Одінцова О. О.

ЦІЛА ТА ДРОБОВА ЧАСТИНИ ЧИСЛА В ЗАВДАННЯХ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник

Суми – 2019

УДК 37.091.398:511.17](075)
О-42

Рекомендовано до друку вченою радою фізико-математичного факультету Сумського державного педагогічного університету імені А.С.Макаренка
(*протокол № 2 від 26.09. 2019 р.*)

Р е ц е н з е н т и

Жучок Ю. В. професор кафедри алгебри і системного аналізу ДЗ «Луганський національний університет імені Т.Г.Шевченка», доктор фізико- математичних наук

Кадубовський О. А. доцент кафедри математики та інформатики ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет», кандидат фізико-математичних наук

Одінцова О. О.
О-42 Ціла та дробова частини числа в завданнях елементарної математики: навчальний посібник / О.О. Одінцова. – Суми: ФОП Цьома С.П., 2019. – 138 с.

У навчальному посібнику розглянуто особливості розв'язування завдань з математики підвищеного рівня складності, що містять цілу та дробову частини числа. Увагу зосереджено на властивостях цілої та дробової частин числа як числових функцій, обчисленні цілих частин виразів, побудові графіків функцій, що містять цілу, дробову частини числа, а також на способах розв'язування рівнянь, що містять цілу та дробову частини числа. Значну частину рівнянь розв'язано декількома способами.

Цей посібник призначений для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів, учнів основної та старшої школи, що самостійно готуються до олімпіад з математики, та вчителів математики.

УДК 37.091.398:511.17](075)

Передмова

Завдання, що містять цілу та дробову частини числа, є традиційними для олімпіадних змагань з математики різних рівнів як для школярів, так і для студентів, і постійно викликають певні труднощі в обох категоріях. Не є виключенням і вчителі, що готують учнів до математичних змагань. Для школярів ці труднощі викликані специфікою зазначених числових функцій (цілої та дробової частини числа) та пов'язаного з ними математичного апарату. Студенти фізико-математичних факультетів педагогічних університетів хоча і вивчають зазначені числові функції в курсі алгебри і теорії чисел, проте брак часу не дозволяє в повному обсязі продемонструвати особливості розв'язування завдань елементарної математики підвищеного рівня складності, що містять цілу та дробову частини числа.

Даний навчальний посібник має на меті ознайомити читача з можливими завданнями математичних олімпіад, в умові яких фігурують ціла та дробова частини числа, та особливостями їх розв'язування. Зокрема, розглянуто способи обчислення цілої частини виразів, способи побудови графіків, в яких ціла та дробова частини виступають як внутрішні, так і як зовнішні функції, та способи розв'язування рівнянь з цілою, дробовою частиною. Все це вимагає знання якомога широкого кола властивостей зазначених числових функцій, тому ці властивості наведені в посібнику з доведенням для полегшення сприйняття подальшого матеріалу.

На відміну від більшості алгебраїчних рівнянь, що допускають розв’язування лише одним способом, рівняння з цілою, дробовою частиною можна розв’язувати декількома способами (як то за допомогою підстановки, за допомогою означення, за допомогою мішаної системи, графічно, способом локалізації, тощо). Зокрема, в посібнику розглянуто ряд рівнянь, що розв’язано двома або більше способами. При цьому навмисно не акцентується увага на доцільності використання того або іншого способу для знаходження розв’язків конкретного рівняння, даючи змогу читачеві самостійно обрати прийнятний для себе спосіб.

Посібник буде корисним студентам під час вивчення курсу вибраних питань елементарної математики (олімпіадні задачі), вчителям у позакласній роботі під час підготовки учнів до математичних олімпіад, а також всім, хто цікавиться застосуваннями відповідних розділів теорії чисел у завданнях елементарної математики.

1. Ціла та дробова частини числа, їх властивості

Нехай дано деяке дійсне число a.

Цілою частиною дійсного числа a називають найбільше ціле число, яке не перевищує даного числа a.

Ціла частина числа a позначається $[a]$ (*ант'є від a*). З означення цілої частини випливає, що $[a] \le a$, причому рівність $[a] = a$ досягається лише тоді, коли число a – ціле.

Приклад 1. $[0] = 0$; $[17] = 17$; $[11{,}38] = 11$; $\left[\frac{1}{5}\right] = 0$; $[-2{,}1] = -3$;

$[-100] = -100$; $[\sqrt{2}] = 1$.

Значення $[\sqrt{2}]$ легко обчислити, використовуючи числову вісь. На числовій осі знаходять точку, що відповідає числу $\sqrt{2}$ (рис. 1). Тепер серед усіх точок, що позначають на числовій осі цілі числа, обирають ту, яка розташована найближче ліворуч від точки $\sqrt{2}$. Ця точка і відповідає числу $[\sqrt{2}]$. Тому $[\sqrt{2}] = 1$.

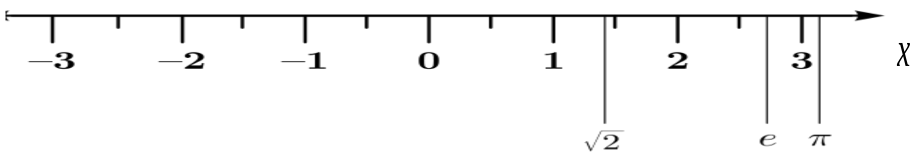

Рис. 1. До прикладу 1.

Аналогічно можна встановити, що $[e] = 2$, а $[\pi] = 3$, $[-e] =$ $= -3$, а $[-\pi] = -4$.

Приклад 2. Довести тотожність $[e]^{[\pi]} + [\pi] = [\pi]^{[e]} + [e]$.

Використовуючи зроблені раніше обчислення, маємо, що

$$[e]^{[\pi]} + [\pi] = 2^3 + 3 = 11,$$

$$[\pi]^{[e]} + [e] = 3^2 + 2 = 11.$$

Отже, $[e]^{[\pi]} + [\pi] = [\pi]^{[e]} + [e]$.

Приклад 3. Обчислити суму

$$[\sqrt[4]{1}] + [\sqrt[4]{2}] + [\sqrt[4]{3}] + \ldots + [\sqrt[4]{2019}].$$

Оцінимо цілі частини в кожному доданку: для чисел від 1 до 15 – $[\sqrt[4]{1}] = [\sqrt[4]{2}] = [\sqrt[4]{3}] = \ldots = [\sqrt[4]{15}] = 1$; для чисел від 16 до 80 – $[\sqrt[4]{16}] = \ldots = [\sqrt[4]{80}] = 2$; для чисел від 81 до 255 – $[\sqrt[4]{81}] = \ldots = [\sqrt[4]{255}] = 3$; для чисел від 256 до 624 –$[\sqrt[4]{256}] = \ldots = [\sqrt[4]{624}] = 4$, для чисел від 625 до 1295 – $[\sqrt[4]{625}] = \ldots = [\sqrt[4]{1295}] = 5$ і , нарешті , $[\sqrt[4]{1296}] = \ldots = [\sqrt[4]{2019}] = 6$.

Отже шукана сума:

$15 + 2\cdot 65 + 3\cdot 175 + 4\cdot 369 + 5\cdot 671 + 6\cdot 724 = 9845.$

З означення цілої частини та розглянутих прикладів зрозуміло, що $a - 1 < [a] \le a$, $[a] \le a < [a] + 1$, $a - [a] \ge 0$.

Дробовою частиною дійсного числа a називають різницю між числом a і його цілою частиною $[a]$.

Дробову частину числа a позначають символом $\{a\}$, тобто $\{a\} = a - [a]$. Оскільки завжди $a - [a] \ge 0$, то $\{a\} \ge 0$ для будь-якого дійсного числа a.

Приклад 4. $\{11\} = 0$; $\{45{,}52\} = 0{,}52$; $\{\frac{19}{5}\} = \{3\frac{4}{5}\} = \frac{4}{5}$; $\{-75\} = 0$;

$\{-4{,}32\} = -4{,}32 - [-4{,}32] = -4{,}32 - (-5) = 0{,}68$;

$\{-\frac{46}{11}\} = -\frac{46}{11} - [-\frac{46}{11}] = -4\frac{2}{11} - (-5) = \frac{9}{11}$;

$\{e\} = e - [e] = e - 2$;

$\{-\pi\} = -\pi - [-\pi] = -\pi - (-4) = 4 - \pi$.

Дробова частина числа може набувати тільки невід'ємних значень, менших за одиницю. Справді,

$$[a] \le a < [a] + 1,\ 0 \le a - [a] < 1 \text{ та } 0 \le \{a\} < 1.$$

Крім того, для довільного дійсного числа

$$a:\ a = [a] + \{a\}.$$

Ціла та дробова частини дійсного числа також мають наступні властивості:

1°. *Якщо a – число дійсне ($a \in R$), а n – число ціле ($n \in Z$), то* $[a + n] = [a] + n$*;* $\{a + n\} = \{a\}$.

Випливає безпосередньо з означень відповідних частин числа.

Приклад 5. $[2{,}53 + 10] = [2{,}53] + 10 = 12 = [12{,}53]$;
$[-4{,}2 + 4] = [-4{,}2] + 4 = -5 + 4 = -1 = [-0{,}2]$;

$[\frac{1}{3} - 5] = [\frac{1}{3}] - 5 = -5 = [-4\frac{2}{3}]$;

$\{2{,}53 + 10\} = \{12{,}53\} = 0{,}53 = \{2{,}53\}$;
$\{-4{,}2 + 4\} = \{-0{,}2\} = 0{,}8 = \{-4{,}2\}$;

$\{\frac{1}{3} - 5\} = \{-4\frac{2}{3}\} = \frac{1}{3} = \{\frac{1}{3}\}$.

2°. *Якщо* $a \in Z$ *, то* $[-a] = -[a]$.

Очевидно.

Приклад 6. $[-256] = -256 = -[256]$; $[-(-50)] = 50 = -[-50]$.

3°. *Якщо* $a \notin Z$ *, то* $[-a] = -[a] - 1$.

Насправді, оскільки $[a] \le a < [a] + 1$, то $-[a] - 1 < -a \le -[a]$. Тому $[-a] = -[a] - 1$. Доведено.

Приклад 7. $[-2{,}5] = -3 = -[2{,}5] - 1$; $[-\frac{1}{2}] = -1 = -[\frac{1}{2}] - 1$,

$[-(-999{,}9)] = [999{,}9] = 999 = -1 - [-999{,}9]$.

4°. *Якщо* $a \in Z$, *то* $\{-a\} = 0$.

Очевидно.

5°. *Якщо* $a \notin Z$, *то* $\{-a\} = 1 - \{a\}$.

За означенням $\{a\} = a - [a]$, тому

$$\{-a\} = -a - [-a] = -a - (-[a] - 1) =$$
$$= -([a] + \{a\}) + [a] + 1 = 1 - \{a\}.$$

Доведено.

Приклад 8. $\{-3{,}4\} = 1 - \{3{,}4\} = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$;

$\{-5{,}07\} = 1 - \{5{,}07\} = 1 - 0{,}07 = 0{,}93$;

$\{-\frac{1}{4}\} = 1 - \{\frac{1}{4}\} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

6°. $[a+b] = \begin{cases} [a]+[b], & \text{якщо} \quad \{a\}+\{b\}<1, \\ [a]+[b]+1, & \text{якщо} \quad \{a\}+\{b\}\geq 1. \end{cases}$

Очевидно. Тобто $[a + b] \geq [a] + [b]$.

Приклад 9. $[1{,}5+2{,}4] = [3{,}9] = 3 = [1{,}5] + [2{,}4] = 1 + 2$;

$[1{,}1-2{,}3] = [-1{,}2] = -2 = [1{,}1] + [-2{,}3] = 1 + (-3)$;

$[3{,}5+4{,}5] = [8] = 8 = [3{,}5] + [4{,}5] + 1 = 3 + 4 + 1$;

$[4{,}7 + 23{,}4] = [28{,}1] = 28 = [4{,}7] + [23{,}4] + 1 = 4 + 23 + 1$.

7°. Якщо $[a] = [b]$, то $|a - b| < 1$.

Нехай $[a] = [b]$ та для визначеності візьмемо $a > b$. Тоді з того, що

$$a = [a] + \{a\},\ b = [b] + \{b\},$$

де $0 \leq \{a\} < 1$ і $0 \leq \{b\} < 1$ та $\{a\} \neq \{b\}$,

будемо мати

$$a - b = [a] + \{a\} - [b] - \{b\} = \{a\} - \{b\},$$

в свою чергу

$$-1 < -\{b\} \le 0 \text{ і } -1 < \{a\} - \{b\} < 1.$$

Тобто $|\, a - b \,| < 1$.

Аналогічно у випадку $b > a$. Доведено.

8°. $\{a+b\} = \begin{cases} \{a\}+\{b\}, & \textit{якщо} \quad \{a\}+\{b\}<1, \\ \{a\}+\{b\}-1, & \textit{якщо} \quad \{a\}+\{b\}\ge 1. \end{cases}$

Ця властивість випливає безпосередньо з означення дробової частини та властивості 6°.

Приклад 10. $\{5{,}2 + 3{,}4\} = \{8{,}6\} = 0{,}6 = \{5{,}2\} + \{3{,}4\} = 0{,}2 + 0{,}4$;

$\{1{,}5+4{,}9\} = \{6{,}4\} = 0{,}4 = \{1{,}5\} + \{4{,}9\} - 1 = 0{,}5 + 0{,}9 - 1$;

$\{3{,}64 + 4{,}36\} = \{8\} = 0 = \{3{,}64\} + \{4{,}36\} - 1 = 0{,}64 + 0{,}36 - 1$.

9°. *Для дійсних чисел x та a справедливо, що* $[x] \le a$ *тоді і тільки тоді, коли* $x < [a] + 1$.

Нехай $[x] \le a$. Покажемо, що $x < [a] + 1$.

Якщо x та a числа цілі, то це очевидно.

Також умова необхідності очевидна у випадку, коли $a \notin Z$, $x \notin Z$ і $x < a$.

Нехай $[x] \le a < x$, тоді $[a] = [x]$ як раніше було встановлено, що

$$x < [x] + 1 \text{ та } x < [a] + 1.$$

Доведено в цьому випадку.

Нехай, навпаки $x < [a] + 1$, і слід показати, що $[x] \le a$.

Знов у випадках цілих x та a та $x < a$ – це очевидно.

Якщо $a < x$, то в наслідок того, що $x < [a] + 1$, маємо, $[a] < a < x < [a] + 1$ і $[x] = [a]$. Доведено.

