Шишенко І., Лукашова Т., Пипка О. Maple як інструмент візуалізації та аналізу графів у курсі дискретної математики у процесі професійної підготовки майбутніх учителів математики. *Освіта. Інноватика. Практика,* 2025. Том 13, № 7. С. 154-161. https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol13i7-021.

Shyshenko I., Lukashova T., Pypka O. Maple yak instrument vizualizatsii ta analizu hrafiv u kursi dyskretnoi matematyky u protsesi profesiinoi pidhotovky maibutnikh uchyteliv matematyky [Maple as a tool for visualization and analysis of graphs in the course of discrete mathematics in the process of professional training of future mathematics teachers]. *Osvita. Innovatyka. Praktyka – Education. Innovation. Practice,* 2025. Vol. 13, No 7. S. 154-161. https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol13i7-021.

УДК 378.147
DOI: 10.31110/2616-650X-vol13i7-021

Інна ШИШЕНКО[1], Тетяна ЛУКАШОВА[2], Олександр ПИПКА[3]
[1, 2] *Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка, Україна*
[3] *Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Україна*
[1] *https://orcid.org/0000-0002-1026-5315*
shiinna@ukr.net
[2] *https://orcid.org/0000-0002-1465-9530*
tanya.lukashova2015@gmail.com
[3] *https://orcid.org/0000-0003-0837-5395*
sasha.pypka@gmail.com

MAPLE ЯК ІНСТРУМЕНТ ВІЗУАЛІЗАЦІЇ ТА АНАЛІЗУ ГРАФІВ У КУРСІ ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ У ПРОЦЕСІ ПРОФЕСІЙНОЇ ПІДГОТОВКИ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

Анотація. *Дискретна математика займає особливе місце в навчанні майбутніх учителів математики. У педагогічному контексті важливо, щоб майбутні вчителі математики володіли навичками їх візуалізації та аналізу, що дає змогу глибше усвідомити суть дискретних структур та механізмів їх функціонування. Візуалізація у вигляді графів є центральним інструментом для представлення дискретних структур у Maple. Система підтримує побудову графів як об'єктів, що складаються з вузлів і ребер, які можуть бути орієнтованими або неорієнтованими відповідно до навчальних завдань. Це дає змогу не просто показати структуру, а й провести її детальний аналіз. Однією з ключових переваг Maple є можливість створення інтерактивної та динамічної візуалізації графів. Система підтримує зміну параметрів графа в реальному часі та демонструє відображення цих змін, що дає студентам розуміння про внутрішню взаємодію в структурі. Використання анімації сприяє наочності під час демонстрації алгоритмів роботи з графіками, таких як обходи в ширину чи глибину, циклів пошуку або розв'язання завдань маршрутизації. Це дає змогу створювати експериментальні навчальні модулі, де студенти можуть проводити дослідження, перевіряти гіпотези та спостерігати за поведінкою математичних структур у динамічному режимі. Такий підхід активізує творчий потенціал та стимулює глибше засвоєння матеріалу. Поряд з побудовою Maple забезпечує розвинений аналітичний інструментарій для дослідження структурних характеристик графів. Використання системи дозволяє обчислювати різноманітні параметри, такі як степені вершин, довжини шляхів та визначення циклів, що є основними показниками в теорії графів. Система також підтримує ідентифікацію специфічних типів підграфів, наприклад, дерев або покриттів, що є корисним у навчанні дискретній математиці та її прикладних аспектах. Особливо у важливим є застосування функцій для пошуку оптимальних маршрутів, мінімальних покриттів та інших задач оптимізації, що дозволяє розглядати не тільки статичні, а й прикладні аспекти дослідження графів. Ці можливості є фундаментальними для формування практичних навичок, важливих у професії вчителя математики.*

Ключові слова*: Maple; системи комп'ютерної математики; дискретна математика; цифрові технології в освіті; професійна підготовка; майбутні вчителі математики.*

Inna SHYSHENKO[1], Tatyana LUKASHOVA[2], Oleksandr PYPKA[3]
[1, 2] *Sumy State Pedagogical University named after A. S. Makarenko, Ukraine*
[3] *Oles Honchar Dnipro National University, Ukraine*
[1] *https://orcid.org/0000-0002-1026-5315*
shiinna@ukr.net
[2] *https://orcid.org/0000-0002-1465-9530*
tanya.lukashova2015@gmail.com
[3] *https://orcid.org/0000-0003-0837-5395*
sasha.pypka@gmail.com

MAPLE AS A TOOL FOR VISUALIZATION AND ANALYSIS OF GRAPHS IN THE COURSE OF DISCRETE MATHEMATICS IN THE PROCESS OF PROFESSIONAL TRAINING OF FUTURE MATHEMATICS TEACHERS

