allows to reveal the role of mathematics in the quality learning of special disciplines, as well as in future professional activities; the use of a set of educational professionally oriented tasks, the solution of which significantly affects the motivation to study a higher mathematics course.

The study has confirmed that the use of visual content significantly improves the effectiveness of presentation and learning of higher mathematics concepts.

***Key words:** course of higher mathematics, design, visualisation, modern information technologies, structural and logical schemes, pedagogical technologies, professionally oriented tasks, sign and symbolic means.*

УДК 371.321
DOI 10.5281/zenodo.14566851

І. В. Никифорчин
ORCID ID 0000-0003-0210-3188
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ З ЕКОНОМІЧНИМ ЗМІСТОМ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Всі галузі суспільного життя постійно та зі зростаючою швидкістю розвиваються. Це стосується і економіки, яка вивчає поведінку людей і прийняття рішень в умовах обмежених ресурсів.

Цей розвиток неможливо здійснити без використання математики. Незважаючи на те, що економіка належить до предметів соціально-гуманітарного циклу, основним методом є метод математичного моделювання. Ми вважаємо математичну освіту вагомим фактором розвитку економіки. Використання математичних методів дозволяє учасникам економічного процесу приймати оптимальні рішення, взаємодіяти з економічною системою, планувати ресурси та прогнозувати наслідки.

Сьогодні вміти використовувати математично-економічні знання потрібно не тільки економістам, а і всім відповідальним громадянам нашої держави. Перш за все, людина повинна знати, як оптимізувати свій час, свої фінанси, свою діяльність. Наприклад, як мінімізувати витрати на паливо, як збільшити свій фінансовий дохід, як раціонально використати вільний час тощо.

Людей завжди цікавило питання вибору найкращого (оптимального) варіанту серед усіх можливих. Завдання полягають у пошуку найбільшого або найменшого значення та змінних, при яких воно досягається. Ці завдання об'єднуються під поняттям «задачі на знаходження екстремуму», а методи їх розв'язання є основою теорії оптимізації.

На жаль, задачі на оптимізацію рідко зустрічаються в шкільному курсі математики. Проте доступніші з них можуть пропонуватись учням на різних етапах їх математичної освіти і привчати їх до критичного розуміння розв'язку, до застосування методів оптимізації. Ми пропонуємо впровадити оптимізаційні задачі різного рівня складності до шкільної математики.

Аналіз публікацій з даної теми показує, що ані питання формування економічної культури учнів загальноосвітніх шкіл, ані аспекти підготовки вчителів школи до такої категорії проблем не висвітлені в сучасних педагогічних дослідженнях достатньою мірою.

Ми розглядаємо кілька категорій задач, які можна розв'язувати в обов'язкових темах програми алгебри для середньої школи. Це сприятиме формуванню міжпредметних компетентностей і готуватиме учнів до використання абстрактних понять і методів у повсякденному житті. Запропоновано приклади задач, більшість з яких розв'язано.

***Ключові слова:** економічна грамотність, міжпредметні компетентності, математика, середня освіта, оптимізація, економічна культура, математична компетентність, здобувачі освіти.*

Постановка проблеми. Аналіз публікацій з даної теми показує, що ані питання формування економічної культури учнів закладів загальної середньої освіти, ані аспекти підготовки вчителів до такої категорії проблем не висвітлені в сучасних педагогічних дослідженнях достатньою мірою.

Аналіз актуальних досліджень. Проблеми, пов'язані з підвищенням економічної культури засобами математики в Україні досліджували такі науковці: О.І. Білик, Т.В. Новікова, Б.І. Пшик, В.В. Слобода, Т.С. Смовженко, Д.В. Васильєва, В.А. Швець, В.В. Коваль, З.І. Слєпкань, Л. Соколенко та ін [2,3,4,5,7].

Результати аналізу доробку вчених свідчать, зокрема, що недостатньо розкрита проблема формування математичних компетентностей, як складника економічної населення; не розглянуто проблему підготовки майбутнього вчителя математики до вивчення економічного виховання учнів; не визначено обсяг складників змісту цієї підготовки.

Метою статті є дослідження ролі оптимізаційних задач з економіки у формуванні економічної культури учнів та знаходження способів формування знань та навичок, необхідних в орієнтуванні в економічній системі і ефективному управлінні особистими ресурсами.