Приклад 11. 1) Нехай $x = 5{,}94$ і $a = 5{,}72$. Тоді

$$[5{,}94] = 5 \le 5{,}72 < 5{,}94 \text{ і } 5{,}94 < [5{,}72] + 1 = 6.$$

2) Нехай $x = 5{,}72$ і $a = 5{,}94$. Тоді

$$[5{,}72] = 5 \le 5{,}94 \text{ і } 5{,}72 < [5{,}94] + 1 = 6.$$

3) Нехай $x = -\pi$ і $a = -e$. Тоді

$$[-\pi] = -4 \le -e \text{ і } -\pi < [-e] + 1 = -2.$$

10°. *Для дійсних чисел x та a справедливо, що* $[x] > a$ *тоді і тільки тоді, коли* $x \ge [a] + 1$.

Ця властивість доводиться аналогічно до попередньої.

Приклад 12. 1) Нехай $x = 6{,}94$ і $a = 5{,}72$. Тоді

$$[6{,}94] = 6 > 5{,}72 \text{ і } 6{,}94 \ge [5{,}72] + 1 = 6.$$

2) Нехай $x = -e$ і $a = -\pi$. Тоді

$$[-e] = -3 > -\pi \text{ і } -e \ge [-\pi] + 1 = -3.$$

У теорії чисел розглядаються також ще наступні властивості цілої частини числа.

11°. *Якщо* α *– дійсне додатне число і b – натуральне число, то натуральних чисел, які не перевищують* α *та діляться на b, буде рівно* $[\frac{\alpha}{b}]$.

Нехай натуральних чисел, що задовольняють умові, буде k штук: $b, 2b, 3b, \ldots, kb$, де $kb \le \alpha$. Але тоді справедливою буде така нерівність: $kb \le \alpha < (k + 1)b$, звідси $k \le \frac{\alpha}{b} < k + 1$, тобто $[\frac{\alpha}{b}] = k$. Доведено.

Приклад 13. Скільки існує натуральних чисел, які не перевищують 500 і не діляться ні на 2, ні на 3.

За властивістю 11° цілої частини числа натуральних чисел, що не більші за 500 та кратні 2, буде рівно $[\frac{500}{2}] = 250$, а кратних 3 – $[\frac{500}{3}] = 166$. Серед 166 чисел, що кратні 3, існують такі, що діляться і на 2, тобто кратні 6 (бо 2 і 3 взаємно прості). Таких натуральних чисел усього існує $[\frac{500}{6}] = 83$.

Отже, чисел, що задовольняють умову завдання, буде

$$500 - [\frac{500}{2}] - [\frac{500}{3}] + [\frac{500}{6}] = 500 - 250 - 166 + 83 = 167.$$

Зауваження 1. Взаємна простота дільників є суттєвою, оскільки в іншому випадку пошук чисел, що діляться одночасно на перше і друге число відбувається за складнішою схемою, в залежності від взаємозв'язків дільників.

Приклад 14. Знайти кількість натуральних чисел, які кратні 833 та містяться між 10^4 та 10^6.

Чисел, що кратні 833 та не перевищують 10^4 буде

$$[\frac{10^4}{833}] = [12\frac{4}{833}] = 12.$$

Аналогічно, чисел менших за 10^6 та кратних 833 – $[\frac{10^6}{833}] = [1200\frac{400}{833}] = 1200$. Тому шукана кількість буде

$$\left[\frac{10^6}{833}\right] - \left[\frac{10^4}{833}\right] = 1200 - 12 = 1188.$$

При цьому враховано, що ні 10^4 , ні 10^6 не діляться націло на 833.

12°. *Якщо* α *– дійсне додатне число і* b *– натуральне число, то*

$$\left[\frac{[\alpha]}{b}\right] = \left[\frac{\alpha}{b}\right].$$

Справді, між числами $[\alpha]$ та α немає жодного натурального числа і тому кількість чисел, кратних b, і таких, що не перевищують $[\alpha]$ і відповідно α, буде однаковою. За властивістю 11° у першому випадку їх буде $\left[\frac{[\alpha]}{b}\right]$, а в другому – $\left[\frac{\alpha}{b}\right]$. Отже,

$$\left[\frac{[\alpha]}{b}\right] = \left[\frac{\alpha}{b}\right].$$

Доведено.

13°. *Нехай* n *– натуральне число, а* p *– просте число. Тоді показник, з яким просте число* p *входить до розкладу* $n!$ *дорівнює :*

$$(1) \quad \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^k}\right]$$

де $p^k \le n < p^{k+1}$. (Якщо ж $p > n$, *то в розкладі* $n!$ *відсутні числа, що діляться на* p*).*

Справді, на підставі властивості 11° кількість співмножників добутку $n!$ кратних p буде дорівнювати $[\frac{n}{p}]$. Це будуть лише такі числа $p, 2p, 3p, \dots, [\frac{n}{p}]p$. Отже, поява числа p у канонічному розкладі $n!$ визначається добутком цих чисел :

$$M = p \cdot 2p \cdot 3p \cdot \dots \cdot [\frac{n}{p}] \cdot p = p^{\left[\frac{n}{p}\right]} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot [\frac{n}{p}].$$

Позначимо $[\frac{n}{p}] = n_1$. Тоді $M = p^{n_1} . n_1!$.

Як і раніше серед множників добутку $n_1!$ можуть бути числа кратні знов p : $p, 2p, 3p, \dots, [\frac{n_1}{p}] \cdot p$. Їх добуток дорівнює

$$p^{\left[\frac{n_1}{p}\right]} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \dots \cdot [\frac{n_1}{p}].$$

Якщо позначити аналогічно до попереднього $n_2 = [\frac{n_1}{p}]$, то за властивістю 12° : $n_2 = [\frac{[n]}{p} : p] = [\frac{n}{p} : p] = [\frac{n}{p^2}]$, а

$$M = M_1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n_2 \cdot p^{n_1 + n_2},$$

де M_1 – добуток чисел, що не діляться на p.

Якщо, $n_2 < p$, то процес закінчено; якщо ж $n_2 \geq p$, продовжуємо аналогічні міркування далі. На наступному кроці дістанемо:

$M = M_2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n_3 \cdot\ p^{n_1+n_2+n_3}$, де $n_3 = [\frac{n_2}{p}] = [\frac{n}{p^2} : p] =$

$[\frac{n}{p^3}]$ і т.д.

Цей процес скінченний, оскільки числа n, n_1, n_2, ... утворюють спадний ланцюг натуральних чисел і при деякому досить великому k виявиться, що $n_k < p$, тобто $[\frac{n_k}{p}] = 0$.

Отже, $M = M_{k-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n_k \cdot\ p^{n_1+n_2+n_3+\ldots+n_k}$.

Серед множників 1, 2, 3, ..., n_k немає таких, що діляться на p, оскільки $n_k < p$; добуток M_{k-1} також не містить множників, кратних p. Тому до канонічного розкладу $n!$ просте число p ввійде з показником, який дорівнює

$$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = [\frac{n}{p}] + [\frac{n}{p^2}] + [\frac{n}{p^3}] + \ldots + [\frac{n}{p^k}],$$

що і слід було довести.

Зауваження 2. На практиці обчислення доданків n_s $(1 \le s \le k)$ зручніше проводити за такою формулою

$$n_s = [\frac{n}{p^s}] = [\frac{n}{p^{s-1}} : p] = [[\frac{n}{p^{s-1}}] : p] = [\frac{n_{s-1}}{p}].$$

Крім того, $[\frac{n}{p}]$ не що інше, як неповна частка при діленні числа n на p.

Приклад 15. Знайти показник степеня, з яким число 7 входить до розкладу 856!

Обчислення проводять за наступною схемою у відповідності до зробленого зауваження:

$$\begin{array}{r|l|l|l}
856 & 7 & & \\
 & 122 & 7 & \\
 & & 17 & 7 \\
 & & & 2
\end{array}$$

Додаючи неповні частки, знаходимо шуканий показник $122 + 17 + 2 = 141$.

Остання властивість 13° буде використовуватись для розв’язування наступного завдання.

Приклад 16. Скількома нулями закінчується добуток всіх натуральних чисел від 1 до 701?

Зрозуміло, що лише два простих числа дають у добутку число, що закінчується нулем: це 2 та 5.

Аналізуючи формулу (1), можна зробити висновок, що показник степеня 2 у канонічному розкладі $n!$ ($n \neq 1$) завжди більший за показник степеня 5 у тому ж самому розкладі. Тому кількість нулів у добутку $n!$ – це показник степеня 5 у канонічному розкладі $n!$:

$$\begin{array}{r|l|l|l|l}
701 & 5 & & & \\
 & 140 & 5 & & \\
 & & 28 & 5 & \\
 & & & 5 & 5 \\
 & & & & 1
\end{array}$$

$$140 + 28 + 5 + 1 = 174.$$

Таким чином, добуток 701! закінчується 174 нулями.

2. Обчислення значень виразів, що містять цілу частину числа

Для знаходження цілої частини деякого числового виразу слід знайти «обмежувальний» проміжок одиничної довжини, який би містив заданий вираз. Бажано, щоб кінці цього проміжку були цілими числами, тоді нижня ціла границя проміжку і є цілою частиною виразу.

Приклад 17. Обчислити: $[lg\ 128]$, $[\frac{1+\sqrt{52}}{2}]$, $[\ 3 + cos\frac{101\pi}{204}]$.

Оскільки $2 \le lg\ 128 < 3$, то $[lg\ 128] = 2$.

Аналогічно $7 \le \sqrt{52} < 8$, $8 \le 1+\sqrt{52} < 9$,

$4 \le \frac{1+\sqrt{52}}{2} < 4{,}5$, тому $[\frac{1+\sqrt{52}}{2}] = 4$.

Оскільки $\frac{101\pi}{204} \approx \frac{102\pi}{204} \approx \frac{\pi}{2}$, то

$$0 \le cos\ \frac{101\pi}{204} < \frac{1}{2},$$

$$3 \le 3 + cos\ \frac{101\pi}{204} < 3\frac{1}{2} \text{ і}$$

$$[\ 3 + cos\frac{101\pi}{204}] = 3.$$

Приклад 18. Обчислити:

$$[\underbrace{\sqrt{2019+\sqrt{2019+\sqrt{2019+\ldots+\sqrt{2019}}}}}_{2019\ \text{доданків}}].$$

Зрозуміло, що $44 \le \sqrt{2019} < 45$, тому $[\sqrt{2019}] = 44$.

Міркуючи аналогічно, отримаємо:

$2063 \le 2019 + \sqrt{2019} < 2064$, $45^2 \le 2019 + \sqrt{2019} < 46^2$,

$45 \le \sqrt{2019+\sqrt{2019}} < 46$ та $[\sqrt{2019+\sqrt{2019}}] = 45$,

$2063 \le 2019 + \sqrt{2019+\sqrt{2019}} < 2064$,

$45 \le \sqrt{2019+\sqrt{2019+\sqrt{2019}}} < 46$ та

$[\sqrt{2019+\sqrt{2019+\sqrt{2019}}}] = 45$.

Аналогічна ситуація буде, коли доданків вже стане 4. Тобто, в подальшому, на значення цілої частини виразу кількість доданків не буде впливати. Тому

$$[\underbrace{\sqrt{2019+\sqrt{2019+\sqrt{2019+\ldots+\sqrt{2019}}}}}_{2019\ \text{доданків}}] = 45.$$

Приклад 19. Обчислити:

$$[\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{2+\sqrt[3]{3+\ldots\sqrt[3]{2018+\sqrt[3]{2019}}}}}].$$

Зрозуміло, що $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{2+\sqrt[3]{3+\ldots\sqrt[3]{2018+\sqrt[3]{2019}}}}} \ge 1$.

Оцінимо вираз, починаючи з «внутрішніх» коренів:

$12 \le \sqrt[3]{2019} < 13$, оскільки $12^3 = 1728$, а $13^3 = 2197$.

Беручи верхнє значення виразу, отримуємо

$2018 + \sqrt[3]{2019} < 2018 + 13 = 2031$, тому

$$12 \le \sqrt[3]{2018+\sqrt[3]{2019}} < 13,$$

$2017 + \sqrt[3]{2018+\sqrt[3]{2019}} < 2017 + 13 = 2030$, тому

$$12 \le \sqrt[3]{2017+\sqrt[3]{2018+\sqrt[3]{2019}}} < 13.$$

Отже, найбільше значення, яке може набувати вихідний вираз – це 13. Замінюємо на 13 більшу частину коренів, тобто

$$\sqrt[3]{2+\sqrt[3]{3+\ldots+\sqrt[3]{2019}}} < \sqrt[3]{2+13} = \sqrt[3]{15} < 3,$$

$$\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{2+\sqrt[3]{3+\ldots+\sqrt[3]{2019}}}} < \sqrt[3]{1+3} = \sqrt[3]{4} < 2.$$

Отримаємо, що $1 \le \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{2+\sqrt[3]{3+\ldots\sqrt[3]{2018+\sqrt[3]{2019}}}}} < 2$, тому

$$[\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{2+\sqrt[3]{3+\ldots\sqrt[3]{2018+\sqrt[3]{2019}}}}}\ ] = 1.$$

Олімпіадні завдання найчастіше є комбінацією декількох більш простіших завдань як, на приклад, наступне.

Приклад 20. Обчислити

$$[2\sqrt{1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\ldots+2018\cdot 2019\cdot 2020}\,].$$

Позначимо підкореневий вираз через S та перетворимо його наступним чином: кожен доданок суми розпишемо як різницю виразів:

$$1\cdot2\cdot3 = \frac{1}{4}(\ 1\cdot2\cdot3\cdot4 - 0\cdot1\cdot2\cdot3), \text{ оскільки}$$

$$\frac{1}{4}(\ 1\cdot2\cdot3\cdot4 - 0\cdot1\cdot2\cdot3) = \frac{1}{4}\ 1\cdot2\cdot3\cdot(4-0) = 1\cdot2\cdot3;$$

аналогічно далі:

$$2\cdot3\cdot4 = \frac{1}{4}(\ 2\cdot3\cdot4\cdot5 - 1\cdot2\cdot3\cdot4),$$

$$3\cdot4\cdot5 = \frac{1}{4}(\ 3\cdot4\cdot5\cdot6 - 2\cdot3\cdot4\cdot5),$$

$$\ldots$$

$$2018\cdot2019\cdot2020 = \frac{1}{4}\,(\,2018\cdot2019\cdot2020\cdot2021 -$$

$$-\,2017\cdot2018\cdot2019\cdot2020\,).$$

Додаючи отримані вирази, будемо мати

$$S = \frac{1}{4}(1\cdot2\cdot3\cdot4 - 0\cdot1\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot4\cdot5 - 1\cdot2\cdot3\cdot4 + 3\cdot4\cdot5\cdot6 - 2\cdot3\cdot4\cdot5 + \ldots +$$

$$2018\cdot2019\cdot2020\cdot2021 - 2017\cdot2018\cdot2019\cdot2020) =$$

$$= \frac{1}{4}(2018\cdot2019\cdot2020\cdot2021 - 0\cdot1\cdot2\cdot3\,) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 2018\cdot2019\cdot2020\cdot2021.$$

Продовжимо перетворення наступним чином:

$$S = \frac{1}{4}(2020 - 2)\cdot2019\cdot2020\cdot(2019 + 2) = \frac{1}{4}\cdot 2019\cdot 2020$$

$$\cdot\,(\,2019\cdot2020 - 2\cdot2019 + 2\cdot2020 - 4) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 2019\cdot 2020\cdot(\,2019\cdot2020 - 2).$$

Оцінимо отриманий добуток:

$$\frac{1}{4}\cdot(\,2019\cdot2020 - 2)^2 < \frac{1}{4}\cdot 2019\cdot2020\cdot(\,2019\cdot2020 - 2) = S =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot((\,2019\cdot2020)^2 - 2\cdot2019\cdot2020) <$$

$$< \frac{1}{4}\cdot((2019\cdot2020)^2 - 2\cdot2019\cdot2020 + 1) = \frac{1}{4}\cdot(2019\cdot2020 - 1)^2.$$

Тому

$$2\sqrt{S} = 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2019\cdot2020\cdot(2019\cdot2020-2)}\ \text{і},$$

враховуючи знайдені обмеження, маємо

$$2019\cdot2020 - 2 < 2\sqrt{S} < 2019\cdot2020 - 1,$$

$$\text{і } [2\sqrt{S}\,] = 2019\cdot2020 - 2.$$

Приклад 21. Знайти всі натуральні n, при яких $\left[\frac{n^2}{5}\right]$ є простим числом.

