5. Holzner S. Google Docs 4 Everyone/ Steven Holzner, Nancy Holzner. – Indianapolis: QUE, 2009. – 251 p.
6. Побіженко І. О. Перспективи використання хмарних технологій для організації навчального процесу у вищих навчальних закладах / І. О. Побіженко, Т. Г. Білова, В. О. Ярута // Збірник наукових праць Харківського національного університету Повітряних Сил. – 2014. – № 4(41). – С. 167-170.

Анотація. Батюк І. Хмарні сервіси як заміна офісним додаткам. *У статті розглянуто основні хмарні сервіси, що надаються компанією Google, показано основні сфери застосування даних сервісів та важливість їх використання як альтернативи звичних програмних засобів, що встановлюються на комп'ютер, наведено послідовність дій при роботі з електронними документами в середовищі хмарного сервісу Google диск.*
Ключові слова: *хмарні сервіси, Google Apps for Education, Google диск, Google Docs, Gmail, хмарні обчислення, інформаційно-освітній простір.*

Abstract. Batyuk I. Cloud services as a replacement for office applications. *The article discusses the main cloud services provided by Google, shows the main areas of application of these services and the importance of their use as an alternative to the usual software installed on the computer, shows the sequence of actions in dealing with electronic documents in the cloud service Google Drive.*
Keywords: *cloud services, Google Apps for Education, Google Drive, Google Docs, Gmail, cloud computing, information and education space.*

Блещенко Наталія
Магістрантка, спеціальності «Середня освіта (Математика)»
biqbos96@gmail.com
Науковий керівник - О. П. Страх

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ЗА ЛЯПУНОВИМ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Як відомо, більшість реальних динамічних об'єктів мають властивості, що можуть бути описані апаратом якісної теорії диференціальних рівнянь; у першу чергу – це різного роду механічні системи. При розв'язанні ряду задач, що стосуються дослідження таких систем, важливо знати не один конкретний розв'язок, що відповідає даним початковим умовам, а характер його поведінки з плином часу та при зміні значень початкових умов. Цими питаннями займається теорія стійкості руху, що була створена наприкінці XIX ст. О. М. Ляпуновим для дослідження характеру залежності розв'язків систем диференціальних рівнянь від початкових даних на великих інтервалах часу.

Основна задача теорії стійкості полягає в розробці методів, які дозволяють судити про стійкість розв'язку певної системи звичайних диференціальних рівнянь, не знаючи його загального виду. Розглянемо основні означення та результати згаданої вище теорії [1].

Розглянемо систему

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

де $y: I \to D \subset \mathbb{R}^n$, $y = col(y_1, y_2, \dots, y_n)$ – n-вимірний вектор-стовпчик шуканих функцій $y_i = y_i(x) \in C^1(I)$, $f(x, y) = col(f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_n(x, y))$, $I \coloneqq [x_0, +\infty)$.

Припускається, що розв'язок задачі Коші для системи (1) з довільними початковими даними існує та має властивість єдиності.

Означення 1. Розв'язок $y^*(x)$ системи (1) називають стійким за Ляпуновим (при $x \to \infty$), якщо виконуються умови:

1) цей розв'язок існує на півосі $[x_0, +\infty)$;

2) для довільного $\varepsilon > 0$ і довільного $x_1 \geq x_0$ можна вказати таке $\delta = \delta(x_1, \varepsilon) > 0$, що для кожного $\tilde{y}$ такого, що $\|\tilde{y} - y^*(x_1)\| < \delta$, розв'язок $y(x)$ системи (1), який задовольняє початкову умову $y(x_1) = \tilde{y}$, існує на півосі $[x_1, +\infty)$ і справджує нерівність:

$$\|y(x) - y^*(x)\| < \varepsilon \ \forall x \geq x_1.$$

Нестійким (при $x \to \infty$) називається розв'язок, для якого порушується хоча б одна з умов, що фігурують в означенні 1.

