

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

УДК 373.51+515.2

Бульченко Артем Миколайович

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ФРАКТАЛІВ У ПОЗАКЛАСНІЙ РОБОТІ (ОСНОВНА ШКОЛА)

Спеціальність 014.04 Середня освіта (Математика)

Галузь знань 01 Освіта/Педагогіка

Кваліфікаційна робота на здобуття освітнього ступеню «Магістр»

Науковий керівник

_____ О. П. Страх
кандидат фізико-математичних наук,
старший викладач кафедри математики
«__» _____ 2020 року

Виконавець

_____ А. М. Бульченко
«__» _____ 2020 року

Суми 2020

ЗМІСТ

ВСТУП	4
РОЗДІЛ 1..... НЕОБХІДНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ ФРАКТАЛІВ	7
1.1. Побудова фрактальних множин.....	7
1.2. Застосування фракталів при описі природних явищ	16
1.3. Способи зображення геометричних фракталів (програми та пакети графічних редакторів).....	19
РОЗДІЛ 2..... ВИКОРИСТАННЯ ФРАКТАЛІВ У ОСВІТНІХ ЦІЛЯХ В ШКОЛАХ.....	29
2.1. Роль і місце теорії фракталів в різних сферах діяльності людини	29
2.2. Пропедевтика формування у учнів поняття «фрактал» на прикладі курсу «Фрактали в ЛОГО»	36
2.3. Вивчення елементів фрактальної геометрії в школі як засіб естетичного виховання учнів	46
2.4. Використання фракталів і фрактальної геометрії у позакласній роботі в школі.....	52
<i>2.4.1. Приклади застосування фракталів у позакласному навчанні математиці.....</i>	<i>52</i>
<i>2.4.2. Приклади застосування фракталів у позакласному навчанні інформатиці.....</i>	<i>59</i>
<i>2.4.3. Приклади застосування фракталів у позакласному навчанні географії</i>	<i>62</i>
<i>2.4.4. Приклади застосування фракталів у позакласному навчанні літературі</i>	<i>63</i>

2.4.5. Приклади застосування фракталів у позакласному навчанні біології і природничим наукам	66
2.4.6. Приклади застосування фракталів у позакласному навчанні мистецтву	71
ВИСНОВКИ	74
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ	75
ДОДАТКИ	79
Додаток А. Опис семінару «Фрактали і теорія хаосу» для проведення на математичних гуртках та у позанавчальний час.	79

ВСТУП

Уявлення про освіту як спосіб трансляції знань не відповідають викликам сучасності, оскільки методологічні установки і практично реалізовані дидактичні форми, методи і засоби в більшій мірі відповідають парадигмі класичної та неklasичної раціональності, в той час як неklasична дійсність потребує інших цілей та пріоритетів.

Колись більшості людей здавалося, що геометрія в природі обмежується такими простими фігурами, як лінія, коло, конічний переріз, многокутник, сфера, квадровна поверхня, а також їх комбінаціями. Однак багато природних систем настільки складні і нерегулярні, що використання тільки знайомих об'єктів класичної геометрії для їх моделювання представляється безнадійним. Як підступитися до моделювання каскадних водоспадів або турбулентних процесів, що визначають погоду? Фрактали і математичний хаос – відповідні засоби для дослідження таких задач.

Вивчення фракталів і хаосу відкриває чудові можливості, як в дослідженні нескінченної кількості елементів об'єкту, так і в області чистої математики. Але в той же час, як це часто трапляється в так званій новій математиці, відкриття в якій спираються на піонерські роботи математиків минулого століття.

Таким чином, дану роботу присвячено актуальній проблемі обґрунтування необхідності введення у позашкільну програму освіти фракталів, що забезпечить розкриття реальних і потенційних можливостей і самореалізації особистості учнів завдяки багатогранності досліджуваної теми.

Об'єкт дослідження: теорія фракталів у позакласній роботі в школі.

Предмет дослідження: способи та прийоми використання теорії фракталів у позакласній роботі в школі.

Мета дослідження: на основі теоретичних та практичних засад охарактеризувати і проаналізувати способи й прийоми використання теорії фракталів у позакласній роботі в школі.

Основними завданнями щодо дослідження у цій роботі є:

- 1) надати загальну характеристику фракталам і фрактальним множинам;
- 2) висвітлити особливості використання фракталів у позакласному вивченні математики та інших дисциплін в школі

У роботі використовуються такі **методи дослідження:**

- теоретичні (аналіз науково-педагогічної, навчальної літератури);
- емпіричні (педагогічний експеримент, дослідно-педагогічна робота з визначення рівня якості знань учнів при ознайомленні їх з темою фракталів в рамках позанавчальної діяльності).

Практична цінність роботи: дана магістерська робота може використовуватися як розширення матеріалу шкільних курсів математики. Усі викладки щодо обґрунтування необхідності використання фракталів у позакласному навчанні в школі можуть бути використані у своїй роботі вчителями усіх шкільних предметів та студентами педагогічних університетів природничо-математичних факультетів.

Апробація результатів. Основні положення роботи доповідались на III Міжнародній дистанційній науково-методичній конференції «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу – ІТМ*плюс-2020».

Структура роботи: робота містить вступ, два розділи, висновки, список використаних джерел та додатки.

У першому розділі «Необхідні теоретичні відомості з теорії фракталів» висвітлено способи побудови фракталів і фрактальних множин (з переліком пакетних додатків для цього), а також особливості застосування фракталів при описі природних явищ.

У другому розділі «Використання фракталів в освітніх цілях в школі» продемонстровано способи використання фракталів у позанавчальному вивченні математики та інших дисциплін в школі.

РОЗДІЛ 1. НЕОБХІДНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ ФРАКТАЛІВ

1.1. Побудова фрактальних множин

Цей розділ знайомить читача з цікавими прикладами так званих фракталів – множин, що мають дивовижну структуру. Один погляд на їх зображення може принести естетичне задоволення, а математичні властивості настільки цікаві, що стали поштовхом для написання багатьох книг і статей в серйозних математичних і фізичних журналах.

Почнемо з найвідомішого прикладу.

Розглянемо площину, а на ній – довільний відрізок довжини 1, кінці якого позначимо A_0^0 і A_1^0 . Назвемо $A_0^0A_1^0$ відрізком нульового рівня. Розділимо його на три рівні частини точками A_1^1 і A_3^1 та побудуємо на внутрішньому відрізку рівносторонній трикутник (рис. 1.1). Замінімо в відрізку $A_0^0A_1^0$ відрізок $A_1^1A_3^1$ на ламану $A_1^1A_2^1A_3^1$. Отримаємо ламану $A_0^1A_1^1A_2^1A_3^1A_4^1$, де $A_0^1 = A_0^0$, $A_4^1 = A_1^0$. Відрізки $A_k^0A_{k+1}^0$ ($k = 0, 1, 2, 3$) назвемо відрізками першого рівня. На наступному кроці виконаємо з відрізками першого рівня ту ж операцію, а саме: розділимо кожен відрізок першого рівня на 3 частини і надбудуємо на внутрішніх відрізках рівносторонні трикутники. Отримаємо ламану $A_0^2A_1^2 \dots A_{16}^2$, відрізки якої назвемо відрізками другого рівня, і т.д. На k -му кроці отримаємо ламану, що складається з 4^k відрізків k -го рівня, кожен з яких має довжину $\frac{1}{3^k}$. Позначимо ламану $A_0^kA_1^k \dots A_{4^k}^k$ через S_k .

Визначення. Крива Кох S – це безліч точок x , для яких існує така послідовність x_1, x_2, \dots що $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$, де при всіх $k: x_k \in S_k$, тобто це граничне положення побудованих кривих.

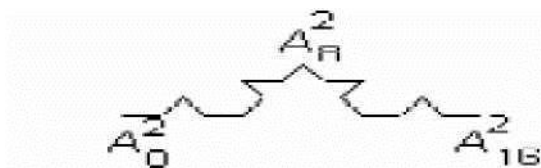


Рисунок 1.1 – Приклад побудови нескладної фрактальної множини.

Кох – прізвище шведської жінки-математика, що вперше описала цю криву.

Отже, що ж таке ми визначили? Спробуємо розібратися.

По-перше, при всіх цілих невід’ємних m і $l = 0, 1, \dots, 4^m$: $A_l^m \in S$, так як в якості наближувальної послідовності можна взяти таку, у якій всі крапки, починаючи з m -ої, збігаються з A_l^m . А чи є в множині S ще якісь точки? Виявляється, і дуже багато, але явно вказати хоча б одну з них не дуже просто.

По-друге, було б природньо, якби ламані S_k добре наближали множину S . З побудови ламаних S_k видно, що для будь-якої точки $y \in S_{k+1}$ існує точка $x \in S_k$ така, що $d(x, y) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{1}{3^{k+1}}$. (Символом $d(x, y)$ позначено звичайну відстань між точками x і y .)

Грубо кажучи, це означає, що при переході від S_k до S_{k+1} точки зсуваються не більше, ніж на відстань $\frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{1}{3^{k+1}}$. Застосовуючи багато разів нерівність трикутника, отримаємо, що для будь-якої точки $y \in S_{k+n}$ ($n \in N$) існує така точка $x \in S_k$, що

$$d(x, y) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} * \left(\frac{1}{3^{k+1}} + \frac{1}{3^{k+2}} + \frac{1}{3^{k+n+1}} \right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} * \left(\frac{1}{3^{k+1}} + \frac{1}{3^{k+2}} \dots \right) = \frac{\sqrt{3}}{4 * 3^k}$$

Виходить, що всі точки ламаної S_{k+n} (при будь-якому $n \in N$) лежать на відстані не більше ніж $\frac{\sqrt{3}}{4 * 3^k}$ від множини S_k . Так як n довільне, то звідси по

властивості межі отримуємо, що всі точки множини S лежать на відстані не більше ніж $\frac{\sqrt{3}}{4 \cdot 3^k}$ від множини S_k . У цьому сенсі множини дійсно добре наближають криву Коха. Якщо ми хочемо намалювати множину S , наприклад, на екрані комп'ютера, то досить намалювати S_k при досить великому k . Чим більше k , тим точніше буде картинка (див. рис 1.2).

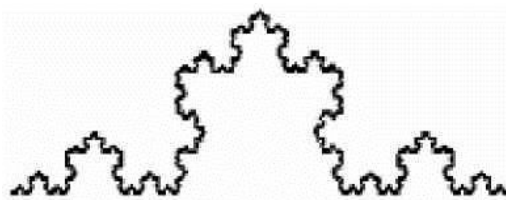


Рисунок 1.2 – Крива Коха у наближенні двох фрактальних множин

Цей приклад було розібрано досить детально, щоб в наступних прикладах не надто вдаватися в детальні пояснення. Основна мета даного розділу – навести приклади результатів побудови фрактальних множин. Отже, приклади.

1. Драконова крива (крива складок).

Побудова цієї кривої показана на рис. 1.3. На першому кроці відрізок $A_0^0 A_1^0$ довжини 1 перетворюється на кут $A_0^1 A_1^1 A_2^1$ на k -му кроці кожен з відрізків $A_i^{k-1} A_{i+1}^{k-1}$ перетворюється на кут, причому при парному i іде наліво, а при непарному – направо ($i = 0, 1, 2, \dots, 2^k$). Так само, як і раніше, визначимо множину D як безліч всіх граничних точок послідовностей виду y_1, y_2, \dots , де $y_k \in D_k = A_0^k A_1^k \dots A_{2^k}^k$ (рис. 1.4).

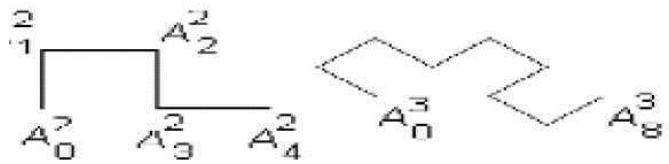


Рисунок 1.3 – принцип побудови драконової кривої

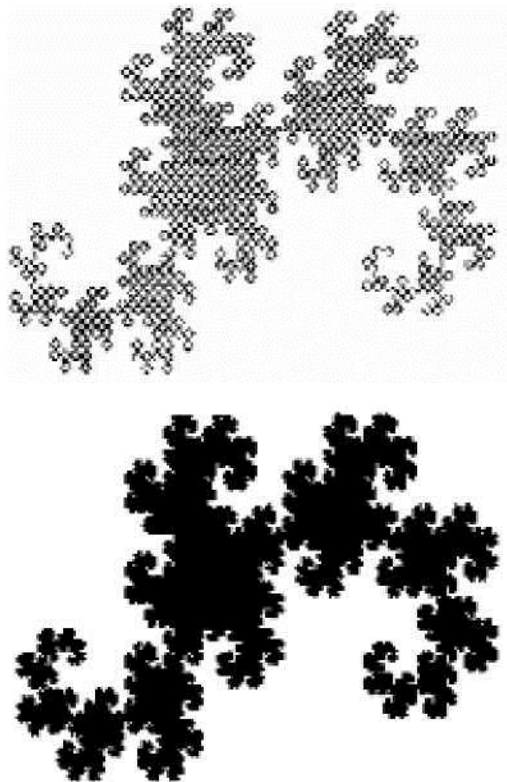


Рисунок 1.4 – Візуалізація фракталу кривої складок

У ламаних D є ще одна цікава інтерпретація. Візьмемо довгу вузьку смужку паперу і зігнімо її навпіл в одному і тому ж напрямку k раз. Потім розігнемо смужку, залишивши в місцях згину прями кути. Вийде ламана, подібна ламаній D_k .

Цим пояснюється друга назва кривої D – крива складок. На рис. 1.5 зображена межа кривої дракона – теж вельми цікава множина. Її можна описати так, як ми визначали криву Кох і криву дракона – за допомогою поколінь відрізків, але цей опис трохи складніший, тому обмежимося картинкою (рис 1.5).

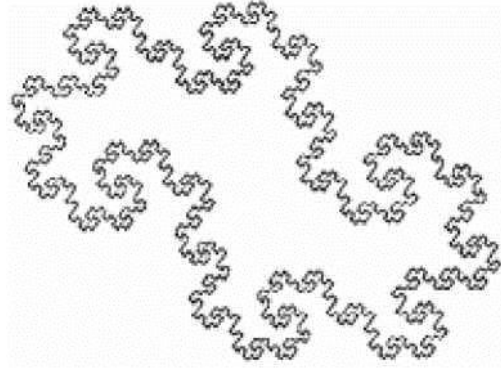


Рисунок 1.5 – Межі фракталу дракона

2. Побудову ще одного прикладу видно з рисунку 1.6.

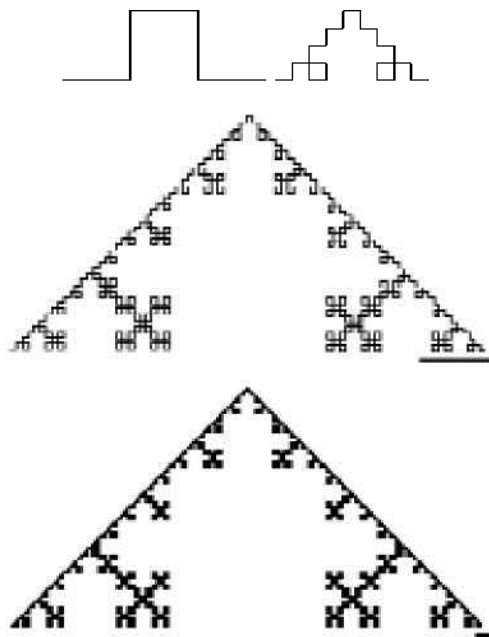


Рисунок 1.6 – Трикутний фрактал

3. Можна вказати спосіб побудови цілої серії подібних кривих. Для цього достатньо вказати лише перший крок побудови. Приклади наведені на рис. 1.7.

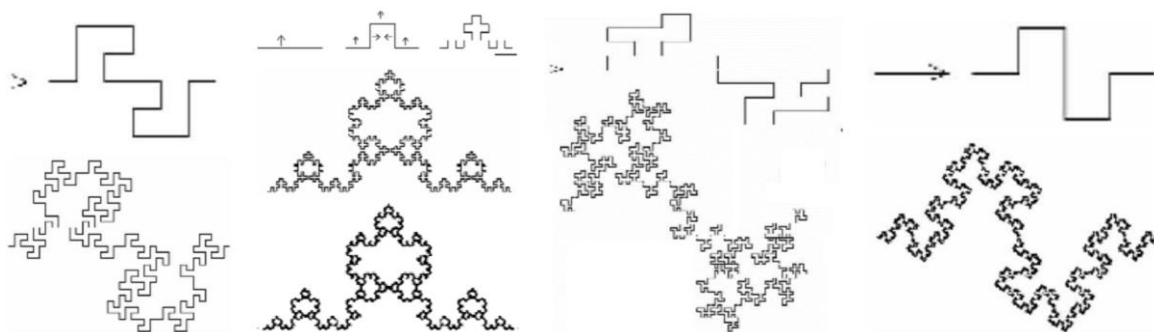


Рисунок 1.7 – Деякі інші приклади побудови фрактальних множин

Закликавши на допомогу свою фантазію, можна придумати багато таких прикладів. Однак слід бути обережним: не будь-яка схема побудови сходиться до якої-небудь множини. Для збіжності достатньо, щоб відрізок на кожному кроці переходив в ламану, довжини ланок якої менші довжини вихідного відрізка (і не обов'язково однакові).