Для розв′язування розглянемо випадки різних остач при діленні n на 5, тобто: $n = 5k$, $n = 5k \pm 1$, $n = 5k \pm 2$.

1) $n = 5k$, $\left[\frac{n^2}{5}\right] = [5k^2] = 5k^2$ (за умови, що k - ціле), $5k^2$ просте тоді і тільки тоді, коли $k = 1$; тоді $n = 5$.

2) $n = 5k \pm 1$, $\left[\frac{n^2}{5}\right] = \left[\frac{(5k\pm1)^2}{5}\right] = \left[5k^2 \pm 2k + \frac{1}{5}\right] = 5k^2 \pm 2k$ (за умови, що k - ціле), $5k^2 \pm 2k = k\cdot(5k \pm 2)$ – просте тоді і тільки тоді, коли $k = 1$, відповідно $n = 4$, $n = 6$;

3) $n = 5k \pm 2$, $\left[\frac{n^2}{5}\right] = \left[\frac{(5k\pm2)^2}{5}\right] = \left[5k^2 \pm 4k + \frac{4}{5}\right] = 5k^2 \pm 4k$ (за умови, що k – ціле), $5k^2 \pm 4k = k\cdot(5k \pm 4)$ – серед чисел такого виду простих немає.

Відповідь: $n \in \{4, 5, 6\}$.

Приклад 22. Обчислити цілу частину виразу

$$\underbrace{\sqrt{n^2 - n + \sqrt{n^2 - n + \ldots + \sqrt{n^2 - n}}}}_{n} + \underbrace{\sqrt[3]{m^3 - m + \sqrt[3]{m^3 - m + \ldots \sqrt[3]{m^3 - m}}}}_{m},$$

де $n, m \geq 2$.

Позначимо через:

$$a_1 = \sqrt{n^2 - n},\ b_1 = \sqrt[3]{m^3 - m},\ a_{k+1} = \sqrt{n^2 - n + a_k},$$

$$b_{k+1} = \sqrt[3]{m^3 - m + b_k},$$

а через S весь вираз. Тоді $S = a_n + b_m$.

Оскільки $\sqrt{n^2 - n} < n$ та $\sqrt[3]{m^3 - m} < m$, то, $a_n < n$ і $b_m < m$, а, отже, послідовності $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ – обмежені.

Доведемо, що ці послідовності зростаючі. Для першої послідовності

$$a_{k+1} - a_k = \sqrt{n^2 - n + a_k} - a_k = \frac{n^2 - n + a_k - a_k^2}{\sqrt{n^2 - n + a_k} + a_k} =$$

$$\frac{n^2 - a_k^2 + a_k - n}{\sqrt{n^2 - n + a_k} + a_k} = \frac{(n - a_k)(n + a_k - 1)}{\sqrt{n^2 - n + a_k} + a_k} > 0, \text{ бо}$$

$$(n - a_k)(n + a_k - 1) > 0, \ \sqrt{n^2 - n + a_k} + a_k > 0.$$

Для другої послідовності

$$b_{k+1} - b_k = \sqrt[3]{m^3 - m + b_k} - b_k =$$

$$= \frac{m^3 - m + b_k - b_k^3}{\sqrt[3]{(m^3 - m + b_k)^2} + b_k\sqrt[3]{m^3 - m + b_k} + b_k^2} =$$

$$= \frac{m^3 - b_k^3 - (m - b_k)}{\sqrt[3]{(m^3 - m + b_k)^2} + b_k\sqrt[3]{m^3 - m + b_k} + b_k^2} =$$

$$= \frac{(m - b_k)(m^2 + mb_k + b_k^2) - (m - b_k)}{\sqrt[3]{(m^3 - m + b_k)^2} + b_k\sqrt[3]{m^3 - m + b_k} + b_k^2} =$$

$$= \frac{(m - b_k)(m^2 + mb_k + b_k^2 - 1)}{\sqrt[3]{(m^3 - m + b_k)^2} + b_k\sqrt[3]{m^3 - m + b_k} + b_k^2} > 0,$$

$$\text{бо } (m - b_k)(m^2 + mb_k + b_k^2 - 1) > 0 \text{ та}$$

$$\sqrt[3]{(m^3 - m + b_k)^2} + b_k\sqrt[3]{m^3 - m + b_k} + b_k^2 > 0.$$

Тому $a_n + b_m \geq a_1 + b_1 = \sqrt{n^2 - n} + \sqrt[3]{m^3 - m}$, крім того,

$$a_n + b_m < n + m.$$

Порівнюємо $\sqrt{n^2 - n} + \sqrt[3]{m^3 - m}$ та $n + m - 1$ через таку нерівність

$$n + m - \sqrt{n^2 - n} - \sqrt[3]{m^3 - m} > 1.$$

Далі розглянемо функції

$$y_1 = x - \sqrt{x^2 - x} \text{ та } y_2 = x - \sqrt[3]{x^3 - x} \text{ де } x \in [2; +\infty).$$

Використовуючи похідні, можна показати, що обидві ці функції – спадні на проміжку $[2; +\infty)$. А, отже, своє найбільше значення вони приймають у точці $x = 2$:

$$y_1(2) = 2 - \sqrt{2},\ y_2(2) = 2 - \sqrt[3]{6}$$

і відповідно

$$\sqrt{n^2 - n} < 2 - \sqrt{2},$$

$$\sqrt[3]{m^3 - m} < 2 - \sqrt[3]{6},$$

$$\sqrt{n^2 - n} + \sqrt[3]{m^3 - m} < 2 - \sqrt{2} + 2 - \sqrt[3]{6} < 1.$$

Останню нерівність ланцюжка доводимо наступним чином:

$$4 - \sqrt{2} - \sqrt[3]{6} - 1 < 0,$$

$$3 - \sqrt{2} - \sqrt[3]{6} < 0,$$

$$3 - \sqrt{2} < \sqrt[3]{6},$$

$$(3 - \sqrt{2})^6 < (\sqrt[3]{6})^6,$$

$$3707 - 2610\sqrt{2} < 1296 \text{ – виконується.}$$

Тому $n + m - 1 < a_n + b_m < n + m$ і $[a_n + b_m] = n + m - 1$.

Іноді знайдений «обмежувальний» проміжок є довшим за 1. У цьому випадку оцінюють різниці заданого виразу та всіх цілих чисел, що містяться у знайденому проміжку для визначення більш точних границь.

Приклад 23. Обчислити цілу частину $log_2 3 + log_3 4$.

Зрозуміло, що

$$2 < log_2 3 + log_3 3 < log_2 3 + log_3 4 < log_2 4 + log_3 9 =$$
$$= 2 + 2 = 4,$$

тобто $2 < log_2 3 + log_3 4 < 4$.

Оскільки $3 \in (2, 4)$, то оцінимо різницю

$$(log_2 3 + log_3 4) - 3.$$

$$log_2 3 + log_3 4 - 3 = log_2 3 + log_3 2^2 - 3 = log_2 3 + 2 \cdot log_3 2 - 2 -$$
$$- 1 = log_2 3 + 2 \cdot (log_3 2 - 1) - log_2 3 \cdot log_3 2 = log_2 3 \, (1 - log_3 2) -$$
$$- 2 \cdot (1 - log_3 2) = (log_2 3 - 2)(1 - log_3 2).$$

$$1 < log_2 3 < 2,$$

$$-1 < log_2 3 - 2 < 0,$$

а $0 < log_3 2 < 1$, $0 < 1 - log_3 2 < 1$, тому

$(log_2 3 - 2)(1 - log_3 2) < 0$ і $log_2 3 + log_3 4 - 3 < 0$, а отже,

$$2 < log_2 3 + log_3 4 < 3 \text{ і } [log_2 3 + log_3 4] = 2.$$

3. Побудова графіків складених функцій, що містять цілу та дробову частини числа

Розглянемо алгоритми, за якими можна будувати типові графіки функцій, що містять цілу та дробову частини числа.

Алгоритм 1. *Графік функції $y = f([x])$ (ціла частина – аргумент функції).*

Традиційно пропонується виконувати побудови наступним чином: спочатку треба побудувати графік функції $y = f(x)$ та провести прямі $x = k$, де $k \in Z$. Потім ті частини графіка функції

$y = f(x)$, що містяться в смузі, визначеній подвійною нерівністю $k \le x < k + 1$, спроектувати на пряму $y = f(k)$. Сукупність здобутих проекцій буде шуканим графіком [6, с.87]. Таким чином, побудова графіків функції $y = f([x])$ зводиться до побудови графіка $y = f(x)$ при цілих значеннях x.

Проте існує простіший спосіб побудови графіків функцій виду $y = f([x])$. Область визначення функції розбивають на проміжки одиничної довжини $[k; k + 1)$, $k \in Z$. Оскільки на цих проміжках $[x] = k$, тому підставляють значення k у вираз для функції $y = f([x]) = = f(k)$. Далі будують графіки отриманих функції $y = f(k)$ на відповідних одиничних проміжках.

Приклад 24. Побудувати графік функції $y = [x]$ за алгоритмом 1.

Розіб'ємо область визначення функції $(-\infty; +\infty)$ на проміжки одиничної довжини, знайдемо вирази для функції на кожному з них (розглянемо лише частину проміжків, на інших ситуація буде аналогічною):

$x \in [0;1)$ $y = 0$; $x \in [1;2)$ $y = 1$; $x \in [2;3)$ $y = 2$; $x \in [3;4)$ $y = 3$; …

$x \in [-1;0)$ $y = -1$; $x \in [-2;-1)$ $y = -2$; $x \in [-3;-2)$ $y = -3$…

Будуємо остаточно графік $y = [x]$ (рис. 2).

***Зауваження* 3**. Функція $y = [x]$ приймає тільки цілі значення на одиничних проміжках. Причому кожне значення $[x]$ є точкою розриву, справа від якої значення y прямує до значення $[x]$, а зліва значення y прямує до значення $[x] - 1$. Очевидно, що $D(y) = R$, $E(y) = Z$.

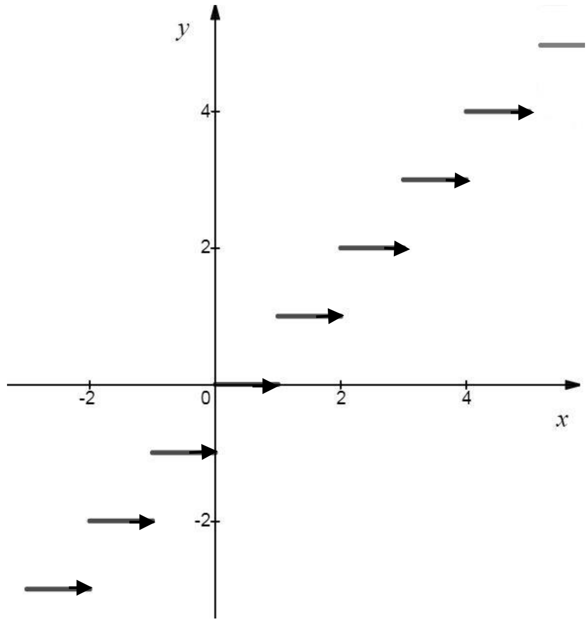

Рис. 2.Графік функції $y = [x]$.

Також функція $y = [x]$ належить до класу так званих числових функцій (функцію називають *числовою*, якщо її область визначення або область значень є підмножиною множини цілих чисел Z [4, с.49]).

Приклад 25. Побудувати графік функції $y = \{x\}$ за алгоритмом 1.

Для цього перетворимо вираз для функції

$y = \{x\} = x - [x]$ і будемо мати:

$$x \in [0; 1) \quad y = x; \quad x \in [1; 2) \quad y = x - 1; \quad x \in [2; 3) \quad y = x - 2;$$

$$x \in [3; 4) \quad y = x - 3; \ldots$$

$$x \in [-1; 0) \quad y = x + 1; \quad x \in [-2; -1) \quad y = x + 2;$$

$$x \in [-3; -2) \quad y = x + 3\ldots$$

І графік функції $y = \{x\}$ буде мати вигляд (рис. 3):

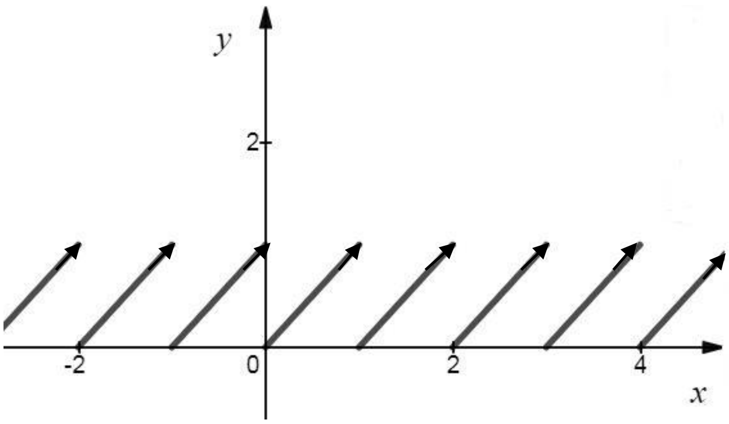

Рис. 3. Графік функції $y=\{x\}$.

