

Дмитро Данчук
Житомирський агротехнічний коледж, м. Житомир
elena.k.02@i.ua
Науковий керівник – О.Е. Корнійчук

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ СИЛИ СТРУМУ В RLC -ЛАНЦЮГУ

Усі зміни, які відбуваються в електричному ланцюзі: включення, вимкнення, коротке замикання, коливання величин будь-якого параметра тощо – тягнуть за собою перехідні процеси, що не можуть відбуватись миттєво, оскільки неможлива миттєва зміна енергії, яка є у запасі електромагнітного поля ланцюга. Таким чином, перехідний процес обумовлений невідповідністю величини запасеної енергії в магнітному полі котушки та електричному полі конденсатора її значенню для нового стану ланцюга.

У разі перехідних процесів можуть виникати великі перенапруги, надструми, електромагнітні коливання, які можуть псувати роботу пристрою аж до виходу його з ладу. З іншого боку, перехідні процеси знаходять корисне практичне застосування, наприклад, у різного роду електронних генераторах. Все це обумовлює необхідність вивчення методів нестационарних режимів роботи ланцюга.

Основним методом аналізу перехідних процесів у лінійних ланцюгах є класичний метод, який полягає у безпосередньому інтегруванні диференціальних рівнянь, що описують електромагнітний стан ланцюга.

Розглянемо RLC -ланцюг, що є важливою складовою більш складних електричних ланцюгів та мереж. Такий ланцюг, як показано на рис. 1, містить наступні елементи: **резистор**, опір якого дорівнює R (ом); **катушка**, індуктивність якої – L (генрі); **конденсатор**, ємність якого – C (фарад). Ці елементи під'єднано до джерела електрорушійної сили (наприклад, до батареї або до генератора), яке у момент часу t (сек.) подає до ланцюга напругу $E(t)$ (вольт). Креслення електричної схеми виконано у векторному графічному редакторі Microsoft Visio (рис.1).

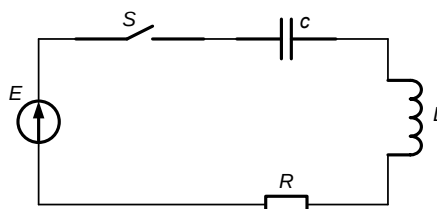


Рис. 1. Електричний ланцюг RLC

Нехай наразі ланцюг замкнений, тобто вимикач S на рис. 1 включений. Позначимо силу струму в мережі у момент часу t через $I(t)$ (ампер), а заряд конденсатора – $Q(t)$ (кулон). Тоді функції Q та I задовільняють наступному рівнянню:

$$\frac{dQ}{dt} = I(t). \quad (1)$$

Згідно елементарних законів електрики, падіння напруги на зазначених елементах подано у табл. 1. Для дослідження поведінки ланцюга (рис.1) будемо використовувати дані таблиці та другий закон Кірхгофа: алгебраїчна сума падінь напруги на елементах контуру ланцюга дорівнює напрузі, прикладеній щодо цього ланцюга.

Таблиця 1

Падіння напруги на елементах ланцюга			
Елемент ланцюга	Катушка	Резистор	Конденсатор
Падіння напруги на елементі	$L \frac{dI}{dt}$	RI	$\frac{1}{C} Q$

Як наслідок, сила струму та заряд у простому ланцюгу, що складається з резистора, котушки і конденсатора, задовольняє основному рівнянню ланцюга:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} Q = E(t). \quad (2)$$

Якщо підставити (1) в рівняння (2), отримаємо лінійне диференціальне рівняння другого порядку відносно заряду $Q(t)$ при відомій напрузі $E(t)$:

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C} Q = E(t). \quad (3)$$

У більшості практичних задач цікавить не заряд Q , а сила струму I . Використовуючи рівняння (1) або $Q'(t) = I(t)$, продиференціюємо обидві частини рівняння (3) та підставимо I замість Q' :

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C} I = E'(t). \quad (4)$$

Вражає той факт, що рівняння (3) і (4) мають таку саму форму, як і розглянута механічна модель у дослідженнях загасаючих коливань [6; 7] – рівняння руху системи, що складається з тіла, закріпленого на пружині з амортизатором, на яку діє зовнішня сила $F(t)$:

$$mx'' + cx' + kx = F(t). \quad (5)$$

Отже, між механічними та електричними системами існує дуже важлива аналогія.