4. Килим Серпінського. Тут нам буде зручно використовувати декартові координати. Розглянемо квадрат $\{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. На першому кроці видалимо з нього середину, тобто квадрат $\{(x, y): \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \leq y \leq \frac{2}{3}\}$. Фігура, що залишилася є об'єднання восьми квадратів зі стороною $\frac{1}{3}$ (рис 1.8).

У кожного з цих квадратів теж видалимо середину. Множина, що залишилася є об'єднання 64 квадратів зі стороною $\frac{1}{9}$. Продовжимо до нескінченності. Та множина, що залишиться, називається килимом Серпінського (рис 1.8).

Можна було б сказати інакше: килим Серпінського – це безліч таких точок квадрата $[0,1] \times [0,1]$, у яких хоча б одна з координат x і y має розкладання в трійковий дріб, що не містить цифри 1.

Постараємося зрозуміти, що об'єднує всі ці приклади.

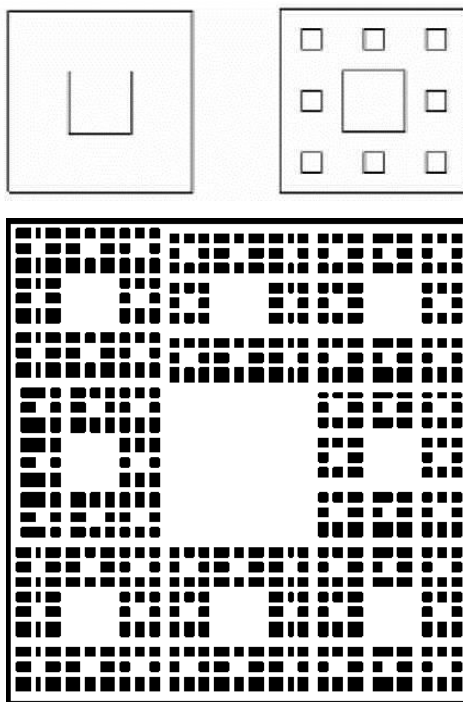


Рисунок 1.8 – Килим Серпінського

По-перше, впадає в очі, що при старших порядках апроксимації ці криві виглядають так само, як при молодших, – це впливає з самого принципу побудови. Така властивість в математиці називається самоподібністю.

По-друге, множини, які ми побудували, «дуже сильно зламані», і цим вони різко відрізняються від звичних нам множин: кіл, відрізків, графіків функцій, що диференціюються і т. п.

Виявляється, можна ввести числову характеристику зламаності множини. Вона називається розмірністю.

Нехай A – множина на площині. Як знайти її площу? Відповідь відома: покрити множину досить маленькими квадратами і скласти їх площі, потім взяти інфімум сум площ (тобто найменшу з сум, а якщо такої немає, то граничне значення суми) за всіма можливими покриттями.

А що, якщо складаються не площі, а довжини сторін? Або довжини сторін, зведені в певну степінь d ? Виявляється, для кожної множини існує і єдине таке невід'ємне число d , що вимірювання площі зі зведенням сторони квадрата в ступінь d призведе до осмисленого результату. Це число d називається розмірністю множини A .

Розмірність має такі властивості:

1. Розмірність підмножини не перевищує розмірність множини, що містить її.
2. Розмірність множини на площині знаходиться в межах від 0 до 2.
3. Розмірність відрізка дорівнює 1.
4. Розмірність квадрата дорівнює 2.
5. Розмірність множини не змінюється при перетвореннях подібності.
6. Розмірність об'єднання двох множин дорівнює більшій з розмірностей об'єднаних множин.

Наведемо розмірності множин із прикладів 1-4:

0. Розмірність кривої Кох дорівнює $\log_3 4 \approx 1,26186$.

1. Розмірність кривої дракона дорівнює 2, так як вона містить певний квадрат. А розмірність її межі дорівнює $2\log_2 \lambda \approx 1,52363$, де $\lambda = \frac{1}{3} \left(1 + \sqrt[3]{28 + \sqrt{783}} + \sqrt[3]{28 - \sqrt{783}} \right)$ – корінь рівняння $\lambda^3 - \lambda^2 = 2$.

2, 3. Розмірності кривих на рис. 1.6 – 1.7 дорівнюють відповідно $\log_3 5 \approx 1,46497$; $\log_6 18 \approx 1,61315$; $\log_3 5$; 1,5; 1,5.

4. Розмірність килима Серпінського дорівнює $\log_3 8 \approx 1,89279$.

Для кривих, побудованих за вказаною схемою, тобто заміною відрізка на ламану, що складається з ланок однакової довжини, існує простий, але не завжди вірний спосіб обчислення розмірності. Нехай відрізок довжини 1 замінюється ламаною, що складається з n відрізків довжини $\frac{1}{a}$. Тоді розмірність

множини, яке вийде за цією схемою, дорівнює $\log_a n$. Це вірно для всіх кривих з прикладів 0-3, а в деякій модифікації і для килима Серпінського, але в загальному випадку вірно не завжди. Грубо кажучи, ця формула вірна тоді, коли у кривій не дуже багато самоперетинів.

Множини, що мають дробову розмірність, називають фракталами (від англійського fraction – дріб). [13]

1.2. Застосування фракталів при описі природних явищ

Може виникнути питання: навіщо людству потрібні фрактали? Фрактали оточують нас всюди – слід лише уважно придивитися.

Класичний приклад – сніг. Якщо придивитися до сніжинки, можна побачити в ній не тільки симетрію, а й фрактальність – з великих променів вирастають маленькі, з маленьких – ще менші, утворюючи химерні форми. Звичайно, повної аналогії тут немає, так як сніжинка складається з молекул води, але схожість з фракталами наявна.

Інший приклад – хмари. Вони теж приймають химерні форми, подібні до фракталів. У США навіть проводилося дослідження з метою визначити «розмірність хмар». За допомогою аерофотозйомки був накопичений великий матеріал, проаналізувавши який, вчені прийшли до висновку, що середня розмірність хмар над північчю США – близько 1,25. Нагадуємо, що мова йде не про розмірності в математичному сенсі, а про деяке фізичне наближення, але суть від цього не змінюється.

Масу інших прикладів фрактальних структур дає біологія. Це листя і крони дерев, кровоносна система, корали, деякі морські водорості і т. п.

Звичайно, об'єкти, що зустрічаються в природі, що не моделюють фрактали в точності. Як тільки ми наближуємось до рівня молекул, самоподібність пропаде. Так що можна вважати, що в природі зустрічаються не самі фрактали, а їх «підробки», але, щоб помітити відхилення, треба навчитися розрізняти досить дрібну структуру. Якщо роздільна здатність нашого мікроскопа не дозволяє цього зробити, то природні фрактали не відрізняються від математичних.

Можна навести ще один приклад використання фракталів – історія, що трапилася в одній з лабораторій США. Її співробітники – фахівці з

комп'ютерної графіки – займалися створенням фільму, одним з епізодів якої була посадка на поверхню Марса. На екрані з'являвся малюнок марсіанської поверхні, але всякий раз він виходив ненатурально, виглядав намальованим (як в мультфільмі). В пейзаж ніяк не вдавалося внести відчуття реальності і в той же час щось неземне. Тоді відомий математик Б. Мандельброт [16] запропонував зробити поверхню планети «фрактальною», тобто при малюванні її використовувати рекурсивний алгоритм схожий на ті, що були продемонстровані у попередньому розділі. Дійсно, поверхня планети стала виглядати набагато природніше, причому за рахунок варіювання розмірності вдалося надати зображенню неземний відтінок.

Фрактальними (точніше, квазіфрактальними) виявилися, крім берегової лінії, багато інших природних структур і процесів: річки з їх притоками, блискавки, гуркіт грому, поверхня гір, хмар, розподіл галактик, сонячна активність і т. д. (Mandelbrot, 1977, 1983 ; Юргенс і ін., 1990; Федер, 1991; Пайтген, Ріхтер, 1993).

Природні ландшафти, що оточують нас формуються як результат динамічного хаосу природних процесів. Фрактальність природних об'єктів доводиться можливістю побудови досить правдоподібних комп'ютерних ландшафтів віртуального світу з використанням простих фрактальних програм, в яких подобу реальності досягається рандомізацією, деяким ступенем нерегулярності шляхом введенням випадкових чисел. Так, при побудові бажаної поверхні віртуальних ландшафтів, з невисокими згладженими пагорбами або ж гір з гострими скельними списами, застосовується метод випадкового – в певних межах, що визначають ступінь гладкості ландшафту – зміщення середньої боку трикутників, на яких розбивається площа (Дьюдні, 1987; Юргенс і ін., 1990).

Крім віртуальних ландшафтів, застосування відносно простих комп'ютерних програм дає можливість створення складних, іноді фантастично красивих образів, що розгортаються в віртуальному просторі і проходять через нескінченні метаморфози. Однак фрактали можуть бути і непоказними, наприклад, пухкі, зернисті, волокнисті і т. п. структури та агрегати. [32, с. 11.]

Популярність фракталів пояснюється не тільки їх загадковістю. У фрактальній графіці є цілком практичне застосування: комп'ютерні художники нерідко використовують такі зображення при створенні рекламних проспектів (наприклад, у вигляді фонового шару), досягають з їх допомогою цікавих ефектів освітлення знімків, накладаючи фрактали в якості одного з шарів в потрібному режимі змішування і з бажаною прозорістю, і т. п. Із застосуванням фракталів можна будувати і цілком реалістичні зображення, наприклад хмари, сніг, дерева і іншу рослинність, гірські ландшафти, поверхня морів і океанів і т.д. Тому фрактальні зображення використовуються в самих різних сферах, починаючи від створення звичайних текстур для веб-сторінок, фонів робочого столу, заставок, фантастичних фонових зображень для рекламної графіки і закінчуючи фантастичними ландшафтами для комп'ютерних ігор і книжкових ілюстрацій [31].

1.3.Способи зображення геометричних фракталів (програми та пакети графічних редакторів)

У попередньому розділі було згадано комп'ютерні програми для побудови зображень геометричних фракталів. Даний розділ наводить опис доступних на даний момент програмних додатків для здійснення цієї цілі.

Фрактали (рис. 1.9) і заворожують і притягають своєю таємничістю. Розглядаючи подібні малюнки, можна побачити, що переплітаються водорості в товщі води, фантастичні квіти, заморських птахів, химерні язики полум'я і навіть весь Всесвіт, хоча іноді взагалі складно зрозуміти, на що схоже фрактальне зображення.



Рисунок 1.9 – Приклади фрактальних зображень, отриманих в ChaosPro

Для створення фракталів можна скористатися онлайн-генератором фракталів, наприклад Fractalposter (рис. 1.10), або спеціальною програмою для формування фрактальних зображень. Перший варіант простіше, але не краще, оскільки можливості коригування фрактальних зображень в онлайн-генераторах більш ніж скромні, та й дозвіл одержуваних зображень залишає бажати кращого. Набагато більше простору для творчості надають програмні генератори фракталів, частина з яких дозволяє візуалізувати зображення з високою роздільною здатністю, придатному для поліграфії.

Відзначимо, що фрактальні шедеври створюються шляхом математичних розрахунків - на основі параметричних рівнянь, але знати подібні рівняння найчастіше необов'язково, оскільки вони закладені в генератори фракталів і фігурують там під іменами, цілком доступними для розуміння простим смертним, а не тільки завзятим математикам.

Програм для генерації фрактальних зображень на ринку не дуже багато. Деякі з них розвиваються ентузіастами (природно, дуже нестабільно, особливо в період кризи), хоча є і солідні комерційні продукти. Розглянемо найбільш цікаві з них.

Ultra Fractal 5.04, розробник: Frederik Slijkerman

Ultra Fractal – краще рішення для створення унікальних двовимірних фрактальних зображень професійної якості. Програма представлена в трьох редакціях: базової Express Edition і розширених Creative Edition і Extended Edition. Можливості базової редакції обмежені генерацією фрактальних зображень. Редакція Creative Edition додатково підтримує шари, маски і геометричні трансформації, а Extended Edition, крім цього, дозволяє створювати анімацію на базі фрактальних зображень.

Фрактальне зображення будується на основі обраної заготовки, яка визначається системою параметричних рівнянь, в яких параметри нескладно змінити за своїм бажанням. Зорієнтуватися щодо можливого виду генерується за обраною формулою зображення нескладно завдяки наявності вбудованого браузера. Базовий набір готових фрактальних формул входить в поставку програми, додаткові формули нескладно завантажити з онлайнної бази з сайту розробника. Передбачена можливість побудови фракталів по призначених для користувача формулами, введеним у вбудованому текстовому редакторі.

Можливостей для перетворення фрактального зображення до унікального виду предостатньо. Так, будь-який виділений в основному вікні прямокутний фрагмент зображення може бути масштабований в режимі Select Mode, а настройки вихідних формул змінені на панелі Tool Windows. Частина базових фрактальних зображень (тих, у яких кожна точка створеного за рівняннями фрактального малюнка є покажчиком на нове безліч функцій іншого типу) може бути трансформована через режим Switch Mode, що приводить до перемикання на форми «підлеглого» зображення. Фільтри трансформації дозволяють виконувати щодо виділених фрагментів зображення різноманітні перетворення: масштабувати, дзеркально відображати, обрізати по шаблону, спотворювати за допомогою завихрення або ряби, розмножувати за принципом калейдоскопа і т.д. Колірна гамма зображення (рис. 1.10) регулюється через набір параметрів градієнтів (включаючи напівпрозорі), у яких через опорні точки коригуються складові квітів і різкість переходу між ними. Колір у будь-який з опорних точок нескладно поставити вручну, можна також скористатися генерацією випадкових поєднань відтінків. Дозволяється коригувати кольору і інші параметри граничної і внутрішньої областей зображень. При бажанні можна навіть створювати багат шарові фрактали шля-

хом накладення фрактальних зображень один на одного, домагаючись в результаті унікальних ефектів, – це реалізується завдяки підтримці шарів з можливістю зміни режимів їх змішування і коригуванням напівпрозорості. Використання масок непрозорості забезпечує маскуванню певних областей зображення.

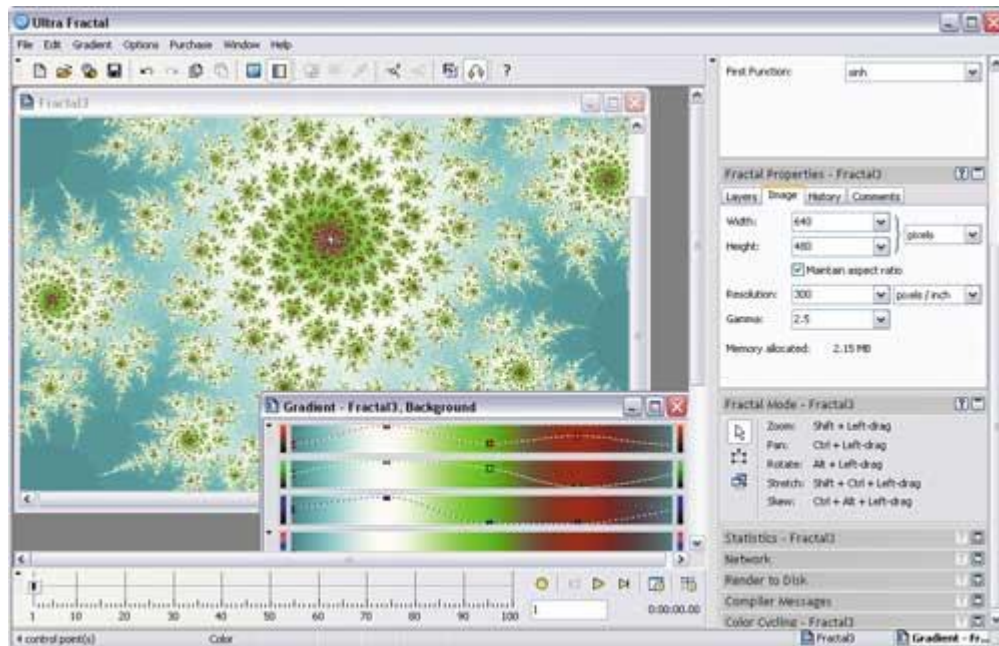


Рисунок 1.10 – Налаштування колірної гами зображення в Ultra Fractal

Створені зображення зберігаються у вигляді проєктів у власному форматі програми і можуть бути візуалізовані з подальшим експортом результатів в один з растрових графічних форматів (JPG, BMP, PNG, PSD, TGA, TIFF) зі збереженням прозорості і в потрібному дозволі. Фрактальні анімації зберігаються в AVI-форматі.

ChaosPro 4.0.228, розробник: Martin Pfungstl.