Зауваження 4. Для функції $y = \{x\}$: $D(y) = R$, $E(y) = [0;1)$. Якщо $x \in Z$, то функція зліва від точки x прямує до 1, а справа до 0. Отже, точки $x \in Z$ є точками розриву функції $y = \{x\}$. З побудов видно, що функція $y = \{x\}$ є періодичною з найменшим додатним періодом $T = 1$. Цим фактом часто користуються при побудові графіків функцій, що містять дробову частину числа (див. відповідний алгоритм 3).

Приклад 26. Побудувати графік функції $y = 2[x] + 1$.

Для виконання побудов можна скористатися запропонованим алгоритмом 1, але застосовуючи перетворення графіка функції $y = [x]$ (рис. 2), досить просто отримати графік функції $y = 2[x] + 1$.

Для цього графік функції $y = [x]$ слід розтягнути вдвічі вздовж осі y та підняти на одиницю вгору вздовж тієї самої вісі. Послідовні перетворення подані на рис. 4 – 5 (графіки $y = 2[x]$ та $y = 2[x] + 1$ відповідно).

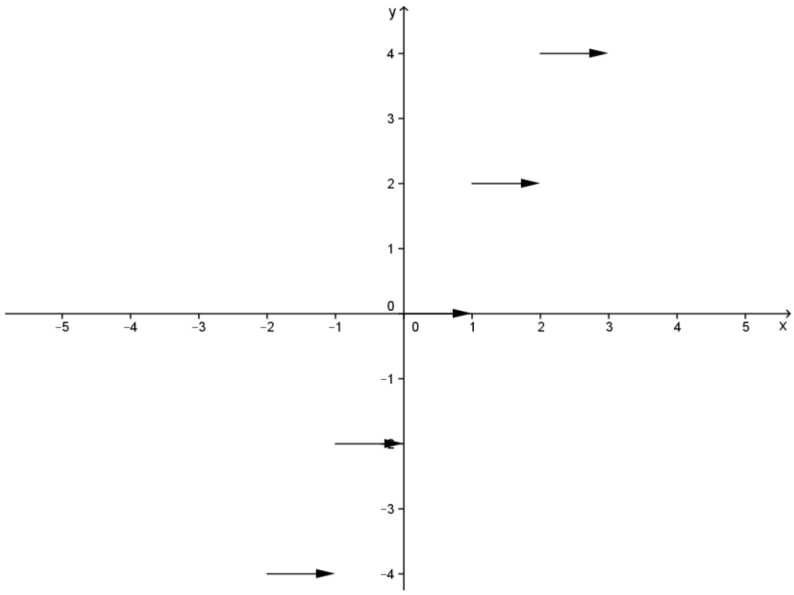

Рис. 4. Графік функції $y = 2[x]$.

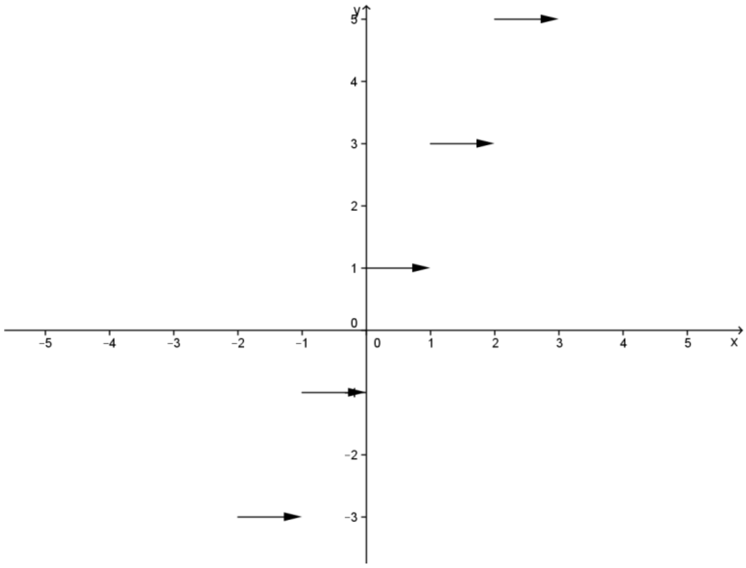

Рис. 5. Графік функції $y = 2[x] + 1$.

Приклад 27. Використовуючи алгоритм 1, побудувати графік функції: $y = \dfrac{1}{[x]}$.

Знайдемо область визначення заданої функції $y = \dfrac{1}{[x]}$ та її вигляд на одиничних проміжках:

$D(y) = R \setminus [0;1)$ (функція є невизначеною, коли $[x] = 0$);

$$x \in [1;2) \quad y = 1; \quad x \in [2;3) \quad y = \frac{1}{2}; \quad x \in [3;4) \quad y = \frac{1}{3};$$

$$x \in [4;5) \quad y = \frac{1}{4}; \ \dots$$

$$x \in [-1;0) \quad y = -1; \quad x \in [-2;-1) \quad y = -\frac{1}{2}; \quad x \in [-3;-2) \quad y = -\frac{1}{3};$$

$$x \in [-4;-3) \quad y = -\frac{1}{4}; \dots$$

Графік функції $y = \dfrac{1}{[x]}$ зображено на рис. 6 стрілками на фоні графіка функції $y = \dfrac{1}{x}$.

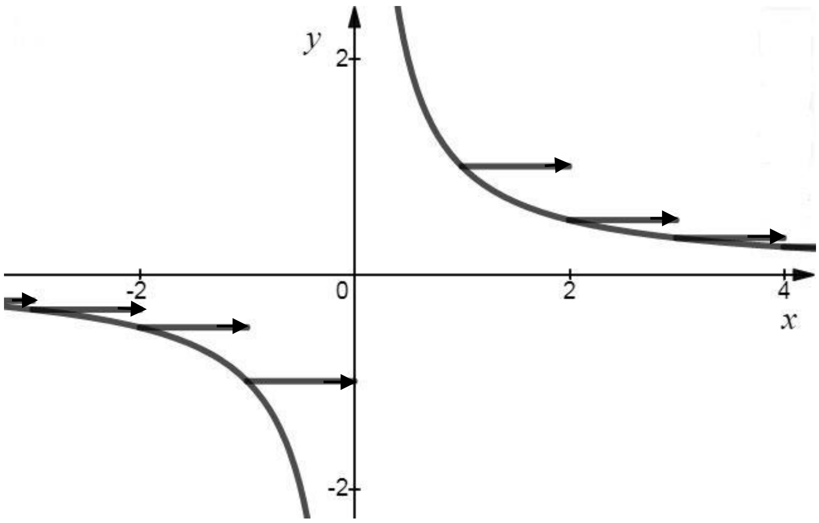

Рис. 6. Графіки функцій $y = \dfrac{1}{x}$ та $y = \dfrac{1}{[x]}$.

Приклад 28. Побудувати графік функції $y = \dfrac{[x]}{x}$.

Знов застосуємо алгоритм 1.

Для цього знайдемо область визначення заданої функції $y = \dfrac{[x]}{x}$ та її вигляд на одиничних проміжках:

$D(y) = R \setminus \{0\}$ (функція невизначена, коли $x = 0$);

$$x \in (0;1) \quad y = 0; \quad x \in [1;2) \quad y = \frac{1}{x}; \quad x \in [2;3) \quad y = \frac{2}{x};$$

$$x \in [3;4) \quad y = \frac{3}{x}; \quad x \in [4;5) \quad y = \frac{4}{x}; \ \ldots$$

$$x \in [-1;0) \quad y = -\frac{1}{x}; \quad x \in [-2;-1) \quad y = -\frac{2}{x}; \quad x \in [-3;-2) \quad y = -\frac{3}{x};$$

$$x \in [-4;-3) \quad y = -\frac{4}{x}; \ \ldots$$

Остаточно графік функції $y = \frac{[x]}{x}$ подано на рис. 7.

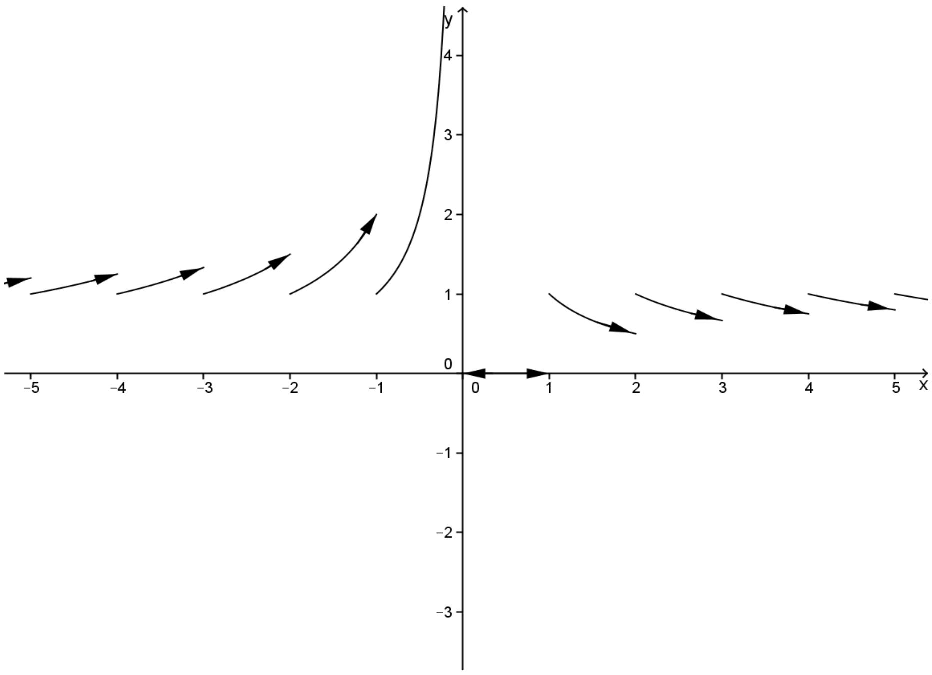

Рис. 7. Графік функції $y = \frac{[x]}{x}$.

Приклад 29. Побудувати графік функції $y = \frac{x^2}{[x]}$.

На проміжку $[0;1)$ функція невизначена, оскільки для $x \in [0;1)$ $[x] = 0$.

Одним із варіантів побудови графіка функції $y = \dfrac{x^2}{[x]}$ є: стискання графіка функції $y = x^2$ в $[x] = k$ раз вздовж осі y на проміжках $[k\ ;\ k + 1)$, де $k \in Z^{+}$ та стискання графіка функції $y = x^2$ в $[x] = |\ k\ |$ раз вздовж осі y з одночасним відображенням відносно Ox на проміжках $[k\ ;\ k + 1)$, де $k \in Z^{-}$.

Інший варіант (алгоритм 1) полягає в наступному: визначаємо вигляд функції $y = \dfrac{x^2}{[x]}$ на одиничних проміжках:

$$x \in [1;\ 2) \quad y = x^2; \quad x \in [2;\ 3) \quad y = \frac{x^2}{2}; \quad x \in [3;\ 4) \quad y = \frac{x^2}{3};$$

$$x \in [4;\ 5) \quad y = \frac{x^2}{4}; \ldots$$

$$x \in [-1;\ 0) \;\; y = -x^2; \;\; x \in [-2;\ -1) \; y = -\frac{x^2}{2}; \;\; x \in [-3;\ -2) \quad y = -\frac{x^2}{3};$$

$$x \in [-4;\ -3) \quad y = -\frac{x^2}{4} \ldots$$

Після побудови знайдених функцій на відповідних проміжках, отримаємо графік функції $y = \dfrac{x^2}{[x]}$, поданий на рис. 8.

Приклад 30. Побудувати графік функції $y = x[x]$.

Якщо застосувати розглядуваний алгоритм 1 для побудови графіка функції $y = x[x]$, то після розписування його області визначення $D(y) = (-\infty;\ +\infty)$ за одиничними проміжками, отримаємо графік представлений на рис. 9.

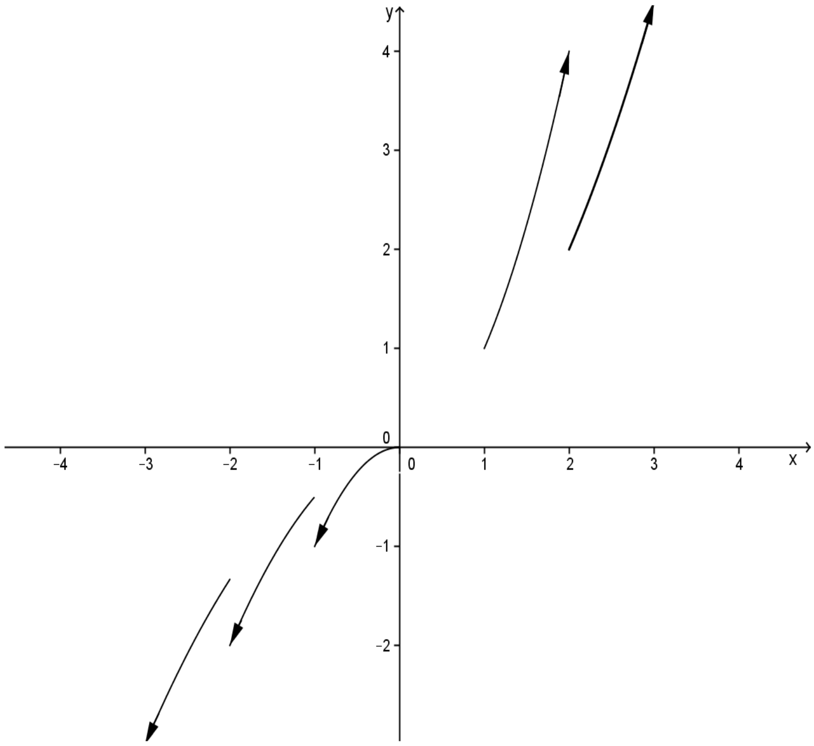

Рис. 8. Графік функції $y = \dfrac{x^2}{[x]}$.

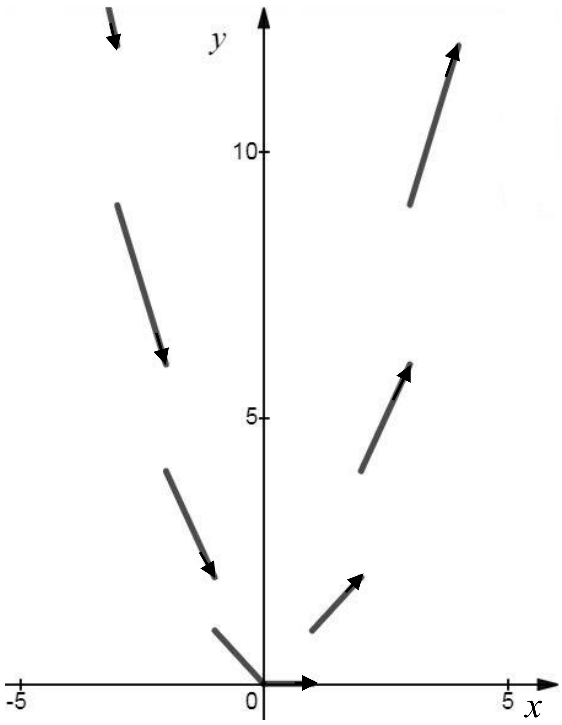

Рис. 9. Графік функції $y = x[x]$.

