

Далі шляхом аналізу одержаних величин трьох-чотирьох довжин відрізків можна записати відповідь: $\overline{B_nB_{n+1}} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$ і одержати послідовність $\left\{\frac{1}{n(n+1)}\right\}$.

2 спосіб

Якщо учень пам'ятає формули обчислення відстані між точками в системі координат OXY, яка має вигляд для довільних точок $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$:

$|\overline{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (1),

то легко отримає рівність:

$|\overline{B_1B_2}| = \sqrt{(1-1)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} = \frac{1}{2}$, $|\overline{B_2B_3}| = \sqrt{(1-1)^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{6}$ і так далі.

Розв'язання задач рівня II(1-9) можливе принаймі двома способами.

1. Зрозуміло, що перед тим як обчислювати послідовності відрізків потрібно знайти координати точок кінців відрізків. Потім застосовується формула (1). Тобто попередньо треба розв'язати задачі виду I (1, 2).

2. В деяких випадках для нашої геометричної моделі можливе використання теореми Піфагора.

Задача II (1). Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{d_n d_{n+1}}$.

Розв'язання

Використаємо обидва запропонованих способи.

1 спосіб

Координати точок d_n відповідають членам послідовності $x_n = y_n = \frac{1}{n}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Далі використаємо формулу (1):

$$|\overline{d_1d_2}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$|\overline{d_2d_3}| = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{6},$$

$$|\overline{d_3d_4}| = \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{12},$$

. . . .

$$|\overline{d_nd_{n+1}}| = \sqrt{\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{n(n+1)}.$$

Одержуємо послідовність з загальним членом $\frac{\sqrt{2}}{n(n+1)}$.

2 спосіб

На моделі спостерігаємо послідовність прямокутних трикутників $\Delta d_n d_{n+1} B_{n+1}$:

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\overline{d_n d_{n+1}}$ – гіпотенузи, $\overline{d_{n+1}B_{n+1}}$, $\overline{B_n B_{n+1}}$ – катети. Довжини катетів $\overline{B_n B_{n+1}}$ задаються послідовністю $\frac{1}{n(n+1)}$ (див. задачу I (3)).

Визначимо послідовність довжин катетів $\overline{m_1 d_{n+2}}$. Безпосередньо на моделі спостерігаємо $\overline{m_1 d_3} = \overline{d_3 B_3} - \overline{m_1 B_3} = \left(1-\frac{1}{3}\right) - \left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$, $\overline{m_2 d_4} = \overline{d_4 B_4} - \overline{m_2 B_4} = \left(1-\frac{1}{4}\right) - \left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}$, …, $\overline{m_n d_{n+2}} = \frac{1}{n(n+1)}$.

<u>Примітка.</u> Фактично знайдені спочатку довжини $\overline{m_1 d_3}$ і $\overline{m_2 d_4}$ свідчать про те, що послідовності $\Delta d_n d_{n+1} B_{n+1}$ є прямокутними і рівнобедреними. Тому послідовність довжин їх гіпотенуз $\overline{d_n d_{n+1}}$ можна обчислювати $\forall\, n \in \mathbb{N}$ за формулою Піфагора:

$$\left|\overline{d_n d_{n+1}}\right| = \sqrt{2\left(\frac{1}{т(т+1)}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{n(n+1)}.$$

Способи 1 і 2 приводять до однакової відповіді.

<u>Примітка.</u> Для визначення послідовності довжин $\left|\overline{d_n d_{n+1}}\right|$ можна застосувати і третій спосіб, якщо скористатися тим, що $\forall\, n \in \mathbb{N}$ маємо рівність кутів: $\angle d_{n+1} d_{n+2} m_1 = \angle d_{n+2} d_{n+1} m_1 = \frac{\pi}{4}$.

Таким чином при розв'язанні розглянутої задачі найбільш потенційно підготовлений учень може продемонструвати широту своїх знань і одержати максимальну оцінку.

Задачі II (2-6) розв'язуються аналогічними способами, що і задача II (1). Для розв'язання задач II (7, 8) застосовуються відомі учням ліцеїв формули обчислення площ прямокутників і трапецій.

Задача II (7). Визначити послідовність величин площ послідовності прямокутників $d_{n+1}B_{n+1}B_{n+2}m_{n+1}$.