ChaosPro – один з кращих безкоштовних генераторів двовимірних фрактальних зображень, на базі яких можна створювати тривимірні уявлення фракталів і повноцінні фрактальні анімації. Програма відрізняється високою швидкістю розрахунків, забезпечує повний контроль процесу побудови зображень і дозволяє генерувати відразу кілька фракталів в різних вікнах.

Фрактальні зображення створюються на базі встановлених рекурсивних фрактальних типів на основі формул, завантажених з файлів (підтримуються формули фрактальних генераторів FractInt і UltraFractal), або формул, написаних самостійно в редакторі. Найпростіше - скористатися заготовкою, яка визначається однією з вбудованих систем параметричних рівнянь, для чого достатньо вибрати її з меню Fractal -> New Defaultype.

Є і більш нехитрий варіант створення фрактального шедевра – відкрити дерево цікавих фракталів (рис. 1.11) і поекспериментувати з уже повністю готовими зображеннями, змінивши їх на свій смак. З отриманими заготовками можна виробляти всілякі зміни: переміщати і масштабувати на них окремі фрагменти мишею, змінювати налаштування на панелі, що управляє Parameters (особливості проектування, параметри формул, настройки внутрішньої і зовнішньої областей фрактала). Колірна гамма фрактального зображення регулюється через набір попередньо градієнтів (Presets), яких близько 50, або в редакторі палітр, що допускає редагування будь-якого з встановлених градієнтів вручну. Через альфаканал можна управляти ступенем згладжування і непрозорості. Можливо побудова багат шарових фракталів, при цьому дозволяється змінювати непрозорість шарів, режим змішування і положення одношарових зображень один щодо одного.

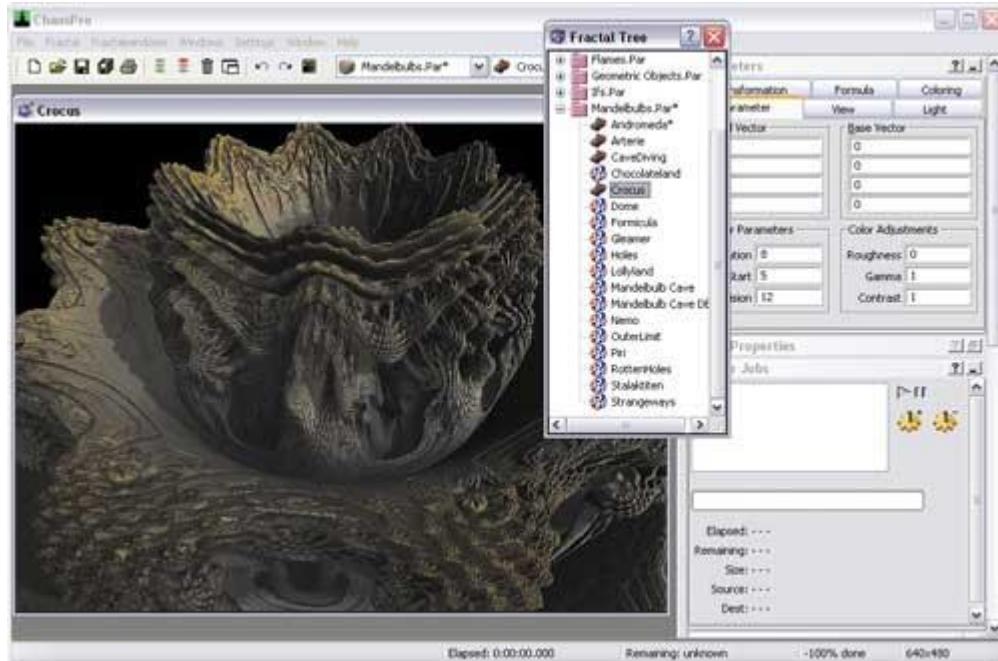


Рисунок 1.11 – Завантаження готового фрактала з дерева в ChaosPro

Для перетворення двовимірних фрактальних зображень в тривимірний вигляд (це можливо не для всіх рекурсивних типів) використовуються 3D-трансформації: настройки такої трансформації визначаються на панелі, що управляє, а сам процес побудови запускається командою Fractal -> 3D Transform. Технологія генерації подібних 3D-зображень нагадує побудова ландшафтів по картах висот. Є можливість створення анімації на основі фрактальних зображень з визначенням ключових анімаційних фаз, які можуть відрізнитися по будь-якому змінюваному параметру: куту повороту і обертання, колірним параметрам і ін.

Створені фрактали зберігаються у вигляді проектів у власному форматі програми або експортуються в растрові зображення (JPG, BMP, PNG). 3D-трансформації зберігаються у вигляді 3D-об'єктів в форматі POV, а анімації - в форматі AVI.

XenoDream 2.3, розробник: XenoDream Software, LLC.

XenoDream – середовище для створення різноманітних фантастичних об’ємних структур шляхом комбінування простих форм і фрактальних зображень, отриманих із застосуванням IFS-фрактальних методів. Згенеровані таким способом об’єкти зберігаються у вигляді зображень або експортуються в mesh-об’єкти для подальшої обробки в 3D-редакторах.

Для створення тривимірних структур не потрібне знання фрактальних формул – достатньо створити новий документ і на вкладці File клацнути на кнопці Random sample Parameter file, що призведе до формування випадкової фрактальної структури (зрозуміло, цей процес може повторюватися до тих пір, поки не буде згенеровано підходящу заготовку; рис. 1.12). Можливостей налаштування параметрів такої заготовки є безліч. Можна через вкладку Shape управляти основою структури та її формою (змінювати їх положення, розмір по кожній з осей, обертати, клонувати і т.д.), а до самих структур застосовувати різноманітні трансформації (тут вони називаються метаморфозами). Для підбору потрібної колірної гамми (вкладка Color) дозволяється змінювати метод забарвлення на варіант Holon Sequence або Metamorph - перший метод використовується для забарвлення фрактальних зображень, а другий - для забарвлення форм із застосуванням текстур. Крім того, обраний спосіб зіставляється з градієнтом (налаштованим параметричних або призначеним для користувача) або зображенням. Крім цього передбачено управління камерою (вкладка View), для якої можна міняти положення, нахил і фокус, управляти площинами відсікання і т. п., а також налаштуваннями освітлення на вкладці Rendering, де регулюється положення джерел світла та наявність / відсутність тіней, причому навіть для окремих форм. На цій же вкладці здійснюється керування ступенем непрозорості окремих форм та визначення розмірів і дозволу одержуваного зображення. Можливе створення анімації

структури з генерацією до 30 ключових кадрів, які зберігаються у вигляді окремих зображень.

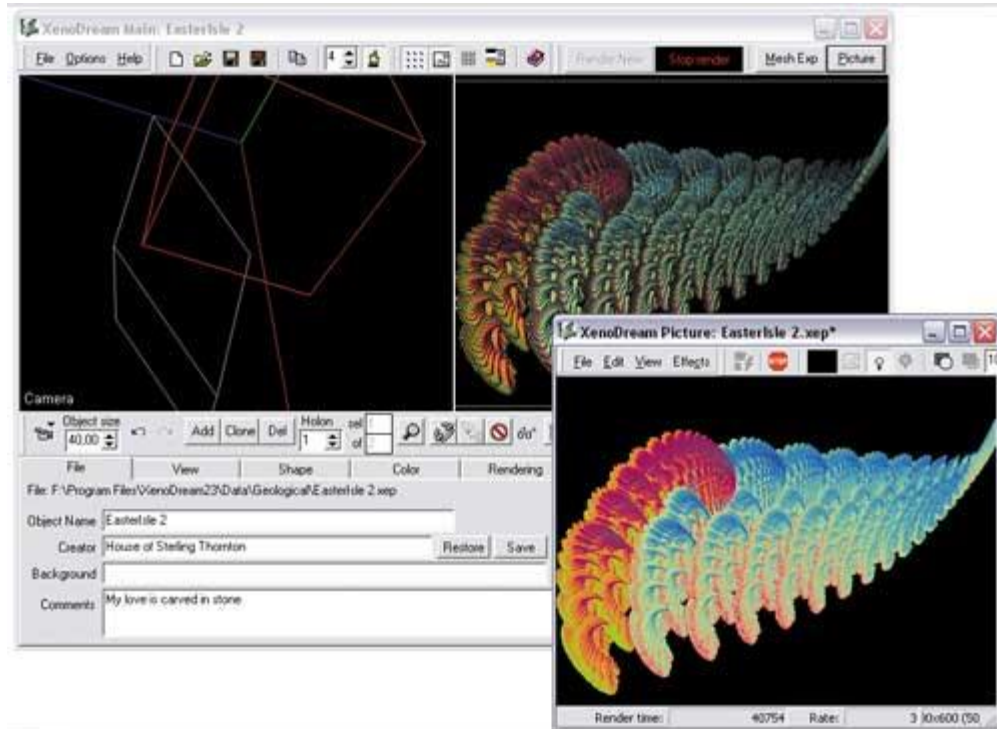


Рисунок 1.12 – Створення та рендеринг випадкової фрактальної структури в XenoDream

Готові фантастичні структури запам'ятовуються на диску у вигляді проектів у власному форматі програми або експортуються в популярні графічні формати (BMP, JPG, TGA і PSD). Можливий також експорт отриманих структур в тривимірні mesh-об'єкти (OBJ, POVRay INC) і карт глибини (Depth Maps) для інших програм рендеринга.

Fractracer 1.1, розробник: Fractracer Lab.

Fractracer – інструмент для створення тривимірних зображень на базі фрактальної геометрії, що представляє собою щось середнє між генератором

фракталів і 3D-редактором. Отримані в цій програмі форми зберігаються у вигляді зображень або перетворюються в тривимірні mesh-об'єкти, які в подальшому можуть бути використані в популярних пакетах 3D-графіки.

Для створення зображень передбачено два варіанти: використання встановлених прикладів фрактальних об'єктів, які потім нескладно видозмінити бажаним чином, і створення проектів з нуля - на базі програмного коду. Масштабування, обертання і переміщення отриманого фрактального зображення виробляються мишею, а всі інші настройки – через численні панелі. Найважливішими панелями є панель об'єктів (Objects) і панель параметрів (Parameters). Усе в нові на зображення елементи - це окремі незалежні об'єкти, а саме зображення є наповнену ними сцену. Тому будь-який з доданих об'єктів, незалежно від того, на якому етапі він був впроваджений в сцену, в подальшому може бути без проблем видалений. Об'єкти розташовані в ієрархічній структурі, і від їхнього економічного становища по відношенню один до одного залежить вид зображення. Набір об'єктів регулюється на панелі Objects (додаткові об'єкти вставляються з вбудованою бібліотеки), а властивості об'єктів – на панелі Parameters. Тут, крім зміни параметрів фрактальних формул і параметрів кольорів, можливе корегування положення камери (рис. 1.12), джерел світла, трансформацій і багато чого іншого. Візуалізація в програмі також нагадує візуалізацію в 3D-рішеннях, оскільки при цьому враховуються встановлені параметри освітлення, наявність / відсутність тіней і необхідність розмивання країв. Можливе створення анімації на основі фрактальних зображень з урахуванням визначення ключових кадрів і бажаної тривалості.

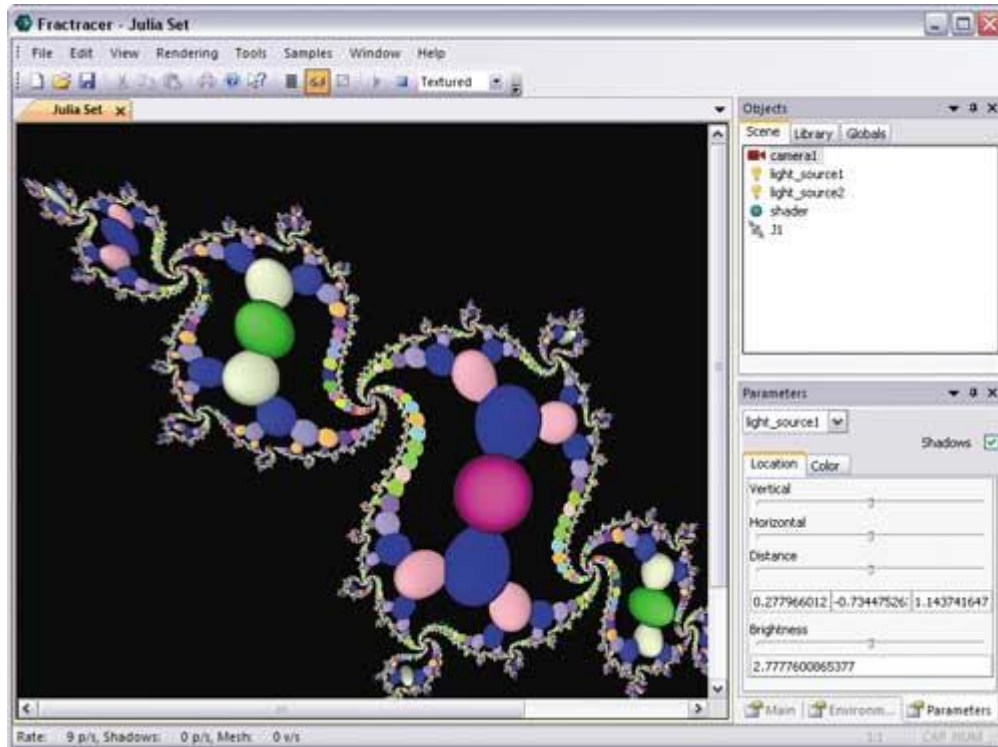


Рисунок 1.13 – Налаштування параметрів камери в Fractracer

Створені зображення зберігаються у вигляді проектів у власному форматі програми і експортуються в PNG-файли з потрібним дозволом. Передбачені також генерація і збереження тривимірних mesh-об'єктів (OBJ) і збереження фрактальних анімацій у форматі AVI.

Огляд застосунків може бути продовжено, проте задля стислості зупинимося на цих головних додатках. Більш повний огляд подібних програм можна знайти у [34].

РОЗДІЛ 2. ВИКОРИСТАННЯ ФРАКТАЛІВ У ОСВІТНІХ ЦІЛЯХ В ШКОЛАХ

2.1. Роль і місце теорії фракталів в різних сферах діяльності людини

Фрактал як термін ввів в обіг французький і американський математик Б. Мандельброт (1924-2010) в 70-і роки ХХ століття, охарактеризувавши його як «структуру, основними властивостями якої є самоподібність і повторюваність» [16, с.13-19]. Самоподібність означає, що кожен елемент структури умовно повторює її, відтворюючи в різних масштабах без видимих змін. Об'єкти, в яких вбачається фрактальної структури, існували завжди, однак в останні десятиліття стало здійсненним розгляд різноманітних об'єктів в таку перспективу. В першу чергу це обумовлено появою обчислювальних приладів, які створили можливість аналізу величезних інформаційних масивів, а також розвитком технологій, що дозволили візуалізувати складні хаотичні структури. Сам Б. Мандельброт сформулював своє розуміння фрактала, вивчаючи економіку. У статистичних даних хаотичних коливань цін на різні товари він знайшов певний прихований математичний порядок. Фактично, таке дослідження було б неможливим без сучасних методів аналізу.

Вчений розвинув ідею фрактала в своїй роботі «Фрактальна геометрія природи», де вказав на те, що фрактальна теорія дає можливість найкращим чином представити і проаналізувати природні об'єкти, для пояснення яких евклідова геометрія підходить вельми умовно, так як остання оперує ідеальними об'єктами (наприклад, колами, площинами, прямими), яких в природі в природному вигляді не існує [16, с.20-29]. У той же час Мандельброт порівнював такі біологічні та соціальні об'єкти як капіляри в живих організмах і

графіки зміни ринкових цін, прирівнюючи структури останніх до фрактальним структурам.

Цікавий знаменитий приклад з визначенням довжини узбережжя Британії [2]. Залежно від умовного масштабу і параметрів приладів, які використовуються для вимірювання узбережжя, довжина його буде різнитися. Чим ближче ми розглядаємо довжину узбережжя, тим більше нерівностей спостерігаємо. Доводячи це вимір до крайності, можна заявити, що узбережжі Британії нескінченно.

Наведений приклад нагадує апорію Зенона «Ахіллес і черепаха». Ахіллес, щоб наздогнати черепаху, долає певну відстань, але за цей час черепаха теж долає деяку відстань. Коли Ахіллес подолає цей новий відрізок, черепаха також просунеться вперед. Раз по раз Ахіллес буде змушений долаючи щоразу нове відстань, Ахіллес ніколи не наздожене черепаху.