Abstract*. Discrete mathematics occupies a special place in the education of future mathematics teachers. In a pedagogical context, it is important for future mathematics teachers to have the skills of visualization and analysis, which allows for a deeper understanding of the essence of discrete structures and the mechanisms of their functioning. Visualization in the form of graphs is a central tool for representing discrete structures in Maple. The system supports the construction of graphs as objects consisting of nodes and edges, which can be oriented or unoriented according to educational tasks. This allows not only to show the structure, but also to conduct its detailed analysis. One of the key advantages of Maple is the ability to create interactive and dynamic visualizations of graphs. The system supports changing the graph parameters in real time and demonstrates the reflection of these changes, which gives students an understanding of the internal interaction*

© *The Author(s) 2025*

in the structure. The use of animation contributes to clarity when demonstrating algorithms for working with graphs, such as breadth-first or depth-first traversals, search cycles, or solving routing problems. This allows you to create experimental training modules where students can conduct research, test hypotheses, and observe the behavior of mathematical structures in a dynamic mode. This approach activates creative potential and stimulates deeper assimilation of the material. Along with the construction, Maple provides a developed analytical toolkit for studying the structural characteristics of graphs. Using the system allows you to calculate various parameters, such as vertex degrees, path lengths, and cycle definitions, which are basic indicators in graph theory. The system also supports the identification of specific types of subgraphs, such as trees or covers, which is useful in teaching discrete mathematics and its applied aspects. The use of functions for finding optimal routes, minimum covers, and other optimization problems is especially important, as it allows you to consider not only static but also applied aspects of graph research. These opportunities are fundamental for developing practical skills important in the mathematics teaching profession.

***Keywords**: Maple; computer mathematics systems; discrete mathematics; digital technologies in education; professional training; future mathematics teachers.*

Постановка проблеми. У сучасному освітньому середовищі значення інформаційних (ІТ) та цифрових (ЦТ) технологій у професійній підготовці майбутніх учителів математики зростає з кожним роком. Застосування комп'ютерних математичних систем стало невід'ємною складовою освітнього процесу, адже такі засоби суттєво покращують якість підготовки, роблять її більш інтерактивною та орієнтованою на практичні результати. Разом з тим, комп'ютерна підтримка максимально відповідає сучасним педагогічним стандартам і існуючим вимогам до підготовки фахівців, оскільки вона розширює можливості педагогічної діяльності та створює нові стимули для творчої експериментальної роботи як студентів, так і викладачів [9].

Визначення ролі комп'ютерних інструментів у контексті візуалізації знань займає особливе місце. Вони представляють собою не просто засоби подачі інформації, а спрямовують діяльність користувача на цільове розуміння та активне дослідження, оскільки не можуть без користувача отримувати оперативну інформацію про властивості математичних об'єктів. Таким чином, ІТ не лише полегшують процес навчання, але й трансформують його, активізуючи розумові процеси та мотивацію студентів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Аналіз наукових джерел з проблем упровадження ЦТ в процес професійної підготовки майбутніх учителів математики [2; 3; 5] показує, що ЦТ сприяють не лише підвищенню швидкості засвоєння матеріалу, а й формуванню у студентів глибоких концептуальних уявлень за допомогою процесів візуалізації та моделювання, що раніше вимагало тривалих аналітичних обчислень [1].

Для забезпечення навчального процесу на високому рівні розроблені різноманітні комп'ютерні математичні системи, які поділяються на кілька класів. Перший клас охоплює системи, які працюють із традиційними способами запису математичних формул та орієнтовані переважно на розв'язання складних обчислювальних задач і процесів моделювання, серед них Maple, Matlab, Mathematica, Maxima. Вони забезпечують гнучко середовище для розв'язання різнопланових математичних задач, включаючи дискретні структури. Іншим класом є програми динамічної математики, такі як GeoGebra та Cabri, які орієнтовані на візуалізацію та інтерактивне дослідження математичних об'єктів. Вони особливо корисні у початковій підготовці, коли важливу роль розвиває наочність [7; 8].

Maple [10], як частина системи комп'ютерної математики, вирізняється серед інших значною кількістю математичних функцій для аналізу і одночасно потужними засобами візуалізації, що робить її універсальним інструментом для навчання дискретної математики майбутніх бакалаврів. Практичні тести й дослідницькі роботи, що проводилися нами у процесі навчання дискретної математики майбутніх учителів математики демонструють її ефективність у підвищенні якості підготовки спеціалістів [6].

Мета дослідження. Розкрити роль комп'ютерних інструментів Maple у контексті візуалізації знань під час вивчення курсу дискретної математики у процесі професійної підготовки майбутніх учителів математики.

Методи дослідження. Теоретичний аналіз, систематизація, узагальнення даних науково-методичної та спеціальної літератури.

Виклад основного матеріалу дослідження. Однією з таких цифрових технологій є система комп'ютерної математики Maple, яка є потужним інструментом для візуалізації, моделювання та аналізу математичних об'єктів, зокрема графів. Теорія графів, як важливий розділ дискретної математики, має широке застосування в інформатиці, логістиці, біоінформатиці, соціології тощо, що зумовлює потребу у поглибленому її вивченні на основі сучасних інструментів.