Виклад основного матеріалу. Багато задач, з якими люди зустрічаються в щоденній практиці, є багатоваріантними. Серед багатьох можливих варіантів доводиться вибирати найкращі при деяких обмеженнях, накладених на природні, економічні та технологічні можливості [1,6]. Таким чином, виникає необхідність використання методів оптимізації для розв'язування таких задач. Оптимізаційні задачі в економіці включають в себе пошук оптимальних рішень для максимізації прибутку, мінімізації витрат, розподілу ресурсів та багатьох інших важливих завдань. Вони застосовуються в різних галузях, включаючи фінанси, виробництво, логістику, маркетинг, торгівлю та ін.

Відповідно виникає необхідність використовувати сучасні математичні методи та обчислювальну техніку. При розв'язанні таких задач відбувається формування наукового мислення, здатність бачити ситуацію в цілому, розвиток пізнавального інтересу, здатність виходити з кризових ситуацій з найменшими втратами. Цінність співробітника, який володіє такими якостями, очевидна для суспільства.

Математичне програмування — область математики, яка розробляє теорію і числові методи розв'язування екстремальних задач з обмеженнями, тобто задач на екстремум функції багатьох змінних з обмеженнями на область зміни цих змінних.

Функцію, екстремальне значення якої потрібно знайти в умовах економічних можливостей, називають цільовою, показником ефективності, чи критерієм оптимальності. Економічні можливості формалізуються в вигляді системи обмежень. Все це складає математичну модель. Математична модель задачі — це відображення вихідної економічної ситуації в вигляді функцій, рівнянь, нерівностей, цифр.

Модель задачі математичного програмування включає в себе:

- сукупність невідомих величин, діючи на яку, ми можемо удосконалити систему. Їх називають планом, вектором управління, тощо;
- цільову функцію (показник ефективності, критерій оптимальності тощо).

Також важливо відзначити, що математичний апарат при розв'язуванні задач оптимізації використовується не тільки як інструмент розрахунку, але відіграє важливу роль саме в задачі прийняття рішень – виборі найкращого варіанту, при якому можна досягти найбільш ефективного результату.

На уроках математики в основній школі можна розглядати задачі оптимізації, для розв'язання яких не потрібно використовувати похідну. Тут розглядають способи перебору, властивості функцій, властивості певних нерівностей, тощо. Коли учням подається тема «Квадратична функція», можна навчити дітей розуміти, що таке найбільше чи найменше значення, де воно досягається тощо. Такого типу задачі можна ввести також при вивченні теми «Доведення нерівностей». Наведемо приклади таких задач.

Задача 1. В розпорядженні керівника є бригада з 24 людей. Їх потрібно розподілити на два об'єкти. Якщо на першому об'єкті працює t чоловік, то їх добова зарплата становить

$4t^2$ гривень. Якщо на другому об'єкті працює t чоловік, то їх добова зарплата становить t^2 гривень. Як потрібно розподілити ці об'єкти бригаду робітників, щоб виплати на їх добову зарплату були найменші?

Очевидно, що задача зводиться до мінімізації квадратичної функції $f(t) = 4t^2 + (24-t)^2 = 5t^2 - 48t + 576$, де t – кількість людей, яких скеровано на перший об'єкт, $t \in [0,24], t \in N$. Найменше значення буде в точці $t_0 = 4{,}8$. Зауважимо, що точка мінімуму не є натуральним числом, тому досліджувана функція досягає мінімального значення в точці 4, або в точці 5. Потрібно знайти і порівняти ці значення: $f(4) = 464, f(5) = 461$. Таким чином, на множині натуральних значень аргумента найменше значення досягається в точці 5.

Задача 2. Столярний цех виробляє деяку кількість виробів, які продаються за ціною $p(x) = 50 - 0{,}1x$, де x – кількість вироблених виробів. Сукупні витрати становлять $c(x) = 0{,}02x^2 + 14x + 800$. Знайти оптимальний для цеху обсяг виготовлення товару та відповідний йому максимальний прибуток.

Розв'язання. Прибуток — це різниця між доходом і витратами, в даному випадку функція прибутку буде дорівнювати наступній квадратичній функції: $s(x) = p(x)x - c(x) = (50 - 0{,}1x)x - 0{,}02x^2 - 14x - 800 = -0{,}12x^2 + 36x - 800.$

Як бачимо, знаходження оптимального випуску зводиться до знаходження максимального значення даної квадратичної функції при $x > 0$.

Задача 3. Андрій купив цінний папір за ціною 7 тис. грн. Ціна паперу кожного року зростає на 2 тис. грн. В кожен момент Андрій може продати папір і покласти гроші на банківський рахунок під 10% річних. Протягом якого року після покупки паперу Андрій повинен продати цінний папір, щоб через двадцять років після купівлі цього паперу сума на банківському рахунку була найбільшою.