Як правило, напруга змінного струму – $E(t) = E_0 \sin \omega t$. Тоді рівняння (4) приймає вигляд:

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = \omega E_0 \cos \omega t, \quad (6)$$

розв'язок якого можна подати у вигляді суми **перехідного струму** (струму при перехідному процесі або струму невстановленого режиму) $I_{\text{пс}}$ та **встановленого періодичного струму** $I_{\text{впс}}$:

$$I = I_{\text{пс}} + I_{\text{впс}}. \quad (7)$$

У випадках, де потрібно знайти величину короткогочасного струму, задаються початкові значення $I(0)$ та $Q(0)$. Це задачі Коші (задачі з початковими умовами). Тому спочатку необхідно обчислити $I'(0)$. Для цього підставляємо $t = 0$ в рівняння (2):

$$LI'(0) + RI(0) + \frac{1}{C}Q(0) = E(0), \quad (8)$$

яке дозволяє виразити $I'(0)$ через початкові значення струму, заряду та напруги.

Наприклад, розглянемо RLC -ланцюг, в якому $R = 50$ Ом, $L = 0,1$ Гн, $C = 5 \cdot 10^{-4}$ Ф. В момент часу $t = 0$, коли значення $I(0) = Q(0) = 0$, ланцюг підключається до батареї із сталою напругою 110 В. Знайдемо силу струму в ланцюгу.

Оскільки $E(0) = 110$, з рівняння (8) отримаємо $I'(0) = \frac{E(0)}{L} = \frac{110}{0,1} = 1100$ (А/с) і диференціальне рівняння набуває вигляду: $0,1I'' + 50I' + 2000I = E'(t) = 0$. Відповідне характеристичне рівняння $0,1r^2 + 50r + 2000 = 0$ має два корені $r_1 \approx -44$ і $r_2 \approx -456$. Використовуючи ці наближені значення, записуємо загальний розв'язок: $I(t) = c_1 e^{-44t} + c_2 e^{-456t}$. Далі розв'язуємо систему рівнянь:

$$I(0) = c_1 + c_2 = 0$$

$$I'(0) = -44c_1 - 456c_2 = 1100, \text{ звідки } c_1 = -c_2 = 2,670. \text{ Тоді шукана сила перехідного струму:}$$

$$I(t) = 2,67(e^{-44t} - e^{-456t}). \quad (9)$$

Зауважимо, що сила струму під час перехідного процесу $I(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, незалежно від сталої напруги (рис.2, I-1). Геометричну інтерпретацію розв'язку (9) проведено за допомогою ПЗ GRAN1 (рис.2).

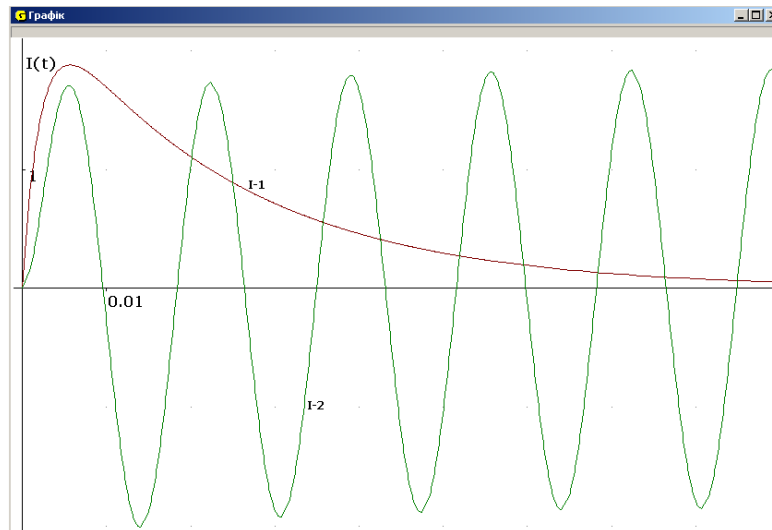


Рис. 2. Перехідний струм I-1 при підключенні батареї.
Сумарний струм I-2 при підключенні генератора

Якщо припустити, що RLC -ланцюг з тими самими початковими умовами $I(0) = Q(0) = 0$ у момент $t = 0$ приєднали до генератора змінного струму з напругою 110В і частотою 60Гц, то диференціальне рівняння (6) у цьому випадку набуває вигляду

$$0,1I'' + 50I' + 2000I = 377 \cdot 110 \cos 377t, \quad (10)$$

а його розв'язок (рис.2, I-2) є сумарним струмом (7), який складається з перехідного струму $I_{\text{пс}}$ та встановленого періодичного струму $I_{\text{впс}}$:

$$I(t) = (-0,307e^{-44t} + 1,311e^{-456t}) + 1,846 \sin(377t - 0,575). \quad (11)$$

Зручним способом для знаходження розв'язку (11), водночас побудови його графіку, дослідження та аналізу математичної моделі (10) є застосування системи комп'ютерної математики *Mathcad*.