Maple має вбудовані пакети, що дозволяють створювати, досліджувати та аналізувати графи різних типів (орієнтовані, неорієнтовані, зважені, дерева тощо). Зокрема, використовуючи пакет GraphTheory, можна здійснювати операції над графами, визначати їхні основні характеристики (ступені вершин, кількість ребер, наявність циклів, компонент зв'язності), виконувати пошук шляхів та обчислення різних метричних властивостей (діаметр, ексцентриситет, центр, радіус тощо).

Перевага Maple полягає у можливості наочної візуалізації графів, що істотно полегшує розуміння абстрактних понять і структур. Наприклад, при розв'язуванні задач на знаходження мінімального остовного дерева (алгоритм Прима чи Крускала) студенти можуть побачити покрокове формування дерева. Аналогічно, під час вивчення алгоритмів пошуку в глибину (DFS) чи в ширину (BFS) реалізація у Maple дозволяє відслідковувати порядок відвідування вершин і динаміку побудови дерева обходу.

Використання Maple підвищує мотивацію студентів до вивчення теорії графів, сприяє розвитку алгоритмічного мислення, навичок програмування, аналізу та синтезу математичних моделей. Крім того, система дозволяє виконувати складні обчислення з великою кількістю даних, що значно економить час і дозволяє зосередитись на теоретичному аналізі задачі.

Таким чином, інтеграція Maple у процес вивчення теорії графів сприяє глибшому засвоєнню навчального матеріалу, розвитку прикладних компетентностей студентів та формуванню у них сучасного наукового світогляду. Це є особливо важливим у підготовці майбутніх учителів математики, інформатики та спеціалістів з прикладної математики, для яких вміння працювати з комп'ютерними математичними системами є важливою складовою професійної діяльності.

Дискретна математика займає особливе місце в навчанні майбутніх учителів математики, її зміст становлять чітко визначені структури – множини, графіки, комбінації, мережі, які відрізняються характеристиками дискретності [6]. У педагогічному контексті важливо, щоб майбутні вчителі математики володіли навичками їх візуалізації та аналізу, що дає змогу глибше усвідомити суть дискретних структур та механізмів їх функціонування [6] .

Візуалізація у вигляді графів є центральним інструментом для представлення дискретних структур у Maple. Система підтримує побудову графів як об'єктів, що складаються з вузлів і ребер, які можуть бути орієнтованими або неорієнтованими відповідно до навчальних завдань. Це дає змогу не просто показати структуру, а й провести її детальний аналіз. Відвід Maple також містить алгоритмічні засоби для визначення власних графів, таких як визначення ступеня вершин, циклів чи, що критично важливо для розуміння топології та функціональних особливостей графів [7]. Взаємозв'язок аналітичної інформації, яка обчислюється за допомогою вбудованих функцій, і її графічне відображення є однією з переваг Maple. Це сприяє формуванню у студентів цілеспрямованого сприйняття математичних об'єктів і забезпечує гнучко дослідження та інтерпретацію їхніх властивостей у візуальному режимі.

Однією з основних задач теорії графів, яка розглядається у стандартних курсах дискретної математики та ілюструє алгебраїчні характеристики графів, є задача на встановлення ізоморфізму графів. Ізоморфізм є ключовою характеристикою графа і дозволяє визначити, чи є різні рисунки (діаграми графа) зображеннями одного й того ж графа, чи це різні графи. Відповідно, далі можна ставити питання щодо зображення графа у найпростішому вигляді або так, щоби зручно було встановлювати його властивості.

Графи G_1=(V_1,E_1) та G_2=(V_2,E_2) називаються ***ізоморфними***, якщо існує взаємно однозначне відображення ϕ: $V_1 \rightarrow V_2$, що зберігає суміжність вершин, тобто ребро $\{\phi(u), \phi(v)\} \in E_2$ тоді і тільки тоді, коли $\{u, v\} \in E_1$. Той факт, що графи G_1 та G_2 ізоморфні, записують $G_1 \cong G_2$, а відображення ϕ називають ***ізоморфізмом*** G_1 на G_2.

Ізоморфні графи ототожнюються і вважаються копіями один одного.

Безпосереднє встановлення ізоморфізму двох графів «вручну» та пошук відповідності між їх вершинами є досить складною задачею. По-перше, необхідно перевірити, чи збігається кількість вершин і ребер графів, по-друге, чи збігається число вершин одного й того ж степеня в обох графах. Якщо хоча б один з цих параметрів не співпадає, то графи не ізоморфні. У противному випадку необхідно перевірити виконання умови ізоморфізму для усіх відповідностей між вершинами графів G_1 та G_2 (з урахуванням того, що степені вершин при ізоморфізмі зберігаються).

Розглянемо приклад однієї з таких задач.

Приклад 1. Довести, що графи, зображені на рисунку, ізоморфні. Розв'язати задачу, використовуючи означення та матриці суміжності й інцидентності графів.

