

Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики

**Змієнко Михайло Юрійович**

**ДЕЯКІ КЛАСИ ТОПОЛОГІЧНИХ ПРОСТОРІВ**

Спеціальність: 014.04 Середня освіта (Математика)

Галузь знань: 01 Освіта

Кваліфікаційна робота

на здобуття освітнього ступеню магістра

Науковий керівник

\_\_\_\_\_ В.Д. Погребний,

кандидат фізико-математичних наук,

доцент кафедри математики

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2020 року

Виконавець

\_\_\_\_\_ М.Ю. Змієнко

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2020 року

Суми 2020

**ЗМІСТ**

<b>ВСТУП</b> .....	<b>3</b>
<b>РОЗДІЛ 1 МЕТРИЧНІ ТОПОЛОГІЧНІ ПРОСТОРИ</b> .....	<b>5</b>
1.1. Метричні простори.....	5
1.2. Метрична топологія .....	8
1.3. Аксиоми відокремлюваності .....	15
<b>РОЗДІЛ 2 ТОПОЛОГІЯ D-МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРІВ</b> .....	<b>20</b>
2.1. D-метричні простори.....	20
2.2. Топологія D-метричних просторів. ....	32
<b>РОЗДІЛ 3 УПОРЯДКОВАНІ ТОПОЛОГІЧНІ ЛІНІЙНІ ПРОСТОРИ</b> .....	<b>48</b>
3.1. Відношення порядку. Конуси.....	48
3.2. Топологія лінійних і циклічних порядків .....	55
3.3. Впорядковані топологічні простори.....	59
<b>ВИСНОВКИ</b> .....	<b>67</b>
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ</b> .....	<b>68</b>

## ВСТУП

**Актуальність роботи.** Топологія зародилася наприкінці XIII – початку XIX століття як складова частина геометрії. Проте дуже швидко виросла в самостійний розділ математики. У період з 1925-1975 рр. топологія була однією з основних предметів дослідження математиків з усього світу. Це пояснюється її великим значенням та можливістю досліджувати різні об'єкти без повного осягнення їх властивостей.

У роботі розглянута загальна топологія, а саме топологічні простори, які посідають важливе місце в сучасній математиці. Поняття топологічного простору можна розглядати як узагальнення поняття геометричної фігури в якому нам не важливі властивості типу розміру та точного положення фігури в просторі. Топологічні простори застосовуються майже в кожному розділі математики. Метричні топологічні простори відіграють важливу роль в розумінні топології і є основним предметом для досліджень. Тому тема кваліфікаційної роботи є актуальною.

**Об'єкт дослідження.** Загальна топологія.

**Предмет дослідження.** Топологічні простори.

**Мета дослідження:** теоретично дослідити та описати властивості деяких видів топологічних просторів.

Відповідно до мети були поставлені такі **завдання дослідження:**

- 1) аналіз наукової літератури;
- 2) дослідити метричні топологічні простори;
- 3) дослідити упорядковані топологічні простори.

**Методи дослідження.** Для виконання поставлених завдань використано теоретичні методи – аналіз, синтез, класифікація, систематизація, узагальнення, які дозволяють опрацювати наукові джерела.

**Елементи наукової новизни одержаних результатів.** Узагальнено теоретичні відомості про деякі класи топологічних просторів.

**Практичне значення одержаних результатів.** Результати роботи можуть бути використанні під час вивчення теоретичного курсу загальної топології.

**Апробація результатів.** Основні положення та результати дослідження були представлені для обговорення на засіданнях кафедри математики.

**Публікації.** Основні результати дослідження опубліковані в матеріалах результатів наукових досліджень молодих науковців «Студентська звітна конференція» [4] та матеріалах III Міжнародної дистанційної науково-методичної конференції «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ\*плюс – 2020» (квітень - травень 2020 р., м. Суми) [6].

Кваліфікаційна робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел.

У вступі обґрунтовано вибір теми дослідження, актуальність, визначено об'єкт, предмет, мету та завдання.

У першому розділі «Метричні топологічні простори» були розглянуті та побудовані топології на метричних просторах.

У другому розділі «Топологія  $D$ -метричних просторів» була введена топологія побудована на  $D$ -метричному просторі.

У третьому розділі «Упорядковані топологічні простори» були розглянуті та побудовані топології на упорядкованих просторах.

# РОЗДІЛ 1

## МЕТРИЧНІ ТОПОЛОГІЧНІ ПРОСТОРИ

### 1.1. Метричні простори

#### 1.1.1 Означення метрики. Функція:

$$\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

називається метрикою(або відстанню) у множині  $X$ , якщо:

$$\begin{aligned} 1) \rho(x, y) &= 0 \Leftrightarrow x = y \\ 2) \rho(x, y) &= \rho(y, x) \quad \forall x, y \in X \\ 3) \rho(x, y) &\leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \quad \forall x, y, z \in X \end{aligned} \tag{1.1}$$

*Означення 1.1.* Пара  $(X, \rho)$ , де  $\rho$  – метрика в  $X$ , називається *метричним простором*.

#### Означення 1.2. Функція

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+: (x, y) \mapsto \left( \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

називається евклідовою метрикою.[19]

**1.1.2. Куля та сфера.** Нехай  $(X, \rho)$  – метричний простір,  $a$  – точка простору,  $r$  – додатне дійсне число.

#### Означення 1.3. Множина

$$B_r(a) = \{x \in X | \rho(a, x) < r\} \quad (1.2)$$

називається відкритою кулею з центром в точці  $a$ , та радіусом  $r$ .

*Означення 1.4.* Множина

$$D_r(a) = \{x \in X | \rho(a, x) \leq r\} \quad (1.3)$$

називається замкнутою кулею з центром в точці  $a$ , та радіусом  $r$ .

*Означення 1.5.* Множина

$$S_r(a) = \{x \in X | \rho(a, x) = r\} \quad (1.4)$$

називається сферою з центром в точці  $a$ , та радіусом  $r$  [21].

**1.1.3. Підпростори метричного простору.** Якщо  $(X, \rho)$  – метричний простір, та  $A \subset X$ , то звуження метрики  $\rho$  на  $A \times A$  є метрикою в  $A$  і  $(A, \rho|_{A \times A})$  – метричний простір.

*Означення 1.6.* Простір  $(A, \rho|_{A \times A})$  називають підпростором  $(X, \rho)$ . Замкнута куля  $D_1(0)$  та сфера  $S_1(0)$  простору  $\mathbb{R}^n$  позначають

*Означення 1.7.* Замкнуту кулю  $D_1(0)$  простору  $\mathbb{R}^n$  позначають  $D^n$  і називають  $n$ -мірною кулею.  $D^n$  – є підпростором простору  $\mathbb{R}^n$ .

*Означення 1.8.* Замкнуту кулю  $S_1(0)$  простору  $\mathbb{R}^n$  позначають  $S^{n-1}$  і називають  $(n-1)$ -мірною сферою.  $S^{n-1}$  – є підпростором простору  $\mathbb{R}^n$  [1].

### **Теорема 1.1.**

Для будь яких точок  $x, a$  довільного метричного простору, та для довільного  $r > \rho(x, a)$  виконується:

$$1) B_{r-\rho(x,a)}(x) \subset B_r(a),$$

$$2) D_{r-\rho(x,a)}(x) \subset D_r(a)$$

► Візьмемо довільну точку  $y$ . Нехай  $y \in B_{r-\rho(x,a)}(x)$ , тоді  $\rho(x,y) < r - \rho(x,a)$ . В силу формули (1.1) маємо, що  $\rho(y,a) < r$ . Остання рівність рівносильна  $y \in B_r(a)$ . Що, і треба було довести. Аналогічно, виконується друга частина теореми ◀[2].

### 1.1.3. Обмежені множини

*Означення 1.9.* Підмножина  $A$  метричного простору  $(X, \rho)$  називається обмеженим, якщо існує таке число  $d > 0$ , що  $\rho(x,y) < d, \forall x, y$ . Нижня границя  $d$  називається діаметром множини  $A$  і позначається  $diam A$ .

#### Теорема 1.2.

Якщо множина  $A$  – обмежена, тоді і тільки тоді  $A \subset D_d(a)$  [3].

► *Необхідність.* Нехай  $d = diam A, a \in A$ . Оскільки, за формулою (1.3),  $\rho(a,x) \leq r$  і за означенням 1.1.8.  $\rho(x,y) < d$ , то  $A \subset D_d(a)$ .

*Достатність.* Нехай  $R > r$  та  $D_R(b) \subset D_R(a)$ . Візьмемо довільно  $c$ . За формулою (1.1) отримаємо, що  $R \leq 2r$ . Отже,  $diam D_d(a) \leq 2d$ . ◀

**1.1.4. Нормовані простори.** Нехай  $X$  – векторний простір над полем дійсних чисел.

*Означення 1.10.* Функція  $X \rightarrow \mathbb{R}_+ : x \mapsto \|x\|$  називається нормою, якщо

$$1) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$2) \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in X,$$

$$3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \forall x, y \in X.$$

## 1.2. Метрична топологія

**1.2.1. Топологічний простір.** Нехай  $X$  – деяка множина. Розглянемо  $\Omega$  – деякий набір підмножин множини  $X$ , для якого виконується:

- A.1) об'єднання будь-якого сімейства множин, які належать сукупності  $\Omega$ , також належить сукупності  $\Omega$ ;
- A.2) перетин будь-якого скінченного сімейства множини, які належать сукупності  $\Omega$ , також належать сукупності  $\Omega$ ;
- A.3) порожня множина  $\emptyset$  і множина  $X$  належать  $\Omega$ .

Ці умови є аксіомами топологічної структури.

*Означення 1.11.*  $\Omega$  – називається топологічною структурою, або просто топологією в множині  $X$ . Пара  $(X, \Omega)$  називається топологічним простором. Елементи множини  $X$  називаються точками топологічного простору  $(X, \Omega)$ . Елементи множини  $\Omega$  називається відкритими множинами простору  $(X, \Omega)$ .

*Означення 1.12.* Дискретний простір – множина, в якій виділена сукупність є множина всіх її підмножин [1].

### Теорема 1.3.

Дискретний простір є топологічним простором.

► Слід перевірити 3 аксіоми. Нехай  $X$  – дискретний простір.

$$A.1) \text{ Якщо } A_n \subset X, \forall n, \text{ тоді } \cup_n A_n \subset X;$$

$$A.2) \text{ Якщо } A_n \subset X, \forall n, \text{ тоді } \cap_n A_n \subset X;$$

$$A.3) \emptyset \subset X, X \subset X \blacktriangleleft$$

*Означення 1.13.* Антидискретний простір – множина яка містить лише 2 елементи -  $\emptyset$  та  $X$ .

**Теорема 1.4.**

Антидискретний простір є топологічним простором.

► Аксиома А.3. виконується з означення антидискретного простору.

Якщо серед множин які входять до об'єднання  $\in X$ , то і все об'єднання дорівнює  $X$  і  $\in$  підмножиною  $X$ . Якщо  $\in$  тільки  $\emptyset$ , то і об'єднання  $\in \emptyset$ . Аксиома А.1. виконується.

Якщо серед множин  $\in$  хоча б одна  $\emptyset$ , то і весь перетин  $\in \emptyset$ . Якщо  $\in$  тільки  $X$  то і весь перетин буде  $X$ . Аксиома А.2. виконується. ◀

Нехай  $X = \mathbb{R}$  - множина дійсних чисел,  $\Omega$  – сукупність об'єднань всіх можливих сімейств відкритих інтервалів  $(a, b)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Теорема 1.5.**

$(X, \mathbb{R})$  – топологічний простір.

► Очевидно, що порожня множина і множина дійсних чисел належать до  $\Omega$ . Аксиома А.3) виконується.

$\cup_{\alpha} A_{\alpha} \cap \cup_{\beta} B_{\beta} = \cup_{\alpha, \beta} (A_{\alpha} \cap B_{\beta})$ . Якщо  $A_{\alpha}$ , та  $B_{\beta}$  – інтервали, тоді в правій частині рівності об'єднання інтервалів. Отже А.1) виконується. А.2) дає всю множину дійсних чисел ◀

*Означення 1.14.* Топологічна структура  $(X, \mathbb{R})$  – називається канонічною або стандартною топологією, а сам простір – дійсною прямою.

*Означення 1.15.* Базою топології називається деякий набір відкритих множин, такий, що всяку невиконану відкритую множину можна представити у вигляді об'єднання множин із цього інтервалу.

**Теорема 1.6.**

Сукупність  $\Sigma$  відкритих множин є базою топології  $\Omega$  тоді і тільки тоді, коли для  $\forall U \in \Omega$ ,  $\forall x \in U \exists V \in \Sigma$ , що  $x \in V \subset U$ .