Означення 2. Розв'язок $y^*(x)$ системи (1) називають асимптотично стійким за Ляпуновим (при $x \to \infty$), якщо мають місце наступні умови:

1) цей розв'язок стійкий за Ляпуновим;

2) для довільного $x_1 \geq x_0$ можна вказати таке $\Delta = \Delta(x_1) > 0$, що для кожного $\tilde{y}$ такого, що $\|\tilde{y} - y^*(x_1)\| < \Delta$, розв'язок $y(x)$ системи (1), який задовольняє початкову умову $y(x_1) = \tilde{y}$, існує на півосі $[x_1, +\infty)$ і має властивість

$$\lim_{x \to \infty} \|y(x) - y^*(x)\| = 0.$$

Аналогічно можна розглядати стійкість та асимптотичну стійкість розв'язків системи (1), яка визначена на множині $(-\infty, x_0] \times D$ $(D \subset \mathbb{R}^n)$, при $x \to -\infty$.

Далі, як частковий випадок системи (1), розглянемо лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь

$$y = A(x)y \tag{2}$$

з неперервними на півосі $[a, \infty)$ коефіцієнтами. Нехай $y^*(x)$ — її довільний розв'язок. За теоремою існування розв'язку задачі Коші для лінійних однорідних систем область існування $y^*(x)$ – уся піввісь $[a, \infty)$. Тому розв'язки системи (2) одночасно або стійкі (асимптотично стійкі), або нестійкі

У роботі [2, с. 432–433] показано, що стійкість системи (2) повністю визначається властивостями її довільної фундаментальної матриці $Y(x)$. Так, оскільки розв'язок системи (2), що задовольняє початкову умову $y(x_1) = \tilde{y}$ має вигляд:

$$y(x) = Y(x)Y^{-1}(x_1)\tilde{y},$$

то мають місце наступні теореми.

Теорема 1. *Для стійкості лінійної однорідної системи* (2) *необхідно й достатньо, щоб її фундаментальна матриця* $Y(x)$ *була обмеженою на* $[a, \infty)$, *тобто*

$$\exists K > 0 \colon \|Y(x)\| < K \ \forall x \geq a.$$

Теорема 2. *Для асимптотичної стійкості лінійної однорідної системи* (2) *необхідно й достатньо, щоб норма її фундаментальної матриці прямувала до нуля при* $x \to \infty$.

Проблему стійкості системи

$$y = Ay, \tag{3}$$

де A – стала матриця коефіцієнтів, повністю розв'язує така теорема.

Теорема 3. *Для того, щоб система* (3) *була стійкою, необхідно й достатньо, щоб дійсні частини всіх власних чисел матриці А були недодатними, причому кожному власному числу з нульовою дійсною частиною відповідало стільки лінійно незалежних власних векторів, якою є кратність цього числа як кореня характеристичного полінома* $P(X) = |A - XE|$ (*тобто кожному власному числу з нульовою дійсною частиною відповідали лише одновимірні клітини Жордана в нормальній формі матриці А*).

Для асимптотичної стійкості системи (3) *необхідно й достатньо, щоб дійсні частини всіх власних чисел матриці А були від'ємними.*

Розглянемо приклади

Приклад 1. Знайти всі значення параметрів α та β, для яких система рівнянь

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3,\\ \dot{x}_2 = -\alpha x_1 - x_2 + \alpha x_3,\\ \dot{x}_3 = -\beta x_1 - \alpha x_2 - x_3;\end{cases}$$

є а) стійка; б) асимптотично стійка.

Розв'язання

Розглянемо матрицю коефіцієнтів системи $A = \begin{pmatrix} -1 & \alpha & \beta \\ -\alpha & -1 & \alpha \\ -\beta & -\alpha & -1 \end{pmatrix}$.