Розв'язання

Згідно формули обчислення площі прямокутників записуємо:

$S_n = \overline{d_{n+1}B_{n+1}} \cdot \overline{d_{n+1}m_{n+1}}$, (2)

де, як можна спостерігати з рис. 1 $d_{n+1}B_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$ (*)

Дійсно на моделі видно, якщо:

$n = 1$, то $\overline{d_2 B_2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$,

$n = 2$, то $\overline{d_3 B_3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$,

$n = 3$, то $\overline{d_4 B_4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$,

. . . .

$\overline{d_{n+1}m_{n+1}} = \overline{B_{n+1}B_{n+2}} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ (**)

якщо: $n = 1$, то $\overline{B_2 B_3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$,

$n = 2$, то $\overline{B_3 B_4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ …

Таким чином, застосовуючи формулу (2) і рівності (*), (**), одержуємо послідовність величин площ прямокутників $d_{n+1}B_{n+1}B_{n+2}$:

$$S_n = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)} \quad (3)$$

Виконаємо обчислення за формулою (3): $S_1 = \frac{1}{4\cdot 3} = \frac{1}{12}$, $S_2 = \frac{2}{9\cdot 4} = \frac{1}{18}$.

Перевіряємо формулу за допомогою моделі:

$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{12}$,

$S_2 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{18}$ і так далі.

Отже, дійсно послідовність (3) відповідає умовам розглянутої задачі.

Аналогічно можна одержати послідовність величин площ трапецій $d_{n+1}B_{n+1}B_{n+2}d_{n+2}$:

$$S_n = \frac{1}{2}\overline{d_{n+1}m_{n+1}}\left(\overline{d_{n+1}B_{n+1}} + \overline{d_{n+2}B_{n+2}}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n+2}\right) = \frac{1}{2(n+1)(n+2)}\cdot$$
$$\frac{2n^2+4n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{2(n+1)^2-1}{2(n+1)^2(n+2)^2} \quad (4)$$

Задачі рівня III (1-2) розв’язуються за допомогою введення невідомого при умові, що відомі послідовності довжин сторін $\Delta C_1 d_{n+1} d_{n+2}$ і $\Delta B_{n+1} m_{n+1} B_{n+2}$. Тобто з використанням розв’язків задач II (1-6).

Задача III (1). Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{l_n d_{n+1}}$, які є висотами послідовності $\Delta C_1 d_{n+1} d_{n+2}$.

Розв’язання

За результатами розв’язання задач II (1,3) маємо послідовності сторін $\Delta C_1 d_{n+1} d_{n+2}$:

$$\left.\begin{aligned} \overline{d_{n+1}d_{n+2}} &= \frac{\sqrt{2}}{(n+1)(n+2)} \\ \overline{C_1 d_{n+1}} &= \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1} \\ \overline{C_1 d_{n+2}} &= \frac{\sqrt{(n+1)^2+1}}{n+2} \end{aligned}\right\}$$

Використовуючи ці формули одержуємо:

- $n = 1$:
  - ✓ $\overline{d_2 d_3} = \frac{\sqrt{2}}{6}$
  - ✓ $\overline{C_1 d_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
  - ✓ $\overline{C_1 d_3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$
- $n = 2$:
  - ✓ $\overline{d_3 d_4} = \frac{\sqrt{2}}{12}$
  - ✓ $\overline{C_1 d_3} = \frac{\sqrt{5}}{3}$
  - ✓ $\overline{C_1 d_4} = \frac{\sqrt{10}}{4}$
- $n = 3$:
  - ✓ $\overline{d_4 d_5} = \frac{\sqrt{2}}{20}$
  - ✓ $\overline{C_1 d_4} = \frac{\sqrt{10}}{4}$
  - ✓ $\overline{C_1 d_5} = \frac{\sqrt{17}}{5}$
- $n = 4$:
  - ✓ $\overline{d_5 d_6} = \frac{\sqrt{2}}{30}$
  - ✓ $\overline{C_1 d_5} = \frac{\sqrt{17}}{5}$
  - ✓ $\overline{C_1 d_6} = \frac{\sqrt{26}}{6}$

і так далі.

Визначимо послідовність величин $\overline{d_2 l_1}$, $\overline{d_3 l_2}$, $\overline{d_4 l_3}$.