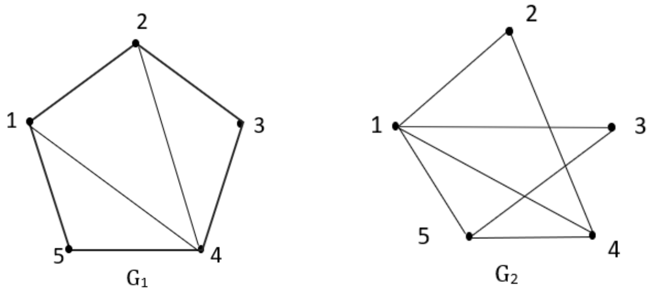

Рис. 1. Діаграми графі G_1 та G_2

Розв'язання. Очевидно, що задані графи мають однакову кількість вершин та ребер. Окрім того, в обох графах є одна вершина степеня 4 та по дві вершини степенів 2 і 3. Враховуючи, що при ізоморфізмі степені вершин не змінюються (тобто, вершинам одного степеня першого графа відповідають вершинам того ж степеня іншого графа), можливі наступні відповідності між вершинами графів G_1 та G_2:

$$\phi_1 = \binom{12345}{54213}, \phi_2 = \binom{12345}{45213}, \phi_3 = \binom{12345}{54321}, \phi_4 = \binom{12345}{45312},$$

де у першому рядку записані номери вершин графа G_1, а у другому – графа G_2.

Перевіримо, чи буде відповідність ϕ_1 ізоморфізмом графів, тобто перевіримо виконання умови: $\{\phi_1(u), \phi_1(v)\} \in E_2 \Leftrightarrow \{u, v\} \in E_1$. Випишемо усі ребра графа G_1 і знайдемо їх образи при відображенні ϕ_1:

e_i	{1,2}	{1,4}	{1,5}	{2,3}	{2,4}	{3,4}	{4,5}
$\phi_1(e_i)$	{5,4}	{5,1}	{5,3}	{4,2}	{4,1}	{2,1}	{1,3}

Оскільки образи усіх ребер належать графу G_2, то відображення ϕ_1 є ізоморфізмом, тобто $G_1 \cong G_2$, що й треба було довести.

Інший спосіб встановлення ізоморфізму – застосування матриць суміжності або інцидентності. Цей спосіб дозволяє звести вивчення властивостей графів до вивчення властивостей їх матриць (суміжності та інцидентності відповідно).

Нагадаємо, що матрицею суміжності простого графа, що має n вершин називаються матриця $A = \langle a_{ij} \rangle$ n-го порядку, в якій

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо вершини } i \text{ та } j \text{ суміжні,} \\ 0, \quad \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Відповідно, матрицею інцидентності графа, що має n вершин та m ребер, називають матрицю В=$\langle b_{ij} \rangle$ розмірності $n \times m$ в якій

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо вершина } i \text{ та ребро } j \text{ інцидентні,} \\ 0, \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Графи $G_1 = (V_1, E_1)$ та $G_2 = (V_2, E_2)$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли вони мають однакове число вершин, і матриці суміжності цих графів подібні, тобто існує невироджена матриця Q така, що $A(G_2) = Q \cdot A(G_1) \cdot Q^{-1}$, де $A(G_1)$ та $A(G_2)$ – матриці суміжності графів G_1 та G_2. Або матриця суміжності $A(G_1)$ графа G_1 може бути одержана з матриці суміжності $A(G_2)$ графа G_2 одночасними перестановками однойменних рядків та стовпців.

Графи $G_1 = (V_1, E_1)$ та $G_2 = (V_2, E_2)$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли вони мають однакове число вершин і ребер, а матриця інцидентності $I(G_1)$ графа G_1 може бути одержана з матриці інцидентності $I(G_2)$ графа G_2 довільними перестановками рядків та стовпців.

Доведемо тепер ізоморфізм графів G_1 та G_2, використовуючи їх матриці суміжності. Слід зазначити, що встановлення ізоморфізму шляхом доведення подібності матриць суміжності графів є досить об'ємною задачею, яка розглядається у лінійній алгебрі. Тому краще використати другий метод, що зводиться до простої перестановки рядків і стовпців матриці.

Запишемо матрицю суміжності графа G_1:

$$A(G_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Переставимо перший та четвертий рядки і, відповідно, стовпці цієї матриці, а потім другий та п'ятий рядки та, відповідно, стовпці:

$$A(G_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A(G_2).$$

Оскільки внаслідок таких перетворень одержано матрицю суміжності $A(G_2)$ графа G_2, то $G_1 \cong G_2$.

Аналогічним є розв'язання даної задачі із використанням матриць інцидентності графів. Проте, на відміну від попереднього методу, використовуються довільні перестановки рядків та стовпчиків матриць.

Розв’яжемо тепер вказане завдання із застосуванням системи комп'ютерної математики Maple. Для цього спочатку слід підключити модуль GraphTheory (команда **> with(GraphTheory):).**

Задамо кожен з графів переліком ребер та побудуємо діаграми графів у Maple. Для цього використовуються команди

> G := Graph({{a, c}, {a, e}, {b, c}, {b, d}, {b, e}, {d, e}}) та **> DrawGraph(G)** відповідно.