З характеристичного рівняння $|A - kE| = 0$ знаходимо власні числа

$$\begin{vmatrix} -1-k & \alpha & \beta \\ -\alpha & -1-k & \alpha \\ -\beta & -\alpha & -1-k \end{vmatrix} = 0;$$

$$-(1+k)^3 - \beta^2(1+k) - 2\alpha^2(1+k) = 0.$$

Звідси отримуємо, що $k_1 = -1, k_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{\beta^2 + 2\alpha^2}$.

Тоді, оскільки $\mathrm{Re}k_i = -1 < 0$ (дійсні частині усіх власних чисел менші за модулем), то за теоремою 3 для кожної пари елементів α та β:

а) система (2) стійка у додатному напрямі;

а) система (2) асимптотично стійка за Ляпуновим у додатному напрямі.

Приклад 2. Для кожного значення параметра *a* дослідити на стійкість в обох напрямках розв'язки заданої системи:

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = ax_1 + 5x_2,\\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2.\end{cases} \tag{4}$$

Розв'язання

Зайдемо власні значення і відповідні їм власні вектори матриці коефіцієнтів системи $A = \begin{pmatrix} a & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ в залежності від значення параметра *a*.

$$|A - kE| = \begin{vmatrix} a-k & 5 \\ -1 & 2-k \end{vmatrix} = (a-k)(2-k) + 5 = k^2 - (a+2)k + 2a + 5 = 0,$$

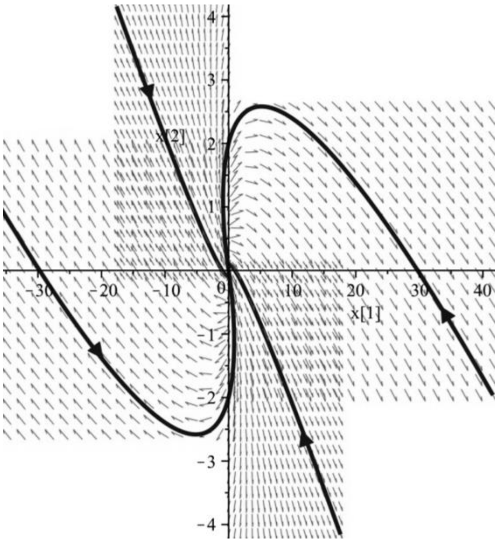
$$k_{1,2} = \frac{a + 2 \pm \sqrt{a^2 - 4a - 16}}{2}.$$

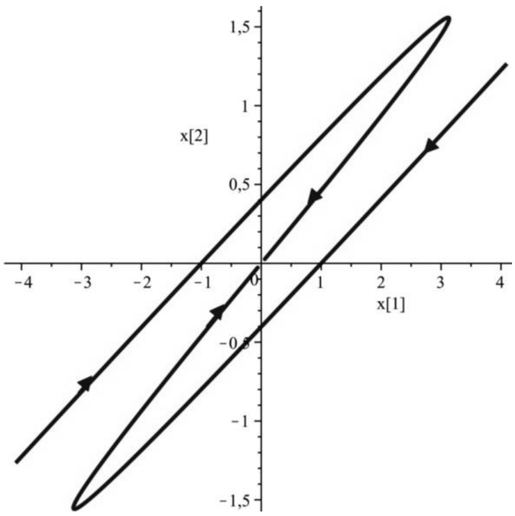
Розглянемо усі можливі випадки:

1) $k_{1,2} \in \mathbb{R} \Rightarrow a^2 - 4a - 16 \geq 0 \Rightarrow a \in \left(-\infty; 2 - 2\sqrt{5}\right] \cup [2 + 2\sqrt{5}; +\infty)$.

1.1) $k_1 = k_2 \Rightarrow a = 2 \pm 2\sqrt{5}$. Тоді для значення $a = 2 + 2\sqrt{5} > 0$ система (4) буде нестійка при $t \to +\infty$ і стійка при $t \to -\infty$, а для значення $a = 2 - 2\sqrt{5} < 0$ навпаки.