Даний випадок можна віднести до логічних парадоксів. Сучасний дослідник фрактальних структур В. В. Тарасенко вважає, що логічні парадокси можна зіставити з фракталами, з огляду на те, що фрактали в класичній геометрії є своєрідних «монстрів», які не вписуються в традиційну систему аналізу. У своїй роботі «Фрактальна логіка», опублікованій в 2002 році, він проводить паралелі між парадоксами класичної логіки (зокрема, апоріями Зенона) і, так званими, «монстрами» евклідової геометрії, до яких виявилися не застосовні традиційні методи геометричного аналізу. До них він відніс, наприклад, криву Коха і функцію Вайєрштрасса [27, с. 20-22]. На думку дослідника, логічні парадокси і геометричні «монстри» (які і є фрактальними структурами), – це приклади протиріч, що виникають в добре збудованих парадигмах вчених і руйнують звичні, класичні наукові уявлення.

Можливо, завдяки такій нестандартності, фрактальна методологія все частіше знаходить застосування в тих областях, які характеризуються хаоти-

чністю, нестабільністю структур і зв'язків між елементами, а також там, де застосування класичних методологій обмежена.

На думку В.В. Тарасенко, фрактали-«монстри» з концептуальної точки зору знайшли своє застосування в синергетичній теорії та теорії аутопоезису, які бурхливо розвиваються в останні десятиліття [27, с.36]. На застосування фрактальної теорії в соціальній синергетиці вказують також Е. Н. Вольфсон, Б. П. Невзоров і Ю. А. Фадєєв – автори статті «Прояв фрактальних властивостей в соціальних процесах» [10]. Д. С. Жуков і С. К. Лямін в статті «Варіанти використання методів фрактальної геометрії в соціальних і політичних дослідженнях» міркують про розвиток синергетичних уявлень в соціальних і політичних науках [12]. У всіх цих роботах підкреслюється актуальність застосування фрактальної теорії в соціальних і гуманітарних науках, що обумовлено розвитком інформаційних технологій і переходом людства в інформаційну епоху. З одного боку, сучасні механізми візуалізації дозволили повному поглянути на фрактали, зробити їх візуально-відчутними, з'явилася можливість провести паралелі між хаотичними самоорганізації процесами в природі і фрактальними структурами, які передбачають візуальне сприйняття. З іншого, сучасна інформаційна глобальна мережа природним чином виявила в собі фрактальну структуру, перетворилася в фрактальну освіту що самоорганізується. Виникла завдяки сучасним технологіям інформаційна мережа наділяється високим ступенем відкритості для навколишнього середовища, що є однією з умов синергетичної самоорганізації. Культура інформаційного суспільства виявляє в собі високий потенціал для досліджень із застосуванням фрактальної теорії. У цьому проблемному полі можна виділити дослідження медіа М. Маклюєна.

У своїй роботі «Розуміння Медіа» вчений описував технології як «розширення» людини [14, с. 9-26]. На його думку, розширення є продовженням

людини і виникають, виходячи з принципів, схожих з тими, на яких будується фрактальна теорія. При цьому він розглядав розширення як щось, що змінює культуру відповідно до типу розширення («холодну» чи «гаряче») і з його формою, висунувши суперечливу тезу «Засіб комунікації є повідомлення».

Форма медіа, на думку М. Маклюена, має функціональну основу, тобто містить в собі і відтворює функцію, притаманну «органу», розширенням якого це технічне поліпшення було, тобто утворюється відповідно до принципу самоподібності.

М. Маклюен фокусує увагу, перш за все, на тому «повідомленні», що несе в собі медіа. Зміст цих слів виявляється в змінах, що відб. в культурі.

Принципи, що визначають функціонування того чи іншого медіа, в рамках фрактальної теорії можна охарактеризувати як певну концепцію, яку несе в собі це медіа. Саме медіа в даному випадку виступає в ролі концептуального фрактала, якщо застосувати визначення Е. В. Миколаєвої. У своїй статті «До типології фракталів в теорії культури» вона називає концептуальними ті фрактали, в яких самоподібність виражається на рівні «ідей і концептів, загальних для деякої соціокультурної, філософської і т. п. системи і її складових: символи, соціальні і культурні елементи тощо.» [18] Як приклад, автор наводить дослідження Р. Іглеша в області етноматематики, згідно з якими «фрактали древніх африканських міст пов'язані відносинами подібності з різними артефактами і практиками традиційної культури Африки (зачіски, гадання та ін.)» [1]

Коли говорять про алгебраїчні та геометричні фрактали, як правило, мають на увазі просторові рекурсії. Фрактал – це якась динамічна структура, яка нескінченно повторює себе, геометрична фігура, в якій кожний наступний елемент повторює попередній в зміненому масштабі. Концептуальний ж

фрактал виражається у вигляді соціокультурних практик в контексті певної культури. Е. В. Миколаєва стверджує, що патерни концептуального фрактала не володіють подобою геометричного або алгебраїчного типу, яке виражається просторово. Подоба концептуального фракталу виявляється на рівні понять, концептів, ментальних конструкцій, при цьому його структура може містити патерни різних типів, які до того ж можуть ставитися до різних знак. систем.

Всі ці теорії дозволяють трактувати культуру як фрактал. Приклад подібного розуміння культури – стаття «Фрактальність людини» А. І. Тішин і Т. М. Егембердієва, де в якості фрактала представляється людська культура. В першу чергу вони вказують на самоподібність функціональних розширень людської діяльності в навколишній світ: «Спочатку людина руками збирав плоди з дерева, потім збивав їх палицею, потім користувався камінням, створював знаряддя праці, інструменти, машини, складні агрегати, розробляв і удосконалював технологію. Все це є зовнішнє продовження людини, його органів, його функцій, виступає доповненням і носієм людини» [29]. Подібний погляд на технології багато в чому збігається з розумінням М. Маклюен процесу виникнення і розвитку медіа та технологій- «збільшень». А. І. Тішин і Т. М. Егембердієв також вказують на можливість того, що сама фрактальна природа людського організму («м'язи, кісткова та клітинна будова, легені, мозок і багато іншого, що має фрактальну структуру») є джерелом фрактальності людських технологій [29]. Ці технології часто не тільки функціонально подібні людському тілу (колесо, по Маклюеном, є функціональним розширенням людських ніг і здатності пересуватися), але і візуально – наприклад, кібернетичні поліпшення людського тіла.

Відзначимо, що Тарасенко В.В. не вважає фрактальну теорію, запропоновану Б. Мандельброт, чисто геометричній, так як в ній не введена нова ак-

сіоматика, заснована на строгих логічних прийомах визначення поняття фрактала, а створений новий контекст, в рамках якого розглядаються звичні структури, що інтерпретуються як фрактала. На думку В. В. Тарасенко, для розуміння категорій фрактальної теорії, дослідник повинен бути спочатку налаштований на сприйняття об'єкта, що спостерігається як фрактальна структура.

Таким чином, фрактальна теорія, спочатку математична, виглядає потенційно придатною в гуманітарних науках в рамках міждисциплінарних досліджень. В першу чергу це відноситься до синергетики, що вивчає складні системи, що самоорганізуються, де фрактал – один з предметів вивчення.

Наведемо приклад застосування фрактальної теорії в сфері гуманітарних наук. Як вже було сказано вище, М. Маклюен в роботі «Розуміння медіа» стверджує, що в кожному засобі комунікації міститься «повідомлення», яке привносить зміни в життя суспільства [14, с. 95]. Це повідомлення є певний принцип функціонування, або, застосовуючи визначення Е. В. Ніколаєвої, концептуальний фрактал. Писемність заснована на алфавіті, коли «семантично безглузді літери використовуються для передачі семантично безглузких звуків» [14, с. 96]. Тобто літерний код має досить умовну зв'язок з тими звуками, які він позначає. Він переводить усну, звукове, світосприйняття на папір, роблячи звуки візуально усвідомлюваними, але ці знаки не схожі на візуальні відображення того, що вони зображують, (на відміну від, наприклад, іконічного коду). Крім цього, лист вибудовує знаки в ряди і підпорядковує їх лінійної семантиці, реструктуруючи свідомість людини письмовій епохи. Ця реструктуризація проникає в усі сфери життя людини епохи друкованого слова, народжуючи індустріалізм, однією з основних характеристик якого було вибудовування виробничого процесу в послідовність, конвеєрну лінію (М. Маклюен порівнював її з послідовністю знаків в писемності [14, с. 92-

100]). Стандартизація, лінійність і уніфікація, характерні для знаків письмового тексту, проникають в усі сфери життя суспільства, в якому даний засіб комунікації є основним інструментом передачі функціональних повідомлень. Таким чином, концептуальний фрактал відтворює себе на всіх рівнях (масштабах) структури, в якій він – утворює алгоритм організації [266].

2.2.Пропедевтика формування у учнів поняття «фрактал» на прикладі курсу «Фрактали в ЛОГО»

Базового навчального плану включає перелік обов'язкових для вивчення дисциплін і в той же час забезпечує гнучкість змісту освіти своєю варіативною частиною, яка передбачає додаткові заняття. Саме позакласна робота повинна служити опорою для збільшення самостійності шкіл і розвитку системи підтримки талановитих дітей. На нашу думку, додаткові заняття не тільки розширюють і поглиблюють знання по розділах основного шкільного курсу, а й, відповідно до особистісно-орієнтованого підходу, надають учням можливість ознайомитися з принципово новими для них напрямками.

Про збільшення потреби у вивченні нових розділів математики свідчать і навчально-дослідні роботи учнів середніх загальноосвітніх, а також середніх професійних навчальних закладів. Аналіз рефератів міських конкурсів показав, що в 2020 р 19% учасників обрали для свого дослідження нові сучасні теми, пов'язані з «молодим» галузевим знанням, в тому числі фрактальної геометрії, в той час як в 2018 р це число дорівнювало 10%, а в 2019 р. – 16%.

Поява кривих без дотичних прямих, побудованих Больцманом і Вайєрштрасом близько ста років тому, було зустрінуте багатьма математиками XIX в. з неприязню. І зараз люди, далекі від наукових досліджень і техніки, побачивши зображення фракталів, сприймають їх лише як картинки, не підозрюючи, що ці складні математичні безлічі мають не тільки естетичне, а й практичне значення в найрізноманітніших галузях людської діяльності. Так, теорія фракталів активно знаходить своє застосування при дослідженні хаотичної поведінки нелінійних динамічних і дисипативних систем, турбулентного течії рідин, тріщин і дислокаційних скупчень в твердих тілах і гірських породах, електричного пробою, дифузії і агрегації частинок, зростання кри-

талів і т. д. Фрактальне моделювання застосовується також при вивченні об'єктів, що мають складну геометричну структуру, таких як пористі матеріали, природні об'єкти – рифи, хмари та ін.

Фрактальна комп'ютерна графіка, фрактальна радіофізика, фрактальний конденсатор – ці терміни стають буденними. Крім того, широке поширення набули фрактальні методи стиснення інформації та фрактальні форми антен. Промисловість Росії, як і багато інших сфер діяльності, потребує добре підготовлених інженерних кадрів. Висококваліфіковані фахівці досить часто звертаються до фрактальної теорії, так як «деякі властивості природних фрактальних структур зручно вивчати на модельних фракталах, оскільки застосування методів фрактальної геометрії дозволяє виявити суттєві характеристики як модельних фракталів, так і природних ієрархічних структур» [20, с. 174].

Молодий фахівець, який прагне до вдосконалення своєї компетентності, змушений вивчати фрактальну теорію самостійно (по перекладним монографіям), і далеко не кожному це дається легко. Полегшити відповідну підготовку, на нашу думку, можна з допомогою пропедевтики цієї теми в школі. Однак вважається, що математична база фракталів не може бути успішно засвоєна на шкільних заняттях навіть учнями старших класів. Погіршує цю непросту ситуацію відсутність вітчизняної літератури по даній тематиці, адаптованої для школярів.

З метою вирішення цієї проблеми Є. Аблаєвим та Р. Мамалигою був розроблений курс «Фрактали в Лого» [4]. У нього входять дидактична казка, методичні вказівки для вчителів та презентаційне супровід. Навчальним супроводом курсу є книга «фрактали!» [5], казковий характер і пригодницький жанр сюжету якої створюють додаткову мотивацію до навчання. Проблеми, що виникають перед головними героями, як правило, вимагають від учнів

побудови в середовищі Лого зображень найпростіших класичних фракталів, таких як «Фрактальне дерево», «Крива Коха», «Сніжинка Коха» і ін.).

Велике значення в курсі відведено побудов, для виконання яких потрібні знання з області як евклідової, так і фрактальної геометрії.

Завдання курсу:

- формування в учнів стійкого інтересу до вивчення фрактальної геометрії;
- створення основи для подальшого вивчення фрактальної геометрії;
- формування початкових уявлень про програмування в середовищі Лого;
- розвиток логічного і образного мислення;
- формування поняття «фрактал» на рівні передпоняття. Вперше схема формування понять, що включає в себе термін «передпоняття», була запропонована в роботах Л. С. Виготського і Н. С. Подходової. Л. С. Виготський розглядав передпоняття як не досяг вищого ступеня свого розвитку концепт, який перебуває в простому і не-посередньому відношенні до об'єкта і не включений в систему вище-вартого поняття. Н. С. Подходова як психологічної основи формування понять в учнів розробила структуру «перцепт – поняття», виділивши в цій структурі наступні етапи: образ сприйняття (перцепт); уявлення; узагальнене уявлення, або передпоняття (образ-концепт); поняття; система понять. Ця послідовність раз-біта автором на 2 блоки: «1-й блок – до передпоняття, включаючи його; 2-й блок – від передпоняття до поняття, тобто формування передпоняття є самостійним етапом в процесі навчання»[21].

Важливо відзначити, що при оволодінні поняттям по схемі «перцепт – поняття» етапи «уявлення» і «передпоняття» не є незалежними по-отже скла-

довими, а формуються в тісному контакті таким чином, що формування одного сприяє формуванню іншого.

Подальший розвиток структура «перцепт – поняття» отримала в роботах Н. І. Нікуліній. Зокрема, нею запропоновано наступне визначення: передпоняття – безліч образів, об'єднаних за наявності у них деяких загальних властивостей [19].

Одним із завдань, що виникають в ході роботи в 5-7 класах, являється необхідність розвитку пізнавального інтересу учнів. У зв'язку з цим мотиваційна складова цих занять набуває особливу роль. Хорошим способом мотивації школярів 11-14 років до навчання може служити ігрова діяльність.

Аналіз літератури, науково-методичних робіт [15, 19, 21], а також психологічних особливостей розглянутого віку дозволив нам визначити послідовність етапів формування передпоняття «фрактал»:

1. Актуалізація досвіду учня, пов'язаного з сформованим поняттям.
2. Створення конкретно-чуттєвих образів, формування (уточнення, розширення) обсягу поняття:
 - а) малювання фігур, що мають властивість самоподоби;
 - б) створення за допомогою готової програми різних видів об'єктів, що належать даному класу;
 - в) ігрова діяльність: ігри, в яких потрібно запам'ятовувати і відтворювати фрактальні зображення.
3. Формування змісту поняття:
 - а) експериментування з готовою програмою з метою виявлення характеристичних властивостей фігури;
 - б) створення алгоритму малювання фігури на певному етапі побудови;
 - в) ігрова діяльність: використання спеціальних ігор, в ході яких гравець аналізує структуру різних об'єктів і виділяє їх загальні ознаки.

4. Застосування передпоняття в конкретних ситуаціях:

- а) створення малюнків з використанням фрактала;
- б) вирішення завдань на впізнавання фігури за алгоритмом малювання;
- в) ігрова діяльність: використання дидактичних комп'ютерних ігор для застосування передпоняття.

Проілюструємо реалізацію даної схеми на прикладі нашого досвіду роботи з учнями 5-7 класів загальноосвітніх шкіл.

1. Приступаючи до формування передпоняття «фрактал», слід проаналізувати чуттєвий досвід учнів і зіставити його з обсягом введеного поняття.

На першому етапі ставиться до теми «фрактали» чуттєвий досвід 5-7-класників, як правило, недостатній і має безсистемний характер. Тому важливо вибудувати послідовність підношення на-наочно матеріалу, що дозволяє створити достатній запас первинних образів. В процесі пізнання вони виконують опорну роль, і без них формування передпоняття «фрактал» в учнів цього віку практично неможливо. З урахуванням ментального досвіду учнів обраних класів нами були підібрані демонстраційні слайди із зображенням третьому «природних фракталів»: берегових ліній, крон дерев, листя папороті, капусти, а також навколишні учнів в повсякденності предмети, явища і твори мистецтва, що володіють фрактальною структурою: матрешки («національна іграшка-фрактал»), пісня «Про попа і собаку» і т. п.

Показ тих чи інших фракталів співвідносився з тематикою уроку. Наприклад, при програмуванні фрактальних «кущів» і «дерев» були використані слайди з фотографіями папоротей і дерев, зробленими на екскурсії учнями, а демонстрація множини Мандельброта прекрасно вписалася в урок, відповідний чолі «День п'ятий на острові» книги «фрактали!» [5].

2. Подальша робота над формуванням обсягу поняття вибудовувалася в три прийоми:

а) демонструвалася фрактальна множина на різних етапах побудови, і пропонувалося перенести зображення на папір від руки і продовжити малюнок ще на один крок;

б) за допомогою маніпуляцій з параметром в готовій програмі школярі отримували на моніторі зображення різних етапів побудови (кількість яких вони вибирали самостійно);

в) учні грали в комп'ютерні дидактичні ігри, в сюжеті яких були використані створені на попередніх етапах роботи образи фракталів, а також образи, близькі їм за способом побудови.