Графік функції $y = x[x]$ можна побудувати по-іншому: за основу слід взяти графік функції $y = [x]$ та скорегувати його на змінний коефіцієнт x, тобто смуги графіка $y = [x]$ помножити на x (рис. 9).

Приклад 31. Побудувати графік функції $y = e^{\ln|[x]|}$.

Якщо $[x] = 0$, то дана функція $y = e^{\ln|[x]|}$ – невизначена, тобто $D(y) = (-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$.

Якщо $[x] \neq 0$, то

$$y = e^{\ln|[x]|} = |[x]| = \begin{cases} [x], & x \geq 1, \\ -[x], & x < 0 \end{cases}.$$

Отже, знов основою графіка шуканої функції є графік функції $y = [x]$, частина якого залишається незмінною для $x \geq 1$, а частина, що відповідає $x < 0$ симетрично відображається відносно вісі Ox. У результаті отримуємо графік, зображений на рис. 10.

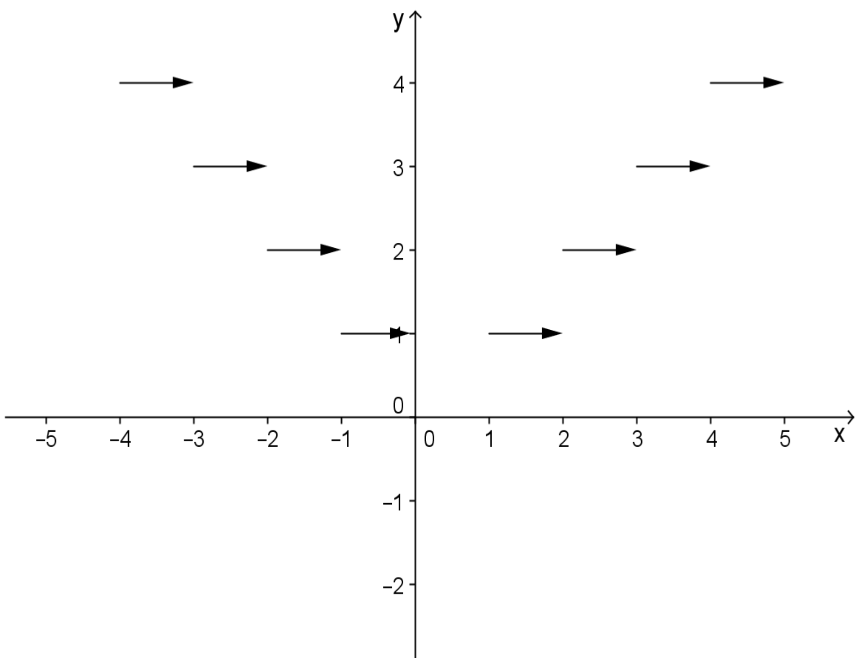

Рис. 10. Графік функції $y = e^{\ln|[x]|}$.

Алгоритм 2. *Графік функції* $y = [f(x)]$ (*ціла частина – зовнішня функція*).

Щоб побудувати графік функції $y = [f(x)]$, слід провести прямі $y = k$, $k \in Z$, і ті частини графіка функції $y = f(x)$, які містяться в смузі, визначеній подвійною нерівністю $k \le y \le k + 1$, спроектувати на нижню межу $y = k$ смуги, стрілку направити до точки, що проектується; сукупність здобутих проекцій - стрілок буде шуканим графіком.

Приклад 32. Побудувати графік функції $y = [x]$, використовуючи алгоритм 2.

Спочатку будуємо графік функції $y = x$ та прямі $y = k$, $k \in Z$ (рис. 11).

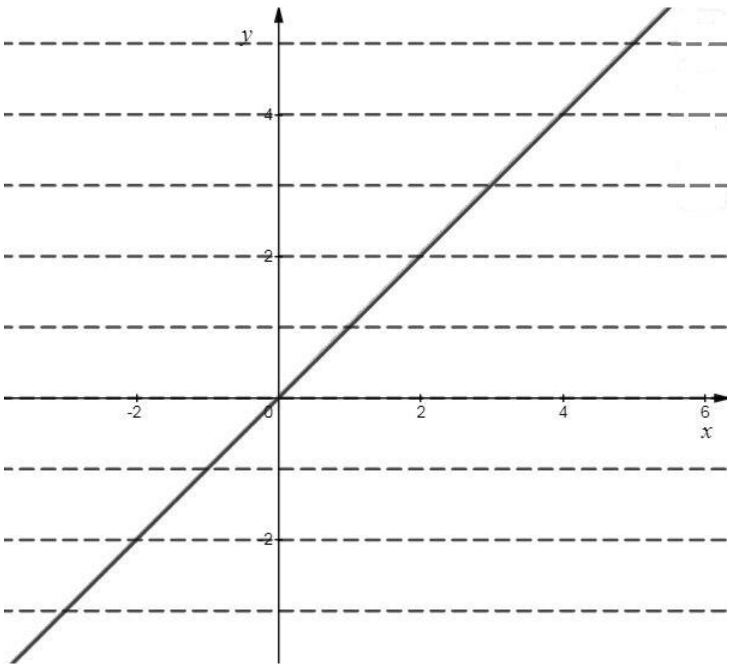

Рис. 11. Графік функцій $y = x$ та $y = k$ ($k \in Z$).

Частини графіка функції $y = x$, які містяться в смузі $k \le y \le k + 1$, $k \in Z$, проектуємо на нижню межу $y = k$ смуги (рис. 12), отримуючи при цьому графік шуканої функції, який повністю збігається з отриманим вище (приклад 24, рис. 2).

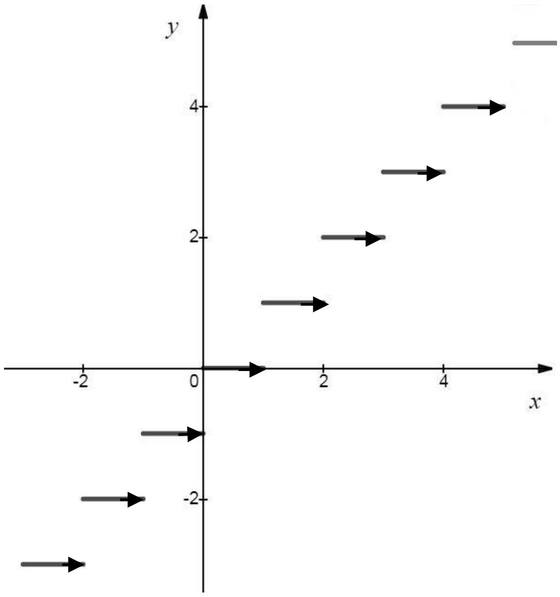

Рис. 12. Графік функції $y = [x]$.

Приклад 33. Побудувати графік функції $y = \frac{1}{2}[2x]$.

Спочатку будуємо графік функції $y = 2x$ та прямі $y = k$, $k \in Z$ (рис. 13).

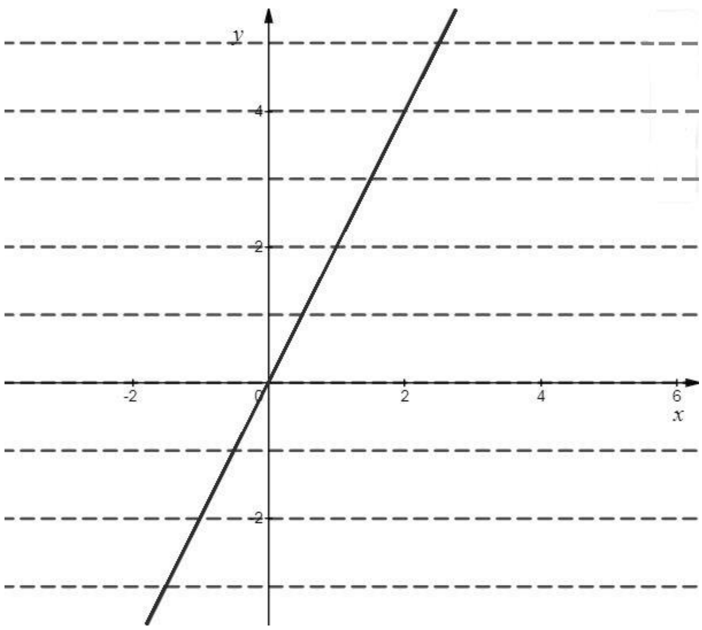

Рис. 13. Графік функцій $y = 2x$ та $y = k$ ($k \in Z$).

Потім, частини графіка функції $y = 2x$, які містяться в смузі $k \le y \le k + 1$, $k \in Z$, проектуємо на нижню межу $y = k$ смуги (рис. 13), отримуючи при цьому систему проекцій - стрілок, що є графіком функції $y = [2x]$, який зображено на рис. 14.

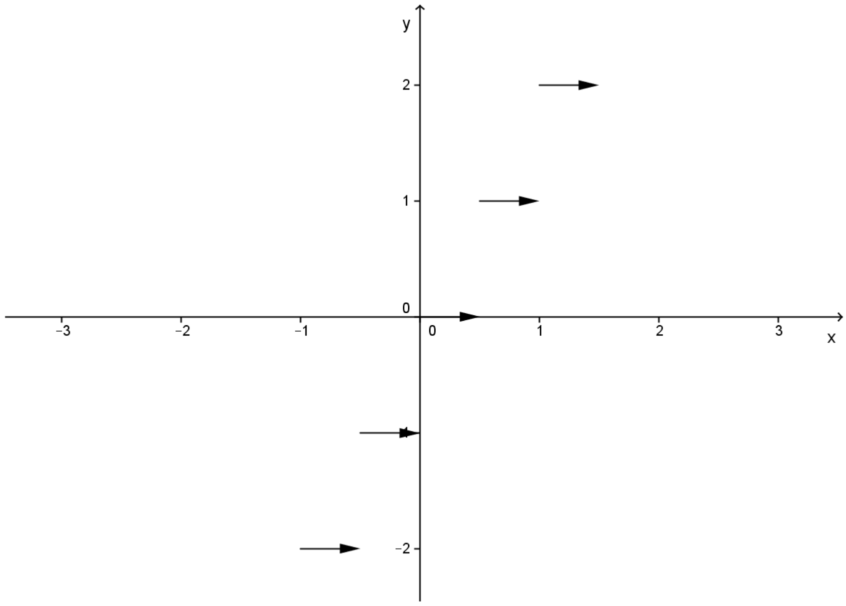

Рис. 14. Графік функції $y = [2x]$.

Далі перетворюємо графік функції $y = [2x]$ у графік функції $y = \frac{1}{2}[2x]$. Для цього графік $y = [2x]$ стискаємо вдвічі вздовж осі y. Отриманий графік має наступний вигляд (рис. 15).

Приклад 34. Побудувати графік функції $y = [e^{-x}]$.

Будуємо графік $y = e^{-x}$ та проводимо прямі $y = k$, $k \in Z$ (рис. 16).

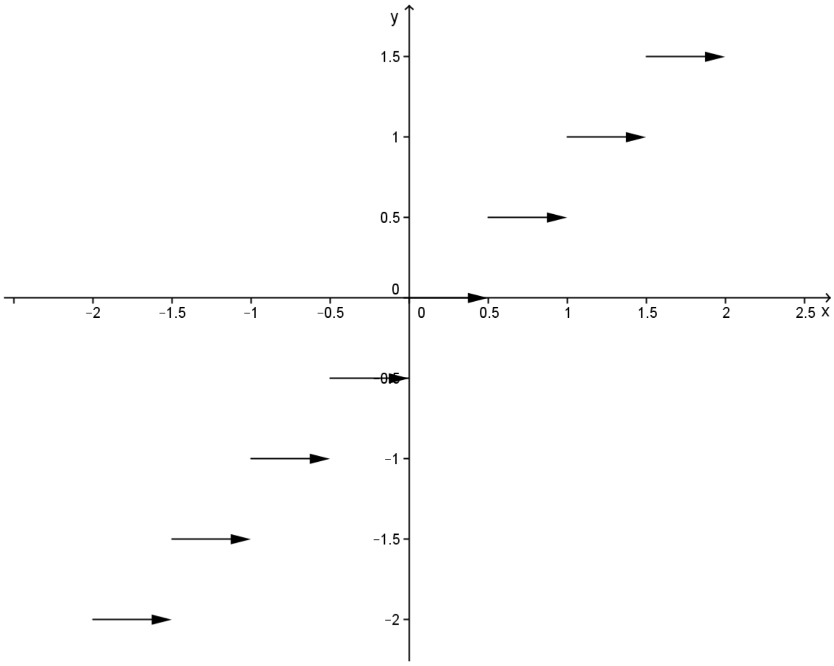

Рис. 15. Графік функції $y = \frac{1}{2}[2x]$.

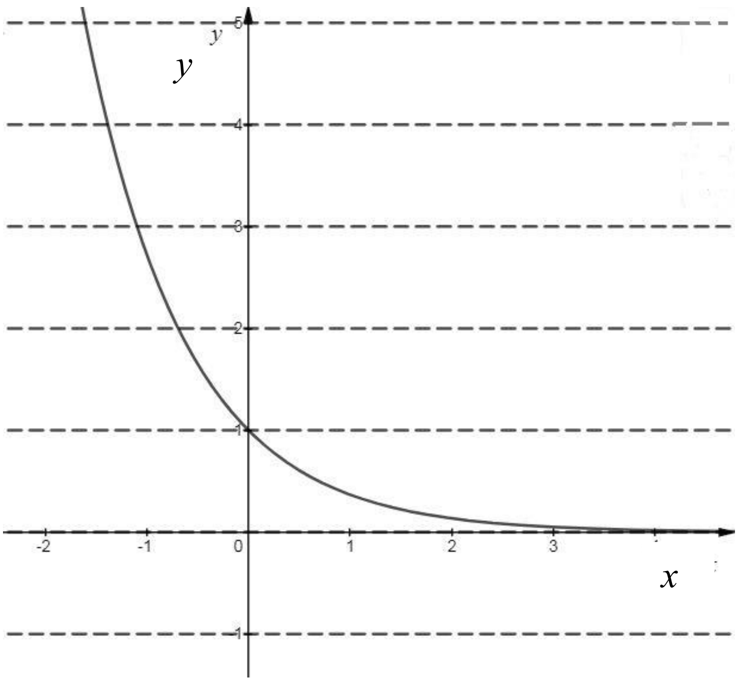

Рис. 16. Графік функції $y = e^{-x}$ та прямі $y = k$, $k \in Z$.