► *Необхідність.* Нехай  $\Sigma$  є базою топології  $(U \in \Omega, \Omega)$ . Представимо множину  $U$  у вигляді об'єднання множини із бази  $\Sigma$ . Кожна точка  $x \in U$  опиниться покритою базисною множиною. Цю множину и візьмемо за  $V$ . Ця множина є підмножиною  $U$ , оскільки входить до об'єднання.

*Достатність.* Припустимо, що  $\forall U \in \Omega, \forall x \in U \exists V \in \Sigma$ , що  $x \in V \subset U$ . Покажемо, що  $\Sigma$  – є базою топології  $\Omega$ . Для цього покажемо, що  $\forall U \in \Omega$  можна представити у вигляді об'єднання множин, що належать до  $\Sigma$ . Для  $\forall x \in U$  візьмемо таку множину, в силу припущення,  $V_x \in \Sigma$ , що  $x \in V \subset U$ . Розглянемо  $\bigcup_{x \in U} V_x$ . Об'єднання  $\bigcup_{x \in U} V_x \subset U$ , оскільки  $V_x \subset U, \forall x \in U$ . З іншого боку, кожна точка  $x \in U$  належить до певного  $V_x$ , і належить до  $\bigcup_{x \in U} V_x$ . Тоді маємо, що  $U \subset \bigcup_{x \in U} V_x$ . ◀

### Теорема 1.7.

Сукупність  $\Sigma$  підмножин множини  $X$  є базою деякої топології в  $X$ , тоді і тільки тоді, коли  $X$  є об'єднання множин із  $\Sigma$  і перетин будь яких двох множин із  $\Sigma$  можливо представити у вигляді об'єднання множин із  $\Sigma$ .

► *Необхідність.* Нехай  $\Sigma$  – база деякої топології. Тоді  $X$  (відкрита множина), одержується як об'єднання базисних множин. Перетин будь яких двох множин із  $\Sigma$ , відкрито, як перетин двох відкритих множин, а отже і представляється як об'єднання базисних множин.

*Достатність.* Припустимо, що  $\Sigma$  – сукупність підмножин множини  $X$ , що  $X$  є об'єднанням множин із  $\Sigma$  и перетин будь яких двох множин із  $\Sigma$  може бути представлений як об'єднання множин із  $\Sigma$ . Перевіримо аксіоми топологічної структури.

A.1) Перша аксіома виконується, так як об'єднання об'єднань є само об'єднанням.

A.2) Нехай  $U = \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$  і  $V = \bigcup_{\beta} A_{\beta}, A_{\alpha, \beta} \in \Sigma$ . Тоді:

$$U \cap V = \bigcup_{\alpha} A_{\alpha} \cap \bigcup_{\beta} A_{\beta} = \bigcup_{\alpha, \beta} (A_{\alpha} \cap A_{\beta})$$

Оскільки, за припущенням,  $A_{\alpha} \cap A_{\beta}$  представляються як об'єднання множин із  $\Sigma$ , то і  $U \cap V$  також представляються в такому вигляді.

А.3) За припущенням простір  $X$  представляється у вигляді об'єднання множин із  $\Sigma$ .

Усі три аксіоми виконуються, отже, наше припущення вірне ◀[2].

### 1.2.2. Метрична топологія

#### Теорема 1.8.

Множина всіх відкритих куль метричного простору є базою деякої топології.

► У силу теореми 1.6, 1.7 та 1.1 множина, про яку йдеться в умові теореми є топологічною структурою. ◀

*Означення 1.16.* Топологію із теореми 1.8. називають метричною, и говорять, що вона породжується метрикою.

#### Теорема 1.9. Критерії відкритості.

Множина відкрита в метричному просторі, тоді і тільки тоді, коли до неї належить кожна точка з деякою кулею, центром якої є ця точка.

► *Необхідність.* Якщо  $a \in U$ , де  $U$  – відкрита множина, тоді  $a \in B_r(x)$  і

$$B_{r-\rho(a,x)}(a) \subset B_r(x) \subset U.$$

*Достатність.* Якщо до множина разом з кожною її точкою входить куля з центром в цій точці, то вона є об'єднанням цих шарів, а отже є відкритою. ◀

**Теорема 1.10.**

Замкнута куля  $D_r(a)$  замкнута відносно метричної топології.

► Нехай маємо  $D_r(a) = \{x \in X | \rho(a, x) \leq r\}$ . Розглянемо множину  $X \setminus D_r(a) = \{x | \rho(x, a) > r\}$ . Ця множина є відкритою, в силу критерію відкритості. Отже  $D_r(a)$  – замкнута. ◀

**Теорема 1.11.**

Сфера  $S_r(a)$  є замкнутою множиною.

► Нехай маємо  $S_r(a) = \{x \in X | \rho(a, x) = r\}$ . Розглянемо

$$X \setminus S_r(a) = B_r(a) \cup (X \setminus D_r(a)).$$

З теореми 1.10. маємо, що  $X \setminus D_r(a)$  – відкрита.  $B_r(a)$  – відкрита куля. У силу критерію відкритості  $X \setminus S_r(a)$  – відкрита, а, отже,  $S_r(a)$  – замкнута. ◀

**1.2.3. Метризуємі простори.**

*Означення 1.17.* Топологічний простір називається метризуємим, якщо його топологічна структура породжується деякою метрикою.

**Теорема 1.12.**

Антидискретний простір, який складається більше ніж з однієї точки – неметризуємий.

► Нехай  $X$  – антидискретний простір. Якщо  $x, y \in X, r = \rho(x, y) > 0$ , тоді куля  $D_r(a) \neq \emptyset$ , отже є не пустою, і не співпадає з всім простором  $X$ . Отже,  $X$  – неметризуємий. ◀

**Теорема 1.13.**

Простір зі скінченною множиною точок метризується тоді і тільки тоді, коли він – дискретний.

► *Необхідність.* Нехай  $x \in X$  – простір зі скінченною множиною точок. Покладемо  $r = \min\{\rho(x, y) | y \in X \setminus x\}$ . Отримаємо шар  $D_r(a)$ , який є метризуємим у силу теореми 1.10.

*Достатність.* Нехай  $X$  – дискретний простір. З означення 1.12. дискретного простору і теореми 1.3. маємо, що він є метризуємим. ◀

**1.2.4. Відстань від точки до множини.** Нехай  $(X, \rho)$  – метричний простір,  $A \subset X, b \in X$ .

*Означення 1.18.* Відстанню від точки  $b$  до множини  $A$  називається число

$$\rho(b, A) = \inf\{\rho(b, a) | a \in A\}$$

**Теорема 1.14.**

Якщо  $A$  – замкнута, то  $\rho(b, A) = 0$ , тоді і тільки тоді, коли  $b \in A$ .

► Умова  $\rho(b, A) = 0$  рівносильна твердженню, що кожна куля із центром в точці  $b$  перетинається з  $A$ . В силу того, що  $A$  – замкнута, а доповнення  $A$  – відкрите, маємо, що  $b$  не належить до доповнення  $A$ , а отже входить до  $A$  ◀

**1.2.5. Відстань між множинами.** Нехай  $A, B$  – обмежені підмножини метричного простору  $(X, \rho)$ .

*Означення 1.19.* Відстанню Хаусдорфа між множиною  $A$  і  $B$  називають

$$d_\rho(A, B) = \max\{\sup \rho(a, B), \sup \rho(b, A) | a \in A, b \in B\}$$

**Теорема 1.15.**

Для відстані Хаусдорфа в множині обмежених підмножин метричного простору виконуються 2) і 3) умови з означення метрики.

► Нехай маємо:

$$r(A, B) = \sup_{a \in A} \rho(a, B), \quad a \in A.$$

Тоді, для умови 2) маємо:  $d_\rho(A, B) = \max\{r(A, B), r(B, A)\}$ . Умова 2) виконується.

Візьмемо довільні три множини  $A, B, C \subset X$ . Для умови 3) слід довести нерівність:  $r(A, C) \leq r(A, B) + r(B, C)$ . Оскільки  $\rho(a, C) \leq \rho(a, b) + \rho(b, C), \forall a \in A, \forall b \in B$ . Звідси маємо  $\rho(a, C) \leq \rho(a, b) + r(B, C)$ , в тих позначеннях, що введені. Тоді, повторюючи цю процедуру, отримаємо потрібно нерівність, а саме

$$\rho(a, C) \leq \inf_{b \in B} \rho(a, b) + r(B, C) = \rho(a, B) + r(B, C) \leq r(A, B) + r(B, C) \blacktriangleleft$$

### Теорема 1.16.

Для будь-якого метричного простору відстань Хаусдорфа є метрикою в множині його обмежених замкнених підмножин.

► З теореми 1.15. маємо умови 2), 3) з означення метрики. З теореми 1.14. випливає, що якщо відстань Хаусдорфа між двома замкненими множинами рівна нулю, тоді  $A \subset B, B \subset A$ , тоді маємо, що  $A = B$ , що і є умовою 1) в означенні метрики. Отже  $d_\rho$  є метрикою  $\blacktriangleleft$ [3].

### 1.3. Аксиоми відокремлюваності

#### 1.3.1. Аксиома Хаусдорфа або друга аксіома відокремлюваності $T_2$ .

*Означення 1.20.* Будь які дві різні точки мають околи, що не перетинаються.

$$\forall x, y \in X, x \neq y, \exists U_x, U_y: U_x \cap U_y = \emptyset$$

#### Теорема 1.17.

Кожний метричний простір хаусдорфів.

► Якщо  $r_1 + r_2 \leq \rho(x_1, x_2)$ , то кулі  $B_{r_1}(x_1)$  та  $B_{r_2}(x_2)$  не перетинаються. ◀

#### Теорема 1.18.

Простір  $X$  є хаусдорфовим тоді і тільки тоді, коли для  $\forall x \in X$  має місце рівність  $\{x\} = \bigcap_{U \ni x} \text{Cl}U$ ,  $\text{Cl}$  – топологічне замикання.

► *Необхідність.* Якщо  $y \neq x$ , то в просторі існують два околи  $U_x, U_y$  які не перетинаються. Отже,  $y \notin \text{Cl}U_x$ , а з цього слідує, що  $y \notin \bigcap_{U \ni x} \text{Cl}U$ .

*Достатність.* Якщо  $y \neq x$ , то  $y \notin \bigcap_{U \ni x} \text{Cl}U$ , звідки слідує, що знайдеться окіл  $U_x$ , такий, що  $y \notin \text{Cl}U_x$ .  $U_y = X \setminus \text{Cl}U_x$ . ◀

**1.3.2. Границі послідовностей.** Нехай  $\{x_n\}$  – послідовність точок топологічного простору  $X$ .

*Означення 1.21.* Точка  $b \in X$  називається її границею, якщо для будь-якого околу  $U$  точки  $b$  існує таке число  $N$ , що  $x_n \in U, \forall n > N$ . Також говорять, що послідовність  $\{x_n\}$  прямує до  $b$  при  $n \rightarrow \infty$ .

#### Теорема 1.19.

У хаусдорфовому просторі жодна послідовність не може мати більш, як одну границю.

► Припустимо супротивне: нехай  $x_n \rightarrow a$  та  $x_n \rightarrow b$ ,  $a \neq b$ . Нехай  $U, V$  – околи точок  $a, b$  відповідно, що не перетинаються. При достатньо великих номерах  $n$  отримаємо, що  $x_n \in U \cap V$  що не можливо. ◀

### 1.3.3. Аксиома Тихонова або перша аксіома відокремлюваності $T_1$ .

*Означення 1.22.* Говорять, що топологічний простір задовольняє першій аксіомі відокремлюваності  $T_1$ , якщо кожна з двох різних точок простору має окіл, який не включає в себе іншу з даних точок.

#### Теорема 1.20.

Наступні властивості топологічного простору  $X$  еквівалентні один одному:

- 1)  $X$  задовільняє першу аксіому відокремлюваності;
- 2) всі підмножини множини  $X$ , які побудовані з однієї точки замкнуті;
- 3) всі скінченні підмножини простору  $X$  замкнені.

► Покажемо, що з 1) умови випливає 2). Нехай  $x \in X$ . У кожній точці  $y \in X \setminus \{x\}$  існує окіл  $U$ , який не містить точку  $x$ , тобто  $U \subset X \setminus \{x\}$ . Отже, кожна точка множини  $X \setminus \{x\}$  – внутрішня, тому множина  $X \setminus \{x\}$  – відкрита, а його доповнення  $\{x\}$  – замкнене.

Покажемо, що з 2) слідує 1). Оскільки всі підмножини множини  $X$ , які побудовані з однієї точки замкнуті,  $x, y \in X, x \neq y$ , то  $X \setminus \{x\}$  – окіл точки  $y$ , яка не містить точку  $x$ . Таким чином аксіома  $T_1$  виконується.