Для визначення $\overline{d_2 l_1}$ розглянемо $\Delta d_2 d_3 C_1$.

Припускаємо, що $\overline{d_2 l_1} = x$, тоді зрозуміло, що $\overline{l_1 C_1} = \overline{C_1 d_3} - x = \frac{\sqrt{5}}{3} - x$.

Для знаходження x використаємо теорему Піфагора для прямокутних трикутників $\Delta d_2 d_3 l_1$ і $\Delta d_2 l_1 C_1$.

Відповідно до $\Delta d_2 d_3 l_1$ одержуємо:

$$\overline{d_2 l_1} = \sqrt{(\overline{d_2 d_3})^2 - x^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2 - x^2} = \sqrt{\frac{1}{18} - x^2} \quad (/)$$

Відповідно до $\Delta d_2 l_1 C_1$ одержуємо:

$$\overline{d_2 l_1} = \sqrt{(\overline{d_2 C_1})^2 - (\overline{C_1 l_1})^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3} - x\right)^2} \quad (//)$$

У рівностях (/) і (//) ліві частини однакові, тому одержуємо рівняння для знаходження x:

$$\sqrt{\frac{1}{18} - x^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3} - x\right)^2}$$
$$\frac{1}{18} - x^2 = \frac{1}{2} - \frac{5}{9} + \frac{2\sqrt{5}}{3}x - x^2$$
$$\frac{2\sqrt{5}}{3}x = \frac{1}{18} - \frac{1}{2} + \frac{5}{9}$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{3}x = \frac{1}{9}$$
$$x = \frac{1}{6\sqrt{5}}\ (///)$$

Далі з рівності $(/)$ обчислюємо висоту $\overline{d_2 l_1}$:

$\overline{d_2 l_1} = \sqrt{\frac{1}{18} - \frac{1}{36\cdot 5}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{20}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{9}{20}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}.$

Аналогічно знаходимо $\overline{d_3 l_2}$ з $\Delta d_3 d_4 C_1$.

Припускаємо, що $\overline{d_4 l_2} = x$. Далі записуємо $|\overline{l_2 C_1}| = \overline{|C_1 d_4|} - x = \frac{\sqrt{10}}{4} - x$.

Використовуючи прямокутні трикутники одержуємо рівності:

$\overline{d_3 l_2} = \sqrt{(\overline{d_3 d_4})^2 - x^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{12}\right)^2 - x^2}\ (/)$

$\overline{d_3 l_2} = \sqrt{(\overline{d_3 C_1})^2 - (\overline{C_1 l_2})^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{10}}{4} - x\right)^2}\ (//)$

З рівностей $(/)$ і $(//)$ слідує рівність:

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{12}\right)^2 - x^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{10}}{4} - x\right)^2}$$
$$\frac{1}{72} - x^2 = \frac{5}{9} - \frac{5}{8} + \frac{\sqrt{10}}{2}x - x^2$$
$$\frac{\sqrt{10}}{2}x = \frac{1}{72} - \frac{5}{9} + \frac{5}{8}$$
$$\frac{\sqrt{10}}{2}x = \frac{1}{12}$$
$$x = \frac{1}{6\sqrt{10}}$$

Р рівності $(/)$ знаходимо: $\overline{d_3 l_2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{12}\right)^2 - \left(\frac{1}{6\sqrt{10}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{72} - \frac{1}{360}} = \sqrt{\frac{5-1}{360}} = \frac{1}{3\sqrt{10}}.$

Аналогічно одержуємо: $\overline{d_4 l_3} = \frac{\sqrt{17}}{68}$ і так далі.

Тобто $\overline{d_{n+1} l_n} = \frac{\sqrt{(n+1)^2+1}}{(n+1)((n+1)^2+1)}$ (5).

Цю задачу можна розв'язати й іншим способом за допомогою формули обчислення площі трикутника шляхом використання координат послідовності $\Delta d_{n+1} d_{n+2} C_1$, тобто формули:

$$S_n = \frac{1}{2}|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|,\ (6)$$

де $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$ – координати вершин трикутника.

У нашому випадку маємо послідовність $\Delta d_{n+1} d_{n+2} C_1$ з вершинами $d_{n+1}\left(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n+1}\right)$, $d_{n+2}\left(\frac{1}{n+2}; \frac{1}{n+2}\right)$, $C_1(0; 1)$.