До цієї категорії відноситься гра «Сапер-Ф». В ході гри потрібно протягом мінімального відрізка часу виявити на ігровому полі всі міни, розташовані у вигляді зображення фрактала на певному етапі побудови. Хто навчається доводиться постійно відтворювати образи фрактальних структур, використовуючи такі ментальні операції, як створення образу (фрактал), поворот образу, зміна його структури (фрактал на n -му кроці побудови). Ці вміння використовуються при впізнанні повернутого зображення фігури або зображення фігури на більш пізніх етапах побудови, ніж образ, що зберігся в пам'яті учня.

Ігровий задум: можливо швидше виявити міни на ігровому полі з мінімальними втратами в рядах саперного загону.

Правила гри:

- 1) гра починається після натискання на кнопку «Старт»;
- 2) кожен крок по мінному полю імітується натисканням лівої кнопки миші по клітці поля;
- 3) відкрилася на черговому кроці цифра позначає кількість мін в клітинках, що оточують дану клітинку;

4) при виявленні міни слід натиснути правою клавішею миші по місці її клітці, тим самим поставивши покажчик міни – прапорець;

5) у разі допущеної в ході розмінування помилки від-ходить вибух і до справи приступає наступний сапер після натискання кнопки «Старт».

Ігрові дії: гравці розмінують поле по черзі до тих пір, поки не будуть виявлені всі міни. Після цього порівнюються результати. Пріоритетним показником успішності гри є число загиблих саперів, другорядним – час, витрачений на розмінування поля.

Пізнавальний зміст: створення наочно-образної основи для формування поняття тої чи іншої фрактальної множини; розвиток пам'яті та здібностей до аналізу.

Устаткування і методичне забезпечення: програма-гра «Сапер-Ф», комп'ютер з операційною системою Windows 98, Windows XP.

Результат: визначення всіх клітин з мінами на поле.

Той учень, який висуне і перевірить гіпотезу про те, що міни на полі розташовуються у вигляді фрактального зображення, досягне кращих результатів, ніж той, який буде розмінувати поле традиційним способом. Таким чином, засвоєння дидактичного змісту сприяє результативності гри.

3. Для виявлення змісту поняття був організований процес порівняння зображень, отриманих на другому і третьому, а потім на третьому і четвертому етапах побудови конкретного фрактала. В ході вирішення даного завдання учні, використовуючи пред'явлений креслення, намагалися дати відповіді на поставлені вчителем питання, тобто. Здійснювали візуальний аналіз інформації і отримували «графічне вирішення» – характеристичне властивість даного фрактала. Потім учнями і керівником гри була створена програма для побудови цієї конкретної фрактальної множини на різних етапах побудови.

При формуванні змісту передпоняття корисно розглядати фрактальні множини з різними способами побудови. Це дозволяє відокремити характеристичні властивості фракталів від способів їх побудови. Як приклади нами були обрані фрактали «Серветка Серпінського» (рис 1.8), «Сніжинка Коха» (рис. 1.2), «Дракон Хартера-Хайтвея» (рис 1.7). Перший будується за допомогою викидання підмножин, другий – через додавання елементів з кожною новою ітерацією, третій – шляхом поворотів і ін. Такі фрактали лягли в основу комп'ютерної гри «Обери фрактал». Протягом мінімального відрізка часу гравець повинен проаналізувати певну кількість зображень на екрані (три і більше) і вказати на безліч, що володіє фрактальними властивостями. Таким чином, результатом третього етапу стало формування в учнів здатності виділяти загальні характеристичні властивості фракталів: повторюваність і подоби.

4. Метою останнього етапу було вироблення вміння використати отримані знання. Одним із способів досягнення цієї мети є створення малюнків із застосуванням фрактальної фігури. Учням було запропоновано відповідні завдання: використовуючи програми, розглянутих заняттях, намалювати картину «У лісі», створити орнамент з фрактальним малюнком, зобразити поверхню планети з фантасти-чеського фільму, зробити «знімок» острова, на якому виявилися головні герої.

Іншим способом формування розглянутого вміння можна вважати рішення задач на впізнавання фігури за алгоритмом побудови. Так, одна з ігор, наведених в книзі «ФрактаЛ-ОГО!», Закінчується, коли учні помічають закономірність розташування точок – об'єднання точок утворює фрактал «Серветка Серпінського». Роль комп'ютерних дидактичних ігор на цьому етапі полягає в наданні школярам можливості безпосереднього застосування отриманих знань.

Подібну можливість вони отримують також в ході виконання лабораторних робіт. Наведемо опис однієї з робіт курсу «Фрактали в Лого» для учнів 5-7 класів середніх загальноосвітніх установах.

Тема: Довжина берега Британії.

Устаткування: лінійки довжиною 15 см, 5 см, 1 см; нитка; мас-штабна карта берегової лінії Британії.

Цілі:

- навчальна: надання відомостей про практичне застосування фракталів;
- розвиваюча: розвиток здатності до аналізу і плануванню, вироблення навичок добування знань при роботі з реальними об'єктами;
- виховна: виховання акуратності, сумлінності.

Хід роботи:

- виміряти довжину берега лінійкою 15 см, 5 см, 1 см;
- виміряти довжину берега ниткою;
- знайти різницю в результатах вимірювання різними інструментами;
- виявити залежність довжини берега від довжини вимірювального інструмента;
- назвати інші географічні об'єкти, які мають сильно порізані кордону, скориставшись різними джерелами інформації.

Передбачуваний висновок: кошти евклідової геометрії грубі для зображення сильно порізаних берегових ліній (в тому числі що належать Британії, Норвегії) і кордонів окремих держав (наприклад, Португалії, Іспанії). Для моделювання даних об'єктів необхідне залучення теорії фракталів.

Апробація методики введення передпоняття «фрактал» в середній школі довела її ефективність. Для здійснення пропедевтики формування поняття «фрактал» слід не тільки ретельно обмислити змістовний компонент таких

занять, але і визначати найбільш продуктивні форми організації діяльності учнів. Тому крім навчальних завдань необхідно використовувати такі форми навчання, як екскурсії, робота в малій групі, дидактичні ігри, навчальні проекти, лабораторні роботи, експерименти, відвідування виставок.

2.3. Вивчення елементів фрактальної геометрії в школі як засіб естетичного виховання учнів

Естетичне виховання займає усе більш значне місце в процесі формування особистості учня. Під естетичним вихованням розуміють цілеспрямований процес формування в учня естетичного ставлення до дійсності. На цій основі формується не тільки естетико-ціннісна орієнтація особистості, а й розвивається здатність до творчості, до створення естетичних цінностей у сфері навчальної діяльності, в побуті, у вчинках і поведінці, формується естетичний смак і уявлення про навколишній світ. Вивчаючи математику, ми відкриваємо все нові і нові складові краси, наближаючись до розуміння, а потім і до створення краси і гармонії. Важливу роль в естетичному розвитку учнів відіграє знайомство школярів з молодим швидко розвиваються математичним напрямком – фрактальної геометрії.

В останні роки в зв'язку з бурхливим розвитком і поширенням комп'ютерної техніки та інформаційних технологій з'явилася велика кількість досліджень і методичних розробок, присвячених вивченню фракталів і фрактальної геометрії в навчальному процесі школи і вузу. На необхідність знайомства в курсі математики (інформатики) учнів шкіл та студентів вищих навчальних закладів з елементами фрактальної геометрії вказує ряд авторів досліджень з теорії та методики навчання математиці в школі та вузі (Н. Х. Розов, В. С. Секованов, В. А. Тестов і ін.).

Естетична природна привабливість фракталів відкрилася зовсім недавно. Основоположник фрактальної геометрії Б. Мандельброт так писав про природу і фрактали: «Природа демонструє нам не просто вищий, а здійснений-но інший рівень складності. Число різних мас-штабів довжини нескінченно, яку б мету ми не ставили перед собою при їх описі. Існування таких

структур кидає нам виклик, ставлячи перед необхідністю зайнятися вивченням тих форм, які Евклід залишив осторонь як позбавлені якої би там не було правильності, – дослідженням морфології аморфного. Математики ухилилися від цього виклику і все більш йшли від природи, вигадуючи теорії, що не мають ні найменшого відношення до того, що доступно нашому споглядання і нашими відчуттями »[16, с. 3]. Завдяки детальному вивченню фракталів і фрактальної геометрії люди навчилися ще більше помічати і цінувати красу природи.

Н. Х. Розов зазначає: «У методичній літературі багато люблять писати про естетичний вплив математики на школярів, про її значення для виховання у них поняття прекрасного. Звичайні-но кажуть про стрункість доведення теореми, про витонченості рішення задачі, про красу неочікуваного додаткового побудови. Але все це доступно і зрозуміло, скоріше, учневі, дійсно відносно захопленому математикою. А яке є естетичне задоволення може отримувати від рішення квадратних рівнянь той, хто до неї «глухий»? Фрактали ж породжують дійсно барвисті, оригінальні полотна, які не поступаються творам абстрактного живопису »[22, с. 7].

В.С. Секованов вважає, що знайомство учнів з елементами фрактальної геометрії сприяє розвитку як словесно-логічного типу мислення (при програмуванні і побудові фрактальних множин), так і формуванню і розвитку творчих здібностей людини, так званої художньої, естетичної складові його особистості (при створення композицій з фрактальних множин) [23].

А. Бабкін, розмірковуючи про красу фракталів, пише: «Краса фракталів може відкритися зовсім несподівано. Щоб навчитися розуміти і цінувати красу геометрії Евкліда, необхідні тренування і володіння часом особливим, математичним складом розуму. Щоб навчитися вирішувати завдання, їх треба вирішувати. Щоб побачити красу в кресленні або в рішенні завдання, їх треба

побудувати або вирішити. По-іншому йде справа з фракталами і фрактальної геометрією. Тут практично не потрібно додаткових знань і умінь, щоб відчувати природну естетичну красу фракталів, отримати від цієї краси естетичне задоволення» [7, с. 44]. Він приходить до висновку, що фрактальна геометрія володіє великим естетичним потенціалом і відіграє значну роль у формуванні природничо-наукової картини світу учнів.

На думку В. А. Тестова, познайомити учнів з фракталами варто ще й для того, щоб по-могти проникнути в новий нелінійний світ, досягнути краси хаосу. А розуміння процесу наукового пізнання світу - одна з найважливіших характеристик утвореного і культурного людини [28, с. 7].

Таким чином, фрактальна геометрія володіє великим естетичним потенціалом, який слід використовувати для естетичного розвитку учнів.

О. О. Горшковим був розроблений елективний курс «Математика і гармонія світу» [11], який здатний зробити позитивний вплив на формування естетичних якостей учнів, підвищення інтересу до вивчення предметів математики та інформатики, а також на підвищення рівня математичних знань та рівня розвитку розумової діяльності учнів. У змістовній частині курсу приділяється увага таким естетично привабливими розділами математики, як симетрія, пропорція, золотий перетин, правильні многокутники і багатогранники. Однією із складових частин даного курсу є розділ, присвячений вивчення елементів фрактальної геометрії.

В кінці вивчення основних розділів елективного курсу передбачається виконання групового творчого проекту «Математика і гармонія світу».

Цілі і завдання курсу:

- 1) естетичний розвиток учнів;
- 2) розвиток логічного і образного типів мислень у учнів;

3) формування загальної, математичної та інформаційної культури учнів;

4) виявлення взаємозв'язку математики з різними областями людської діяльності і явищами, що відбуваються в природі;

5) розширення кругозору учнів в області застосування математики;

6) розвиток навичок роботи з сучасними комп'ютерними програмами.

На нашу думку, найбільш доцільно в процесі вивчення даного курсу використовувати інтеграцію знань з математики та інформатики. У сучасній педагогічній науці інтеграція є одним із пріоритетних напрямків. На думку Є. І. Смирнова, «математичний апарат і математичні методи можуть бути використані при вивченні якісно різних фрагментів дійсності ... широке, в принципі необмежене застосування математики свідчить про спільність відповідних областей природи, сприяє розкриттю їх єдності і тим самим вказує нові шляхи інтеграції знання» [25, с. 71]. Інтеграція шкільних предметів між собою, інтеграція їх з мистецтвом дає можливість гармонійно розвиватися учневі, дає йому цілісне уявлення про навколишній світ. Подібне вивчення дозволить учням найбільш повно усвідомити міждисциплінарний зв'язок математики та інформатики, навчитися застосовувати нові можливості комп'ютерної техніки, відчувати естетичну привабливість об'єктів математики.

Даний елективний курс розрахований на 32-34 години, призначений для учнів 9-11 класів та проводиться з використанням сучасних інформаційних технологій. Практична частина курсу будується в ході виконання практичних робіт в програмі Adobe Flash, і ґрунтується на паралельному вивченні основ композиційного по-будови зображень, теорії кольору, колірної гармонії і інструментальних засобів програми. Дана програма об'єднує в собі відразу всі сучасні медіа технології (графіка, звук, текст, відео). За допомогою даного середовища можна малювати і анімувати різні математичні об'єкти

(фрактали), створювати їх композиції. Вона надає учням можливість експериментувати з різними варіантами зображень, синтезувати різноманітні види візуальної інформації.

Завдяки вбудованому в програму мови програмування ActionScript можна інтерактивно керувати створеними об'єктами, змінюючи будь-які їх параметри. Ціла добірка спеціальних функцій служить для математичних обчислень, необхідність в яких нерідко виникає при роботі з графікою. Вбудований контроль синтаксису і зручні засоби налагодження допоможуть знайти помилки в сценарії.

Таким чином, програма Adobe Flash дозволяє розкрити в повній мірі всі інтелектуальні і творчі можливості учнів, розвиває їх уяву, а також розширює їх кругозір в області комп'ютерних технологій.

Кожне практичне завдання курсу передуює лекцією (з використанням презентації) по темі заняття. Наприклад, при вивченні теми «Фрактали і фрактальна геометрія» перед виконанням третьому практичних завдань учням пропонується познайомитися з поняттям «фрактал», «фрактальна геометрія», «фрактальна графіка», історією виникнення та створення фракталів, різними видами фракталів, застосуванням фракталів в різних областях науки, провести порівнянням евклідової і фрактальної геометрії, виявити їх красу в природі і житті. На заняттях з програмування та побудови алгебраїчних фракталів залучаються початкові відомості про комплексній площині і комплексних числах.

Потім учням пропонується виконати кілька практичних вправ по темі в програмі Adobe Flash: побудувати різні фрактальні зображення та їх композиції, зробити побудова фрактала анімованим. При виконанні даних завдань учні можуть використовувати будь-які можливості програми (графічні, анімаційні, використання ActionScript).

Отримавши фрактальне зображення, можна підкреслити його красу різними спецефектами, наданими можливостями програми, перетворити його в ще більш цікаву форму.

Таким чином, можна зробити висновок, що естетичне виховання займає важливе місце в процесі формування особистості учня. Фрактальна геометрія володіє великим естетичним потенціалом, сприяє підвищенню інтересу до вивчення математики та інформатики, а також підвищенню рівня математичних знань учнів.

2.4. Використання фракталів і фрактальної геометрії у позакласній роботі в школі

Для всебічного розгляду теми використання фракталів у позанавчальній роботі в школі варто розглянути такі приклади для різних дисциплін [3]. Першою з них, зважаючи на наш напрямок підготовки, звісно, буде математика.

2.4.1. Приклади застосування фракталів у позакласному навчанні математиці

Як відомо, позакласна робота з математики є нерозривною частиною навчально-виховного процесу, складного процесу впливу на свідомість і поведінку школярів, поглиблення і розширення їх знань, навичок та умінь. З. І. Слєпкань під позакласною роботою з математики розуміє заняття, що проходять у позаурочний час, базуються на принципі добровільної участі, основною метою яких є підвищення рівня математичного розвитку учнів і формування зацікавленості до даного предмета через поглиблення і розширення основного змісту програми з математики [24]. Саме однією із таких можливостей є вивчення учнями елементів теорії фракталів [30]. Розглядаючи дану тему, можна легко реалізувати мету позакласних занять та розв'язати основну задачу учителя – вчасно створити ситуацію успіху, вплинути на формування і розвиток інтересу до математики. Більш того, теорія фракталів – один з найбільш універсальних інструментів для реалізації міжпредметних зв'язків.

Найбільш поширеною та однією з найефективніших і дієвих форм проведення позакласної роботи у школі є математичний гурток – об'єднання учнів під керівництвом вчителя, у межах якого проводяться систематичні за-

няття [24]. У наших дослідженнях була розглянута можливість введення певних відомостей про фрактали в роботі математичного гуртка з математики для учнів 7-9 класів. Так, пов'язуючи запропонований до розгляду матеріал із такими темами як «Цілі та раціональні вирази», «Дійсні числа та квадратні корені», «Функції», «Числові послідовності», можна мотивувати учнів до цікавої та плідної роботи, яка полягає у створенні фрактальних образів. Це стосується зокрема побудови образів алгебраїчних фракталів, а також конструювання геометричних фракталів. Розглянемо такі можливості на прикладах уривків занять математичного гуртка.