Покажемо, що з 2) слідує 3). Якщо всі підмножини множини  $X$ , які побудовані з однієї точки замкнуті, то й всі скінченні множини замкнені (як скінченні об'єднання множин з однією точкою).

Покажемо що з 3) слідує 2). Оскільки скінченна множина є об'єднанням множин з однієї точки, то за умови, що вони замкнені, й підмножини з однієї точки теж будуть замкнені. ◀

### **Теорема 1.21.**

У хаусдорфовому просторі всі скінченні множини замкнені.

► Оскільки кожний хаусдорфів простір задовольняє  $T_1(\exists U_x, U_y: U_x \cap U_y = \emptyset)$ , і з теореми 1.20. з 1) отримуємо 3), то твердження очевидне. ◀

### **Теорема 1.22.**

Кожен метричний простір задовольняє  $T_1$ .

► Оскільки, за теоремою 1.17. кожен метричний простір хаусдорфів, а в тому, в свою чергу, за теоремою 1.21. всі скінченні множини замкнені, то твердження очевидне. ◀

## **1.3.4. Нульова аксіома відокремлюваності або аксіома Колмогорова $T_0$ .**

*Означення 1.23.* Кажуть, що топологічний простір задовольняє аксіомі Колмогорова або нульовій аксіомі відокремлюваності  $T_0$ , якщо для будь яких двох відмінних точок цього простору, хоча б одна має окіл, який не містить іншу з цих точок.

### **Теорема 1.23.**

Настуні властивості топологічного простору  $X$  еквівалентні один одному:

- 1)  $X$  задовільняє аксіомі Колмогорова;
- 2) замикання будь яких двох різних підмножин простору  $X$ , що складаються з однієї точки, різні;
- 3)  $X$  не містить антидискретного підпростору з більше як однією точкою;

► Покажемо, що з 1) слідує 2). Оскільки простір  $X$  задовольняє аксіомі Колмогорова, то для будь яких двох точок  $x, y$ , хоча б одна не лежить в замиканні іншої.

Покажемо, що з 2) слідує 1). Нехай  $Cl\{x\} \neq Cl\{y\}$ . Для визначеності, виберемо  $z \in Cl\{x\}, z \notin Cl\{y\}$ . Тоді знайдеться окіл  $U$  точки  $z$ , яка не містить точку  $y$ . З іншого боку,  $x \in U$ , а, отже, ми знайшли окіл точки  $x$ , який не містить точку  $y$ .

Оскільки антидискретний простір, який містить дві і більше точок, не задовольняє  $T_0$ , то 3) і 1) пов'язані. ◀

*Означення 1.24.* Топологією найменших околів називається топологічна структура, в якій перетин всіх околів, які містять точку простору, є околами цієї точки.

### **Теорема 1.24.**

Топологія є топологією деякого часткового порядку в множині, тоді і тільки тоді, коли це топологія найменших околів, яка задовольняє аксіомі Колмогорова.

► *Необхідність.* З означення 1.24. маємо, що мають бути такі точки, а отже аксіома Колмогорова виконується.

*Достатність.* Якщо для кожної точки  $x$  простору, існує її найменший окіл  $U_x$ , то можна сказати, що  $x \preceq y$ , якщо  $y \in U_x$ . Для доведення транзитивності, припустимо, що  $x \preceq y, y \preceq z$ . Отже,  $y \in U_x$ , інакше кажучи  $U_x$  – окіл  $y$ , а отже  $U_y \subset U_x$ , тому  $z \in U_x$ , тоді  $x \preceq z$ . Якщо  $y \in U_x, x \in U_y$ , то жодну з цих точок неможливо відділити. У силу аксіоми  $T_0$  таке можливо лише коли  $x = y$ . Таким чином, доведена антисиметричність. Рефлексивність очевидна. ◀

### **1.3.5. Третя аксіома відокремлюваності $T_3$ .**

*Означення 1.25.* Кажуть, що топологічний простір  $X$  задовольняє третій аксіомі відокремлюваності, якщо в ньому будь яка замкнена множина і будь яка

точка, яка не належить до цієї множини, має околиці, які не перетинаються, тобто для будь якої замкненої множини  $F \subset X$ , і будь якої точки  $b \in X \setminus F$  існують диз'юнктивні відкриті множини  $U, V \subset X: U \supset F, b \in V$ . Топологічні простори, що задовольняють  $T_1, T_3$ , називають регулярними.

### **Теорема 1.25.**

Кожний регулярний простір хаусдорфів.

► Нехай  $X$  – регулярний простір. Розглянемо в ньому дві точки  $x, y$ . Оскільки простір задовольняє аксіомі  $T_1$ , то множина  $\{y\}$  – замкнена. Застосовуючи аксіому  $T_3$  до точки  $x$ , і множини  $\{y\}$ , отримуємо вірне твердження. ◀

### **1.3.6. Четверта аксіома відокремлюваності.**

*Означення 1.26.* Кажуть, що топологічний простір  $X$  задовольняє четвертій аксіомі відокремлюваності, якщо в ньому будь які дві неперетинаючихся замкнені множини містять околиці, що не перетинаються, тобто для будь яких замкнених  $A, B \subset X, A \cap B = \emptyset$  існують диз'юнктивні відкриті множини  $U, V \subset X: A \subset U, B \subset V$ . Топологічний простір називають нормальним, якщо він задовольняє  $T_1, T_4$ [22].

## РОЗДІЛ 2

### ТОПОЛОГІЯ D-МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРІВ

#### 2.1. D-метричні простори

**2.1.1. D-метричні простори.** Нехай  $(X, d)$  – метричний простір. Тоді:

$$(d(x, y), d(y, z), d(z, x)) \in (R^+)^{3^*}, \forall x, y, z \in X$$

де:

$$(R^+)^{3^*} = \{(t_1, t_2, t_3) \in (R^+)^3 : t_1 \leq t_2 + t_3, t_2 \leq t_1 + t_3, t_3 \leq t_1 + t_2\}$$

*Означення 2.1.* Нехай  $X$  – непорожня множина. Функція:

$$\rho: X \times X \times X \rightarrow [0, \infty)$$

називається D-метрикою на  $X$  якщо:

$$\rho(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z \tag{2.1}$$

$$\rho(x, y, z) = \rho(\rho(x, y, z)), \text{ для будь яких перестановок } \rho(x, y, z) \tag{2.2}$$

$$\rho(x, y, z) \leq \rho(x, y, a) + \rho(x, a, z) + \rho(a, y, z),, \forall x, y, z, a \in X \tag{2.3}$$

Якщо  $X$  – непорожня множина, і  $\rho$  – D-метрика на  $X$ , тоді пара  $(X, \rho)$  називається D-метричним простором.  $X$  – D-метричним простором.

*Означення 2.2.* Послідовність  $\{x_n\}$  в D-метричному просторі  $(X, \rho)$  називається збіжною або  $\rho$ -збіжною якщо існує елемент  $x \in X$  такий, що:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \rho(x_m, x_n, x) < \varepsilon, \forall m, n \geq N$$

Кажуть, що  $\{x_n\}$  прямує до  $x$ , і  $x$  називають границею  $\{x_n\}$ .

*Означення 2.3.* Послідовність  $\{x_n\}$  в D-метричному просторі  $(X, \rho)$  називається послідовністю Коші або  $\rho$ -послідовністю Коші, якщо:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \rho(x_m, x_n, x_k) < \varepsilon, \forall m, n, k \geq N$$

*Означення 2.4.* D-метричний простір  $(X, \rho)$  називається повним або  $\rho$ -повним, якщо кожна  $\rho$ -послідовність Коші в  $X$  є  $\rho$ -збіжною в  $X$ .

Для підмножини  $E$ , D-метричного простору  $(X, \rho)$ ,  $E^c$  визначається:

$$\{x \in X | \exists \{x_n\} \in E: \{x_n\} \rightarrow x\}$$

Для будь-якої множини  $X$ ,  $P(X)$  – множина всіх підмножин, яка є сімейством усіх підмножин множини  $X$ . [22]

**Приклад 2.1.** Нехай:

$$X = A \cup B \cup \{0\},$$

де:

$$A = \left\{ \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$B = \{2^n, n \in \mathbb{N}\}$$

Визначимо  $\rho: X \times X \times X \rightarrow R^+$  наступним чином:

$$1) \rho(x, y, z) = 0, x = y = z,$$

$$2) \rho(x, y, z) = \min\{\max\{x, y\}, \max\{y, z\}, \max\{x, z\}\}, x, y, z \in A \cup \{0\},$$

$$3) \rho(x, y, z) = 1, (x = 0 \vee y = 0 \vee z = 0, (x \vee y \vee z) \in B) \vee x = y = 0 \vee x = z = 0 \vee z = y = 0,$$

$$4) \rho(x, y, z) = \min\{x, y, z\}, x, y, z \in A \cup B \wedge (x \vee y \vee z) \in B,$$

$$5) \rho(x, y, z) = \min\left\{ \max\left\{ \frac{1}{x}, \frac{1}{y} \right\}, \max\left\{ \frac{1}{y}, \frac{1}{z} \right\}, \max\left\{ \frac{1}{z}, \frac{1}{x} \right\} \right\}, x, y, z \in A \cup B \wedge (x \vee y \vee z) \in A,$$

$$6) \rho(x, y, z) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| + \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{z} \right| + \left| \frac{1}{z} - \frac{1}{x} \right|, x, y, z \in B.$$

Тоді  $(X, \rho)$  повний D-метричний простір. Проте  $\rho$ -збіжність не задає топологію на  $X$ . Щоб, це показати, розглянемо кожний випадок.

Очевидно, що  $\rho$  симетрична для кожної з трьох змінних і:

$$\rho(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z$$

$$\rho(x, y, z) \leq 1, \forall x, y, z \in X$$

Нехай  $x, y, z, u \in X$

I випадок:  $x = y = z$ .

Тоді:

$$\rho(x, y, z) = 0 \leq \rho(u, y, z) + \rho(x, u, z) + \rho(x, y, u).$$

II випадок:  $x, y, z \in A \cup \{0\}$

Припустимо, що  $x \geq y \geq z$ . Якщо,  $u \in A \cup \{0\}$ , тоді:

$$\rho(x, y, z) = y \leq \rho(u, y, z) + \rho(x, u, z) + \rho(x, y, u)$$

Тоді, якщо  $u > y$ :

$$\rho(u, y, z) = y$$

якщо  $u = y$ :

$$\rho(x, y, z) = \rho(x, u, z)$$

і якщо  $u < y$ :

$$\rho(x, y, u) = y$$

Якщо ж,  $u \in B$ , тоді:

$$\begin{aligned} \rho(x, y, z) = y = \min\{x, y, u\} &= \rho(x, y, u) \\ &\leq \rho(u, y, z) + \rho(x, u, z) + \rho(x, y, u) \end{aligned} \quad (2.4)$$

III випадок:  $x = y = 0 \vee x = z = 0 \vee z = y = 0$

Припустимо,  $x = y = 0, z \neq 0$ . Якщо  $u \in X \setminus \{0\}$ , тоді:

$$\rho(x, y, z) = \rho(0, 0, z) = 1 = \rho(u, y, z) \leq \rho(u, y, z) + \rho(x, u, z) + \rho(x, y, u) \quad (2.5)$$

Якщо  $u = 0$ , тоді:

$$\rho(x, y, z) = \rho(0, 0, z) = 1 = \rho(x, y, u) \leq \rho(u, y, z) + \rho(x, u, z) + \rho(x, y, u) \quad (2.6)$$

IV випадок:  $x = 0 \vee y = 0 \vee z = 0 \wedge (x \vee y \vee z) \in B$

Припустимо, що  $x = 0$  і  $y \in B$ . Маємо:

$$\begin{aligned} \rho(x, y, z) = \rho(0, y, z) = 1 &= \rho(0, y, u) = \rho(x, y, u) \\ &\leq \rho(u, y, z) + \rho(x, u, z) + \rho(x, y, u) \end{aligned} \quad (2.7)$$

V випадок:  $x, y, z \in A \cup B \wedge (x \vee y \vee z) \in B$

Припустимо, що  $x \in B$ . Тоді  $y, z \in A$ . Нехай  $y \geq z$ . Якщо  $u \in B$ , маємо:

$$\begin{aligned} \rho(x, y, z) &= \min\{x, y, z\} = z = \rho(u, y, z) \\ &\leq \rho(u, y, z) + \rho(x, u, z) + \rho(x, y, u) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Якщо  $u \in A \cup \{0\}$ , тоді:

$$\rho(x, y, z) = \min\{x, y, z\} = z \leq \rho(u, y, z) + \rho(x, u, z) + \rho(x, y, u) \quad (2.9)$$