За формулою (6) одержуємо площу:

$$S_n = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(0 - \frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)\right| =$$
$$\frac{1}{2}\left|-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right| = \frac{1}{2(n+1)(n+2)}.\ (7)$$

З іншого боку маємо $S_n = \frac{1}{2}|\overline{d_{n+2} C_1}||\overline{d_{n+2} l_n}|$, де $|\overline{d_{n+2} C_1}| = \frac{\sqrt{1+(n+1)^2}}{n+2}$ (8)

Враховуючи рівність лівих частин рівностей (7) і (8) записуємо рівність:

$$\frac{1}{2(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+(n+1)^2}}{n+2}|\overline{d_{n+2} l_n}|,$$
$$|\overline{d_{n+2} l_n}| = \frac{1}{(n+1)\sqrt{1+(n+1)^2}} = \frac{\sqrt{1+(n+1)^2}}{(n+1)(1+(n+1)^2)}.\ (9)$$

Рівність (9) співпадає з рівністю (5).

Задача III (2) розв'язується тим же способом, що і задача III (1). Але можливий інший варіант. Якщо використати послідовності величин сторін $\Delta B_{n+1} m_{n+1} B_{n+2}$, то для обчислення площ цих трикутників можна використати формулу Герона. Після обчислення застосувати формулу:

$$\frac{1}{2}\left|\overline{B_{n+1}m_{n+1}}\right| \cdot \left|\overline{K_nB_{n+2}}\right| = S_{\Delta B_{n+1}m_{n+1}B_{n+2}} \Rightarrow \left|\overline{K_nB_{n+2}}\right| = \frac{2S_\Delta}{\left|\overline{B_{n+1}m_{n+1}}\right|} \quad (10)$$

Задача III (3). Визначити послідовність величин площ $\Delta d_2b_nb_{n+1}$.

Розв'язання

1 спосіб

Використовується формула (6). Тому що на моделі чітко видно послідовність координат вершин $\Delta d_2b_nb_{n+1}$.

2 спосіб

Використовуються послідовності довжин сторін $\Delta d_2b_nb_{n+1}$: $\left|\overline{d_2b_n}\right|$ знаходиться після розв'язання задачі II (2), $\left|\overline{b_nb_{n+1}}\right|$ визначаються за допомогою моделі на стороні квадрата $\overline{B_1C_1}$. Таким чином є можливість застосування формули Герона.

3 спосіб

Першою дією обчислюємо площу

$$S_1 = S_{\Delta d_2b_1b_2} = \frac{1}{2}\left|\overline{d_2b_1}\right|\left|\overline{b_1b_2}\right| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{24}.$$

Другою дією обчислюємо площу $S_1' = S_{\Delta d_2b_1b_3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.

Третьою дією обчислюємо площу $S_2 = S_{\Delta d_2b_2b_3} = S_{\Delta d_2b_1b_3} - S_{\Delta d_2b_1b_2} = \frac{1}{16} - \frac{1}{24} = \frac{1}{48}$.

Таким чином виникає ітераційний процес з використанням послідовності прямокутних трикутників і їх площ. Послідовність величин площ $\Delta d_2b_1b_n$ визначається за формулою:

$$S_n' = \frac{1}{2}\left|\overline{d_2b_1}\right|\left|\overline{b_1b_{n+1}}\right| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right| = \frac{1}{4}\cdot\frac{n}{2(n+2)} = \frac{1}{8}\cdot\frac{n}{n+2} \quad (11)$$

За допомогою формули (11) знаходиться послідовність площ S_{n+1}:

$$S_{n+1} = \frac{1}{8}\cdot\frac{n+1}{n+3} - \frac{1}{8}\cdot\frac{n}{n+2} = \frac{1}{8}\cdot\frac{(n+1)(n+2)-n(n+3)}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{8}\cdot\frac{n^2+3n+2-n^2-3n}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{4(n+2)(n+3)} \quad (12)$$

<u>Примітка.</u> Якщо учень (або студент) запропонує третій спосіб, то він заслуговує на одержання високої оцінки.

Задача III (4) розв'язується за алгоритмами задачі III (3).