Приклад 1. Образи алгебраїчних фракталів

Алгебраїчні фрактали є найбільш поширеною групою фракталів. Один з методів побудови таких фракталів полягає в наступному: необхідно у певну формулу підставити потрібне число і отримати результат; потім підставити в цю ж формулу результат і отримати наступне число; цю процедуру повторюють безліч разів. У математиці така побудова результатів називається ітераційним процесом. Кожен з отриманих результатів, тобто набір чисел, є точками фрактала.

Учням можна запропонувати обчислити точки фрактальної множини, породженої функцією $f(x) = \frac{2x+1}{x}$ (властивостей цієї функції тут узагалі не потрібно використовувати) для значень змінної, наприклад, $x = 1$, $x = -1$, $x = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{3}{4}$ і т.д. (для великої наявної кількості учасників гуртка можна виконати об'єднання в групи по декілька осіб). Так, для значення $x = 1$ отримується така послідовність чисел:

$$3, \frac{7}{3}, \frac{17}{7}, \frac{41}{17}, \frac{99}{41}, \frac{239}{99}, \frac{577}{239}, \frac{1393}{577}, \frac{3363}{1393}, \frac{8119}{3363}, \dots \quad (2.1)$$

Цікавим тут є також той факт, що кожне наступне отримане число в (2.1) є десятковим наближенням ірраціонального числа $\sqrt{2} + 1$.

Іншим прикладом завдання для учнів є побудова у декартовій системі координат точок певного фрактального перетворення, починаючи з наперед заданої точки. Наприклад, необхідно знайти декілька образів перетворення $f : (x; y) \mapsto (x + y; 3x - 2y)$ та відповідно відрізки, які послідовно їх з'єднують. Для точки $(0,1)$ буде отримано такий малюнок (рис. 2.1)

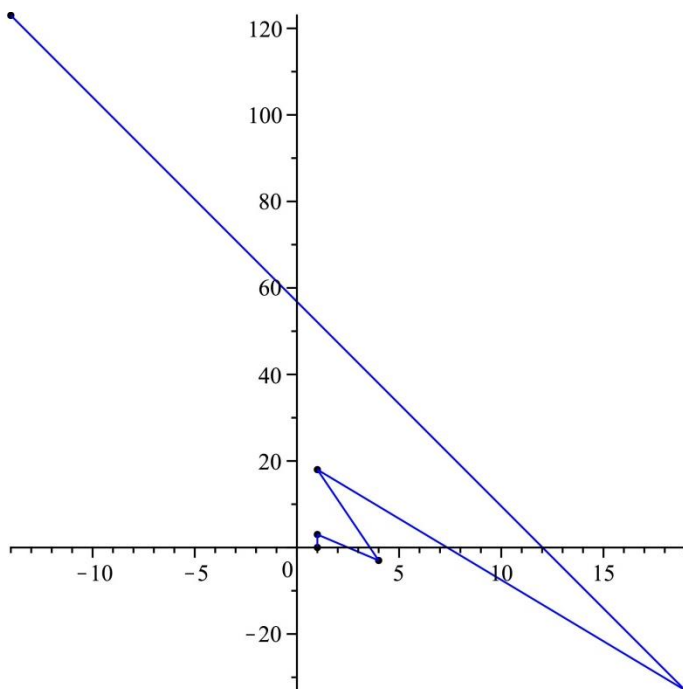


Рисунок 2.1 – Побудова образу алгебраїчного фракталу

Як бачимо, отриманий рисунок 2.1 має самоподібну структуру.

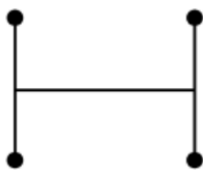
Приклад 2. Геометричні фрактали

Геометричні фрактали є найбільш наочними, оскільки утворюються шляхом геометричних побудов, причому декілька рангів цих побудов можна виконати самостійно (без використання програмних засобів). Найбільш відомими в математичній науці є такі геометричні фрактали як множина Кантора, крива та сніжинка Коха, фрактал Вічека, класичні фрактали Серпинського.

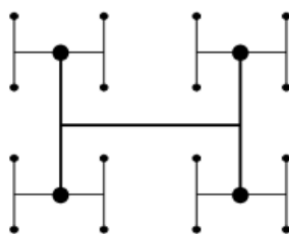
На занятті математичного гуртка можна займатися конструюванням різних геометричних фрактальних множин. Наведемо приклади таких фракталів.

1. «Бруньки»

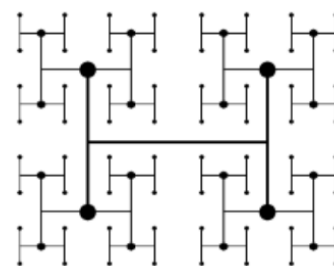
Розглянемо таку фрактальну множину (рис. 2.2)



1-а ітерація



2-га ітерація



3-тя ітерація

Рисунок 2.2 – Приклад побудови геометричного фракталу

«Бруньками» називатимемо точки, з якої виходить лише один відрізок. Для даного фракталу учням можна запропонувати різного типу та складності завдання. Наприклад: 1) знайти кількість «бруньок», утворених на 5-ій ітерації; 2) знайти номер ітерації, де загальна кількість бруньок, побудованих на попередніх ітераціях, дорівнює 84; 3) знайти кількість «горизонталей» (відрізків) на 8-ій ітерації.

Легко помітити, що кількості бруньок, горизонтальних і вертикальних відрізків на k -ій ітерації дорівнюють відповідно 4^k , 4^{k-1} та $2 \cdot 4^{k-1}$. Тоді отримуємо:

- 1) На 5-ій ітерації буде $4^5 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1024$ бруньок.
- 2) Оскільки $4^1 = 4; 4^1 + 4^2 = 20; 4^1 + 4^2 + 4^3 = 84$, то номер шуканої ітерації дорівнює 4 (для учнів 9-го класу тут також можна скористатися однією з формул для геометричної прогресії).
- 3) На 8-ій ітерації маємо $4^{8-1} = 4^7 = 16384$.

Слід зауважити, що обмежуючись учнями лише основної школи (5–9 класи), занадто складних прикладів математичних фракталів дітям давати не можна. Хоча відомості про побудову класичних фракталів, їх найпростіші властивості доцільно вже демонструвати у 7–9 класах.

Віталій Ачкан у [6] стверджує, що в основній та старшій школах для ознайомлення учнів з темою фракталів доцільно проводити факультативні заняття з наступних тем: «Самоподібні множини», «Елементи фрактального аналізу» та «Діаграми Вороного». Наведемо коротку характеристику для заняття з кожної з запропонованих тем.

На занятті з теми «Самоподібні множини», крім означення самоподібної множини, доцільно розглянути приклади самоподібних множин на площині (відрізка, квадрата, рівностороннього трикутника) та способи побудови самоподібних множин складної природи (як то Канторової множини, а також килимів Серпінського (рис. 1.8) квадратної та трикутної форми). Також доцільно навести приклади геометричних фігур, що не самоподібні, проте побудовані з декількох самоподібних складових, наприклад, сніжинки Коха (рис. 1.2).

Складно не погодитися з думкою Школьного О. В., що можна і треба вводити у програму позанавчальних занять з математики у школі розділи мо-

лодої та широко застосовуваної і популярної в науці, техніці і нашому житті фрактальної теорії [33]. Проводячи заняття «Елементи фрактального аналізу», слід згадати помітний ріст цікавості вчених різних сфер і стисло повідомити учням фрактальну історію, роблячи наголос на тому, що дана теорія розвинулася здебільшого через науковий спадок А. С. Безиковича та Ф. Хаусфорда.

Після знайомства учеників з процесом розвитку геометрії фракталів варто розповісти про самоподобу у оточуючому середовищі. Для цього розгляньте гірський масив у різних наближеннях – космос, борт літака та поверхня гірської вершини – весь час можна знаходити все нові деталі викривлень та зламів, хоча до того ці деталі ввижались прямими чи пласкими подробицями рельєфу. Проте при кожному наближенні можна бачити той самий гірський масив. Рельєф, що спостерігається, не залежить від наближення – тобто характеризується самоподібністю. Сутності з подібними властивостями американський математик Бенуа Мандельброт назвав фракталами (від лат. *frangere* – «ламати», «розбивати»).

Тут же варто розповісти учням про криві Піано а також про роль фракталів у сучасному світі. Найбільше застосування вони знаходять у машинній графіці, да з їх допомогою створюють (проводять опис) складних поверхонь та через зміну лише пари коефіцієнтів рівняння добитися майже будь-якої кількості вихідних зображень. Вчені все частіше знаходять інші способи використання цих чудернацьких геометричних фігур у науці. Це відбувається тому, що вони спроможні описати оточуючий світ іноді краще, ніж сама фізика з математикою. Розглянемо декілька прикладів. У комп'ютерних науках за допомогою фракталів стискають дані. Також вони допоможуть зімітувати процес горіння свічі. Через фрактали доволі легко представляти також пористі матеріали, що природно мають складні геометричні форми. Навіть нафтова

промисловість використовує фрактали як і телекомунікаційні технології (для передачі інформації на великі дистанції розробляють антени фрактальних форм, завдяки чому їхня форма і маса може бути зменшена. Вчені-медики використовують фрактали для досліджень біосенсорної взаємодії та ритмів серця. У біології фрактали допомагають моделювати хаотичні процеси (наприклад, описувати моделі популяцій).

Проводячи заняття про «Діаграми Вороного» згадайте, що перші такі діаграми будував ще Рене Декарт (1596-1650 рр.). У «Математичних началах натуральної філософії» у 1644 р. він розподілив космос на зони гравітаційного впливу зірок. Свого часу німецький математик Йоган Лежен Діріхле (1805-1859 рр.) наприкінці життя вивів діаграми для дво- і тривимірних зон. А уже в 1908 році українець Г. Ф. Вороний розробив математичний опис таких діаграм для багатовимірних об'єктів після чого подібні діаграми (рис 2.3) отримали ім'я Вороного.

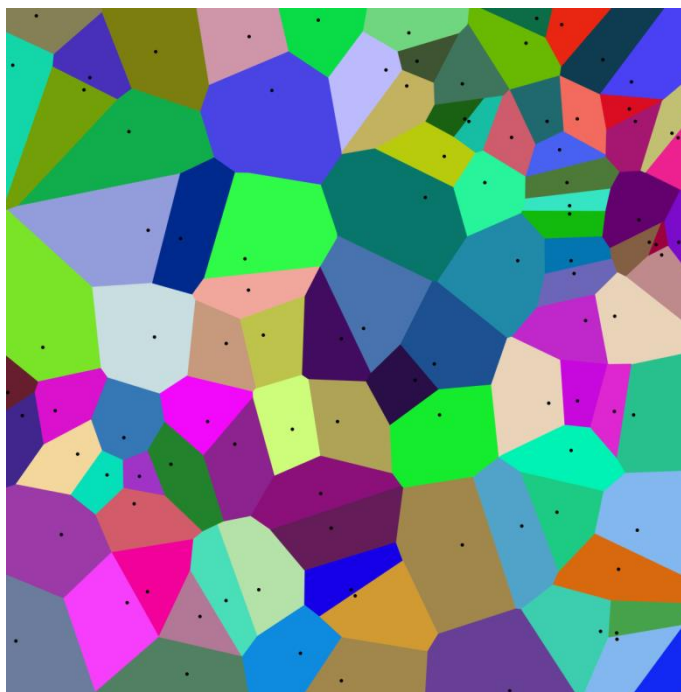


Рисунок 2.3 – Діаграма Вороного

Варто розповісти учням про способи застосування діаграм Вороного. В картографічній науці вони знаходять місце у комп'ютерному моделюванні земної поверхні, створенні карт та поєднанні фотографій з супутника у мозаїку. Антропологи за допомогою діаграм Вороного визначають зони впливу. Археологи наносять на карту області застосування засобів праці жителями стародавніх культур, а також для вивчення зон конкуренції торговельних майданчиків. Астрономи ідентифікують групи зірок і галактик. Біологам ці діаграми потрібні для зображення ареалів заселення тваринами земель та розташування місці залягання важливих ресурсів та для візуалізації процесу перенаселення. Діаграми Вороного допомагають фізіологам аналізувати біологічні тканини, а робототехнікам – планувати маршрути роботів, враховуючи перешкоди на шляху.

Останнім часом фрактали стали популярні у економістів для аналізу курсу фондових бірж, валютних і торговельних ринків. Фрактали з'являються на ринку досить часто.

2.4.2. Приклади застосування фракталів у позакласному навчанні інформатиці

Для передачі даних на відстані використовуються антени, що мають фрактальні форми (рис. 2.4), що сильно зменшує їх розміри і вагу.

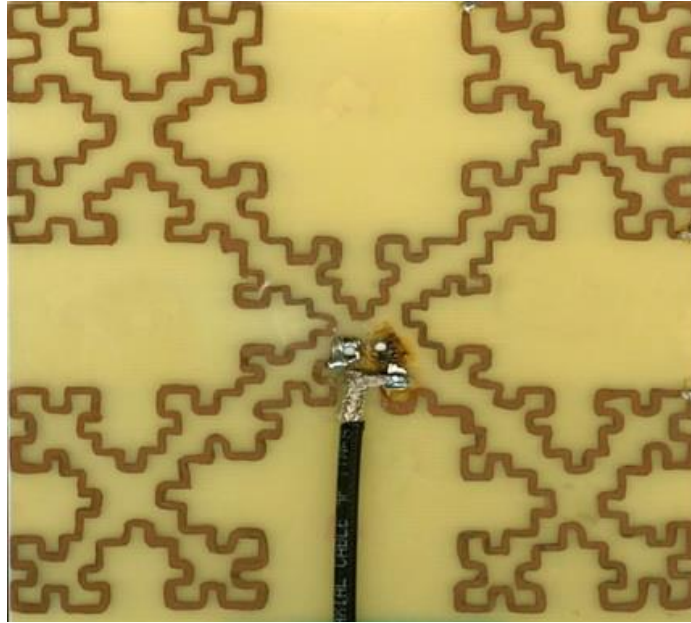


Рисунок 2.4 – Фрактальні антени

Сьогодні в дуже багатьох іграх (мабуть найяскравіший приклад Minecraft), де присутні різного роду природні ландшафти, так чи інакше використовуються фрактальні алгоритми. Створена велика кількість програм для генерації ландшафтів і пейзажів, заснованих на фрактальних алгоритмах [8].

У кіно для створення різних фантастичних пейзажів використовується фрактальний алгоритм [9]. Фрактальна геометрія дозволяє художникам по спецефектам без зайвих складностей створювати такі об'єкти як хмари, дим, полум'я, зоряне небо і т.д. Що вже тоді говорити про фрактальну анімацію, це дійсне приголомшливе видовище.

Інший яскравий приклад застосування фракталів у комп'ютерній техніці – побудова децентралізованих мереж (рис 2.5).

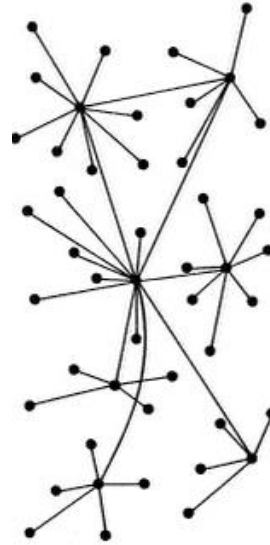


Рисунок 2.5 – Топологія децентралізованої комп'ютерної мережі також може бути схожа на фрактал

Тимчасова, децентралізована або пірінгова (від англ. Peer-to-peer, P2P – рівний до рівного) мережа – це оверлейна комп'ютерна мережа, заснована на рівноправ'ї учасників. У такій мережі відсутні виокремлені сервери, а кожен вузол (peer) є як клієнтом, так і сервером. На відміну від архітектури клієнт-сервера, така організація дозволяє зберігати працездатність мережі при будь-якій кількості і будь-якому поєднанні доступних вузлів. Учасниками мережі є бенкети.

Наприклад, в мережі є 12 машин, при цьому кожна може зв'язатися з кожною. Кожна з цих машин може посилати запити на надання будь-яких ресурсів іншим машинам в межах цієї мережі і, таким чином, виступати в ролі клієнта. Будучи сервером, кожна машина повинна бути здатною обробляти запити від інших машин в мережі, відсилати то, що було запитано. Кожна машина також повинна виконати деякі допоміжні і адміністративні функції (наприклад, зберігати список інших відомих машин- «сусідів» і підтримувати його актуальність).

Будь-який член даної мережі не гарантує свою присутність на постійній основі. Він може з'являтися і зникати в будь-який момент часу. Але при досягненні певного критичного розміру мережі настає такий момент, що в мережі одночасно існує безліч серверів з однаковими функціями.