ОСКІЛЬКИ, КОЛИ:

$$u < z: \rho(u, y, z) = z$$

у випадку:

$$u = z: \rho(x, y, z) = \rho(x, y, u)$$

і:

$$u > z: \rho(u, y, z) = \min\{u, y\} \geq z$$

VI випадок:  $x, y, z \in A \cup B \wedge (x \vee y \vee z) \in A$

Припустимо, що  $x \in A$ . Тоді  $y, z \in B$ . Нехай  $y \geq z$ . Якщо  $u \in A$ , тоді:

$$\begin{aligned} \rho(x, y, z) &= \max\left\{\frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right\} = \frac{1}{z} = \rho(u, y, z) \\ &\leq \rho(u, y, z) + \rho(x, u, z) + \rho(x, y, u) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Якщо  $u = 0$ , тоді:

$$\begin{aligned} \rho(x, y, z) &= \max\left\{\frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right\} = \frac{1}{z} \leq \frac{1}{2} < 1 = \rho(u, y, z) \\ &\leq \rho(u, y, z) + \rho(x, u, z) + \rho(x, y, u) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Якщо  $u \in B$ , тоді:

$$\begin{aligned} \rho(x, y, z) &= \max\left\{\frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right\} = \frac{1}{z} \leq \max\left\{\frac{1}{u}, \frac{1}{z}\right\} = \rho(x, u, z) \\ &\leq \rho(u, y, z) + \rho(x, u, z) + \rho(x, y, u) \end{aligned} \quad (2.12)$$

VII випадок:  $x, y, z \in B$

Припустимо, що  $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}$ . Якщо  $u = 0$ , тоді:

$$\begin{aligned} \rho(x, y, z) &= 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right) \leq 1 = \rho(u, y, z) \\ &\leq \rho(u, y, z) + \rho(x, u, z) + \rho(x, y, u) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Якщо  $u \in A$ , тоді:

$$\begin{aligned} \rho(x, y, z) &= 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right) \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \rho(x, u, z) + \rho(x, y, u) \\ &\leq \rho(u, y, z) + \rho(x, u, z) + \rho(x, y, u) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Якщо  $u \in B$ , тоді:

$$\begin{aligned} \rho(x, y, z) &= \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| + \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{z} \right| + \left| \frac{1}{z} - \frac{1}{x} \right| \\ &\leq \rho(u, y, z) + \rho(x, u, z) + \rho(x, y, u) \end{aligned} \quad (2.15)$$

оскільки:

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \leq \rho(x, y, u)$$

$$\left| \frac{1}{y} - \frac{1}{z} \right| \leq \rho(u, y, z)$$

$$\left| \frac{1}{z} - \frac{1}{x} \right| \leq \rho(x, u, z)$$

З цього випливає:

$$\forall x, y, z, u \in X: \rho(x, y, z) \leq \rho(u, y, z) + \rho(x, u, z) + \rho(x, y, u)$$

Отже,  $\rho$  – D-метричний простір на  $X$ .

Залишилось показати, що  $(X, \rho)$  – є D-повний. Нехай  $\{x_n\}$  – послідовність Коші на  $X$ .

I випадок:

$$\exists N \in \mathbb{N}: x_n = x_m, \forall n \geq N$$

II випадок:

$$\forall N \in \mathbb{N} \exists i, j \in \mathbb{N}: i > N, j > N, x_i \neq x_j$$

Тоді, можна сказати, що:

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}: x_i \neq 0 \forall i \geq N_0, \rho(0, 0, x) = 1, \forall x \in X \setminus \{0\},$$

Отже,  $\{x_n\}$  – послідовність Коші.

Тоді можливий варіант:

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}: N_1 \geq N_0 \wedge x_i \in A, \forall i \geq N_1$$

Покажемо, що  $x_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  в звичайному розумінні.

Припустимо супротивне. Тоді:

$$\exists \varepsilon > 0: x_n \geq \varepsilon, n \in \mathbb{N}$$

Для заданого  $N \in \mathbb{N}$  можемо обрати  $i, j, k \in \mathbb{N}$ , такі, що:

$$k > j > i > \max\{N, N_1\}, x_i > \varepsilon, x_j > \varepsilon, x_k \neq x_j$$

Тоді маємо наступне:

$$\rho(x_i, x_j, x_k) = \min\{\max\{x_i, x_j\}, \max\{x_j, x_k\}, \max\{x_i, x_k\}\} \geq \varepsilon \quad (2.16)$$

Маємо протиріччя, оскільки  $\{x_n\}$  – послідовність Коші. Звідси, для заданих  $m, n \geq N_1, a \in A \cup \{0\}$ , маємо:

$$\begin{aligned} \rho(a, x_n, x_m) &= \min\{\max\{a, x_m\}, \max\{x_m, x_n\}, \max\{a, x_n\}\} \\ &\leq \max\{x_m, x_n\} \rightarrow 0, m, n \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.17)$$

Звідси  $\{x_n\}$  прямує до  $a$  для  $\forall a \in A \cup \{0\}$ . Аналогічно  $\{x_n\}$  прямує до  $b$  для  $\forall b \in B$ .

Можливий варіант:

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}: N_2 \geq N_0 \wedge x_i \in I, \forall i \geq N_2$$

Покажемо, що  $x_n \rightarrow +\infty$  при  $n \rightarrow +\infty$ .

Припустимо супротивне. Тоді:

$$\exists M \in \mathbb{R}: x_n \leq M, n \in \mathbb{N}$$

Для заданого  $N \in \mathbb{N}$  можемо обрати  $i, j, k \in \mathbb{N}$ , такі, що:

$$k > j > i > \max\{N, N_2\}, x_i \leq M, x_j \leq M, x_k \neq x_j$$

Тоді маємо наступне:

$$\rho(x_i, x_j, x_k) \geq \left| \frac{1}{x_j} - \frac{1}{x_k} \right| \geq \frac{1}{2x_j} \geq \frac{1}{2M}$$

Маємо протиріччя, оскільки  $\{x_n\}$  – послідовність Коші. Звідси, для заданих  $m, n \geq N_2, a \in A$ , маємо:

$$\rho(a, x_n, x_m) = \max \left\{ \frac{1}{x_m}, \frac{1}{x_n} \right\} \rightarrow 0, m, n \rightarrow \infty \quad (2.18)$$

Звідси  $\{x_n\}$  прямує до  $a$  для  $\forall a \in A$ .

*Означення 2.5.* Нехай  $(X, \rho)$  – D-метричний простір, і  $\{x_n\}$  – послідовність задана на  $X$ . Кажуть, що  $\{x_n\}$  прямує слабо до елементу  $x \in X$ , якщо:

$$\begin{aligned} \rho(x, x_m, x_n) &\rightarrow, m, n \rightarrow \infty \\ \{\rho(y, y, x_n)\} &\rightarrow \rho(y, y, x), \forall y \in X \end{aligned}$$

У такому випадку, кажуть, що  $x$  слаба границя  $\{x_n\}$

*Означення 2.6.* Нехай  $(X, \rho)$  – D-метричний простір, і  $\{x_n\}$  – послідовність задана на  $X$ . Кажуть, що  $\{x_n\}$  прямує сильно до елементу  $x \in X$ , якщо:

$$\begin{aligned} \rho(x, x_m, x_n) &\rightarrow, m, n \rightarrow \infty \\ \{\rho(y, z, x_n)\} &\rightarrow \rho(y, z, x), \forall y, z \in X \end{aligned}$$

У такому випадку, кажуть, що  $x$  сильна границя  $\{x_n\}$ .

**Теорема 2.1.**

Нехай  $(X, \rho)$  – D-метричний простір. Нехай  $\{x_n\}$  послідовність задана на  $X$ ,  $\{x_n\} \rightarrow x, x \in X$ . Тоді  $\{\rho(x, x, x_n)\}$  збіжна.

► Оскільки  $\{x_n\}$  збіжна, то вона є D-послідовністю Коші. Маємо, з (2.3):

$$\rho(x, x, x_n) \leq \rho(x_m, x, x_n) + \rho(x, x_m, x_n) + \rho(x, x, x_m)$$

Звідси:

$$\rho(x, x, x_n) - \rho(x, x, x_m) \leq 2\rho(x, x_m, x_n)$$

Аналогічно, можна показати наступне:

$$\rho(x, x, x_m) - \rho(x, x, x_n) \leq 2\rho(x, x_m, x_n)$$

Тепер, можемо отримати:

$$|\rho(x, x, x_m) - \rho(x, x, x_n)| \leq 2\rho(x, x_m, x_n)$$

Оскільки ця нерівність вірна для  $\forall m, n \in \mathbb{N}$ , і  $\{x_n\}$  прямує до  $x$  на D-метриці  $\rho$ , то звідси випливає, що  $\{\rho(x, x, x_n)\}$  послідовність Коші на дійсних числах, а отже збіжна. ◀

### Теорема 2.2.

У D-метричному просторі, кожна слабо збіжна послідовність має унікальну слабу границю.

► Нехай  $(X, \rho)$  – D-метричний простір, і  $\{x_n\}$  слабо збіжна послідовність на  $X$ . Нехай  $y, z$  – слабкі границі  $\{x_n\}$ . Тоді  $\{\rho(x, x, x_n)\}$  прямує як до  $\rho(y, y, y)$  і  $\rho(y, y, z)$ . Звідси  $\rho(y, y, y) = \rho(y, y, z) = 0$ . А отже  $y = z$  ◀[16].

### 2.2. Топологія D-метричних просторів.

#### Теорема 2.3.

Нехай  $(X, \rho)$  – метричний простір,  $x_0 \in X$ . Нехай  $A \neq \emptyset$  підмножина  $X \setminus \{x_0\}$ . Визначмо  $\rho: A \times A \times A \rightarrow R^+$ , наступним чином:

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} 0, & x = y = z \\ \min \left\{ \begin{array}{l} \max\{d(x_0, x), d(x_0, y)\}, \\ \max\{d(x_0, y), d(x_0, z)\}, \\ \max\{d(x_0, x), d(x_0, z)\} \end{array} \right\} \end{cases} \quad (2.19)$$

Кажуть, що  $(A, \rho)$  повний D-метричний простір і  $\rho$ -збіжність задає топологію  $\tau$  на  $A$ . Якщо:

$$A \cap \{x \in X: d(x_0, x) < r_0\} = \emptyset, r_0 \in (0, \infty),$$

Тоді кажуть, що  $\tau$  – дискретна топологія на  $X$ . В іншому випадку:

$$\tau = \{\emptyset\} \cup \{E \subseteq A: \{x \in A: d(x_0, x) < r_0\} \subseteq E, r_0 \in (0, \infty)\}$$

і  $\tau \in T_1$ , але не є Хаусдорфовою. Нехай  $\{x_n\} \subseteq A$ . Тоді  $\{x_n\}$  прямує до  $x$  згідно з  $\rho$  для  $\forall x \in A, x_n \neq x$ , для:

$$\forall n \Rightarrow d(x_0, x) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \Rightarrow \{x_n\}$$

прямує до  $x$  згідно з  $\rho$  для кожного  $x \in A$ . Якщо  $A$  має хоча б 2 елементи, не існує послідовності заданої на  $A$ , такої, що є слабо збіжної згідно з  $\rho$ .

► Очевидно, що  $\rho$  є симетричною для  $x, y, z$  і

$$\rho(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z$$

Нехай  $x, y, z, u \in A$ . Припустимо, що:

$$d(x_0, x) \geq d(x_0, y) \geq d(x_0, z)$$

У будь-якому з випадків  $d(x_0, u) < d(x_0, y)$  або  $d(x_0, u) \geq d(x_0, y)$ , маємо:

$$\rho(x, y, z) = d(x_0, y) \leq \rho(x, y, u) \tag{2.20}$$

Звідси маємо, що:

$$\rho(x, y, z) \leq \rho(x, y, u) + \rho(x, u, z) + \rho(u, y, z), \forall x, y, z \in A$$

$A$ , отже,  $\rho \in D$ -метрикою на  $A$ . Нехай задана послідовність  $\{x_n\}$  на  $A$  і  $x \in A$ .