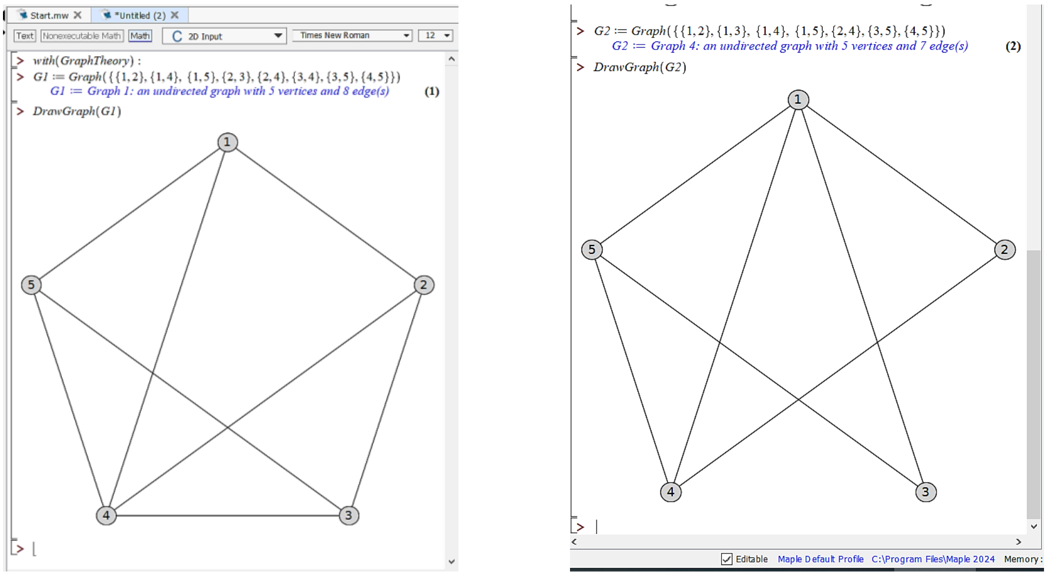

Рис. 2. Діаграми графів G_1 та G_2 з прикладу 1 в Maple

З’ясуємо, чи є графи ізоморфними, користуючись командою

> IsIsomorphic(G1, G2, 'mp'). Відповідь на питання подано на рисунку 3 – істина, тобто графи ізоморфні.

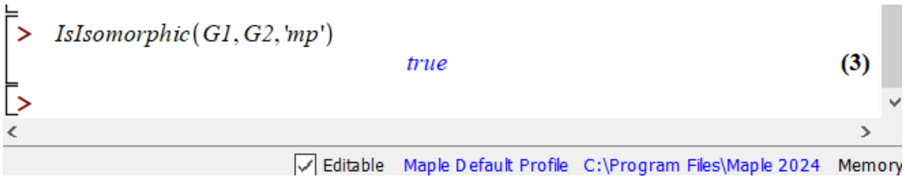

Рис. 3. Визначення ізоморфізму графів у Maple

Визначимо номери вершин графів, що відповідають одна одній при ізоморфізмі (команда **> mp**).

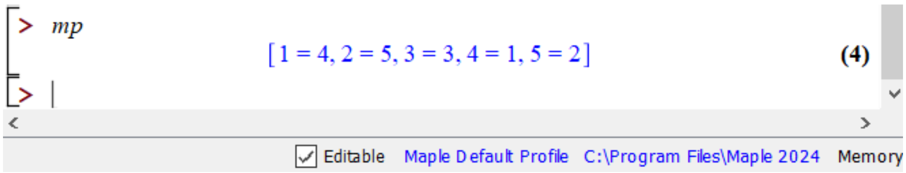

Рис. 4. Встановлення відповідності між вершинами графів при ізоморфізмі в Maple

Таким чином, Maple дозволяє не просто з’ясувати, чи є графи ізоморфними, а й визначити конкретну відповідність між вершинами при ізоморфізмі. У цьому випадку система дає відповідність, яка відповідає підстановці вершин $\phi_4 = \begin{pmatrix}12345\\45312\end{pmatrix}$, наведеній вище.

Інший спосіб з’ясувати, чи є графи ізоморфними – дослідити їх матриці суміжності. Побудову матриць також можна здійснити в Maple командою

>A := AdjacencyMatrix(G).

Для визначення подібності матриць суміжності скористаємось модулем LinearAlgebra та підключимо його командою **> LinearAlgebra:** . Далі використаємо команду **> IsSimilar(A1, A2)** з метою встановлення подібності матриць. Відповідь –*true* – матриці подібні, отже, графи ізоморфні.