Задача III (5). Визначити послідовність величин площ $\Delta d_{n+1}d_{n+2}l_n$.

Розв'язання

Результати розв'язання задач II (1) і III (1) будемо використовувати для знаходження S_1:

$$\left|\overline{d_2d_3}\right| = \left.\frac{\sqrt{2}}{(n+1)(n+2)}\right|_{n=1} = \frac{\sqrt{2}}{6} \ (/)$$

$$\left|\overline{d_3l_1}\right| = \frac{\sqrt{5}}{10} \ (//)$$

За теоремою Піфагора знаходимо довжину катета $\left|\overline{d_3l_1}\right|$:

$$\left|\overline{d_3l_1}\right| = \sqrt{(d_2d_3)^2-(d_3l_1)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{18}-\frac{1}{20}} = \sqrt{\frac{2}{360}} = \sqrt{\frac{1}{180}} = \frac{\sqrt{5}}{30}.$$

Далі обчислюємо S_1:

$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{30}\cdot\frac{\sqrt{5}}{10} = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{300} = \frac{1}{120}.$$

Аналогічно знаходяться S_2 і S_3.

Після обчислення S_1, S_2, S_3 можна ставити задачу про визначення загального члена послідовності S_n.

Алгоритм розв'язання задач III (6, 7, 8) запропонувати самостійно з можливими варіантами.

Задача III (9). Визначити послідовність величин: $\sin\alpha_n$, $\cos\alpha_n$, де $\angle\alpha_n = \angle K_nm_{n+1}B_{n+2}$. Показати, що $sin^2\alpha_n + cos^2\alpha_n = 1$.

Розв'язання

На моделі видно, що кути $\alpha_n = \angle B_{n+1}m_{n+1}B_{n+2}$ є кутами послідовності прямокутних $= \Delta B_{n+1}m_{n+1}B_{n+2}$. Тому одержуємо:

$$\sin\alpha_n = \frac{|\overline{B_{n+1}B_{n+2}}|}{|\overline{B_{n+1}m_{n+1}}|}, (13)$$

$$\cos\alpha_n = \frac{|\overline{B_{n+2}m_{n+1}}|}{|\overline{B_{n+1}m_{n+1}}|}, (14)$$

де $|\overline{B_{n+1}B_{n+2}}| = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, (15)

$|\overline{B_{n+2}m_{n+1}}| = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$, (16)

$|\overline{B_{n+1}m_{n+1}}| = \sqrt{|\overline{B_{n+1}B_{n+2}}|^2 + |\overline{B_{n+2}m_{n+1}}|^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)^2 + \left(\frac{n}{n+1}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+n^2(n+2)^2}{(n+1)^2(n+2)^2}} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\sqrt{1+n^2(n+2)^2}$. (17)

Використовуючи формули (13) і (14) визначаємо за допомогою рівностей (15), (16), (17) послідовності $sin\,\alpha_n$ і $cos\,\alpha_n$.

$$sin\,\alpha_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} : \frac{\sqrt{1+n^2(n+2)^2}}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{\sqrt{1+n^2(n+2)^2}}, (18)$$

$$cos\,\alpha_n = \frac{n}{n+1} : \frac{\sqrt{1+n^2(n+2)^2}}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)}{\sqrt{1+n^2(n+2)^2}}. (19)$$

Послідовність $sin\,\alpha_n$ містить члени:

$$sin\,\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1+9}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$sin\,\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{1+64}} = \frac{\sqrt{65}}{65}$$

$$sin\,\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{1+225}} = \frac{\sqrt{226}}{226}$$

. . . .

Послідовність $cos\,\alpha_n$ складається з членів:

$$cos\,\alpha_1 = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$cos\,\alpha_2 = \frac{8}{\sqrt{65}} = \frac{8\sqrt{65}}{65}$$

$$cos\,\alpha_3 = \frac{15}{\sqrt{226}} = \frac{15\sqrt{226}}{226}$$

. . . .

Перевіримо виконання тригонометричної тотожності:

$$sin^2\alpha_1 + cos^2\alpha_1 = \left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2 = \frac{1}{10} + \frac{9}{10} = 1,$$

$$sin^2\alpha_2 + cos^2\alpha_2 = \left(\frac{\sqrt{65}}{65}\right)^2 + \left(\frac{8\sqrt{65}}{65}\right)^2 = \frac{1}{65} + \frac{64}{65} = 1,$$

. . . .