Одна з областей застосування технології тимчасових мереж – це обмін файлами. Користувачі файлообмінної мережі викладають які-небудь файли в т. н. «розшарений» (англ. Share – ділитися) директорію, вміст якої доступний для завантаження іншим користувачам. Який-небудь інший користувач мережі посилає запит на пошук якого-небудь файлу. Програма шукає у клієнтів мережі файли, відповідні за-проса, і показує результат. Після цього користувач може завантажити файли у знайдених джерел. В сучасних файлообмінних мережах інформація завантажується одразу з кількох джерел. Її цілісність перевіряється по контрольних сумах.

2.4.3. Приклади застосування фракталів у позакласному навчанні географії

Термін «фрактал» навколо тільки в останні 30 років або близько того, але ще до того, як його придумав знаменитий математик Бенуа Мандельброт, існує багато інших випадків де захоплюючі неправильні форми були використані, але ніколи не визнавалися. Льюїс Фрай придумав аналогічні концепції, при вивченні англійського узбережжя і провів безліч вимірювань, необхідних для точного визначення своєї нерівномірності.

Типовий представник стохастичних фракталів – «Плазма». Для її побудови візьмемо прямокутник і для кожного його кута визначимо колір. Далі знаходимо центральну точку прямокутника і розфарбовуємо її в колір рівний середньому арифметичному квітів по кутах прямокутника плюс деяке випадкове число. Чим більше випадкове число – тим більше «рваним» буде малю-

нок. Якщо ми тепер скажемо, що колір точки це висота над рівнем моря – отримаємо замість плазми – гірський масив. Саме на цьому принципі моделюються гори в більшості програм. За допомогою алгоритму, схожого на плазму будується карта висот, до неї застосовуються різні фільтри, накладаємо текстуру і, будь ласка, фотореалістичні гори готові.

Деякі дослідники навіть знаходять присутність фракталів на гербах деяких країн (рис. 2.6).



Рисунок 2.6 – Географічний фрактал

2.4.4. Приклади застосування фракталів у позакласному навчанні літературі

Якщо ви вважаєте, що література – це не місце для фракталів, ви помиляєтеся. Серед літературних творів є такі, які мають текстуальну, структурну



Рисунок 2.7 На гербі України присутня певна самоподібність форм

або фрактальну природу. У літературних фракталах нескінченно повторюються елементи тексту Існують фрактальні вірші:

У попа була собака,
він її любив.

Вона з'їла шматок м'яса,
він її убив.

В землю закопав,
Напис написав:

У попа була собака ...

або:

«Ось будинок.

Який збудував Джек.

А ось пшениця.
 Що в темній комірці храниться
 В будинку,
 Який збудував Джек
 А ось весела птиця-синиця,
 Вона дуже вправно з'їдає пшеницю,
 Що в темній комірці храниться
 В будинку,
 Який збудував Джек ... ».

Або, наприклад, ось цей:

Чотири черв'ячки
 Весняною порою
 Обідали з граком,
 І їх лишилось троє.

Три черв'ячки зустрічали
 Експрес на Бологоє,
 Повзли через дорогу –
 Їх залишилось двоє.

Два черв'ячки гуляли
 Серед надводних прерій,
 Один пішов рибалити,
 Один лишивсь живий.
 Один черв'як не виніс
 Несправедливість в мирі,
 Метнувся під лопату ...

І стало їх чотири.

Чотири черв'ячки ...

У цьому дитячому віршику є всі ознаки фракталу: він нескінченний (або з обмеженою кількістю ітерацій), його куплети подібні і в ньому є параметр, що зменшується – кількість черв'ячків.

2.4.5. Приклади застосування фракталів у позакласному навчанні біології і природничим наукам

«Велику книгу Природи написано мовою геометрії» (Галілео Галілей).

Майже всі природні утворення: крони дерев, хмари, гори, берегові лінії мають фрактальну структуру.

Восьминіг (рис 2.8) – морська придонна тварина із класу головоногих. Фрактальну будову мають його тіло і присоски, які знаходяться на всіх восьми щупальцях цієї тварини.

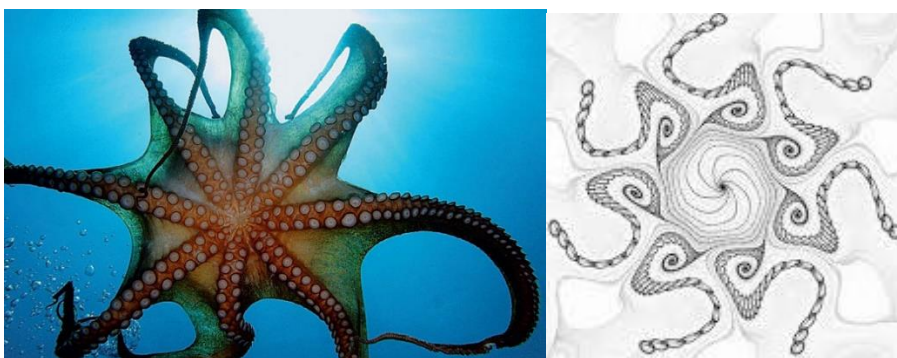


Рисунок 2.8 – Фрактальність восьминога

Ще одні найтипівішим представником фрактального підводного світу є корал (рис. 2.9). У природі відомо понад 3500 різновидів коралів.



Рисунок 2.9 – Кораловий «Фрактал»

Іншим прикладом фракталів є листя вічно зеленої папороті (рис. 2.10). Листя папороті мають форму фрактальної фігури – вони самоподібні.



Рисунок 2.10 – Папороть Барнслі

Цибуля (рис. 2.11) – фрактал, який змушує плакати. Звичайно, фрактал він нехитрий: звичайні кола різного діаметра, можна навіть сказати примітивний фрактал.



Рисунок 2.11 – Цибуля також є фракталом

Яскравим прикладом фрактала в природі є «Романеско» (рис. 2.12), вона ж «романська брокколи» або «кольорова коралова капуста».



Рисунок 2.12 – Романеско – дивовижний природний фрактал

Розглянемо будову цвітної капусти (рис. 2.13). Якщо розрізати одну з квіток, очевидно, що в руках залишається все та ж кольорова капуста, тільки

меншого розміру. Можна продовжувати різати знову і знову, навіть під мікроскопом – проте все, що ми отримаємо – це крихітні копії цвітної капусти.



Рисунок 2.13 – Цвітна капуста – типовий фрактал.

Матрешка – іграшка-сувенір – типовий фрактал (рис 2.14). Принцип фрактальності очевидний, коли всі фігурки дерев'яної іграшки збудовані в ряд, а не вкладені одна в одну.



Рисунок 2.14 – Матрешка також є самоподібною

Багато об'єктів в природі (наприклад, людське тіло) складаються з безлічі фракталів, змішаних один з одним, причому кожен фрактал має свою ро-

змірність відмінну від розмірності інших. Наприклад, двовимірна поверхня людської судинної системи згинається, галузиться, скручується і стискається так, що її фрактальний розмірність дорівнює 3.0. Але якби вона була розділена на окремі частини, фрактальна розмірність артерій була б тільки 2.7, тоді як бронхіальні шляхи в легких (рис. 2.15) мали б фрактальну розмірність 1.07. Отже, фрактали можуть бути скрізь, наприклад: колонія бактерій в живильному середовищі, перисті хмари, розряд блискавки, тріщини в сухій глині, гірські каньйони, розряд в магнітному полі, тріщини на льоду і т. п.

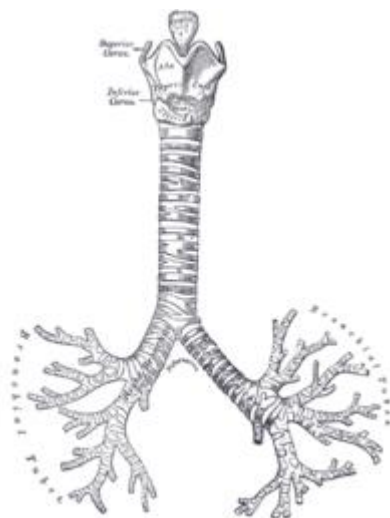


Рисунок 2.15 – Бронхіальні шляхи легких.

В даний час фрактали знаходять також широке застосування в медицині. Сам по собі людський організм складається з безлічі фрактальних структур: кровоносна система, м'язи, бронхи, бронхіальні шляхи в легких, артерії.

Теорія фракталів застосовується для аналізу електрокардіограм. Оцінка величини і ритмів фрактальної розмірності дозволяють на більш ранній стадії і з більшою точністю і інформативністю судити про порушення гомеостазу і розвитку конкретних захворювань серця.

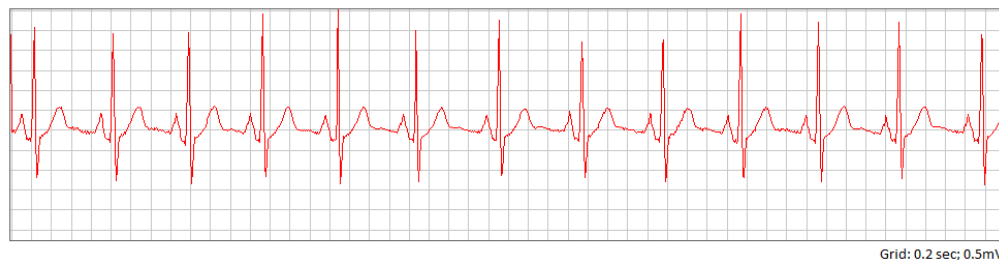


Рисунок 2.16 – Фрактали на ЕКГ

Рентгенівські знімки, оброблені за допомогою фрактальних алгоритмів, дають більш якісну картинку, а відповідно і більш якісну діагностику!

Ще одна область активного застосування фракталів – гастроентерологія. Новий метод дослідження в медицині, електрогастроентерографія – метод дослідження, що дозволяє оцінити біоелектричну активність шлунку, дванадцятипалої кишки та інших відділів шлунково-кишкового тракту.

2.4.6. Приклади застосування фракталів у позакласному навчанні мистецтву

З розвитком сучасної техніки фрактальні форми знайшли застосування в музиці. Деякі музиканти навіть почали вивчати звуковий потенціал фракталів, намагаючись залишити звичайні поля виробництва музики і створюючи музикальні хвилі фрактальної форми через зміну щільності повітря з часом. Мелодичні музикальні мотиви, біти, що запам'ятовуються, і навіть, психоделічні звуки можна виразили і відтворити через певні фрактальні форми, застосування яких в даній сфері тільки-тільки почали вивчати.

Кажуть, що фрактали «висловлюються» на мові природи. Фрактальний принцип розвитку природних і геометричних об'єктів проникає вглиб архіте-

ктури. Архітектори в своїй творчості використовують фрактальність архітектурних форм, зокрема, відомі наступні приклади:



Рисунок 2.17 – Фрактали в архітектурі:

- (1) Херст-тауер (Hearst Tower) – спроектована Норманом Фостером будівля на Манхеттені, поруч з площею Колумба, Нью-Йорк;
- (2) музей Гуггенхайма (арх. Френк Гері) в центрі Більбао (Іспанія) зі скульптурою павука, виконаної Луїзою Буржуа;
- (3) будівля штаб-квартири Fuji TV на Одайба, арх. Кендзо Танге, Японія;
- (4) Спіральний будинок в Рамат-Гані, Ізраїль, арх. Zvi Hecker;
- (5) Острів Кристал, арх. Норман Фостер, Москва;

Фрактальний принцип розвитку природних і геометричних об'єктів проникає вглиб архітектури і як образ зовнішнього рішення об'єкта, і як внутрішній принцип архітектурного формоутворення.

Дизайнери з усього світу почали використовувати в своїх роботах чудові фрактальні структури, тільки недавно описані видатними математиками.

Використання фракталів поставило практично всі напрямки сучасного дизайну на новий рівень.

Привнесення фрактальних структур збільшило в багатьох випадках як візуальну, так і функціональну складові дизайну.

Дизайнер Такесі Міякава в дитинстві мріяв стати математиком. Інакше як пояснити цей предмет меблів: тумбочка Fractal 23 (рис. 2.18) містить 23 ящика самих різних розмірів і пропорцій, які якось примудряються уживатися між собою всередині кубічного корпусу, заповнюючи майже все доступне їм простору.



Рисунок 2.18 – Фрактальні меблі

ВИСНОВКИ

Фрактали – це складна геометрична фігура, що володіє властивістю самоподібності, тобто складена з декількох частин, кожна з яких подібна до всієї фігури цілком.

Це поняття заворожує своєю красою і таємничістю, проявляючись в найнесподіваніших областях: метеорології, філософії, географії, біології, механіці і навіть історії.

Практично неможливо не побачити фрактал в природі, адже майже кожен об'єкт (хмари, гори, берегова лінія і т.д.) має фрактальну будову.

По суті, фрактали відкривають нам очі і дозволяють подивитися на математику з іншого боку.

Робота описує способи використання в математиці поняття «фрактал». Що це таке, які існують види, де поширюються. Розроблено плани занять для використання на уроках геометрії при вивченні теми «Подібність», при позакласній роботі.

Також в роботі описано принципи використання фракталів у позанавчальній освіті у школі в рамках різних дисциплін. Фрактали дають зрозуміти, що математика – це теж наука про прекрасне.

Було з'ясовано, що фрактали можна використовувати, наприклад, в шкільних гуртках щодо застосування ідей комп'ютерної фрактальної графіки при створенні нових форм художньої творчості в дизайні одягу і в інших актуальних для молоді напрямках. Використання фракталів у позашкільному навчанні різним дисциплінам, дозволяє вирішувати питання організації зайнятості підлітків, їх успішної соціалізації і допоможе усвідомити їм необхідність в суспільстві.

Можемо вважати цілі роботи досягнутими

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Eglash R. African Fractals: modern computing and indigenous design. Rutgers University Press, 1999. 258 p.
2. Mandelbrot, Benoît How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension // Science. New Series. Vol. 156. No. 3775 (May 5, 1967), pp. 636-638.
3. Абдуліна Л. Б., Маджуга А. Г., Сініцина І. А. Фрактальна педагогіка: теорія, методологія і практика: монографія / під навч. ред. Є. В. Головної. – К.: Університетська книга, 2016. – 320 с.
4. Аблаєв Є. В., Мамалига Р. Ф. Пропедевтика формування поняття фракталу у учнів шкіл // Освіта і наука №9 (88), 2017. С. 123–133.
5. Атфак М. ФрактаЛ-ОГО! Дидактична казка. Тернопіль: Галич-Юр-Видат, 2019. 64 с.
6. Ачкан В. В. Використання творчої спадщини вітчизняних математиків у позашкільній роботі в старшій школі // Педагогічні науки: реалії і перспективи. Бердянськ: Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. №45, 2018. С. 7-11.
7. Бабкін А. А. Вивчення елементів фрактальної геометрії як засіб інтеграції знань з математики та інформатики в навчальному процесі педколеджу: Дис. ... канд. пед. наук. – Вінниця, 2017. – 202 с.
8. Бондаренко В. А., Дольников В.Л. Фрактальне стиснення зображень за Барнслі-Слоаном. // Автоматика і телемеханіка. – 1994. – N5. – с.12-20.
9. Ватолін Д. Застосування фракталів в машинній графіці. // Computer World-Україна. – 2015. – N15. – с.11.

10. Вольфсон Е. Н., Невзоров Б. П., Фадеев Ю. А. Прояв фрактальних властивостей в соціальних процесах // Вісник Кемеровського державного університету. 2015. № 2-5 (62). С. 138-142.

11. Горшков О. О. Вивчення елементів фрактальної геометрії як засіб естетичного виховання учнів // Педагогіка і психологія. К.: Вісник КГУ ім. М. О. Некрасова. №1, 2018. С. 181-185.

12. Жуков Д. С., Лямін С. К. Варіанти використання методів фрактальної геометрії в соціальних і політичних дослідженнях // Ineternum. 2018. №2 (3). С. 17-35.

13. Кронін Г. В. Побудова фракталів // Навчальна майстерня. Комп'ютерні інструменти в освіті. № 5, 2017. С 73-80

14. Маклюен Г. М. Розуміння медіа: зовнішні розширення людини. К.: Кучкове поле, 2017. 463 с.

15. Мамалига Р. Ф. Розвиток просторового мислення у студентів педагогічного вузу при формуванні понять в курсі геометрії: автореф. дис. ... канд. пед. наук. Львів, 2015. 23 с.

16. Мандельброт Б. Фрактальна геометрія природи. – К.: Інститут комп'ютерних досліджень, 2002. – 656 с.

17. Ми вчимо математиці: зб. планів позашкільних занять кафедри математики / Київська гімназія №2: Київ, 2015. 46 с., С. 20-29.

18. Миколаєва Є. В. До типології фракталів в теорії культури // Вісник Адигейського державного університету. 2017. № 1 (113).

19. Нікуліна Н. І. Використання комп'ютерної середовища Лого для пропедевтичної підготовки по геометрії школярів 5-6 класів: ав-тореф. дис. ... канд. пед. наук. Ярославль, 2016.,

20. Осташків В. Н., Смирнов Є. І. Формування нелінійного мислення студентів за допомогою візуалізації самоподібних множин // Тр. друге колмогорівських читань. Ярославль: Вид-во ЯГПУ, 2018. С. 173-189.