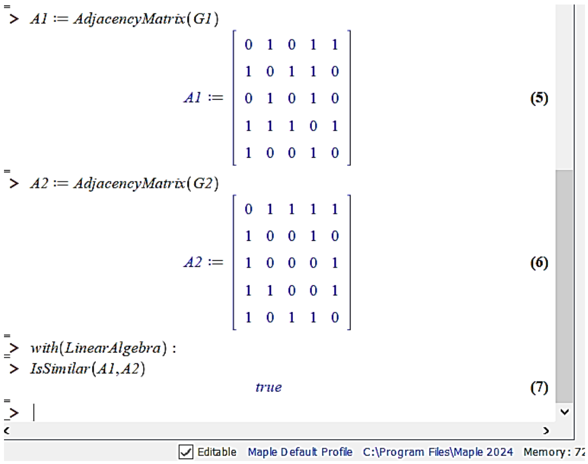

Рис. 5. Встановлення подібності матриць в Maple

Зазначимо, що модуль LinearAlgebra дозволяє визначити подібність матриць іншим способом: через знаходження характеристичних коренів матриць. З курсу лінійної алгебри відомо, що матриці подібні тоді і тільки тоді, коли вони мають однакові характеристичні корені. На Рисунку 6 наведено результат застосування команди **> eigenvals(A)**, яка дозволяє знайти характеристичні корені матриці, до матриць суміжності даних графів. Як бачимо з Рисунку 7, корені однакові, отже, матриці подібні, а відповідні їм графи ізоморфні.

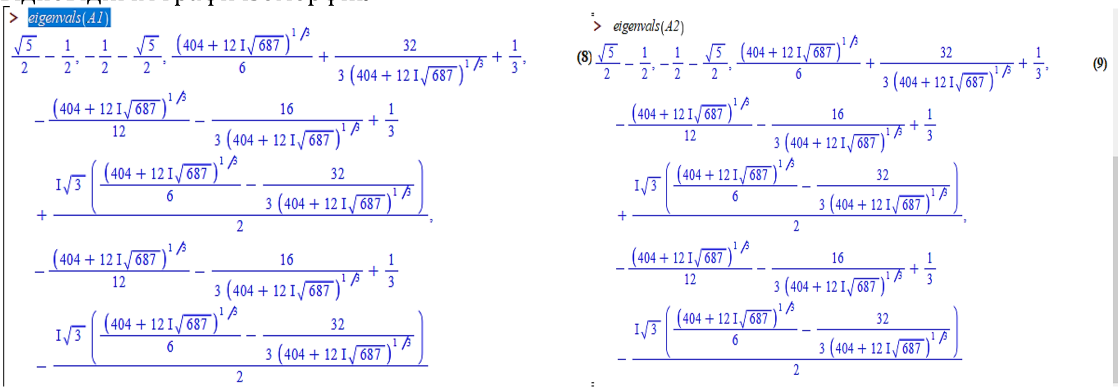

Рис. 6. Результат визначення характеристичних коренів матриць суміжності в Maple

Розглянемо ще один приклад використання системи Maple до встановлення ізоморфізму графів.

Приклад 2. З'ясувати, чи є граф G, заданий списком ребер E = {{a, c}, {a, e}, {b, c}, {b, d}, {b, e}}, самодоповнюваним.

Розв'язання. Нагадаємо, що граф називається самодоповнюваним, якщо він ізоморфний своєму доповненню. Відповідно, *доповненням* графа $G=(V,E)$ називають граф G_1, який має ту ж саму множину вершин, що й граф G, а будь-які дві вершини G_1 суміжні тоді і тільки тоді, коли вони не суміжні в G.

Задамо граф G та знайдемо його доповнення G_1 (команда **>G1:= GraphComplement(G)).**

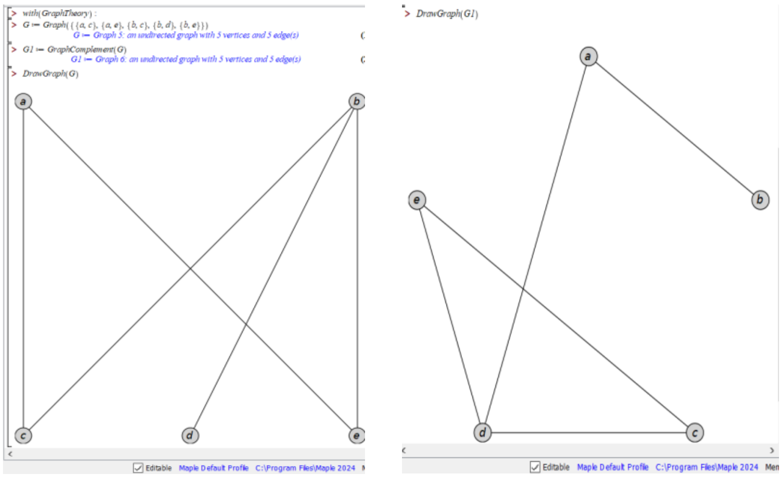

Рис. 7. Побудова графа та його доповнення в Maple

З'ясуємо, чи є ці графи ізоморфними (теоретично, це можливо, оскільки кількість ребер та вершин в обох графах однакова).

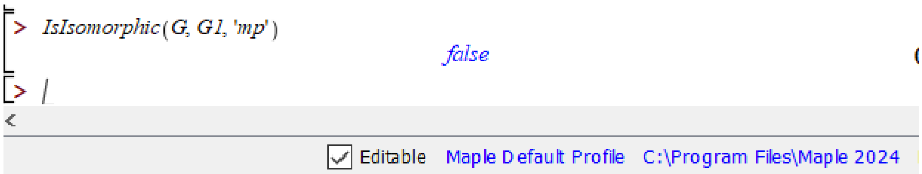

Рис. 8. Встановлення ізоморфізму графа та його доповнення

Отже, граф та його доповнення не ізоморфні, тому даний граф не є самодоповнюваним.