Відмітимо, що після однієї п'ятої секунди $|I_{\text{пс}}(0,2)| < 0,000047$ А. Це можна порівняти з величиною струму, який проходить крізь нервово волокно людини (сила струму в аксоні під час передачі нервового імпульсу лише 0,004 мкА). Таке мале значення струму показує, що перехідна складова розв'язку зникає дуже швидко.

Той факт, що одне й те саме диференціальне рівняння служить математичною моделлю різних фізичних (механічних, електричних) або біологічних систем [1-9], вражаючи ілюструє важливу об'єднуючу роль математики в дослідженні природних явищ.

Список використаних джерел

1. Корнійчук О.Е. Новітні методи і прийоми навчання математичного моделювання та дослідження організації виробництва / О.Е. Корнійчук // Освіта та педагогічна наука. – Луганськ : ЛНПУ ім. Т. Шевченка, 2012. – № 3 (152). – С. 54-61.
2. Корнійчук О.Е. Методи інтегрального числення та GRAN-застосування для розв'язування задач економічного змісту / О. Е. Корнійчук // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2012. – № 8 (104). – С. 12-16.
3. Корнійчук О. Е. Комп'ютерні технології у вивченні математики для економістів / О.Е. Корнійчук, В.М. Єрмаков // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2004. – № 8(40). – С. 16-19.
4. Корнійчук О. Математичні моделі в економічних розрахунках на базі MathCad / Олена Корнійчук // Математика в школі : науково-методичний журнал. – 2006. – № 6. – С. 35-41.
5. Корнійчук О.Е. Професійно орієнтований тренінг у формуванні математичних компетентностей інженерів еколого-природознавчого напрямку / О.Е. Корнійчук // Гуманітарний вісник ДВНЗ «П.-Хм. ДПУ ім. Г. Сковороди». Сер. Педагогіка. Психологія. Філософія. – 2013. – Вип. 28, т. 2. – С. 439-445.
6. Корнійчук О. Е. Пропедевтика математичного моделювання в курсі вищої математики / О. Е. Корнійчук // Сб. научных трудов межд. конф. «Совр. иннов. технологии подготовки инжен. кадров для горной пром. и трансп. 2016». – Днепропетровск, ГВУЗ «Нац. горный университет», 2016. – С. 431-440.
7. Корнійчук О.Е. Моделі динаміки у задачах менеджменту лісового та мисливського господарства / О.Е. Корнійчук // Фізико-математична освіта. – Суми : СДПУ, 2017. – Вип. 1(11). – С. 62-67.
8. Корнійчук О.Е. Дослідження диференціальних моделей механічних систем / О.Е. Корнійчук // Сборник научных трудов междун. конф. «Современные инновационные технологии подготовки инженерных кадров для горной промышленности и транспорта 2018». – Днепр, Национальный горный университет, 2018. – С. 345-349.
9. Марчук І. Моделювання механічних систем: загасаючі коливання / Іван Марчук, Олена Корнійчук // Наукова діяльність як шлях формування професійних компетентностей майбутнього фахівця : матеріали Міжнародної НПК, 7-8 гр. 2017 р., м. Суми; у 2-х ч. – Суми : ФОП Цьома С.П., 2017. – Ч. 1. – С. 158-160.

Анотація. Данчук Д. Дослідження динаміки сили струму в RLC-ланцюгу. У статті проведено моделювання електричної системи, яка складається з резистора, котушки та конденсатора. Проведено аналіз сили струму в ланцюгу, елементи якого під'єднано до джерела електрорушійної сили, – до батареї або генератора. Модель побудовано на основі теорії диференціальних рівнянь з використанням комп'ютерної графічної інтерпретації розв'язання.

Ключові слова: електричний ланцюг, опір, індуктивність, ємність, напруга, заряд, сила струму, диференціальне рівняння.

Аннотация. Данчук Д. Исследование динамики силы тока в RLC-цепи. В статье проведено моделирование электрической системы, которая состоит из резистора, катушки и конденсатора. Проведен анализ силы тока в цепи, элементы которой подключены к источнику ЭДС, – к батарее или генератору. Модель построена на основе теории дифференциальных уравнений с использованием компьютерной графической интерпретации решения.

Ключевые слова: электрическая цепь, сопротивление, индуктивность, емкость, напряжение, заряд, сила тока, дифференциальное уравнение.

Summary. Danchuk D. The study of the dynamics of the current in the RLC-circuit. The article contains a simulation of the electrical system, which consists of a resistor, a coil and a capacitor. The analysis of the current in the circuit, the elements of which are connected to the source of the EMF – to the battery or generator. The model is based on the theory of differential equations using computer-generated graphical interpretation of the solution.

Keywords: electric circuit, resistance, inductance, capacitance, voltage, charge, current, differential equation.