Розв'язання. Якщо Андрій продасть цінний папір протягом k-го року, то через 20 років після покупки сума на його рахунку буде $(2k+5)1{,}1^{20-k}$. Таким чином, нам потрібно знайти номер максимального члена послідовності $a_k = (2k+5)1{,}1^{20-k}$, де k набуває натуральні значення від 1 до 20. Розглядаючи прирости членів послідовності $c_k = a_k - a_{k-1} = (1{,}1)^{20-k}(2k + 5 - 1{,}1(2k-1) + 5) = (1{,}1)^{20-k}(1{,}7 - 0{,}2k)$, бачимо, що $c_k < 0$ при $k \leqslant 8$ і що $c_k > 0$ при $k > 8$. Отже, найбільшого значення послідовність a_k набуває при $k = 8$. Таким чином, цінний папір потрібно продати протягом восьмого року.

Задача 4. У фермера є два поля, кожне площею 10 га. На кожному з них можна вирощувати картоплю і моркву, поля можна ділити між культурами в будь-якій пропорції. Урожайність картоплі на першому полі становить 500 ц/ га, на другому полі – 300 ц/ га. Урожайність моркви на першому полі становить 300 ц/ га, на другому полі становить 500 ц/ га. Фермер може продати картоплю по ціні 2000 грн. за центнер, а моркву — по ціні 3000 грн. за центнер. Який найбільший дохід може отримати фермер?

Розв'язання. Нехай x *га* – кількість гектарів, що відведено під картоплю на першому полі, тоді $10 - x$ *га* – кількість гектарів, що відведена під моркву на першому полі. Аналогічно y *га* – кількість гектарів, що відведено під картоплю на другому полі, тоді $10 - y$ *га* – кількість гектарів, що відведена під моркву на другому полі. Функція доходу буде наступною:

$s(x) = 2000 * 500x + 3000 * 300(10 - x) + 2000 * 300y + 3000 * 500(10 - y)$ при умові $0 \leqslant x \leqslant 10,\ 0 \leqslant y \leqslant 0.$

Отже, задача зводиться до максимізації функції $s(x,y) = 100000x - 900000y + 4500000$ при попередніх умовах. Використання властивостей лінійних нерівностей приводить до того, що максимальне значення рівне $s(x,y) = 5500000$ і досягається при $x = 10$ і $y = 0$.

Задача 5. Виробництво x тис. одиниць продукції обходиться в q=0,5x^2+x+7 млн.грн. в рік. При ціні p грн. в рік за одиницю продукції річний прибуток від продажу продукції становить px $- q$. При якому найменшому значенні p сумарний річний прибуток складе не менше 25 тис. грн.?

Розв'язання. Задача зводиться до знаходження найменшого значення p, що задовольняє нерівність px $- (0{,}5x^2$+x+7$) \geqslant 25$. З даної нерівності ми можемо виразити p і скористатися нерівністю Коші між середнім арифметичним та середнім геометричним.

$p \geqslant \frac{x}{2} + \frac{32}{x} + 1 \geqslant 2\sqrt{\frac{x}{2}\frac{32}{x}} + 1 = 9.$

Таким чином, найменше значення рівне $p = 9$.

Очевидно, що найбільша кількість задач на екстремуми розв'язується при вивченні теми «Похідна функції та її застосування». В профільних класах доцільно при формуванні поняття похідної виробляти розуміння того, що похідна моделює не лише швидкість механічного руху, а й швидкість зміни будь-якого процесу з часом. Можна поруч з фізичним та геометричним змістом похідної ввести економічний зміст похідної, як граничної величини (граничний прибуток, граничні витрати, тощо) [1].

Основними теоремами теми «Похідна функції та її застосування», які використовуються в практичних розрахунках, є необхідна і достатня умови існування екстремумів функцій.

Тому прикладні задачі, які використовують дані теореми, застосовуються для повторення або закріплення знань і формування вмінь учнів по даній темі і вчать застосовувати математичні знання в реальних економічних ситуаціях [3]. Учні повинні вміти побудувати модель задачі, визначити змінні і знайти екстремальне значення [4,5].

Задача 6. В двох шахтах працюють по 160 робітників, кожен з яких може працювати по 5 год на видобуванні нікелю або алюмінію. В першій шахті один робітник за годину добуває 0,1 кг. алюмінію або 0,3 кг. нікелю. В другій шахті для добування для добування x кг. алюмінію в день потрібно x^2 людино-годин праці, а для добування y кг нікелю потрібно y^2 людино-годин праці. Для потреб промисловості можна використовувати і алюміній, і нікель, причому 1 кг. алюмінію можна замінити 1 кг. нікелю. Яку найбільшу масу металів можна добути в обох шахтах сумарно для потреб промисловості?