Якщо  $x_n \neq x$ , маємо:

$$\rho(x, x_n, x_n) = \min \left\{ \begin{array}{l} \max\{d(x_0, x_n), d(x_0, x_n)\}, \\ \max\{d(x_0, x_n), d(x_0, x_n)\}, \\ \max\{d(x_0, x_n), d(x_0, x)\} \end{array} \right\} \geq d(x_0, x_n) \quad (2.21)$$

Звідси  $\rho(x, x_n, x_n) \geq d(x_0, x_n)$ ,  $x_n \neq x$ . Отже  $d(x_0, x_n) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  тоді, коли  $\{x_n\}$  прямує до  $x$  згідно з  $\rho$ ,  $x \in A$ ,  $x_n \neq x$ ,  $\forall n$ . Маємо:

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_m, x) &= \min \left\{ \begin{array}{l} \max\{d(x_0, x_n), d(x_0, x_m)\}, \\ \max\{d(x_0, x_m), d(x_0, x)\}, \\ \max\{d(x_0, x), d(x_0, x_n)\} \end{array} \right\} \\ &\leq \max\{d(x_0, x_n), d(x_0, x_m)\}, \forall n, m \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Таким чином,  $\{x_n\}$  прямує до  $x$  згідно з  $\rho$   $x \in A$ , якщо  $d(x_0, x_n) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

Якщо  $x_n \neq x_m$ , маємо:

$$\rho(x_n, x_m, x_n) = \min \left\{ \begin{array}{l} \max\{d(x_0, x_n), d(x_0, x_m)\}, \\ \max\{d(x_0, x_m), d(x_0, x_n)\}, \\ \max\{d(x_0, x_n), d(x_0, x_n)\} \end{array} \right\} \geq d(x_0, x_n) \quad (2.23)$$

Звідси  $d(x_0, x_n) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Якщо  $\{x_n\} \in \rho$ -послідовністю Коші і не існує  $N \in \mathbb{N}$ , такого, що  $x_n = x_N$ ,  $\forall n > N$ . Якщо існує  $N \in \mathbb{N}$ , таке, що  $x_n = x_N$ ,  $\forall n > N$  то, очевидно, що  $\{x_n\}$  прямує до  $x_N$  згідно з  $\rho$ .

Якщо такого  $N$  не існує, і  $\{x_n\} \in \rho$ -послідовністю Коші, тоді  $(x_0, x_n) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$

і маємо, що  $\{x_n\}$  прямує до  $x$  згідно з  $\rho$  для кожного  $x \in A$ . А, отже, і кожна  $\rho$ -послідовність Коші задана на  $A$  є збіжною згідно з  $\rho$ . З цього випливає, що  $(A, \rho)$  є  $D$ -повним. Якщо  $x_n \neq x$ , маємо:

$$\rho(x, x, x_n) = \min \left\{ \begin{array}{l} \max\{d(x_0, x), d(x_0, x)\}, \\ \max\{d(x_0, x), d(x_0, x_n)\}, \\ \max\{d(x_0, x_n), d(x_0, x)\} \end{array} \right\} \geq d(x_0, x) \quad (2.24)$$

Оскільки  $x \in A \subseteq X \setminus \{x_0\}$ ,  $d(x_0, x) > 0$ , то  $\{\rho(x, x, x_n)\}$  не прямує до 0, при  $x_n \neq x$ . А отже  $\{x_n\}$  не є слабо збіжною якщо  $A$  має хоча б два елементи. Нехай  $E \subset A$ . Очевидно,  $E \subseteq E^c$ .

I випадок:  $E \cap \{x \in X: d(x, x_0) < r\} = \emptyset, r \in (0, \infty)$ .

Нехай  $z \in E^c$ . Тоді існує послідовність  $\{x_n\}$  в  $E$  така, що  $\{x_n\}$  прямує до  $z$  згідно з  $\rho$ . Припустимо, що  $x_n \neq z, \forall n$ . Тоді  $d(x, x_0) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . Оскільки:

$$E \cap \{x \in X: d(x, x_0) < r\} = \emptyset, r \in (0, \infty)$$

маємо  $d(x, x_0) \geq r, \forall x \in E$ . Звідси  $d(x_n, x_0) \geq r, \forall n \in \mathbb{N}$ . Таким чином  $\{d(x_n, x_0)\}$  не прямує до 0. Маємо протиріччя, а отже  $x_n = z, n \in \mathbb{N}$ . З цього випливає, що  $z \in E$ , а отже й  $E^c \subseteq E$ . Отримали, що  $E = E^c$ .

II випадок. Припустимо, що перший випадок невірний, тобто:

$$E \cap \{x \in X: d(x, x_0) < \frac{1}{n}\} \neq \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$$

Звідси існує послідовність  $\{y_n\}$  в  $E$  така, що  $d(y_n, x_0) < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$ . А, отже, маємо  $d(y_n, x_0) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . Звідси  $\{y_n\}$  прямує до  $x$  згідно з  $\rho, \forall x \in A$ . Отримуємо, що  $E^c = A$ . Тоді можливі два варіанти:

1 варіант:  $A \cap \{x \in X: d(x, x_0) < r_0 = \varphi, r_0 \in (0, \infty)\}$

У цьому випадку, для будь-якої підмножини  $E \subset A$ , маємо, що  $E = E^c$ . Звідси  $(E^c)^c = E^c = E$  і функція  $f$  задана на множині всіх підмножин  $P(A)$  як  $f(E) = E^c$  є оператором замикання. Таким чином,  $\rho$ -послідовність задає топологію  $\tau$  на  $A$ , в якій кожна підмножина  $A$  є замкненою.

$$\tau = \{E: E \subseteq A\}$$

Тому  $\tau$  задає дискретну топологію на  $X$ .

2 варіант:  $A \cap \{x \in X: d(x, x_0) < r \neq \varphi, \forall r \in (0, \infty)\}$

У цьому випадку, для кожної  $E$  підмножини  $X$ , маємо  $E^c = E$  або  $A$  в залежності від того, розглядаємо або I або II випадок. Звідси  $(E^c)^c = E^c = E$ , для всіх  $E \in P(A)$  і функція  $f$  задана на множині всіх підмножин  $P(A)$  як  $f(E) = E^c$  є оператором замикання. Таким чином,  $\rho$ -послідовність задає топологію  $\tau$  на  $A$ , у випадку коли множина  $B$ , яка є підмножиною  $A$ , є замкненою, тільки тоді, коли  $B = E^c, E \in P(A)$ . Звідси:

$$\tau = \{A \setminus E^c: E \in P(A) = \{\varphi\} \cup \{E \in P(A): \{x \in A: d(x_0, x) < r\} \subseteq E, r \in (0, \infty)\} \quad (2.25)$$

Якщо  $U_1, U_2$  дві непорожні множини задані на  $\tau$ , тоді  $U_1 \cap U_2 \neq \varphi$ , оскільки існує  $r_1, r_2 \in (0, \infty)$  такі, що:

$$\{x \in A: d(x_0, x) < r_i\} \subseteq U_i, i = 1, 2 \quad (2.26)$$

Звідси отримуємо, що  $\tau$  не є Хаусдорфовою. Нехай маємо  $k \neq q, k, q \in A$ . Оскільки  $x_0 \notin A$ , то  $d(k, x_0), d(q, x_0) \in \mathbb{R}^+$ . Нехай:

$$0 < r < \min\{d(k, x_0), d(q, x_0)\}$$

$$V_0 = \{x \in A: d(x_0, x) < r\}$$

Тоді  $V_0 \cup \{k\}$  є  $\tau$ -відкритою підмножиною на  $A$ , яка містить  $k$  але не містить  $q$ , і  $V_0 \cup \{q\}$  є  $\tau$ -відкритою підмножиною на  $A$ , яка містить  $q$  але не містить  $k$ . Звідси топологія  $\tau \in T_1$ . ◀

**Приклад 2.2.** Нехай  $X = \mathbb{R}$  з звичайною метрикою,  $x_0 = 0, A = \{1, 2\}$ . Тоді функція  $\rho$  визначена в теоремі 2.3. на  $A \times A \times A$  має вигляд:

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} 0, & x = y = z \\ \min\{\max\{x, y\}, \max\{y, z\}, \max\{x, z\}\} & \end{cases} \quad (2.27)$$

З теореми 2.3. слідує, що  $(A, \rho)$  є повним D-метричним простором і, що  $\rho$ -послідовність задає топологію  $\tau$  на  $A$ , яка є дискретною топологією на  $A$ .

**Приклад 2.3.** Нехай  $X = \mathbb{R}$  з звичайною метрикою,  $x_0 = 0$  і

$A = \{\frac{1}{n}: n \in \mathbb{N}\}$ . Тоді функція  $\rho$  визначена в теоремі 2.3. на  $A \times A \times A$  має вигляд 2.27. З теореми 2.3. слідує, що  $(A, \rho)$  є повним D-метричним простором і будь-яка послідовність в  $A$ , яка прямує до 0 в звичайному розумінні, прямує до  $x$  згідно з  $\rho, x \in A$  і що  $\rho$ -послідовність задає топологію  $\tau$  на  $A$  за умови, що існує непорожня підмножина  $E$  множини  $A$ , яка є відкритою і за умови, що  $E$  містить  $\{\frac{1}{n}: n \in \mathbb{N}, n \geq N, N \in \mathbb{N}\}$ . Тоді  $\tau \in T_1$ , але не є Хаусдорфовою. Нехай:

$$x_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}, x_0 = \frac{1}{2}$$

Тоді  $\{x_n\}$  прямує, до  $\frac{1}{2}$  на D-метриці  $\rho$ . Маємо:

$$\rho(x_0, x_0, x_n) = \rho\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$$

Отже  $\{\rho(x_0, x_0, x_n)\}$  не прямує до 0.

#### Теорема 2.4.

Нехай  $(X, d)$  метричний простір,  $x_0 \in X$ , і  $\{x_n\}$  збіжна послідовність в  $X \setminus \{x_0\}$  з границею  $x_0$ .  $A$  підмножина  $X \setminus \{x_0\}$  яка містить  $\{x_n\}$ , і  $B$  підмножина  $X \setminus \{x_0\}$  яка містить  $A$ . Визначмо  $\rho: B \times B \times B \rightarrow R^+$ , наступним чином:

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} 0, & x = y = z \\ \max\{d(x_0, x), d(x_0, y), \\ \min\{\max\{d(x_0, y), d(x_0, z)\}, \\ \max\{d(x_0, x), d(x_0, z)\}\} \end{cases} \quad (2.28)$$

Нехай  $\rho_0$  задає відображення  $\rho$  на  $A \times A \times A$ . Тоді  $(B, \rho), (A, \rho_0)$  є повними D-метричними просторами,

$$A \subseteq B, \{x \in B: \exists \{y_n\} \in A, \{y_n\} \rightarrow x\} = B \neq A$$

► Наслідок з теореми 2.3. ◀

### Теорема 2.5.

Визначмо  $\Phi: (\mathbb{R}^+)^{3*} \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Припустимо, що  $\Phi$  задовольняє наступним умовам:

- 1) Симетрична для трьох змінних,
- 2)  $\Phi(t_1, t_2, t_3) = 0 \Leftrightarrow t_1 = t_2 = t_3 = 0$ ,
- 3)  $\Phi(t_1, t_2, t_3) \leq \Phi(t_1, t'_1, t'_2) + \Phi(t'_1, t_2, t'_3) + \Phi(t'_1, t'_2, t_3)$ ,  
 $(t_1, t_2, t_3), (t_1, t'_1, t'_2), (t'_1, t_2, t'_3), (t'_1, t'_2, t_3) \in (\mathbb{R}^+)^{3*}, t_i \leq t'_i + t''_i, i = 1, 2, 3$

Нехай  $d$  є метрикою на  $X$ . Нехай  $\rho: X \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$  визначається наступним чином:

$$\rho(x, y, z) = \Phi(d(x, y), d(y, z), d(x, z)) \quad (2.29)$$

Тоді  $\rho$  є D-метрикою на  $X$ . Якщо  $\Phi$  неперервна на  $(0, 0, 0)$ , тоді будь-яка послідовність Коші на  $d$ , буде на  $X$   $\rho$ -послідовністю Коші і

$$\{x_n\} \subseteq X, x \in X, d(x_n, x) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \Rightarrow \{x_n\} \rightarrow x$$

Припустимо, що  $\Phi$  задовольняє ще одну умову:

$$4) \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: t < \varepsilon, t \in \mathbb{R}^+, \Phi(0, t, t) < \delta$$

Тоді будь яка  $\rho$ -послідовність Коші буде  $d$ -послідовністю Коші і

$$\{x_n\} \subseteq X, \{x_n\} \rightarrow x \in X \Rightarrow d(x_n, x) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

Якщо  $\Phi$  неперервна на  $(0,0,0), \{\Phi(0, t_n, t_n)\} \rightarrow \Phi(0, t, t), t \in \mathbb{R}^+$  і  $\{t_n\}$  послідовність задана на  $\mathbb{R}^+$  прямує до  $t$ , тоді:

$$\{x_n\} \subseteq X, x \in X: d(x_n, x) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \implies \{x_n\} \rightarrow x$$

► Спочатку доведемо, що  $\rho \in D$ -метрикою на  $X$ . Оскільки  $\Phi$  симетрична для всіх трьох змінних, то й  $\rho$  також. З умови 2) випливає, що  $\rho(x, y, z) = 0 \iff x = y = z$ . Нехай  $x, y, z, u \in X$ . З умови 3) маємо:

$$\begin{aligned} \rho(x, y, z) &= \Phi(d(x, y), d(y, z), d(x, z)) & (2.30) \\ &\leq \Phi(d(x, y), d(y, u), d(x, u)) + \Phi(d(u, y), d(y, z), d(u, z)) \\ &\quad + \Phi(d(x, u), d(u, z), d(x, z)) \end{aligned}$$

Оскільки:

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(u, y) + d(x, u), \\ d(y, z) &\leq d(y, u) + d(u, z), \\ d(z, x) &\leq d(u, x) + d(z, u) \end{aligned}$$

то звідси отримуємо, що:

$$\rho(x, y, z) \leq \rho(x, y, u) + \rho(u, y, z) + \rho(x, u, z), \forall x, y, z, u \in X$$

Отже,  $\rho \in D$ -метрикою на  $X$ .