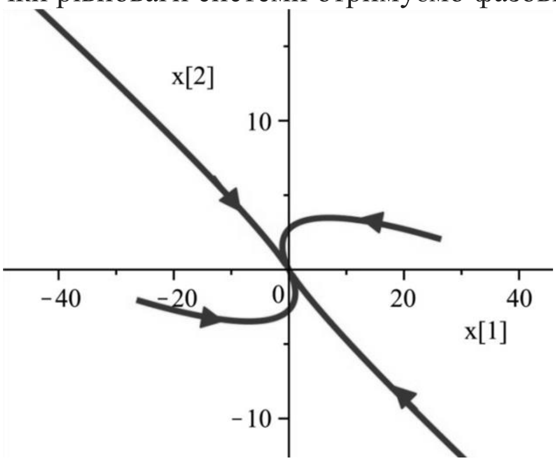
Фазовий портрет системи (вироджений вузол) для отриманих значень параметра a має відповідно вигляд:





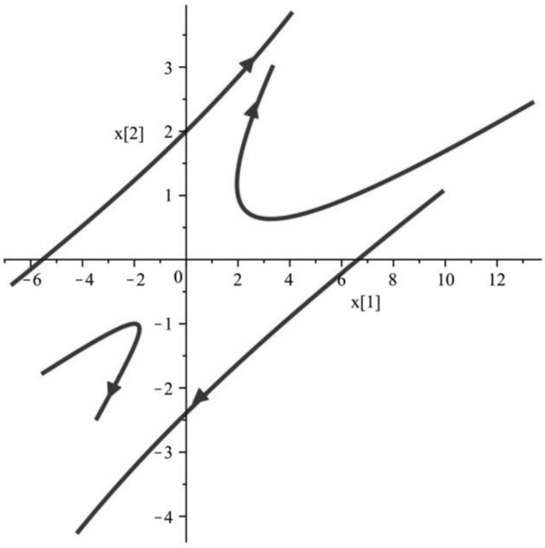
1.2) $k_{1,2} > 0 \Rightarrow a + 2 > \sqrt{a^2 - 4a - 16} \Rightarrow a > -2 \Rightarrow a \in (2 + 2\sqrt{5}; +\infty)$. Тоді система (4) буде нестійка при $t \to +\infty$ і стійка при $t \to -\infty$.

В околах довільної точки рівноваги системи отримуємо фазовий портрет – вузол:



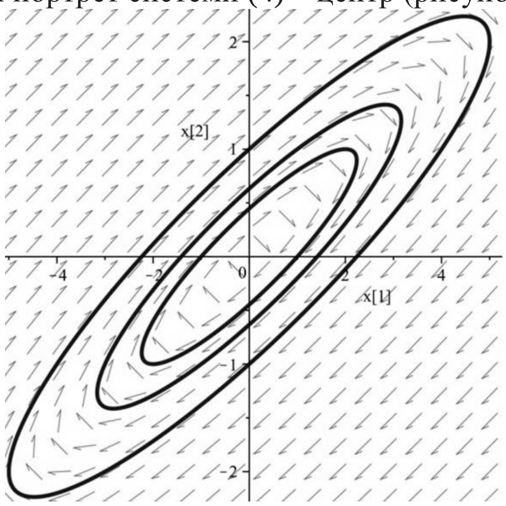
1.3) $k_1 \cdot k_2 < 0 \Rightarrow a + 2 < \sqrt{a^2 - 4a - 16} \Rightarrow a \in (-\infty; 2 - 2\sqrt{5})$. Тоді система (4) буде нестійкою в обох напрямках.

В околах довільної точки рівноваги системи отримуємо фазовий портрет – типу сідло. Фазовий портрет зображено на рисунку нижче.