Розв'язання. Оскільки нікель і алюміній взаємозамінні, всі робітники першої фабрики повинні бути направлені на виробництво нікелю, оскільки вони більш ефективні в добуванні цього металу.

Нехай в другій шахті x робітників добувають алюміній, тоді нікель $160 - x$. Тоді за добу вони добудуть $\sqrt{5x}$алюмінію і $\sqrt{5(160 - x)}$кг. нікелю. Задача зводиться до максимізації функції: $f(x) = \sqrt{5x} + \sqrt{800 - 5x}$ при умові $0 \leqslant x \leqslant 60$.

Задача 7. Підприємство виробляє протягом інтервалу часу задану величину xпевних товарів. При цьому воно повинно платити податок $C(x) = x^2 - 20x + 400$. Середні єдині загальноприйняті податки становлять $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$. Який об'єм товарів повинно виробляти підприємство, щоб платити мінімальний середній єдиний податок?

Розв'язання. Задача зводиться до мінімізації функції $C_m(x) = \frac{C(x)}{x} = x - 20 + \frac{400}{x}$при умові $x > 0$.

Якщо ми працюємо з учнями, які вивчають економіку або мають відповідний факультативний курс, можна розглянути задачу на знаходження оптимального споживчого набору. Це вже є прикладом найпростішої задачі на умовний екстремум.

Задача 8. Загальна корисність від споживання товарів x та y раціональним споживачем має вигляд $u(x, y) = xy$, де x та y — обсяги споживання зазначених товарів. Ціни товарів $p_x = 10$ та $p_y = 5$, бюджет споживача $I = 300$. Скільки одиниць товарів придбає споживач?

Розв'язання. Задача зводиться до знаходження максимального значення функції $u(x, y) = xy$ при умовах $10x + 5y \leqslant 300$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Оскільки максимальне значення досягається, якщо виконується рівність $10x + 5y = 300$, то виразивши y через x і підставивши в цільову функцію, отримаємо функцію однієї змінної $u(x) = x(60 - x) = 60x - x^2$, для якої потрібно знайти точку екстремуму.

Важливо підбирати завдання так, щоб вони відповідали рівню підготовки учнів, не містили багато нової інформації з економіки, фінансів, тощо. Такі задачі формують математичну і економічну культуру учнів, виконують профорієнтаційну роботу.

Висновки та перспективи подальших наукових розвідок. Оптимізаційні задачі з економічним змістом сприяють поглибленню розуміння учнями математичних концепцій і одночасно готують учнів до розуміння базових економічних понять. Вчителі математики повинні вміти впроваджувати такі задачі різного рівня складності в загальноосвітній курс математики, узагальнювати, систематизувати та використовувати знання, вміння та навички щодо окремих методичних особливостей розв'язування задач різного рівня, проектувати й організовувати сучасне освітнє середовище для навчання, виховання та розвитку учнів засобами математики на уроках і в позаурочний час. Такий підхід допоможе підготувати майбутнє покоління, що має компетенції для застосування в практичній діяльності.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ / REFERENCES

1. Бугір, М. К. (2001). Математика для економістів. Тернопіль: Підручники і посібники. (Bugir, M. K. (2001). Mathematics for economists. Ternopil : Pidruchnyky i posibnyky).
2. Дутка, Г. Я. (1999). Застосування диференціального числення в задачах економічного змісту. Математика в школі, 2, 23–25. (Dutka, G. Ya. (1999). Application of differential calculus in economic problems. Mathematics at school, 2, 23–25).
3. Соколенко, Л. О., Швець, В. О. (2014). Різні типи прикладних задач, що призначені для вивчення похідної та її застосувань у курсі алгебри і початків аналізу. Математика в рідній школі, 9, 2–10. (Sokolenko, L. O., Shvets, V. O. (2014). Various types of applied problems intended for studying the derivative and its applications in the course of algebra and the beginnings of analysis. Mathematics at home school, 9, 2–10).
4. Фесенко, Г. А. (2016). Залучення учнів до розв'язування математичних задач фінансового змісту та підготовка майбутніх учителів математики до їх використання в навчальному процесі. Наукові записки. Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти, 9, частина 2, 57–64. (Fesenko, G. A. (2016). Involving students in solving mathematical problems of financial content and preparing future mathematics teachers for their use in the educational process. Scientific notes. Series: Problems of the methodology of physical, mathematical and technological education, 9, part 2, 57–64).
5. Васильєва, Д. В., Василюк, Н. І. (2016). Розвиток математичної компетентності учнів на уроках математики. Математика в рідній школі, 6, 2–7. (Vasilyeva, D. V., Vasilyuk, N. I. (2016). Development of mathematical competence of students in mathematics lessons. Mathematics in the native school, 6, 2–7).
6. Леоненко, М. М., Мішура, Ю. С., Пархоменко, В. М., Ядренко, М. Й. (1995). Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці. Київ : Інформатика. (Leonenko, M. M., Mishura, Yu. S., Parkhomenko, V. M., Yadrenko, M. Y. (1995). Theoretical-probability and statistical methods in econometrics and financial mathematics. Kyiv : Informatika).
7. Мерзляк, А. Г., Номіровський, Д. А., Полонський, В. Б. (2018). Алгебра і початки аналізу: профільний підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія. (Merzlyak, A. G., Nomirovsky, D. A., Polonsky, V. B. (2018). Algebra and the beginnings of analysis: a specialized textbook for the 10th grade of general secondary education institutions. Kharkiv : Gymnasium).