Припустимо, що  $\Phi$  неперервна на  $(0,0,0)$ . Нехай  $\{x_n\}$  є  $d$ -послідовністю Коші на  $X$ . Тоді  $d(x_n, x_m) \rightarrow 0, n, m \rightarrow \infty$ . Маємо:

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_m, x_k) &= \Phi(d(x_n, x_m), d(x_m, x_k), d(x_n, x_k)) \rightarrow \Phi(0,0,0) \\ &= 0, n, m, k \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.31)$$

Отже,  $\{x_n\}$   $\rho$ -послідовність Коші на  $X$ . Нехай:

$$\{x_n\} \subseteq X, x \in X, d(x_n, x) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

Тоді отримуємо наступне:

$$\begin{aligned} \rho(x, x_n, x_m) &= \Phi(d(x, x_n), d(x_m, x_n), d(x, x_m)) \rightarrow \Phi(0,0,0) = 0, n, m \\ &\rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.31)$$

оскільки кожна збіжна послідовність є  $d$ -послідовністю Коші і  $\Phi$  неперервна на  $(0,0,0)$ . Отже  $\rho(x, x_n, x_m) \rightarrow 0, n, m \rightarrow \infty$ . А отже  $\{x_n\} \rightarrow x$ .

Припустимо, що  $\Phi$  задовольняє умові 4). Нехай  $\{x_n\} \subseteq X, \{x_n\} \rightarrow x \in X$ . Нехай маємо деяке  $\varepsilon > 0$ . Тоді існує  $\delta > 0$ , таке що  $t < \varepsilon, t \in \mathbb{R}^+$  і  $\Phi(0, t, t) < \delta$ . Оскільки  $\rho(x_n, x_m, x_n) \rightarrow 0, n, m \rightarrow \infty$ , то існує  $N \in \mathbb{N}$ , таке, що  $\rho(x_n, x_m, x_n) < \delta, \forall n, m \geq N$ . А отже:

$$\Phi(d(x_n, x_m), d(x_m, x_n), d(x_n, x_n)) < \delta, \forall n, m \geq N$$

Іншими словами:

$$\Phi(0, d(x_n, x_m), d(x_n, x_m)) < \delta, \forall n, m \geq N$$

оскільки  $\Phi$  симетрична. Отже,  $d(x_n, x_m) < \varepsilon, \forall n, m \in N$ . Звідси  $\{x_n\}$   $d$ -послідовність Коші.

Нехай  $\{x_n\} \subseteq X, \{x_n\} \rightarrow x \in X$ . Нехай маємо деяке  $\varepsilon > 0$ . Тоді існує  $\delta > 0$ , таке що  $t < \varepsilon, t \in \mathbb{R}^+$  і  $\Phi(0, t, t) < \delta$ . Оскільки  $\rho(x, x_n, x_n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , то існує  $N \in \mathbb{N}$ , таке, що  $\rho(x, x_n, x_n) < \delta, \forall n \geq N$ . А отже:

$$\Phi(d(x_n, x_n), d(x, x_n), d(x_n, x)) < \delta, \forall n \geq N$$

Іншими словами:

$$\Phi(0, d(x_n, x), d(x_n, x)) < \delta, \forall n \geq N$$

Отже,  $d(x_n, x) < \varepsilon, \forall n \in N$ . Звідси  $\{x_n\} \rightarrow x$ , і є  $d$ -послідовністю Коші.

Припустимо, що  $\Phi$  неперервна на  $(0,0,0)$ ,  $\{\Phi(0, t_n, t_n)\} \rightarrow \Phi(0, t, t), t \in \mathbb{R}^+$  і  $\{t_n\}$  послідовність задана на  $\mathbb{R}^+$  прямує до  $t$ . Нехай маємо:

$$\{x_n\} \subseteq X, x \in X: d(x_n, x) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

Нехай  $y \in X$ . Тоді  $d(x_n, y) \rightarrow d(x, y), n \rightarrow \infty$ . Отже:

$$\{\Phi(0, d(x_n, y), d(x_n, y))\} \rightarrow \Phi(0, d(x, y), d(x, y)), n \rightarrow \infty$$

Тоді  $\rho(y, y, x_n) \rightarrow \rho(y, y, x), n \rightarrow \infty$ . Оскільки  $\Phi$  неперервна на  $(0,0,0)$ , то з викладеного вище слідує, що  $\{x_n\}$  прямує до  $x$ . Припустимо, що  $\Phi$  неперервна на  $(0,0,0)$  та неперервна на двох довільних змінних. Нехай:

$$\{x_n\} \subseteq X, x \in X: d(x_n, x) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

Виберемо дві змінні  $y, z \in X$ . Тоді  $\{d(z, x_n)\}, \{d(y, x_n)\}$  прямують до  $d(z, x), d(y, x)$  відповідно. Оскільки  $\Phi$  неперервна на двох довільних змінних, з цього слідує, що:

$$\begin{aligned} \Phi(d(y, z), d(z, x_n), d(y, x_n)) &\rightarrow \Phi(d(y, z), d(z, x), d(y, x)) \\ \{\rho(y, z, x_n)\} &\rightarrow \rho(x, y, z) \\ \{x_n\} &\rightarrow x \end{aligned}$$



### Теорема 2.6.

Нехай  $\Phi: (\mathbb{R}^+)^{3*} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $\Phi$  неперервна на  $(0,0,0)$  і задовольняє умовам 1), 2), 3), 4) в теоремі 2.5. Нехай  $\rho$  визначена так, як в теоремі 2.5. Тоді  $\rho$  є D-метрикою на  $X$ , послідовність на  $X$  є  $d$ -послідовністю Коші тоді і тільки тоді, коли вона є  $\rho$ -послідовністю Коші і послідовність  $\{x_n\}$  на  $X$  прямує до  $x$ . У загальному випадку  $\rho$ -послідовність задає топологію на  $X$ , яка узгоджена з метричною топологією заданою метрикою  $d$  на  $X$ .  $X$  є повним в сенсі метрики  $d$  тоді і тільки тоді, коли він є повним в сенсі D-метрики  $\rho$ . Тоді, вірними є наступні твердження.

- 1) Якщо  $\Phi(0, t_n, t_n) \rightarrow \Phi(0, t, t), t \in \mathbb{R}^+$  і  $\{t_n\}$  послідовність в  $\mathbb{R}^+$  прямує до  $t$ .  
 $\{x_n\} \subseteq X, x \in X$ , то  $\{x_n\} \rightarrow x$  згідно з  $\rho$ .
- 2) Якщо  $\Phi$  неперервна для будь яких двох змінних,  $\{x_n\} \subseteq X, x \in X$ , то  
 $\{x_n\} \rightarrow x$  згідно з  $\rho$ .
- 3) Якщо  $\Phi$  неперервна на  $(\mathbb{R}^+)^{3*}$ , то  $\rho$  неперервна на трьох змінних, і тоді  
 $\{\rho(u_n, v_n, w_n)\} \rightarrow \rho(u, v, w), u, v, w \in X$  і  $\{u_n\}, \{v_n\}, \{w_n\}$  послідовності на  $X$   
які прямують до  $u, v, w$  відповідно.

► Теорема 2.6. є наслідком теореми 2.5. ◀

**Приклад 2.4.** Визначмо функцію  $\Phi: (\mathbb{R}^+)^{3*} \rightarrow \mathbb{R}^+$  наступним чином

$$\Phi(t_1, t_2, t_3) = \begin{cases} t_1 + t_2 + t_3, & \min\{|t_1 - t_2|, |t_2 - t_3|, |t_1 - t_3|\} \leq 1, \\ 1 + t_1 + t_2 + t_3 & \end{cases} \quad (2.32)$$

З теореми 2.5.  $\Phi$  задовольняє 4-ом умовам, і є неперервною на  $(t_1, t_2, t_3)$ , якщо  $\min\{|t_1 - t_2|, |t_2 - t_3|, |t_1 - t_3|\} \neq 1$ . Визначмо  $\rho: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^+$  наступним чином:

$$\rho(x, y, z) = \Phi(|x - y|, |y - z|, |x - z|), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

Тоді з теореми 2.6. слідує, що  $\rho$  є D-метрикою на  $\mathbb{R}$ ,  $(\mathbb{R}, \rho)$  є  $\rho$ -повним, і  $\rho$ -послідовність визначає топологію на  $\mathbb{R}$ , яка є звичайною топологією на  $\mathbb{R}$ . Також, якщо  $\{u_n\} \subseteq \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}$ , то:

$$|u_n - u| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \{u_n\} \rightarrow u$$

Отже, кожна збіжна  $\rho$ -послідовність має власну границю. Нехай:

$$x_n = 1 + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Тоді  $\{x_n\}$  є послідовністю на  $\mathbb{R}$ . Очевидно, що  $\{x_n\} \rightarrow 1$  в звичайному розумінні.

Нехай  $x = 1, y = 3, z = 6$ . Тоді:

$$\begin{aligned} \rho(y, z, x) &= \rho(3, 6, 1) = \Phi(|3 - 6|, |6 - 1|, |1 - 3|) = \Phi(3, 5, 2) \\ &= 10(\min\{|3 - 5|, |5 - 2|, |2 - 3|\}) = \min\{2, 3, 1\} = 1 \\ \rho(y, z, x_n) &= \rho\left(3, 6, 1 + \frac{1}{n}\right) = \Phi\left(|3 - 6|, \left|6 - 1 - \frac{1}{n}\right|, \left|1 + \frac{1}{n} - 3\right|\right) \\ &= \Phi\left(3, \left|5 - \frac{1}{n}\right|, \left|2 - \frac{1}{n}\right|\right) = 11 - \frac{2}{n}, \forall n \\ &\geq 2(\min\left\{\left|3 - 5 + \frac{1}{n}\right|, |5 - 2|, \left|2 - \frac{1}{n} - 3\right|\right\}) \\ &= \min\left\{3, 1 + \frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right\} > 1 \end{aligned} \tag{2.33}$$

$$\rightarrow 11, n \rightarrow \infty$$

Отже,  $\rho(y, z, x_n)$  не прямує до  $\rho(y, z, x)$ .

**Приклад 2.5.** Визначмо функцію  $\Phi: (\mathbb{R}^+)^{3*} \rightarrow \mathbb{R}^+$  наступним чином:

$$\Phi(t_1, t_2, t_3) = \begin{cases} t_1 + t_2 + t_3, & \min\{t_1, t_2, t_3\} \leq 1, \\ 1 + t_1 + t_2 + t_3 & \end{cases} \tag{2.34}$$

З теореми 2.5.  $\Phi$  задовольняє 4-ом умовам, і є неперервною на  $(t_1, t_2, t_3)$ , якщо  $\min\{t_1, t_2, t_3\} \neq 1$ . Визначмо  $\rho: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^+$  наступним чином:

$$\rho(x, y, z) = \Phi(|x - y|, |y - z|, |x - z|), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

Тоді з теореми 2.6. слідує, що  $\rho \in D$ -метрикою на  $\mathbb{R}$ ,  $(\mathbb{R}, \rho) \in \rho$ -повним, і  $\rho$ -послідовність визначає топологію на  $\mathbb{R}$ , яка є звичайною топологією на  $\mathbb{R}$ . Також, якщо  $\{u_n\} \subseteq \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}$ , то:

$$|u_n - u| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \{u_n\} \rightarrow u$$

Отже, кожна збіжна  $\rho$ -послідовність має власну границю. Для  $\forall u \in \mathbb{R}$ , отримуємо:

$$\begin{aligned} \rho\left(y, y + 2, y + 3 - \frac{1}{n}\right) &= \Phi\left(2, 1 - \frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n}\right) = 6 - \frac{2}{n} \rightarrow 6, n \rightarrow \infty, \\ \rho\left(y, y + 2, y + 3 + \frac{1}{n}\right) &= \Phi\left(2, 1 + \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}\right) = 1 + 6 + \frac{2}{n} \rightarrow 7, n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2.35)$$

Послідовності

$$\begin{aligned} \left\{y + 3 - \frac{1}{n}\right\} \\ \left\{y + 3 + \frac{1}{n}\right\} \end{aligned} \rightarrow y + 3$$

Визначимо

$$x_n = \begin{cases} y + 3 - \frac{1}{n}, n = 2k \\ y + 3 + \frac{1}{n}, n = 2k + 1 \end{cases}$$

Тоді  $\{x_n\}$  прямує до  $y + 3$ , але  $\{\rho(y, y + 2, x_n)\}$  розбіжна.