Однією з ключових переваг Maple є можливість створення інтерактивної та динамічної візуалізації графів. Система підтримує зміну параметрів графа в реальному часі та демонструє відображення цих змін, що дає студентам розуміння про внутрішню взаємодію в структурі. Використання анімації сприяє наочності під час демонстрації алгоритмів роботи з графіками, таких як обходи в ширину чи глибину, циклів пошуку або розв'язання завдань маршрутизації [1]. Це дає змогу створювати експериментальні навчальні модулі, де студенти можуть проводити дослідження, перевіряти гіпотези та спостерігати за поведінкою математичних структур у динамічному режимі. Такий підхід активізує творчий потенціал та стимулює глибше засвоєння матеріалу. Поряд з побудовою Maple забезпечує розвинений аналітичний інструментарій для дослідження структурних характеристик графів. Використання системи дозволяє обчислювати різноманітні параметри, такі як степені вершин, довжини шляхів та визначення циклів, що є основними показниками в теорії графів. Система також підтримує ідентифікацію специфічних типів підграфів, наприклад, дерев або покриттів, що є корисним у навчанні дискретній математиці та її прикладних аспектах. Особливо у важливим є застосування функцій для пошуку оптимальних маршрутів, мінімальних покриттів та інших задач оптимізації, що дозволяє розглядати не тільки статичні, а й прикладні аспекти дослідження графів [7]. Ці можливості є фундаментальними для формування практичних навичок, важливих у професії вчителя математики.

Висновки і перспективи подальших досліджень. Використання системи комп'ютерної математики Maple до розв'язування задач теорії графів дозволяє реалізували кілька дидактичних завдань: по-перше, закріпити знання основних понять та алгоритмів, які використовуються в теорії графів; по-друге, пришвидшити процес розв'язання складних задач, перевірити та порівняти відповіді, отримані вручну; по-третє – повторити матеріал інших математичних курсів (в даному випадку – лінійної алгебри) і, нарешті, ефективно реалізовувати дослідницьку діяльність студентів з математики чи інших наук із використанням інструментів Maple.

У підготовці майбутніх учителів математики особлива увага приділяється формуванню цифрових компетентностей, що є необхідними умовами для ефективного використання Maple і подібних систем у професійній діяльності. Ці компетентності охоплюють не тільки технічні навички роботи з CMS, а й розуміння методології їх застосування у викладанні дискретної математики, організації навчального процесу, а також модерації навчальної діяльності студентів. Викладачі повинні не тільки володіти цими інструментами, але й виступати як фасилитатори, які допомагають студентам отримати максимальні результати від роботи з комп'ютерними засобами.

Подальша розробка методичних рекомендацій щодо інтеграції Maple у навчальні курси допоможе структурувати процес викладання та підвищити його ефективність.

Конфлікт інтересів. Автори підтверджують відсутність фінансових, особистих чи інших інтересів, що можуть розглядатися як потенційний конфлікт інтересів щодо публікації цієї статті.

Фінансування. Робота виконана за відсутності фінансової підтримки з боку будь-яких організацій.

Доступність даних. Це теоретичне дослідження не передбачає використання додаткових наборів даних.

Використання штучного інтелекту. Інструменти штучного інтелекту не використовувались при написанні цієї роботи.

Список використаних джерел

1. Ковальова, К., Лисенко, Н., & Федоренко, О. (2022). Застосування хмарних технологій у процесі навчання математики. *Технології електронного навчання*, 6, 37–44. https://doi.org/10.31865/2709-840062022270265
2. Юнчик, В. Л., & Федонюк, А. А. (2019). Порівняльна характеристика функціональних можливостей систем комп'ютерної математики в процесі розв'язування задач. *Інформаційні системи та мережі*, (6), 90-102. https://doi.org/10.23939/sisn2019.02.090