Nykyforchyn I. V. Solving optimization problems with economic contents at Mathematics classes.

All aspects of social life are constantly and steadily developing. This is related also to economics, which studies human behaviour and decision making under limited resourses.

This development is impossible without use of mathematics. Despite economics is considered to be a subject in the field od social sciences and humanities, its main method is mathematical simulation. We believe that mathematical education is a significant factor of development of economy. Use of

mathematical methods allows participants of economic processes to make optimal decisions, to interact with the system of economy, to plan resources, and to predict consequences.

Nowadays ability to use mathematical an economic knowledge is crucial not only for the economists, but for all responsible citisens of our country. First of all, a person should be able to optimize his/her time, finance, and activity. For example, to minimize fuel expences, to increase financial income, to use spare time reasonable, etc.

People have always been interested in choosing the optimal (the best) variant of all the possible ones. The goal is to find the least or the greatest value and variables for which it is attained. These problems are called «extremal», and methods for their solving are the essence of optimization theory.

Unfortunately, optimization problems are seldom met in school Mathematics. Nevertheless, some if them are quite tractable and can be proposed to the pupils at different stages of their mathematical education to make them accustomed to critical view on the solutions found and to use of optimization methods. We suggest introduction of optimization problems of different levels of complexity into school Mathematics program.

Analysis of publications on the topic shows that neither questions of economic culture of secondary school students nor aspects of preparation of teachers for this category of problems are not covered sufficiently in modern pedagogical research.

We consider several types of problems that can be solved within mandatory topics of Algebra for secondary schools. This will facilitate formation of interdisciplinary competences and prepare students to use of abstract notions and methods in their daily life. Most of the problems are provided with solutions.

***Key words:** economic literacy, interdisciplinary competences, mathematics, secondary education, optimization, economic culture, mathematical competence, education seekers.*

УДК 373.3/.5.091.279.7:51"540.6"
DOI 10.5281/zenodo.14567022

Н. А. Тарасенкова
ORCID ID 0000-0002-6418-6380
І. А. Акуленко
ORCID ID 0000-0003-4603-409X
Черкаський національний університет ім. Б. Хмельницького

ОЦІНЮВАННЯ ГРУП ЗАГАЛЬНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ У ПІДСУМКОВОМУ КОНТРОЛІ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ УЧНІВ З МАТЕМАТИКИ

У Державному стандарті базової середньої освіти унормовано вимоги до обов'язкових результатів навчання учнів з математичної освітньої галузі, які об'єднано в групи загальних результатів (ГЗР). Оцінювання відповідності результатів навчання учнів, які завершили здобуття базової середньої освіти, вимогам державного стандарту здійснюється шляхом державної підсумкової атестації. Однак нині перед учителями постає проблема оцінювання ГЗР не лише на завершальному етапі здобування загальної середньої освіти, а й в освітньому процесі загалом, зокрема здійснюючи підсумковий контроль навчальних досягнень учнів з математики. У статті окреслено шляхи розв'язання проблеми оцінювання ГЗР у підсумковому контролі навчальних досягнень учнів з математики. Обґрунтовано, що чотири ГЗР формуються у будь-якій математичній діяльності; усі ГЗР формуються комплексно, у взаємозв'язку; ГЗР формуються поступово, кумулятивно, розв'язування будь-якої математичної задачі робить певний внесок у формування кожної ГЗР; немає потреби у спеціальних математичних задачах, спрямованих на забезпечення формування однієї конкретної ГЗР. Емпірично встановлено, що питома вага внеску розв'язування будь-якої математичної задачі до певної групи результатів варіюється залежно від типу задачі. Представлено калькулятор для визначення внеску задач на обчислення, на доведення, на