## РОЗДІЛ 3

### УПОРЯДКОВАНІ ТОПОЛОГІЧНІ ЛІНІЙНІ ПРОСТОРИ

#### 3.1. Відношення порядку. Конуси

##### 3.1.1 Відношення строгого порядку.

*Означення 3.1.* Бінарне відношення  $<$  в множині  $X$  називається відношенням строгого часткового порядку, або просто строгим порядком, якщо воно задовольняє наступні умови:

- 1)(Антирефлексивність)  $\nexists a \in X, a < a$
- 2)(Транзитивність)  $\forall a, b, c \in X: a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$

#### Теорема 3.1.

Якщо бінарне відношення  $S$  на множині  $X$  одночасно транзитивне та антирефлексивне, то воно антисиметричне.

► Припустимо супротивне, нехай існує непуста множина  $X$  та бінарне відношення  $S$  на  $X$ , яке транзитивне, антирефлексивне, але не антисиметричне.

$$\exists a, b \in X: a < b \wedge b < a \wedge a \neq b$$

Тоді маємо, по транзитивності, що  $a < a$ , що неможливо, оскільки відношення антирефлексивне. Протиріччя. ◀

Формулу  $a < b$  прийнято читати, як « $a$  менше, ніж  $b$ », проте для того, щоб не зв'язувати з відношенням порядку на  $\mathbb{R}$ , кажуть « $a$  передує  $b$ »

**Приклад 3.1.** Відношення  $<$  в множині дійсних чисел  $\mathbb{R}$  являє собою відношення строгого порядку.

Достатньо перевірити виконання умов строгого порядку:

1)  $\forall a \in \mathbb{R} \ a \not< a$  – умова антирефлексивності виконується

2)  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$  – умова транзитивності виконується.

Отже, відношення  $<$  є відношенням строгого порядку на множині дійсних чисел [14].

### 3.1.2. Відношення нестроного порядку

*Означення 3.2.* Бінарне відношення  $\preceq$  в множині  $X$  називається відношенням нестроного часткового порядку, або просто нестрогим порядком, якщо воно задовольняє наступні умови:

$$1) (\text{Рефлексивність}) \forall a \in X: a \preceq a$$

$$2) (\text{Транзитивність}) \forall a, b, c \in X: a \preceq b \wedge b \preceq c \Rightarrow a \preceq c$$

$$(\text{Антисиметричність}) a \preceq b \wedge b \preceq a \Rightarrow a = b$$

**Приклад 3.2.** Відношення  $\leq$  в множині дійсних чисел  $\mathbb{R}$  являє собою відношення нестроного порядку.

Достатньо перевірити виконання умов нестроного порядку:

1)  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$  – умова транзитивності виконується

2)  $\forall a \in \mathbb{R}: a \leq a$  – умова рефлексивності виконується

3)  $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$  – умова антисиметричності виконується

Отже, відношення  $\leq$  в множині дійсних чисел  $\mathbb{R}$  є відношенням нестроного порядку.

### 3.1.3. Взаємозв'язок між відношеннями строго та нестроного порядку.

#### Теорема 3.2.

З кожним строгим порядком  $<$  асоційоване бінарне відношення  $\leq$ , визначене в тій же множині, наступним чином:

$$a \leq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b$$

Це є нестрогим порядком.

► Для доведення теореми слід перевірити чи задовольняє відношення  $a < b \vee a = b$  умовам із означення нестроного порядку, причому слід враховувати, що відношення  $<$  задовольняє умовам із визначення строгого порядку. Нехай:

$$a \leq b \vee b \leq a$$

Це означає, що або:

$$a < b \wedge b < c$$

або:

$$a = b \wedge b < c$$

або:

$$a < b \wedge b = c$$

або:

$$a = b \wedge b = c$$

З першого випадку маємо, оскільки відношення  $<$  транзитивне:

$$a < c \Rightarrow a \preceq c$$

Для другого випадку:

$$a = b < c \Rightarrow a < c \wedge a \preceq c$$

Для третього:

$$a < b = c \Rightarrow a < c \wedge a \preceq c$$

Для четвертого:

$$a = b = c \Rightarrow a < c \wedge a \preceq c$$

Отже, умова транзитивності виконується.

Антисиметричність виконується, оскільки:

$$a \preceq b \wedge b \preceq a \Rightarrow a = b$$

$$a \preceq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b$$

Умова рефлексивності:

$$a \preceq a \Leftrightarrow a < a \vee a = b$$

очевидна.

Відношення задовольняє всім умовам нестрогого порядку, отже, є відношенням нестрогого порядку  $\preceq$  [12].

### 3.1.4. Конуси.

Нехай маємо  $(X, <)$  – впорядкована множина, і  $a \in X$ .

*Означення 3.3.* Множина  $\{x \in X | a < x\}$  називається верхнім конусом елемента  $a$ , а множина  $\{x \in X | x < a\}$  називається нижнім конусом. При цьому, сам елемент  $a$ , не належить своїм конусам. Якщо додати елемент  $a$  до них, то отримаємо поповнені конуси:

$$1) (\text{верхній поповнений конус, або зірка}) C_X^+(a) = \{x \in X | a \preceq x\}$$

$$2) (\text{нижній поповнений конус}) C_X^-(a) = \{x \in X | x \preceq a\}$$

### **Теорема 3.3.**

Нехай  $(X, <)$  – частково впорядкована множина. Тоді:

$$1) C_X^+(b) \subset C_X^+(a), \text{ якщо } b \in C_X^+(a)$$

$$2) \forall a \in X: a \in C_X^+(a)$$

$$3) C_X^+(b) \subset C_X^+(a) \Rightarrow a = b$$

► Перша умова слідує із транзитивності порядку. Візьмемо довільний елемент:

$$c \in C_X^+(b)$$

За визначенням конуса:

$$b \preceq c$$

а умова

$$b \in C_X^+(a)$$

означає, що:

$$a \preceq b$$

Тоді, в силу транзитивності, звідси слідує, що:

$$a \preceq c$$

$$c \in C_X^+(a)$$

Отже, кожний елемент конуса  $C_X^+(b)$  належить також конусу  $C_X^+(a)$ , а з цього слідує:

$$C_X^+(b) \subset C_X^+(a)$$

Друге твердження слідує із визначення конуса і рефлексивності порядку.

Дійсно, за означенням:

$$C_X^+(a)$$

складається із таких  $b$ , що:

$$a \preceq b,$$

а в силу рефлексивності порядку, отримуємо, що:

$$a \preceq a$$

Третє твердження слідує із антисиметричності:

$$C_X^+(a) = C_X^+(b)$$

Беручи до уваги, що:

$$a \preceq b \wedge b \preceq a$$

і враховуючи антисиметричність, маємо, що:

$$a = b$$

◀[8].

### Теорема 3.4.

Нехай  $X$  довільна множина, і  $\forall a \in X$  визначена множина  $C_a$ . Якщо виконуються наступні умови:

$$1) \forall b \in C_a: C_b \subset C_a$$

$$2) \forall a \in X: a \in C_a$$

$$3) C_a = C_b \Rightarrow a = b$$

тоді відношення:

$$a \preceq b, \text{ при } b \in C_a$$

є нестрогим порядком в  $X$  і відносно цього порядку:

$$C_a = C_X^+(a)$$

► Згідно з теоремою 3.3. конуси в часткового впорядкованій множині володіють властивостями, з умови теореми. Ці дві теореми є еквівалентними.

◄.

## 3.2. Топологія лінійних і циклічних порядків

### 3.2.1. Лінійні порядки.

*Означення 3.4.* Якщо відношення порядку задовольняє умові:  $\forall a, b \in X$ ,

їх можна порівняти, тобто або:

$$a \preceq b,$$

або:

$$b \preceq a$$

то говорять, що порядок  $\preceq$  є лінійним, а множина  $(X, \preceq)$  – лінійно впорядкована множина або просто впорядкована множина.

**Приклад 3.3.** Відношення  $<$  в множині дійсних чисел є лінійним порядком.

Це очевидно з прикладу 3.1. та властивостей дійсних чисел.

### 3.2.2. Топологія лінійного порядку.

*Означення 3.5.* Нехай  $(X, <)$  – лінійно впорядкована множина. Множина його підмножин, побудована із множини  $X$  і всіх можливих правих променів, тобто множин виду  $\{x \in X | a < x\}$ , де  $a$  пробігає всі  $X$ , є базою топологічної структури в  $X$ .

*Означення 3.6.* Топологічна структура, породжена цією базою, називається топологією правих променів лінійно впорядкованої множини  $(X, <)$ .

Аналогічно вводиться топологія лівих променів лінійно впорядкованої множини: породжена базою з  $X$  та множин виду  $\{x \in X | x < a\}$

*Означення 3.7.* Нехай  $(X, <)$  - лінійно впорядкована множина. Множина його підмножин, побудована з  $X$  та множин виду:

$$\{x \in X | a < x < b\}, \{x \in X | x < b\}, \{x \in X | a < x\}$$

де  $a, b$  пробігають усю множину  $X$ , є базою топологічної структури в  $X$  і топологія породжена цією структурою називається інтервальною топологією лінійно впорядкованої множини. [4]

### 3.2.3. Топологія часткового порядку.

*Означення 3.8.* Нехай  $(X, \preceq)$  - частково впорядкована множина. Множина його підмножин, побудована із всіх можливих конусів виду:

$$C_X^+(a) = \{x \in X | a \preceq x\},$$

де  $a$  набуває всіх значень з  $X$ , є базою топологічної структури в  $X$ . Топологічна структура, породжена цією базою називається топологією порядку.

У топології порядку  $\forall a \in X$  володіє найменшим(по включенню) оточенням.  
Таким оточенням є:

$$C_X^+(a) = \{x \in X \mid a \preceq x\}$$

**Теорема 3.5.** Наступні топологічні простори є рівносильними:

- 1) кожна точка володіє найменшим(по включенню) оточенням,
- 2) перетин будь-якою сукупності відкритих множин відкрито,
- 3) об'єднання будь-якої сукупності замкнених множин замкнено.

► Оскільки, за означенням, замкнена множина є доповненням відкритої, то застосовуючи правила де Моргана, отримуємо що твердження 2 і 3 еквівалентні.

Достатньо показати, що із 1) слідує 2).

Розглянемо перетин довільної сукупності відкритих множин. Для будь-якої його точки кожна із множин, що перетинаються, є оточенням. Тому її найменший оточення міститься в кожній з множин, що перетинаються, а отже і в загальному перетині. Отже, кожна точка перетину належить до нього з деяким оточенням. Увесь перетин є об'єднанням цих оточень. А, отже, воно є відкритим. Візьмемо всі оточення однієї точки і розглянемо їх перетин. У силу припущення цей перетин є відкритим, оскільки містить цю точку, а, отже, маємо оточення. Цей оточення, як перетин всіх оточень, міститься в кожному оточенні, тобто є найменшим оточенням. ◀

Простір, який задовольняє умовам теореми 3.5. називається простором найменших оточень.

Цей клас топологічних просторів був описаний П.С. Александровим в 1937 році [3].

У просторі найменших околів відкриті та замкнуті множини задовольняють однакові умови. Сукупність замкнених множин простору найменших околів є топологічною структурою.

### 3.2.4. Циклічні порядки.

*Означення 3.9.* Циклічним порядком в скінченній множині називається лінійний порядок, розглянутий з точністю до циклічних перестановок.

Лінійний порядок дозволяє «пронумерувати» елементи скінченної множини  $X$  натуральними числами від 1 до кількості елементів множини  $X$ , так що:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Циклічна перестановка змінює місцями перші  $k$  елементів з останніми  $n - k$  елементами, не змінюючи порядку в кожній з цих груп:

$$(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n) \mapsto (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n, x_1, x_2, \dots, x_k)$$

У циклічно впорядкованій скінченній циклічній множині для кожного елемента міститься єдиний, який безпосередньо наступний за ним. Цим визначається відображення множини самої на себе, найпростіша циклічна перестановка:

$$x_i \mapsto \begin{cases} x_{i+1}, & \text{якщо } i < n \\ x_i, & \text{якщо } i = n \end{cases}$$

Ця перестановка транзитивна, тобто кожна ітерація переводить будь-який елемент, в будь-який інший.[4]

### 3.2.5. Топологія циклічного порядку.

*Означення 3.10.* Нехай  $X$  – циклічно впорядкована множина. Набір множин, відкритих в інтервальній топології для кожного лінійного порядку, визначаючих даний циклічний порядок на  $X$ , являє собою топологічну структуру на множині  $X$ . Така топологія називається топологією циклічного порядку.