Частини графіка функції $y = e^{-x}$, які містяться в смузі, що визначається подвійною нерівністю $k \le y \le k + 1$, $k \in Z$, проектуємо на нижню межу $y = k$ смуги, при цьому стрілки направлені в сторону точки, що проектується. Сукупність здобутих проекцій буде шуканим графіком $y = [e^{-x}]$ (рис. 17).

Приклад 35. Побудувати графік функції $y = \left[\frac{1}{x}\right]$.

Дана функція визначена для всіх $x \neq 0$.

Використовуючи алгоритм 2, спочатку будуємо графік функції $y = \frac{1}{x}$, проводимо прямі $y = k$, $k \in Z$. Далі відбувається проектування частин графіка, які містяться в смузі $k \leq y \leq k + 1$, $k \in Z$, на нижню межу смуги $y = k$, при цьому «виколотими» будуть точки, що проектуються на нижню межу смуги. Графік функції зображено стрілками на фоні графіка функції $y = \frac{1}{x}$.

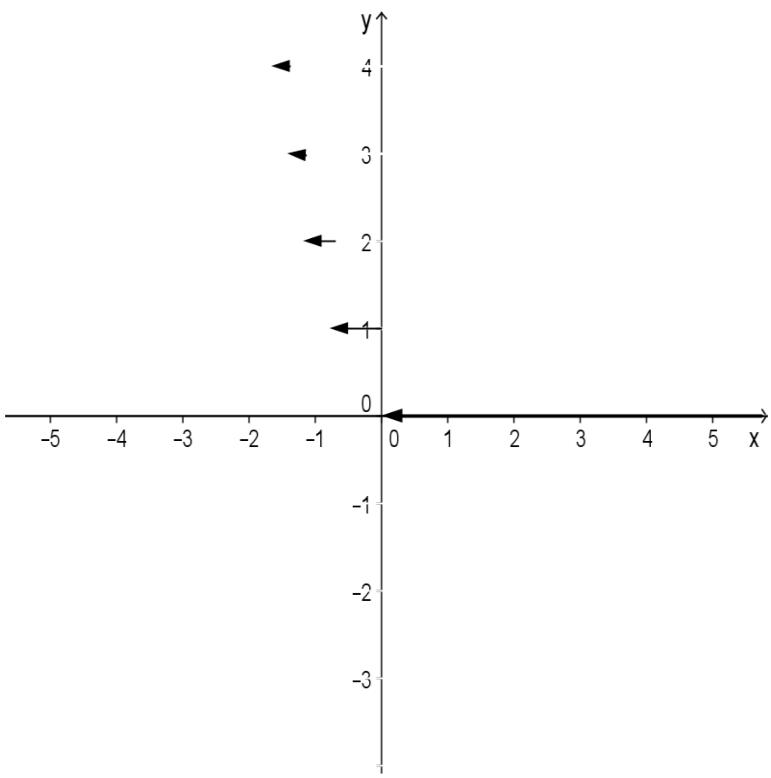

Рис. 17. Графік функції $y = [e^{-x}]$.

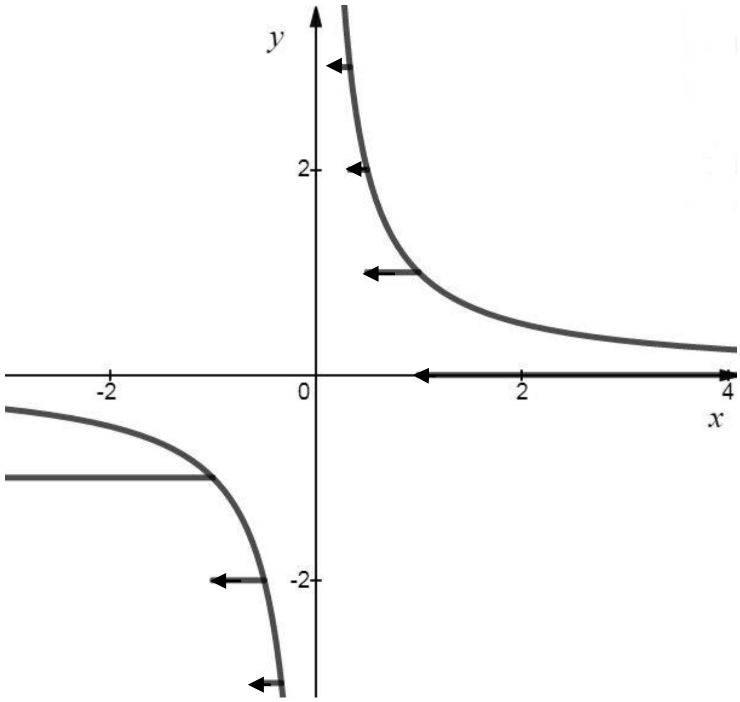

Рис. 18. Графік функції $y = \left[\dfrac{1}{x}\right]$.

Приклад 36. Побудувати графік функції $y = [2[x] + 0{,}5]$.

Для побудови графіка даної функції перетворимо її вираз. Для цього скористаємося означенням цілої частини числа та отримаємо, що $[2[x] + 0{,}5] = 2[x]$ (оскільки $2[x]$ – завжди ціле число, а 0,5 не впливає на значення виразу $[2[x] + 0{,}5]$). Отже, графіком функції $y = [2[x] + 0{,}5]$ буде графік функції $y = 2[x]$ (рис. 14).

Приклад 37. Побудувати графік функції $y = [sin^2(x)]$.

Для побудови використаємо алгоритм 2: побудуємо графік функції $y = sin^2(x) = \dfrac{1 - cos2x}{2}$ та прямі: $y = 1$, $y = 0$, $y = -1$ (рис. 19). Очевидно, що прямі $y = k$, $k \in Z\backslash\{-1; 0; 1\}$ будувати не треба.

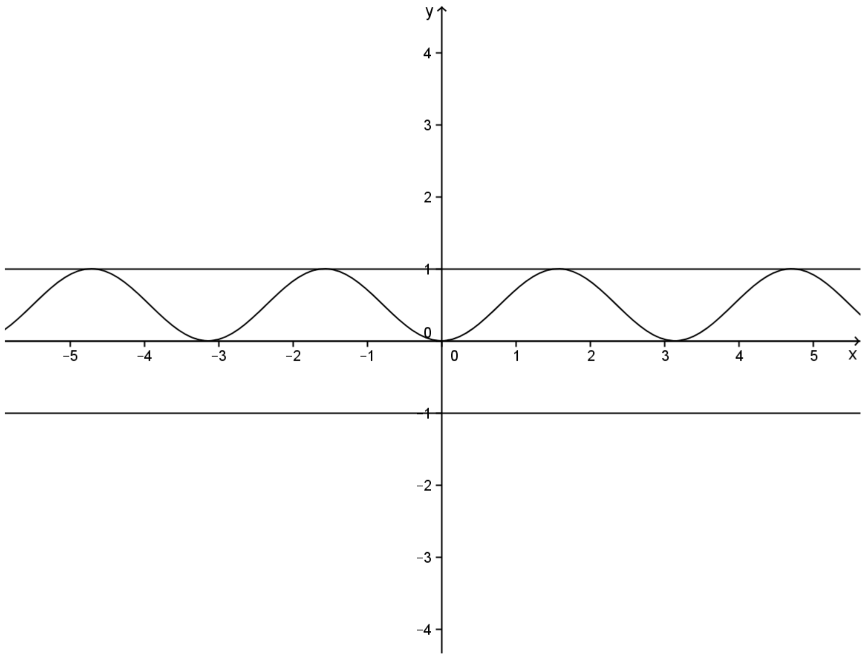

Рис. 19. Графік функції $y = sin^2(x)$ та прямі $y = 1$, $y = 0$, $y = -1$.

Частини графіка функції $y = sin^2(x)$, які містяться в смузі, визначеною подвійною нерівністю $k \le y \le k + 1$, $k \in \{0, \pm 1\}$, проектуємо на нижню межу смуги $y = k$; сукупність здобутих стрілок-проекцій та точок, що відповідають значенням $sin^2(x) = 1$, будуть шуканим графіком (рис. 20).

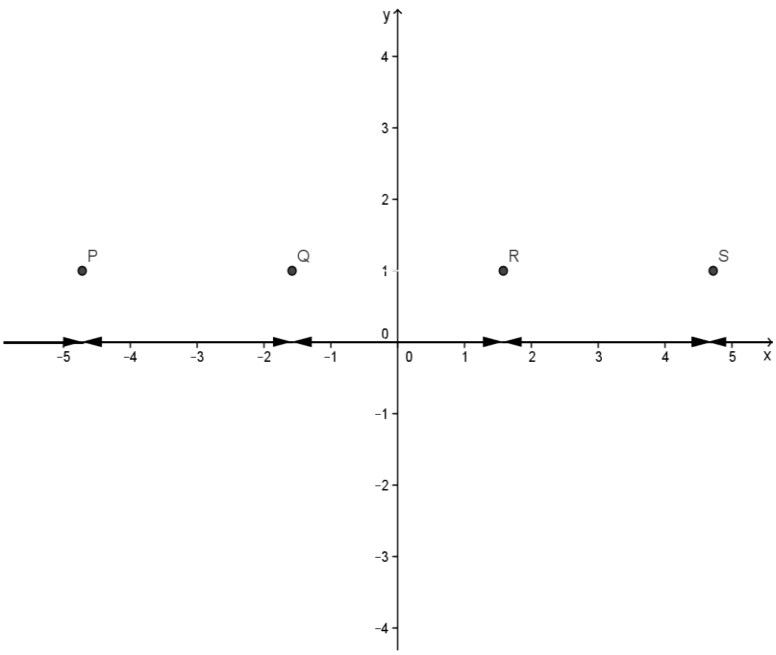

Рис. 20. Графік функції $y = [sin^2(x)]$.

Алгоритм 3. *Графік функції* $y = f(\{x\})$ *(дробова частина числа* $\{x\}$ *– аргумент зовнішньої функції).*

Для побудови графіка функції $y = f(\{x\})$ будують графік функції $y = f(x)$ на множині $D(f) \cap [0;\ 1)$, оскільки на цій множині $\{x\} = x$, та враховуючи, що функція $y = \{x\}$ є періодичною з періодом $T = k$, $k \in Z$, періодично продовжуємо його на область визначення даної функції.

Якщо скористатися алгоритмом 3 для побудови графіка функції $y = \{x\}$ (побудувати графік функції $y = x$ на проміжку $[0;1)$ та перенести цю частину на період $T = k$, $k \in Z$), то в результаті отримаємо графік функції $y = \{x\}$, що збігається з побудованим раніше у прикладі 25, рис. 3.

Приклад 38. Побудувати графік функції $y = 0{,}5\{x\} - 1$.

Для цього побудуємо графік функції $y = 0{,}5x - 1$ на проміжку $[0;\ 1)$ (рис. 21).

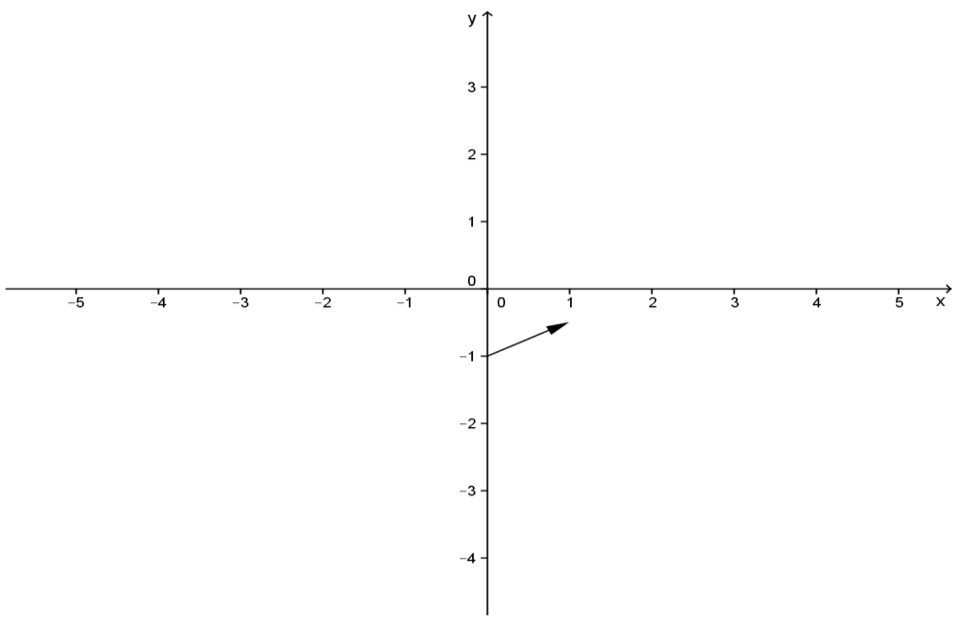

Рис. 21. Графік функції $y = 0{,}5x - 1$ на проміжку $[0;1)$.

Продовжимо частину прямої на область визначення даної функції $(-\infty; +\infty)$ паралельним перенесенням вправо та вліво на одиницю (рис. 22) і отримаємо шуканий графік.

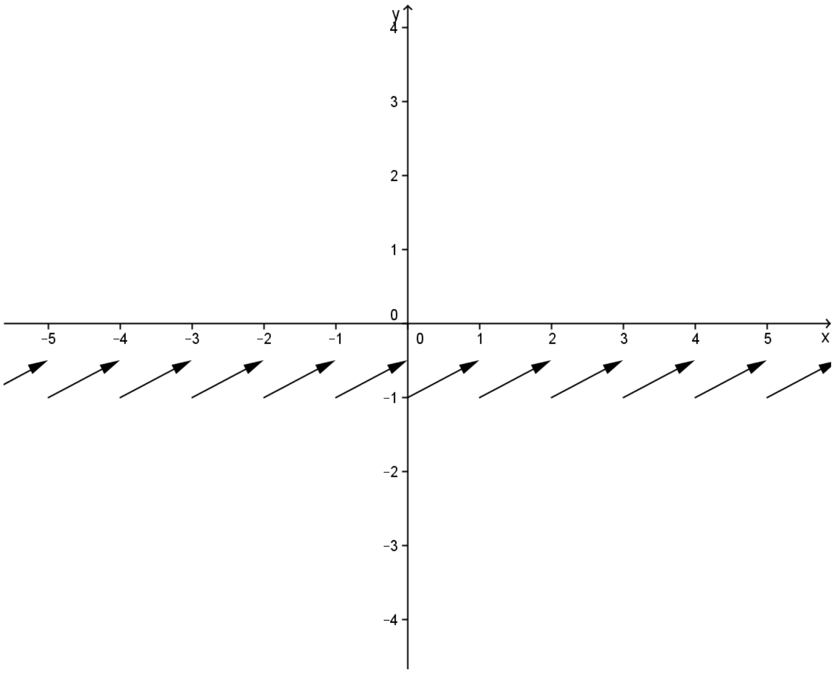

Рис. 22. Графік функції $y = 0{,}5\{x\} - 1$.