$sin^2\alpha_n + cos^2\alpha_n = \left(\frac{1}{\sqrt{1+n^2(n+2)^2}}\right)^2 + \left(\frac{n(n+2)}{\sqrt{1+n^2(n+2)^2}}\right)^2 = \frac{1}{1+n^2(n+2)^2} + \frac{n^2(n+2)^2}{1+n^2(n+2)^2} = \frac{1+n^2(n+2)^2}{1+n^2(n+2)^2} = 1.$

Можливості використання розглянутої геометричної моделі (рис. 1) для створення задач на числові послідовності не вичерпуються розглянутими задачами I (1, 2, 3), II (1-9), III (1-11). Наприклад, модель можна доповнити:

- висотами послідовності $\Delta d_{n+1}d_{n+2}m_{n+1}$, проведеними з вершини m_{n+1};
- висотами послідовності $\Delta d_2 b_n b_{n+1}$, проведеними з вершини b_n;

- колами, вписаними в послідовності $\Delta m_{n+1}B_{n+1}B_{n+2}$, $\Delta d_2 b_n b_{n+1}$, $\Delta d_{n+1}d_{n+2}C_1$ і розглядати задачі на визначення послідовностей радіусів кіл та послідовностей площ вписаних кіл.

Висновки та перспективи подальших наукових розвідок. Використання геометричних моделей, пов'язаних з квадратом в системі координат OXY дає можливість створити різні системи задач на числові послідовності. Розв'язання таких задач потребує від учнів ліцеїв інтегрованих знань і навичок з шкільних курсів алгебри, геометрії і тригонометрії, вмінь використовувати міжпредметні зв'язки шкільної математики. Розв'язання таких задач неможливе без логічного мислення учнів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ / REFERENCES

1. Бобирь, В. Д., Христюк, А. М. (2019). Реалізація дидактичного принципу наочності при вивченні числових рядів. X Міжнародна конференція молодих вчених «Молоді вчені 2019 – від теорії до практики» (7 березня 2019 р., Дніпро). (Bobyr, V. D., Hrystiuk, A. M. (2019). Implementation of the didactic principle of visuality in the study of number series. 10th International Conference of Young Scientists "Young Scientists 2019 – from Theory to Practice" (Mar. 7, 2019, Dnipro).
2. Дзигарська, Н. С., Корольський, В. В., Тураєва, О. В. (2022). Генерація числових рядів з використанням послідовностей геометричних об'єктів, вписаних у квадрат з параметром $a = 1$ в системі координат Oxy. Наукові записки молодих учених, 10. (Dzyharska, N. S., Korolskiy, V. V., Turaieva, O. V. (2022). Generation of numerical series using sequences of geometric objects inscribed in a square with parameter $a = 1$ in the Oxy coordinate system. Scientific notes of young scientists, 10).
3. Корольський, В. В., Габ, С. С. (2018). Лінійна, квадратурна та куботурна геометрична інтерпретація числових рядів засобами моделювання. Новітні комп'ютерні технології: науково-методичний збірник. Том XVI. Кривий Ріг (сс. 67–73). (Korolskiy, V. V., Gab, S. S. (2018). Linear, quadrature and cuboidal geometric interpretation of numerical series by means of modeling. Latest computer technologies: scientific and methodical collection Volume XVI. Kryvyi Rih (pp. 67–73)).
4. Корольський, В. В., Габ, С. С. (2018). Числові ряди, які пов'язані з параметрами додекаедра. Вісник міжнародного дослідницького центру «Людина: мова, культура, пізнання»: науковий журнал. В. В. Корольський (ред.). Том 42. Кривий Ріг (сс. 39–45). (Korolskiy, V. V., Gab, S. S. (2018). Numerical series related to the parameters of the dodecahedron. Bulletin of the International Research Center "Man: Language, Culture, Cognition": scientific journal. V. V. Korolskiy (Ed.). Volume 42. Kryvyi Rih (pp. 39–45)).
5. Корольський, В. В. (2017). Геометрична інтерпретація числових рядів. Новітні комп'ютерні технології: науково-методичний збірник. Том XV. Кривий Ріг (сс. 57–63). (Korolskiy, V. V. (2017). Geometric interpretation of numerical series. Latest computer technologies: scientific and methodical collection Volume XV. Kryvyi Rih (pp. 57–63)).
6. Корольський, В. В. (2018). Геометрична інтерпретація числового ряду арифметичної прогресії. Новітні комп'ютерні технології: науково-методичний збірник. Том XVI. Кривий Ріг (сс. 59–66). (Korolskiy, V. V. (2018). Geometric interpretation of a numerical series of arithmetic progression. Latest computer technologies: scientific and methodical collection Volume XVI. Kryvyi Rih (pp. 59–66)).
7. Корольський, В. В., Римар, А. І. (2022). Геометрична інтерпретація числових рядів, пов'язаних з державною символікою. Актуальні питання природничо-математичної освіти, 2(20), 29–38. (Korolskiy, V. V., Rymar A. I. (2022) Geometric interpretation of numerical series associated with state symbols. Current issues of natural and mathematical education, 2(20), 29–38).
8. Корольський, В. В., Тураєва, О. В. (2023). Генерація та дослідження числових рядів за допомогою геометричної моделі та комбінації рядів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ і $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$. Актуальні питання природничо-математичної освіти, 1(21), 46–54. (Korolskiy, V. V., Turaieva, O. V. (2023).