## 3.3. Впорядковані топологічні простори

### 3.3.1. Впорядковані топологічні простори.

*Означення 3.11.* Топологічний простір  $X$  буде називатися впорядкованим якщо відношення  $<$  задовольняє наступним умовам:

$$1) \forall x, y \in X: x < y \vee x = y \vee y < x, \quad (3.1)$$

$$1) x, y, z \in X: x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z, \quad (3.2)$$

$$1) \forall x, y \in X, x < y: \exists x' \in U(x), \exists y' \in U(y): x < y' \wedge x' < y. \quad (3.3)$$

Враховуючи, що  $x \in X$  задається множиною  $A_x$  – множина точок  $y \in X, y < x$  та множиною  $B_x$  – множина точок  $y \in X, x < y$ . Тоді умови (3.1) та (3.3) еквівалентні умовам:

$$1) X - x = A_x + B_x, A_x B_x = \emptyset, \quad (3.1')$$

$$2) A_x, B_x \text{- відкриті.} \quad (3.3')$$

### Теорема 3.6.

Кожен впорядкований топологічний простір є Хаусдорфовим простором.

► Нехай  $x < y$ . Якщо існує елемент  $z$  такий, що  $x < z < y$ , тоді  $x \in A_x, y \in B_x$ , і множини  $A_x, B_x$  відкриті та неупорядковані за (3.1') та (3.3'). Якщо такого елемента  $z$  не існує, тоді:

$$A_x B_x = 0, x \in A_x, y \in B_x$$

і  $A_x, B_x$  – відкриті за (3.3') ◀.

### Теорема 3.7.

Якщо  $X$  – зв'язний простір, тоді умова (3.2) випливає з умов (3.1) та (3.3).

► Нехай  $x < y \wedge y < z$ . Тоді маємо, що  $z \in B_y$  і:

$$X - B_y \subset X - z$$

І за (3.1'):

$$A_y + y \subset A_z + B_z$$

Оскільки  $X$  – зв'язний, то з (3.1') та (3.3') слідує, що й:

$$A_y + y$$

зв'язний. Так як з умов (3.1') та (3.3')  $A_x, B_x$  – відкриті та неупорядковані, та беручи до уваги, що  $y \in A_x$ , маємо:

$$A_y + y \subset A_z$$

Оскільки  $x \in A_y$ , то звідси маємо, що й  $x \in A_z$  і маємо  $x < z$ . ◀

Нехай  $X \times X$  простір, який містить усі пари:

$$(x, y), x, y \in X, (x, y) \neq (y, x)$$

Нехай  $P(X)$  підпростір простору  $X \times X$ , заданий умовою  $x \neq y$ .

### Теорема 3.8.

Зв'язний топологічний простір  $X$  може бути впорядкованим тоді і тільки тоді, коли  $P(X)$  не зв'язний.

► Припустимо, що  $X$  впорядкований. Нехай  $A(X)$  підмножина  $P(X)$ , яка містить усі точки  $(x, y)$ , такі, що  $x < y$ . Аналогічно введемо  $B(X)$ , за умови  $y < x$ . З (3.1') слідує:

$$P(X) = A(X) + B(X), A(X)B(X) = 0$$

З (3.3') випливає, що  $A(X), B(X)$  – відкриті. З цього випливає, що  $P(X)$  не зв'язний. ◀

**Теорема 3.9.**

Нехай  $X$  та  $Y$  зв'язні впорядковані простори. Кожне безперервне відображення  $X$  на  $Y$  або зберігає порядок, або замінює його на протилежний.

► Нехай  $\psi$  відображення  $X$  на  $Y$ . Маємо  $(x, y) \in P(X)$ . Задаємо відображення:

$$\psi(x, y) = (\phi(x), \phi(y))$$

Очевидно, що  $\psi$  неперервне відображення  $P(X)$  на  $P(Y)$ . Оскільки, якщо  $X$  впорядкований і зв'язний, то  $A(X), B(X)$  є компонентами  $P(X)$ , маємо або:

$$\psi(A(X)) = A(Y)$$

або:

$$\psi(A(X)) = B(Y)$$

У першому випадку відображення  $\psi$  зберігає порядок, в другому – замінює його. ◀

**Теорема 3.10.**

Два порядки зв'язного топологічного простору  $X$  або співпадають або обернені один до одного.

► Беручи до уваги теорему 3.9. та задаючи  $X = Y$ , а відображення  $X$  в самого себе маємо вірне твердження. ◀

**Теорема 3.11.**

Якщо  $X$  зв'язний впорядкований простір, тоді порядок на  $X$  є неперервним.

► Нехай:

$$X = P + Q, P \neq 0 \neq Q,$$

розклад, такий, що:

$$x < y, x \in P, y \in Q$$

Припустимо, що в  $P$  не має останнього елемента, а в  $Q$  – першого. Тоді, для точки:

$$x \in P \exists x_1 \in P: x < x_1$$

За (3.3) існує окіл  $U(x)$  такий, що:

$$x' < x_1, x_1 \in U(x)$$

З цього випливає, що:

$$U(X) \subset P$$

і  $P$  – відкритий. Аналогічно  $Q$  – відкритий. Протиріччя

Припустимо, що  $x$  останній елемент в  $P$ , а  $y$  перший елемент в  $Q$ . Тоді  $P = A_y$  і  $Q = B_x$ . За (3.3')  $P$  та  $Q$  відкриті. Протиріччя.

Отже, порядок на  $X$  є неперервним. ◀[4]

### Теорема 3.12.

Нехай  $X$  впорядкований простір, а  $Y$  зв'язний впорядкований простір, та  $A$  відкрита та зв'язна підмножина множини  $Y$ . Для кожного безперервного відображення  $\phi$  множини  $X$  на  $Y$ , множина  $\phi^{-1}(A)$  – відкрита.

► За теоремою 3.11. порядок на  $Y$  – неперервний. Оскільки  $A$  зв'язна, отже:

$$Y = P + A + Q, y' \in P, y \in A, y'' \in Q$$

Візьмемо, що:

$$y' < y < y''$$

Оскільки  $A$  відкрита, то легко помітити, що якщо  $P \neq \emptyset$ , то існує останній елемент  $y_1 \in P$ . Аналогічно  $Q \neq \emptyset$  і існує перший елемент  $y_2 \in Q$ . З цього випливає або  $A = Y$  або  $A = A_{y_2}$  або  $A = B_{y_1}$  або  $A = A_{y_2} B_{x_1}$ . Нехай:

$$x_1 = \phi^{-1}(y_1),$$

$$x_2 = \phi^{-1}(y_2)$$

Оскільки відображення  $\phi$  зберігає порядок, то:

$$\phi^{-1}(A_{y_2}) = A_{x_2}$$

$$\phi^{-1}(B_{y_1}) = B_{x_1}$$

З цього випливає або:

$$\phi^{-1}(A) = X$$

або:

$$\phi^{-1}(A) = A_{x_2}$$

або:

$$\phi^{-1}(A) = B_{x_1}$$

або:

$$\phi^{-1}(A) = A_{y_2} B_{x_1}$$

Отже, за (3.3')  $\phi^{-1}(A)$  відкрита. ◀

**Теорема 3.13.**

Нехай  $X$  впорядкований простір,  $Y$  зв'язний впорядкований та локально зв'язаний простір. Кожне відображення  $\phi$  з  $X$  на  $Y$  є неперервним.

► Нехай маємо  $\phi$  – відображення. З теореми 3.12. слідує, що  $\phi^{-1}(A)$  відкрита для кожної відкритої множини  $A \subset Y$ . Оскільки  $Y$  локально зв'язаний, то маємо, що  $\phi^{-1}(U)$  відкрита для кожної відкритої множини  $U \subset Y$ . А, отже, відображення є неперервним. ◀

## ВИСНОВКИ

У даній роботі були розглянуті топологічні простори, а саме метричні топологічні простори,  $D$ -метричні топологічні простори та упорядковані лінійні топологічні простори. Проблеми побудови топології на цих просторах полягає в тому, аби узгодити їх з звичайним розумінням порядку або метрики побудованих на цих просторах.

На основі проведеного дослідження топологічних просторів можна зробити висновок, що топології побудовані в роботі відіграють важливу роль в розумінні властивостей тих чи інших просторів. Основним результатом роботи є побудова топології на  $D$ -метричному просторі, і узгодження її з звичною топологією.

Практична значимість дослідження полягає в тому, що можливо подивитися на простори не з боку алгебри, а з боку топології. На їх властивості, способи побудови та практичні застосування. У подальшому можливо більш детально дослідити топології на  $D$ -метричному просторі.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. Москва : Высшая школа, 1979. 336 с.
2. Архангельский А. В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. Москва : Наука, 1974. 424 с.
3. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. Москва : Наука, 1968. 272 с.
4. Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. Москва : ГИФМЛ, 1961. 408 с.
5. Змієнко М. Ю. Деякі питання метричних топологічних просторів *Студентська звітна конференція* : матеріали наукових досліджень молодих науковців. Суми : Вид-во фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С.Макаренка, 2020. Випуск 14. Том 1. С. 28–31.
6. Змієнко М. Ю. Основи топології в курсі математики старшої школи як засіб розвитку творчої особистості учня. *Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ\*плюс – 2020»* : матеріали III Міжнародної дистанційної науково-методичної конференції (квітень - травень 2020 р., м. Суми). Суми, 2020. С. 72–73.
7. Келли Дж. Л. Общая топология. Москва : Наука, 1968. 384 с.
8. Куратовский К. Топология. В 3 т. Т. 1. Топология. Москва : Мир, 1966. 584 с.
9. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. Москва : Наука, 1974. 480 с.
10. Погребний В. Д. Про деякі проблеми характеристики топологічної структури в термінах послідовностей. *Фізико-математична освіта*. 2009. №1. С. 26–32.

11. Погребний В.Д. Деякі метричні функції, що задають топологію. *Фізико-математична освіта*. 2015. №1(4).
12. Синюков Н.С., Матвеев Т.Н. Топология. Київ : Вища школа, 1984. 264с.
13. Элементарная топология / Виро О.Я., Иванов О.А., Нецветаев Н.Ю., Харламов В.М., 3-е изд. Москва : МЦНМО, 2018. 358 с.
14. Энгелькинг Р. Общая топология. Москва : Мир, 1986. 753 с.
15. A common fixed point principle in D-metric spaces. *Bull. Calcutta Math. Soc.* 1999. No. 6. P. 475–480.
16. Ahmad B., Ashraf M., Rhoades B. E. Fixed point theorems for expansive mappings in D-metric spaces. *Indian J. Pure Appl. Math.* 2001. 32. No. 10. P. 1513–1518.
17. Dhage B. C., Rhoades B. E. A comparison of two contraction principles. *Math. Sci. Res. Hot-Line*. 1999. No. 8. P. 49–53.
18. Dhage B. C., Pathan A. M., Rhoades B. E. A general existence principle for fixed point theorems in D-metric spaces. *Int. J. Math. Math. Sci.* 2000. No. 7. P. 441–448.
19. Dhage B. C. Generalised metric spaces and mappings with fixed point. *Bull. Calcutta Math. Soc.* 1992. No. 4. P. 329–336.
20. Dhage B. C., Smrati A., Ume J. A general lemma for fixed-point theorems involving more than two maps in D-metric spaces with applications. *Int. J. Math. Math. Sci.* 2003. No. 11. P. 661–672.
21. Generalized metric spaces and topological structure. *I An Stiint. Univ. Al. I. Cuza Ia,si. Mat.* 2000. No. 1. P. 3–24.
22. Ume J. S., Kim J. K. Common fixed point theorems in D-metric spaces with local boundedness. *Indian J. Pure Appl. Math.* 2000. No. 7. P. 865–871.
23. Ume J. S. Remarks on nonconvex minimization theorems and fixed point theorems in complete D-metric spaces. *Indian J. Pure Appl. Math.* 2001. No. 1. P. 25–36.

24. Nawab H., Reza S., Ravi P. A. On the topology and wt-distance on metric type spaces. *Fixed Point Theory and Applications*. 2014. № 88.
25. On common fixed points of pairs of coincidentally commuting mappings in D-metric spaces. *Indian J. Pure Appl. Math.* 1999. No. 4. P. 395–406.
26. On common fixed points of quasi-contraction mappings in D-metric spaces. *Indian J. Pure Appl. Math.* 2002. No. 5. P. 677–690.
27. On generalized metric spaces and topological structure. *II Pure Appl. Math. Sci.* 1994. No. 1-2. P. 37–41.
28. Proving fixed point theorems in D-metric spaces via general existence principles. *Indian J. Pure Appl. Math.* 2003. No. 4. P. 609–624.
29. Veerapandi T. and Chandrasekhara Rao K. Fixed points in Dhage metric spaces. *Pure Appl. Math. Sci.* 1996. No. 1-2. P. 9–14.