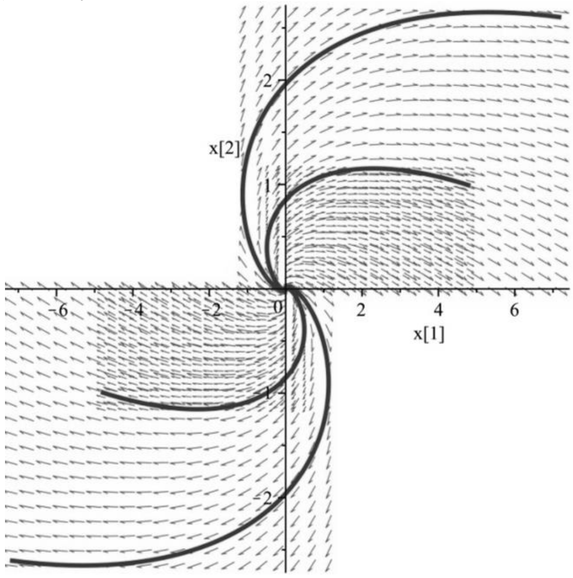


2) $k_{1,2} \notin \mathbb{R} \Rightarrow a \in (2 - 2\sqrt{5}; 2 + 2\sqrt{5})$.

2.1) якщо $a = -2$, то $\mathrm{Re}k_{1,2} = 0$. Тоді дана система є стійкою в обох напрямках (але не асимптотично). Фазовий портрет системи (4) – центр (рисунок зображено нижче).



2.2) якщо ж $a \in (2 - 2\sqrt{5}; -2) \cup (-2; 2 + 2\sqrt{5})$, то фазовий портрет системи – фокус (сукупність спіралей). Рисунок ниже:



При $a \in (2 - 2\sqrt{5}; -2)$ система (4) буде стійка (причому асимптотично) у додатному напрямку і нестійка – у від'ємному.

Список використаних джерел

1. Murray R. M. A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation / R. M. Murray,. Z. Li, S. S. Sastry – California: CRC Press,1994. – 456 p.
2. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння: Підручник (2-ге вид., перероб. і доп.). / А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, І. О. Парасюк – К.: Либідь, 2003. – 600 с.

Анотація. Блещенко Н. Дослідження стійкості за Ляпуновим систем диференціальних рівнянь. *У статті наведено основні означення й факти з теорії стійкості руху за О. М. Ляпуновим. Розглянуто критерії стійкості лінійних однорідних систем звичайних диференціальних рівнянь, зокрема зі сталими коефіцієнтами. Наведено чисельні приклади застосування якісної теорії диференціальних рівнянь до дослідження систем на стійкість.*

Ключові слова: *теорія стійкості руху за О. М. Ляпуновим, стійкий розв'язок системи, асимптотична стійкість, фазовий портрет.*

Abstract. Bleshchenko N. Investigation of Lyapunov stability of systems of differential equations. *The article gives the basic definitions and facts on the theory of A. M. Lyapunov stability. The criteria of stability of linear homogeneous systems of ordinary differential equations, in particular, with constant coefficients, are considered. Numerous examples of the application of qualitative theory of differential equations to the study of stability systems are given.*

Key words*: the theory of A. M. Lyapunov stability, stable solution of the system, asymptotic stability, phase portrait.*

Змієнко Михайло
Студента 4 курсу, напряму підготовки «Математика»*
exypret@gmail.com
Науковий керівник - В.Д. Погребний

СИСТЕМИ ПОДВІЙНИХ ТА ДУАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

Побудуємо числову систему із виразу виду $(a + bi)$ визначив додавання наступним виразом:$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$. Спробуємо визначити множення. Вимоги: 1) Множення дійсного числа $a = a + 0i$ на число $z = b + ci$ має давати результат узгоджений з випадком комплексних чисел - $(a + 0i)(b + ci) = ab + aci$ та $(b + ci)(a + 0i) = ab + aci$, і цим самим виконується і умова для множення дійсних чисел - $(a + 0i)(b + 0i) = ab + 0i$. Зауважмо, що оскільки і для додавання виконується $(a + 0i) + (b + 0i) = ab + 0i$, то дійсні числа є підсистемою нової системи; 2) Виконується рівність - $(az_1)(bz_2) = (ab)(z_1 z_2)$; 3) Лівий та правий дистрибутивний