21. Підходова Н. С. Формування просторових уявлень молодших школярів при вивченні геометричного матеріалу: автореф. дис. ... канд. пед. наук. К., 1992. 20 с.

22. Розов Н. Х. Курс математики загальноосвітньої школи: сьогодні і післязавтра // Завдання в навчанні математики: теорія, досвід, інновації: Матеріали Всеукр. наук.-практ. конф., присв. 115-річчя чл.-кор. АПН СРСР П.А. Ларичева. – Вінниця: Країна, 2017. – С. 6-12.

23. Секованов В. С. Методична система формування креативності студента університету в процесі навчання фрактальної геометрії. – К.: КДУ ім. М. О. Некрасова, 2015. – 279 с.

24. Слепкань З. І. Методика навчання математики Підручник. / З.І. Слепкань. – 2-ге вид., доп. і переробл. – К.: Вища школа, 2006. – 582 с.

25. Смирнов Є. І. Єдина математика в задачах як елемент інтеграції математичних знань // Завдання в навчанні математики: теорія, досвід, інновації. М-ли Всеукр. наук.-практ. конф., присв. 115-річчя чл.-кор. АПН СРСР П.А. Ларичева. – Вінниця: Країна, 2017. – С. 68-77.

26. Соколов А. В. Застосування фрактальної методології в гуманітарних науках // Час науки №3, 2016. С. 12–18.

27. Тарасенко В. В. Фрактальна логіка. М. : Прогрес-Традиція, 2002. 160 с.

28. Тестов В. А. Про проблеми змісту сучасної математичної освіти // Сучасна математика і математична освіта в вузах і школах України: досвід, тенденції, проблеми. Межвуз. зб. наук.-метод. робіт. – Вінниця: Країна, 2016. – С. 5-8.

29. Тішин А. І., Егембердієв Т.М. Фрактальность людини // Синергетика в школі [Електронний ресурс], 2016. URL: http://sins.хаос.ru/articles/articles_r017.html (дата звернення - 19.10.2020).

30. Турбин А. Ф. Фрактальные множества, функции, распределения: монография / А.Ф. Турбин, Н.В. Працевитый. – К.: Наукова думка, 1992. – 205 с.

31. Федер Є. Фрактали. Пер. з англ. – К.: Мир, 2019. – 254с.

32. Фракталы и хаос в биологическом морфогенезе. / В.В. Исаева, Ю.А. Каретин, А.В. Чернышев, Д.Ю. Шкуратов. Владивосток: Институт биологии моря ДВО РАН, 2004. 128 с.

33. Шкільний О. І. Вивчення елементів теорії фракталів у школі / О. І. Шкільний // Математика в школі – 2015 – №27 – С.42-48.

34. Шляхтина С. Огляд застосунків для генерації зображень на базі фракталів і атракторів. Комп'ютер прес: веб-сайт. URL: <https://compress.ru/article.aspx?id=21776> (дата звернення: 22.11.2020).

ДОДАТКИ

Додаток А. Опис семінару «Фрактали і теорія хаосу» для проведення на математичних гуртках та у позанавчальний час.

Не дивлячись на труднощі сприйняття теми, намагайтеся в простій формі донести до учеників всю красу і незвичність фракталів. Цей семінар-гру можна провести в рамках математичного фестивалю в номінації: «Урок після уроку».

Цілі:

Освітні:

- розповісти про історію створення теорії хаосу, про фрактали і атрактори;
- познайомити з діяльністю вчених, які займалися теорією хаосу;
- показати малюнки фракталів;
- показати можливості використання комп'ютерних технологій.

Розвиваючі та виховні:

- сприяти формуванню у учнів пізнавального інтересу до математики: відкриваючи нове в математиці, показуючи, що математика не така вже й нудна наука, зацікавлюючи учнів нестандартної подачею матеріалу.

В ході семінару розвиваються такі якості особистості, як:

- спостережливість,
- кмітливість,
- уважність,
- терплячість.

Розвиваються *вміння*:

- слухати і чути,
- зосереджуватися і осмислювати,

- аналізувати великий потік інформації.

Устаткування:

- програма презентації в режимі Microsoft PowerPoint;
- картки завдань для учнів;
- творчі роботи учнів.

План проведення:

- Організаційний момент.
- Презентація фільму «Теорія Хаосу».
- Вікторини, питання по темі, голосування учасників семінару.

Хід заходу

Частина I. Введення.

Слово «хаос» наводить на думки про щось непередбачуваному. Насправді хаос доста-точно впорядкований і підпорядковується певним законам. Мета вивчення хаосу і фракталів – передбачити закономірності, які, на перший погляд, можуть здаватися непередбачуваними і абсолютно хаотичними. «Чи знаєте ви, що насправді ми зовсім не тривимірні істоти? Що ми не обмежені в часі і просторі? Що час – це лише ілюзія? Що оточуюча нас реальність – зовсім не те, чим вона здається. Чи цікавилися ви хоча б один раз питанням про те, що являє собою «реальний світ»? Реальний світ, або вірніше, те, що ми під цим розуміємо, живі істоти і об'єкти, які ми можемо реально сприймати. Нас оточують матеріальні об'єкти, люди, тварини, рослини, мінерали і створений-ні людиною предмети. Ми вважаємо об'єкт реальним, якщо можемо не тільки побачити його, а й помацати, якщо його параметри можна виміряти за допомогою різних приладів і якщо його властивості підкоряються загальним фізичним законам. Реально і об'єктивно те, що існує незалежно від нас, а суб'єктивно або вигадано те, що існує лише у вигляді

якоїсь ідеї в нашій свідомості. Саме такою постає картина світу для більшості сучасних людей.

Візьмемо як приклад зір. Сьогодні ми знаємо, що видимий нами світ - це електромагнітні коливання різної частоти. Ми ці хвилі не бачимо, але знаємо, що вони існують. Відбитий від об'єкта або випромінюється світло – це єдині коливання, які ми сприймаємо. Решта органи чуття також доносять до нас лише частина відомостей про навколишній. Отже, виникає в нашому мозку картина об'єкта не передає його справжнього, повного образу. У нас створюється внутрішній образ, який ми вважаємо правильним, але ми помиляємося. Цей образ існує не в нашому мозку, ми просто-напросто вигадуємо той світ, який знаходиться зовні! Багатовимірний простір з чотирма, п'ятьма або тридцятьма вимірами – абсолютно нормальне явище для математики, але не для нашої свідомості! Точно так же багатовимірні світи доступні комп'ютера. У ХХІ столітті вдалося створити на екрані комп'ютера фантастично незвичайні і зачаровують картини, які часто являють собою як би дробиться до нескінченності зображення.

Наукова думка змінилася, коли Ньютон виявив, що одні й ті ж закони пояснюють як падіння яблука, так і обертання Місяця навколо Землі. З тих самих пір, як він відкрив і сформулював закони, які керують рухом нашого Всесвіту, вчені припустили, що Всесвіт працює як годинник. Деякі вчені думали, що вони б з часом знайшли простий математичний спосіб опису всього, що відбувається у Всесвіті. Сказав же Лаплас: дайте мені початкові умови для всього Всесвіту, і я обчислив її майбутнє, але він помилявся.

Минуло ще три чверті століття, перш ніж почалася епоха вивчення хаосу. Пошуками проявів порядку в хаосі займається порівняно молода наука - теорія хаосу. Вона виникла не миттєво і не має одного автора. Її основи були

закладені в роботах Пуанкаре, Колмогорова, Ландау, Мандельброта і інших талановитих вчених.

Частина 2. Атрактор Лоренца. Створення фракталів.

Згодом вчені виявили свідчення "хаосу" в астрономії, медицині, турбулентності, на фондовій біржі, і навіть ... в прогнозі погоди. Як передбачити погоду? Хоча б приблизно? Хоча б на якій-небудь обмеженій ділянці, але на більш-менш пристойний термін?

У 1960 році Едвард Лоренц, метеоролог, створив міні-модель погоди. За допомогою примітивного комп'ютера він буквально розібрав погоду по цеглинці. Взимку 1961 року приставні-пив до побудови графіка не з початкової точки, а з середини. В якості вихідних даних вчених-ний ввів цифри з попередніх експериментів. Через годину він побачив щось несподіване, давши-шиї початок новій науці. В рамках загальної моделі щоразу виявлялися відхилення - свого роду упорядкований безлад. Крива діаграми була вигнута у вигляді вісімки - багатовимірної форми типу метелика. Жодна точка діаграми ніколи не перетинається з іншою точкою і ніколи в точності не повторюється, утворюючи лише нові петлі.

Подвійна спіраль показує все різноманіття хаосу. Це магічне зображення, що нагадує крила метелика, стало символом перших дослідників хаосу. Воно було основою для «фантастичної думки, що ... сьогоднішнє тріпотіння крил метелика в Пекіні через місяць може викликати ураган в Нью-Йорку ...». У 1972 році з'явилася робота Лоренца: «Передбачуваність: чи може помах крил метелика в Бразилії викликати торнадо в Техасі?». Так народився знаменитий термін «ефект метелика» – «аттрактор Лоренца».

У другій половині ХХ століття виникли теоретичні передумови для розвитку такого математичного напрямку як теорія хаосу. Вченню, з самого початку його виникнення, довелося захищати свій статус, згідно з яким предме-

том теорії хаосу є не безлад, а порядок. Для багатьох вчених, вивчення хаосу і фракталів не просто нова область по-знання, яка об'єднує математику, теоретичну фізику, мистецтво і комп'ютерні технології – це революція. Це відкриття нового типу геометрії, тієї геометрії, яка описує світ навколо нас і яку можна побачити не тільки в підручниках, а й в природі і всюди в безмежному всесвіті. Більшість астрономів визнають, що локально Всесвіт має фрактальну структуру: планетарні системи об'єднані в галактики, галактики в кластер ... і так далі. Їх робота може привести до перегляду практично всіх існуючих моделей Всесвіту.

В Австрійській національній бібліотеці зберігається знаменита книжкова мініатюра XIII століття «Бог-геометр», на якій зображений фрактал. Фрактали – найкрасивіші, чарівні, цінні та дивні породження геометрії XX століття. Це дітища математики, але вони настільки Естетично, що виставка фракталів, побудованих за допомогою комп'ютера, потрясла світ, а книга - організаторів виставки "Краса фракталів" розкупувалися як художній альбом.

Фрактали – геометричні. Це геометрія реального світу – гіллястого, пористого, шершавого, зазубреного, поїденого. Основна властивість фракталів – самоподоба. У простішому випадку частина фрактала є просто зменшений цілий фрактал. Звідси головний рецепт побудови фракталів: візьми простий мотив і повторюй його, постійно зменшуючи розміри. Зрештою, вийде структура, яка відтворює цей мотив у всіх масштабах, - нескінченна сходи вглиб.

Частина 3. Фрактали Мандельброта.

Існує велике число математичних об'єктів, званих фракталами: губка і трикутник Серпінського, крива або помах Дракона, безліч Жуліа, безліч Мандельброта і багато інших. Вперше фрактальну природу нашого світу помітив математик Бенуа Мандельброт: «Чому геометрію часто називають холо-

дною і сухою? Одна з причин полягає в її не здатність описати форму хмари, гори, дерева або берега моря. Хмари – це не сфери, гори – не конуси, лінії берега – це не кола, і кора не є гладкою, і блискавка не поширюється по прямій. Природа демонструє нам не просто вищий ступінь, а зовсім інший рівень складності». Згідно Мандельброту, слово фрактал походить від латинських слів «fractus» – дробовий і «frangere» – ламати, що відображає суть фрактала. Фрактали математика Бенуа Мандельброта, найвідоміший з яких називається «яблучний чоловічок», виконали тріумфальну ходу по світу. Ці фрактали створені на основі простих математичних формул. Особливість їх полягає в тому, що при збільшенні якоїсь однієї області, що цікавить вас, готового фрактала в збільшеною деталі повторюється загальна структура всього об'єкта, тобто в маленькому фрагменті «яблучного чоловічка» знову видно «яблучний чоловічок». Це може повторюватися до нескінченності, ніби ми занурюємося в світ всередині не-якого світу, який, в свою чергу, знаходиться всередині іншого світу ... Це дуже модний, знаменитий фрактал Мандельброта. Це прибулець зі світу високих швидкостей. Бенуа Мандельброт відкрив цей орнамент в 50-і роки ХХ століття за допомогою комп'ютера, на ньому багато різних і красивих завитків. Якщо подивитися на якусь завитки в мікроскоп, можна побачити всередині ще завитки; і ще, і ще, і так до нескінченності. Ця картинка нескінченно складна. Притому ті візерунки, що всередині, схожі на візерунки, що на «вищому» рівні, але не збігаються з ними. При нескінченному польоті вглиб фрактала ми будемо зустрічати нескінченне різмаїття все нових і нових форм і кольорів. На рівному місці з'являється новий всесвіт.

Як тільки Мандельброт відкрив поняття фрактала, виявилось, що ми буквально оточені ними. Фрактальна злитки металу і гірські породи, фрактальної розташування гілок, візерунки листя, капілярна система рослин; крово-

носна, нервова, лімфатична системи в організмах тварин, фрактальної річкові басейни, поверхня хмар, лінії морських по-бережжю, гірський рельєф ... Сьогодні Мандельброт і інші вчені намагаються розширити область фрактальної геометрії так, щоб вона могла бути застосована практично до всього в світі, від передбачення цін на ринку цінних паперів до скоєння нових відкриттів в теоретичній фізиці. Фрактали знаходять все більше застосування в науці. Вони описують реальний світ навіть краще, ніж традиційна фізика або математика.

Частина 4. Комп'ютери та кіно.

Найбільш корисним використанням фракталів в комп'ютерній науці є фрактальне стиснення даних. Картинки стискаються набагато краще, ніж це робиться звичайними методами (такими як jpeg або gif). Інша перевага фрактального стиснення в тому, що при збільшенні картини, не спостерігається ефекту пікселізації (збільшення розмірів точок до розмірів, які деформують зображення). При фрактальному ж стисненні, після збільшення, картинка часто виглядає навіть краще, ніж до нього. Сучасні комп'ютерні ігри та індустрія кіно для побудови реалістичних елементів ландшафту (хмари, скелі і тіні) широко використовують технологію фрактальної графіки. Для передачі даних на відстані використовуються антени, що мають фрактальні форми, що сильно зменшує їх розміри і вагу.

Частина 5. Медицина.

Як вважають багато дослідників, хаотична динаміка є характерною для поведінки багатьох систем живих організмів. Хаотичний характер биття серця дозволяє йому гнучко реагувати на зміну фізичних і емоційних навантажень, підлаштовуючись під них. Відомо, що регуляризація серцевого ритму призводить через деякий час до летального результату, тому що регулярність свідчить про зменшення опірності організму випадковим впливом зовніш-

нього середовища. У людському мозку одночасно присутній впорядковане і хаотичне початку. Перше відповідає лівій півкулі мозку, а друге – правому. Ліва півкуля відповідає за свідоме поведінка, за вироблення лінійних правил і стратегій в поведінці людини, де чітко визначається «якщо ..., то ...». У правій же півкулі буває нелінійність і хаотичність. Інтуїція – один з проявів правої півкулі мозку.

Частина 6. Фізика.

Броунівський рух – це випадковий і хаотичний рух частинок пилу, зв'язаних в воді. Так, Мандельброт передбачив зміна цін на шерсть, використовуючи закони броунівського руху. Механіка рідин і газів. Вивчення турбулентності в потоках дуже добре підлаштовується під фрактали. Турбулентні потоки хаотичні. Дим, спочатку підіймаючийся у вигляді упорядкованого стовп, під впливом зовнішнього середовища приймає все більш причудливі обриси, а його рухи стають хаотичними.

Частина 7. Музика. Висновок.

Що таке музика? Це щось середнє між абсолютно безладним шумом і абсолютно впорядкованої монотонної нотою. Наприклад, програма для відтворення музики на комп'ютері використовує різноманітні фрактальні картини. Що таке хаос? ... Ну, по-перше, ЦЕ казково красиво. "Ну і що? – скажете Ви. – Для практики естетична «користь» не має ніякого значення ». І, частково, Ви маєте рацію. Але краса фракталів і хаосу має набагато глибший сенс. Слово «хаос» наводить на думки про щось непередбачуваному, але насправді хаос досить впорядкований і підпорядковується певним законам.

Мета вивчення хаосу і фракталів – передбачити закономірності, які, на перший погляд, можуть здаватися непередбачуваними і абсолютно хаотичними. Якщо ми визначимо хаос як безлад, то в такому безладді ми

обов'язково зможемо побачити свою, особливу форму порядку. Так що, врешті-решт, може бути, весь світ навколо нас фрактальний! [17]

Ще Кузьма Прутков казав: «Багато речей нам незрозумілі не тому, що наші поняття слабкі, а тому, що ці речі не входять в коло наших понять».