Приклад 39. Побудувати графік функції $y = \dfrac{1}{\{x\}}$.

Функція $y = \dfrac{1}{\{x\}}$ визначена для всіх $x \neq k,\ k \in Z,$ оскільки для таких значень аргументу $x - \{x\} = 0$.

Після застосування алгоритму 3: частину графіка функції $y = \dfrac{1}{x}$, побудовану на проміжку (0; 1), переносимо на період $T = k,\ k \in Z,$ вздовж всієї області визначення. Отримаємо графік шуканої функції $y = \dfrac{1}{\{x\}}$ (рис. 23).

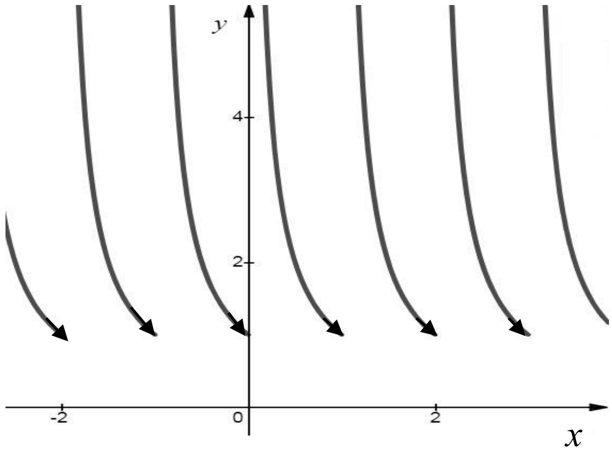

Рис. 23. Графік функції $y = \dfrac{1}{\{x\}}$.

Приклад 40. Побудувати графік функції $y = \dfrac{[x]}{\{x\}}$.

Зрозуміло, що функція $y = \dfrac{[x]}{\{x\}}$ як і в попередньому прикладі визначена для всіх $x \neq k,\ k \in Z$.

Щоб побудувати графік заданої функції, слід графік функції $y = \dfrac{1}{\{x\}}$ (рис. 23) перетворити у відповідності до коефіцієнта $[x]$, тобто використати алгоритм 1.

Визначимо вигляд функції $y = \dfrac{[x]}{\{x\}}$ на одиничних проміжках $(k\,;\,k+1)$, $k \in Z$ та побудуємо її (рис. 24).

$x \in (0;1)$ $y = 0$; $x \in (1;2)$ $y = \dfrac{1}{\{x\}} = \dfrac{1}{x-1}$; $x \in (2;3)$ $y = \dfrac{2}{\{x\}} = \dfrac{2}{x-2}$; $x \in (3;4)$ $y = \dfrac{3}{\{x\}} = \dfrac{3}{x-3}$; $x \in (4;5)$ $y = \dfrac{4}{\{x\}} = \dfrac{4}{x-4}$; ...

$x \in (-1;\,0)$ $\;y= -\dfrac{1}{\{x\}} = -\dfrac{1}{x+1}$; $\;x \in (-2;\,-1)$ $\;y = -\dfrac{2}{\{x\}} = -\dfrac{2}{x+2}$;

$x \in (-3;\,-2)$ $\;y= -\dfrac{3}{\{x\}} = -\dfrac{3}{x+3} \ldots$

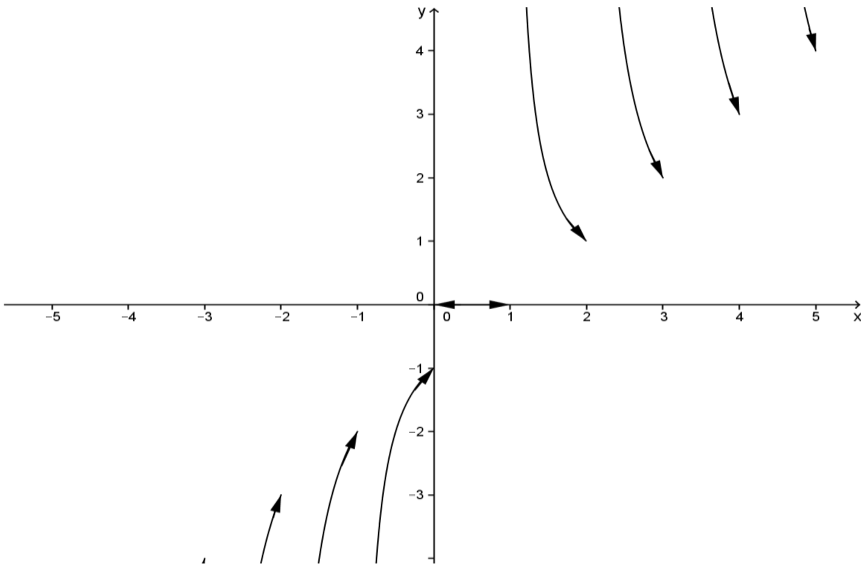

Рис. 24. Графік функції $y=\dfrac{[x]}{\{x\}}$.

Приклад 41. Побудувати графік функції $y = \dfrac{\ln\{x\}}{(-1)^{-[x]}}$.

Враховуючи, що $0 \le \{x\} < 1$, то функція $y = \dfrac{\ln\{x\}}{(-1)^{-[x]}}$ визначена для всіх $x \neq k,\ k \in Z$.

Спочатку будуємо графік функції $y = \ln x$ на проміжку (0;1) і переносимо цю частину графіка вправо і вліво на період. У результаті отримуємо графік, поданий на рис. 25.

Коефіцієнт

$\dfrac{1}{(-1)^{-[x]}} = (-1)^{[x]} = 1$, якщо $[x]$ – парне число і

$$\frac{1}{(-1)^{-[x]}} = -1, \text{ якщо } [x] \text{ – непарне число.}$$

Тому графік $y = \dfrac{\ln\{x\}}{(-1)^{-[x]}}$ співпадає з графіком $y = ln\ \{x\}$ коли $[x]$– парне і є дзеркальним відображенням графіка $y = ln\ \{x\}$ відносно осі *Ох,* якщо $[x]$ – непарне.

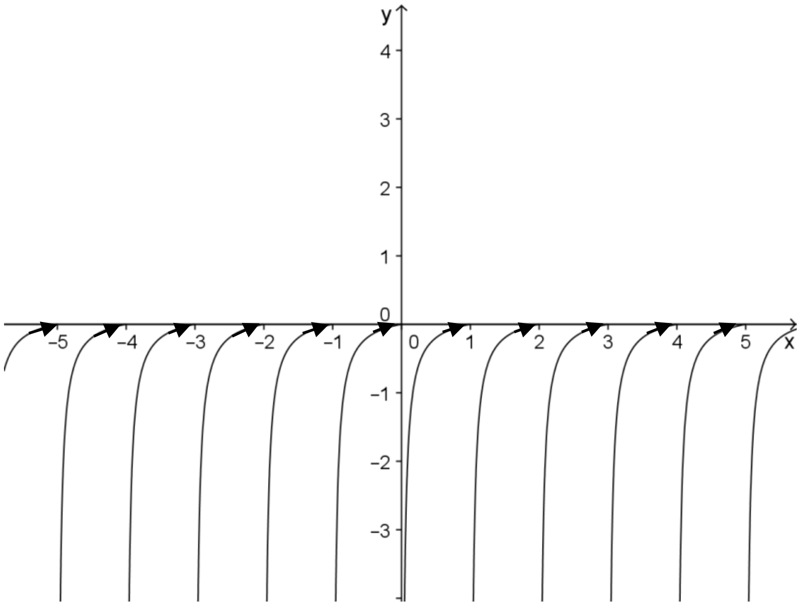

Рис. 25. Графік функції $y = ln\ \{x\}$.

Отже, графік функції $y = \dfrac{\ln\{x\}}{(-1)^{-[x]}}$ матиме вигляд, поданий рис. 26.

Приклад 42. Побудувати графік функції $y = \left|\dfrac{\{x\}-1}{\{x\}+1}\right|$.

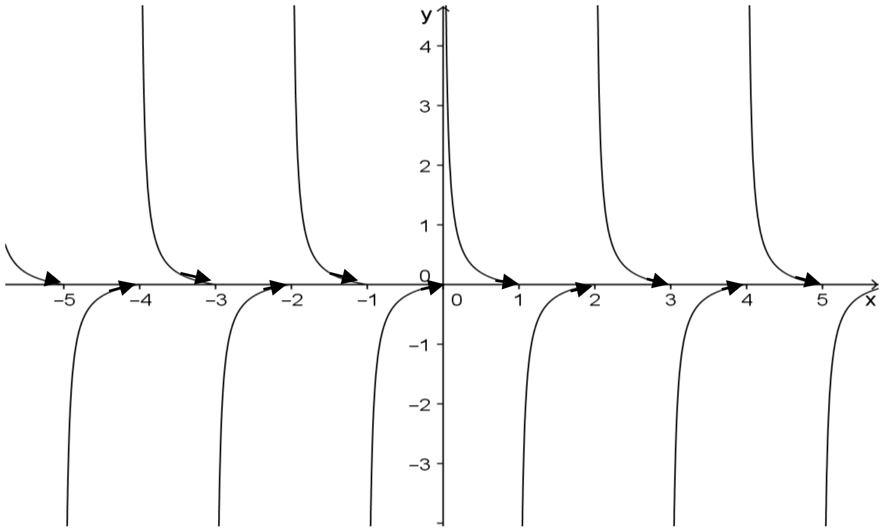

Рис. 26. Графік функції $y = \dfrac{\ln\{x\}}{(-1)^{-[x]}}$.

Оскільки $0 \le \{x\} < 1$, то $y = \left|\dfrac{\{x\}-1}{\{x\}+1}\right| = \dfrac{1-\{x\}}{\{x\}+1}$, тобто задана функція є функцією виду $y = f(\{x\})$. Для побудови її графіка скористаємось алгоритмом 3.

Будуємо графік функції $y = \dfrac{1-x}{x+1} = -1 + \dfrac{2}{x+1}$ на проміжку $[0;1)$ (рис. 27).

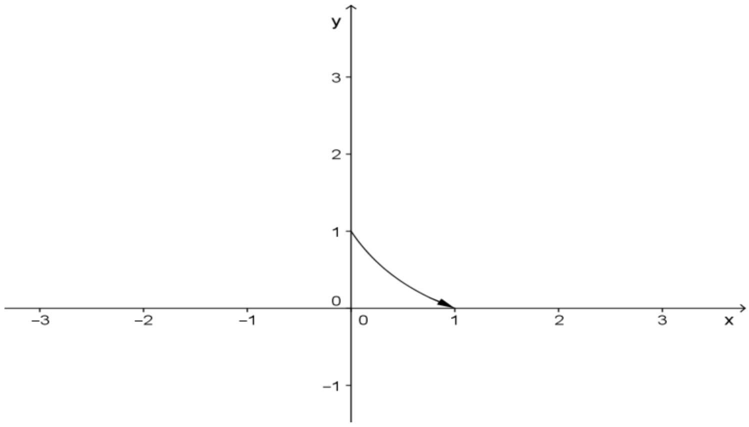

Рис. 27. Графік функції $y = \dfrac{1-x}{x+1}$ на проміжку $[0; 1)$.

Потім з періодом $T = 1$ переносимо частину графіка $y = \frac{1-x}{x+1}$ на всю область визначення шуканої функції $y = \left|\frac{\{x\}-1}{\{x\}+1}\right|$ і дістанемо її графік (рис. 28).

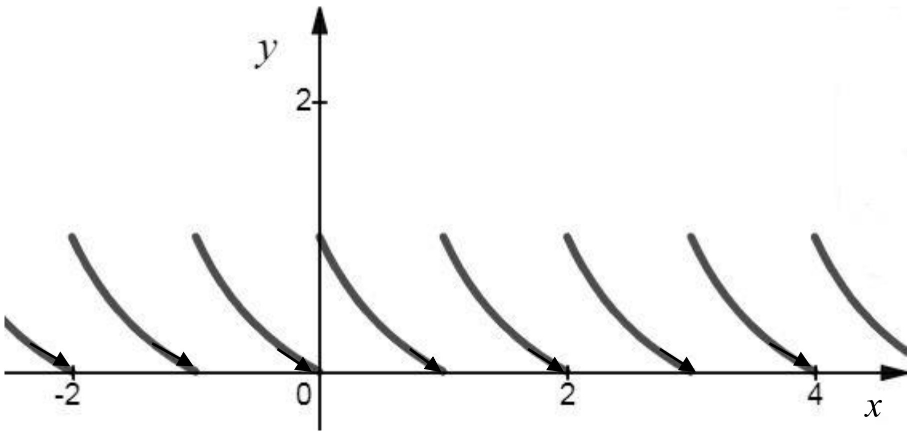

Рис. 28. Графік функції $y = \left|\frac{\{x\}-1}{\{x\}+1}\right|$.

Приклад 43. Побудувати графік функції $y= 2x - \{x\}$.

Не дивлячись на те, що задана функція містить дробову частину числа $\{x\}$ як аргумент, для побудови її графіка не можна застосувати алгоритм 3, оскільки в аналітичній умові присутня змінна x (на відміну, наприклад, від функції $y = \frac{[x]}{x}$).

Перетворимо аналітичну умову наступним чином

$$y = 2x - \{x\} = 2x - (x - [x]) = x + [x],$$

а далі застосуємо алгоритм 1, побудувавши графік функції $y = x + [x]$ на проміжках $k \le x < k + 1$, $k \in Z$. У результаті отримаємо графік, поданий на рис. 29.