3. Cardoso-Espinosa, E.O., Cortés-Ruiz, J. A., & Zepeda-Hurtado, E. (2021). The Development of Mathematics and Soft Skills at the Graduate Level through Project-Based Learning in Times of COVID-19. *TEM Journal*, 10, 4, 1638-1644, https://doi.org/10.18421/TEM104-20
4. Educational and professional program Secondary education (Physics. Mathematics) of the second (master's) level of higher education of Sumy State Pedagogical University named after A.S.Makarenko (2020) URL: https://sspu.edu.ua/images/2020/doc/opp/osvitnya_programa_serednya_osvita_fizika_matematika_magistr_49bbc.pdf
5. Gudmundsdottir, G. B., & Hatlevik, O. E. (2018). Newly qualified teachers' professional digital competence: implications for teacher education. *European Journal of Teacher Education*, 41(2), 214–231. https://doi.org/10.1080/02619768.2017.1416085
6. Lukashova, T., Drushlyak, M., & Khvorostina, Yu. (2022). Development of pre-service mathematics teachers' soft skills studying the topic "Diophantine Equations". *Physical and Mathematical Education*, 36(4), 57-63. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-036-4-008
7. Drushlyak M. G., Shishenko I. V., Borozenets N. S., Nekyslykh K. M., Semenikhina O. V. (2021). Computer Probabilistic Models Construction and Analysis of Professional Activity of their Use by Ukrainian Mathematics Teachers. Proceedings of 44 International convention on information and communication technology, electronics and microelectronics "MIPRO 2021", Opatija (Croatia), 712-717. https://doi.org/10.23919/MIPRO52101.2021.9596868
8. Semenikhina, O. V., Drushlyak, M. G., & Shishenko, I. V. (2022). STEM project as a means of learning modeling for pre-service mathematics and computer science teachers. Information Technologies and Learning Tools, 90(4), 46–56. https://doi.org/10.33407/itlt.v90i4.4946
9. I. V. Shyshenko, Y. O. Chkana, O. V. Martynenko, O. M. Udovychenko, I. I. Stotskyi and O. V. Semenikhina. (2023). Implementation of a Facilitative Approach to Teaching Mathematical Disciplines to Future Mathematics Teachers by Means of the MAPLE Package," *2023 46th MIPRO ICT and Electronics Convention (MIPRO)*, Opatija, Croatia, 625-630. https://doi.org/10.23919/MIPRO57284.2023.10159878
10. Maple. URL : www.maplesoft.com/products/Maple/index.aspx

References

1. Kovalova, K., Lysenko, N., & Fedorenko, O. (2022). Zastosuvannia khmarnykh tekhnolohii u protsesi navchannia matematyky [Application of cloud technologies in the process of teaching mathematics.]. *Tekhnolohii elektronnoho navchannia – E-learning technologies*, 6, 37–44. https://doi.org/10.31865/2709-840062022270265 (in Ukrainian)
2. Yunchyk, V. L., & Fedoniuk, A. A. (2019). Porivnialna kharakterystyka funktsionalnykh mozhlyvostei system komp'iuternoi matematyky v protsesi rozv'iazuvannia zadach [Comparative characteristics of the functional capabilities of computer mathematics systems in the process of solving problems.]. *Informatsiini systemy ta merezhi – Information systems and networks*, (6), 90-102. doi: https://doi.org/10.23939/sisn2019.02.090 (in Ukrainian)
3. Cardoso-Espinosa, E.O., Cortés-Ruiz, J. A., & Zepeda-Hurtado, E. (2021). The Development of Mathematics and Soft Skills at the Graduate Level through Project-Based Learning in Times of COVID-19. *TEM Journal*, 10, 4, 1638-1644, https://doi.org/10.18421/TEM104-20
4. Educational and professional program Secondary education (Physics. Mathematics) of the second (master's) level of higher education of Sumy State Pedagogical University named after A.S.Makarenko (2020) URL: https://sspu.edu.ua/images/2020/doc/opp/osvitnya_programa_serednya_osvita_fizika_matematika_magistr_49bbc.pdf
5. Gudmundsdottir, G. B., & Hatlevik, O. E. (2018). Newly qualified teachers' professional digital competence: implications for teacher education. *European Journal of Teacher Education*, 41(2), 214–231. https://doi.org/10.1080/02619768.2017.1416085
6. Lukashova, T., Drushlyak, M., & Khvorostina, Yu. (2022). Development of pre-service mathematics teachers' soft skills studying the topic "Diophantine Equations". *Physical and Mathematical Education*, 36(4), 57-63. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-036-4-008
7. Drushlyak M. G., Shishenko I. V., Borozenets N. S., Nekyslykh K. M., Semenikhina O. V. (2021). Computer Probabilistic Models Construction and Analysis of Professional Activity of their Use by Ukrainian Mathematics Teachers. Proceedings of 44 International convention on information and communication technology, electronics and microelectronics "MIPRO 2021", Opatija (Croatia), 712-717. https://doi.org/10.23919/MIPRO52101.2021.9596868
8. Semenikhina, O. V., Drushlyak, M. G., & Shishenko, I. V. (2022). STEM project as a means of learning modeling for pre-service mathematics and computer science teachers. Information Technologies and Learning Tools, 90(4), 46–56. https://doi.org/10.33407/itlt.v90i4.4946
9. I. V. Shyshenko, Y. O. Chkana, O. V. Martynenko, O. M. Udovychenko, I. I. Stotskyi and O. V. Semenikhina. (2023). Implementation of a Facilitative Approach to Teaching Mathematical Disciplines to Future Mathematics Teachers by Means of the MAPLE Package," *2023 46th MIPRO ICT and Electronics Convention (MIPRO)*, Opatija, Croatia, 625-630. https://doi.org/10.23919/MIPRO57284.2023.10159878
10. Maple. URL : www.maplesoft.com/products/Maple/index.aspx

| Матеріал надійшов до редакції: 05.06.2025 р. | Прийнято до друку: 15.07.2025 р. | Опубліковано: 30.09.2025 р. |

This work is licensed under a Creative Commons License Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License (CC BY-NC-SA 4.0).