Generation and investigation of number series using geometric model and combination of series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ and $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$. Current issues of natural and mathematical education, 1(21), 46–54).
9. Корольський, В. В., Шокалюк, С. В., Мельниченко, Ю. А. (2018). Теоретико-методичні засади геометричного моделювання числових рядів. Фізико-математична освіта, 4(18), 81–89. (Korolskiy, V. V., Shokaluk, S. V., Melnychenko, Y. A. (2018). Theoretical and methodological foundations of geometric modeling of numerical series. Physical and mathematical education, 4(18), 81–89).

Dzyharska N. S., Korolskiy V. V., Mykhailova Y. A., Turaieva O. V. Application of geometric models when studying the subject «Number sequences» by lyceum students.

Summary. *In the process of studying mathematical disciplines, any learning technology is aimed at developing competencies in problem solving. The problem books offered for general education institutions offer a selection of problems with formally expressed conditions without any connection to the parameters of real objects and phenomena. This is especially true for problems in the study of one of the most important sections of mathematics, "Numerical sequences". Therefore, the creation of new types of tasks for studying this section, in which the didactic principle of visualization is realized, is of great importance.*

The purpose of the study is to create a system of tasks on the topic "Numerical sequences" based on a geometric model for lyceum students. The object of the study is numerical sequences. The subject of the study is the use of sequences of geometric images placed within the constructed geometric model and the determination of sequences of different mathematical quantities depending on the level of complexity of the tasks. The methods of comparison, analogy, analysis and synthesis, modeling were used in the study.

The results of the study: an algorithm for creating conditions for problems on the topic "Numerical sequences" for lyceum students is proposed; the process of deriving the common term of a numerical sequence using a square located in the Cartesian coordinate system is demonstrated; the possibility of using the model under consideration to create other types of problems is revealed; several methods of solving problems are shown depending on the level of knowledge of the student, his or her potential and aspirations.

The study has shown that geometric interpretation makes the process of solving problems more visual, allows to use not only motor but also visual memory, shows a close connection between different sections of mathematics, and makes the process of cognition more complete and effective. The modeling method allows you to gain a thorough knowledge of such a concept as "numerical sequence" not by direct study, but by studying a similar phenomenon using a geometric model.

Key words: *numerical sequence, geometric model, geometric images, problem system, visualization, sequence of values.*

УДК 378.016:517
DOI 10.5281/zenodo.10214479

В. В. Корольський
ORCID ID 0000-0002-7409-4201
Я. А. Михайлова
ORCID ID 0009-0009-3147-3410
Криворізький державний педагогічний університет

ПОБУДОВА І ДОСЛІДЖЕННЯ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ЗАДАНОЇ ГЕОМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛІ ТА КОМБІНАЦІЇ РЯДІВ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ І $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$

Метою дослідження є одержання і опрацювання числових рядів за допомогою заданої геометричної моделі і комбінації рядів. Об'єкт дослідження – числові ряди.