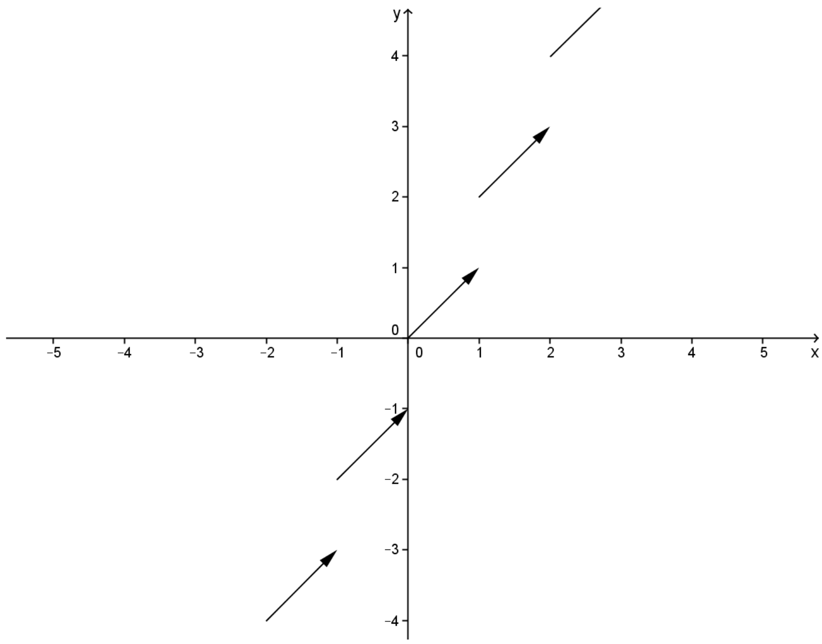

Рис. 29. Графік функції $y = 2x - \{x\}$.

Приклад 44. Побудувати графік рівняння

$$|y| = \sqrt{\{x\} - \{x\}^2}.$$

Замінимо дане рівняння рівносильним: $y^2 = \{x\} - \{x\}^2$. Оскільки у випадку $x \in [0;1)$ буде $\{x\} = x$, тому доцільно побудувати графік рівняння на проміжку [0;1). Будемо мати

$$y^2 = x - x^2,\ x^2 - x + y^2 = 0,\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Отже задане рівняння є рівнянням кола з центром у точці $(\frac{1}{2}; 0)$ і радіусом $\frac{1}{2}$, причому з цього кола вилучено точку $x = 1$, $y = 0$. Зрозуміло, що у випадку, коли $x \in Z$, то $y = 0$ і ці точки належать графіку рівняння. Враховуючи періодичність функції $y = \{x\}$, дістанемо графік, поданий на рис. 30.

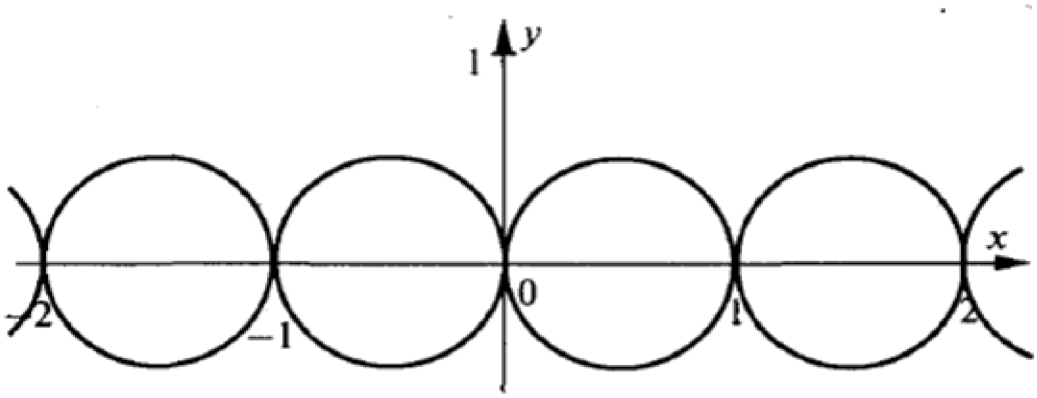

Рис. 30. Графік рівняння $|y| = \sqrt{\{x\} - \{x\}^2}$.

Алгоритм 4. *Графік функції* $y = \{f(x)\}$ (*дробова частина– зовнішня функція*).

Щоб побудувати графік функції $y = \{f(x)\}$, слід провести прямі $y = k$, $k \in Z$, і ті частини графіка функції $y = f(x)$, які містяться в смузі, визначеній подвійною нерівністю $k \le y < k + 1$, опустити на k одиниць униз, якщо k – додатне, або підняти на $|k|$ одиниць угору, коли k – від\`ємне. Сукупність перенесених частин графіка функції $y = f(x)$ і буде графіком заданої функції. Цей спосіб побудови безпосередньо випливає з означення дробової частини дійсного числа $y = \{f(x)\} = f(x) - [f(x)]$.

Приклад 45. Побудувати графік функції $y = \{\frac{1}{2}x\}$.

Областю визначення даної функції є вся множина дійсних чисел. Для побудови використаємо алгоритм 4. Спочатку слід побудувати графік функції $y = \frac{1}{2}x$ та прямі $y = k$, $k \in Z$ (рис. 31).

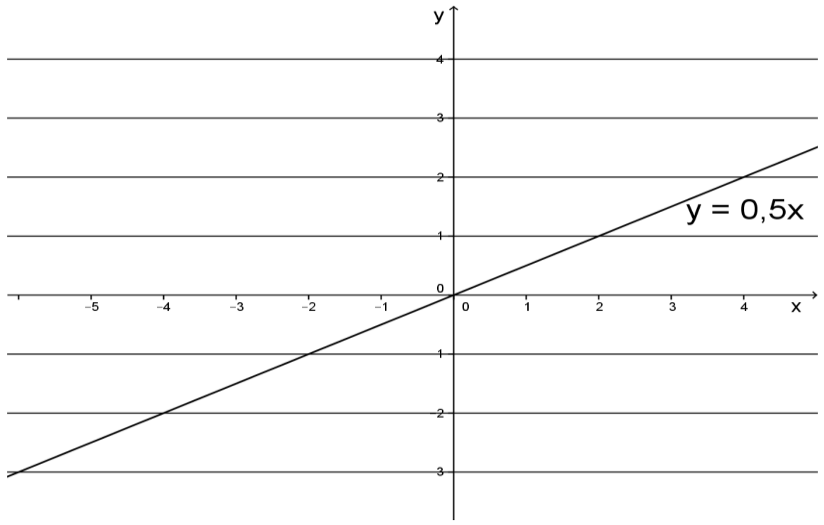

Рис. 31. Графік функцій $y = \frac{1}{2}x$ та $y = k$, $k \in Z$.

Далі, частини графіка функції $y = \frac{1}{2}x$, які містяться в смузі, визначеній подвійною нерівністю $k \le y < k + 1$, $k \in Z$, опустимо на k одиниць униз, якщо $k \ge 0$, або піднімемо на $|k|$ одиниць угору, коли $k < 0$. Отримаємо графік, поданий на рис. 32.

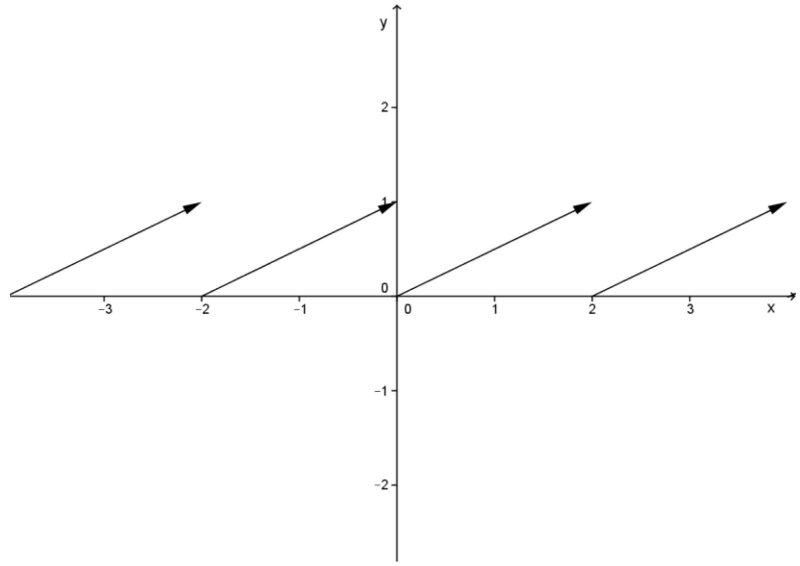

Рис. 32. Графік функції $y = \{\frac{1}{2}x\}$.

Приклад 46. Побудувати графік функції $y = \left\{\frac{1}{x}\right\}$.

Задана функція визначена для всіх $x \neq 0$. Використовуючи алгоритм 4, спочатку будуємо графік функції $y = \frac{1}{x}$ та прямі $y = k$, $k \in Z$ (рис.33, а), а потім після перенесення його частин, отримують графік функції $y = \left\{\frac{1}{x}\right\}$, який зображено на рис. 33, б.

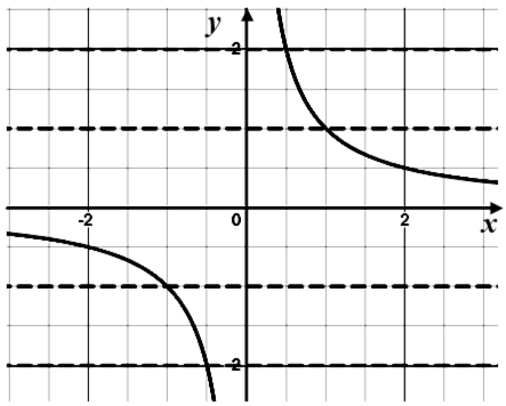

Рис. 33, а. Графік функції $y = \frac{1}{x}$ та прямі $y = k$, $k \in Z$.

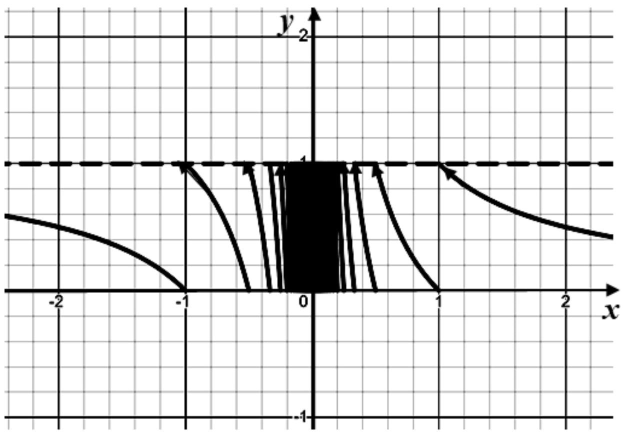

Рис. 33, б. Графік функції $y = \left\{\frac{1}{x}\right\}$.

Приклад 47. Побудувати графік функції
$$y = \{0{,}5([x] + x)\}.$$

Виконавши перетворення і врахувавши властивість 1° дробової частини числа, отримаємо наступне:

$$\{0{,}5([x] + x)\} = \{0{,}5([x] + [x] + \{x\})\} = \{[x] + 0{,}5\{x\}\} =$$
$$\{0{,}5\{x\}\} = 0{,}5\{x\}$$

(оскільки $0 \le 0{,}5\{x\} < 0{,}5$ для довільного дійсного x).

Тобто по суті, графік заданої функції $y = \{0{,}5([x] + x)\}$ – це графік функції $y = 0{,}5\{x\}$, який подано на рис. 34

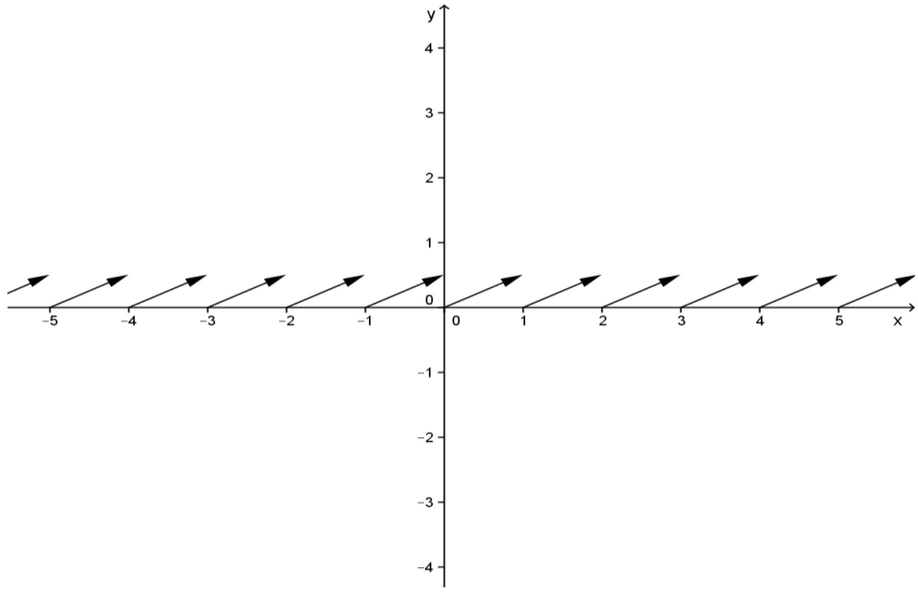

Рис. 34. Графік функції $y = \{0{,}5([x] + x)\}$.

Приклад 48. Побудувати графік функції

$$y = (-1)^{[x]}\{x - 2018\}\{2019 - x\}.$$

Перетворимо вираз для функції, використовуючи властивості дробової частини числа:

$\{x - 2018\} = \{x\}$, де $x \in R$, $-2018 \in Z$ (властивість 1°) ,

$\{2019 - x\} = \{-x\}$, де $x \in R$, $2019 \in Z$ (властивість 1°) ;

$\{-x\} = 1 - \{x\}$, де $x \notin Z$ (властивість 5°);

$\{-x\} = 0$, де $x \in Z$ (властивість 4°).

Отже,

$$y = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \in Z, \\ (-1)^{[x]}\{x\}(1-\{x\}), \text{ якщо } x \notin Z. \end{cases}$$

Проаналізуємо множник $(-1)^{[x]}$:

$$(-1)^{[x]} = 1, \text{ якщо } [x] \text{ - парне число і}$$

$$(-1)^{[x]} = (-1), \text{ якщо } [x] - \text{непарне число.}$$

Враховуючи вплив множника, а також періодичність функції $y = \{x\}$, спочатку слід графік заданої функції побудувати на проміжку [0;2), а потім періодично продовжити його на всю область визначення функції.

Отже:

1) якщо $x \in (0;1)$, то $[x] = 0$, $\{x\} = x$, і

$$y = x(1-x) = -x^2 + x -$$

графічно це частина параболи з вершиною у точці $(\frac{1}{2}; \frac{1}{4})$ і точками перетину вісі Ox (0,0) та (1,0), вітки якої направлені вниз;

2) якщо $x \in (1;2)$, то $[x] = 1$, $\{x\} = x - 1$, а

$$y = -(x-1)(2-x) = x^2 - 3x + 2 -$$

графічно це частина параболи з вершиною у точці $(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4})$ і точками перетину вісі Ox (1,0) та (2,0), вітки якої направлені вгору.

Виконавши побудову графіків здобутих функцій, матимемо графік заданої функції

$y = (-1)^{[x]}\{x - 2018\}\{2019 - x\}$, поданий на рис. 35 .

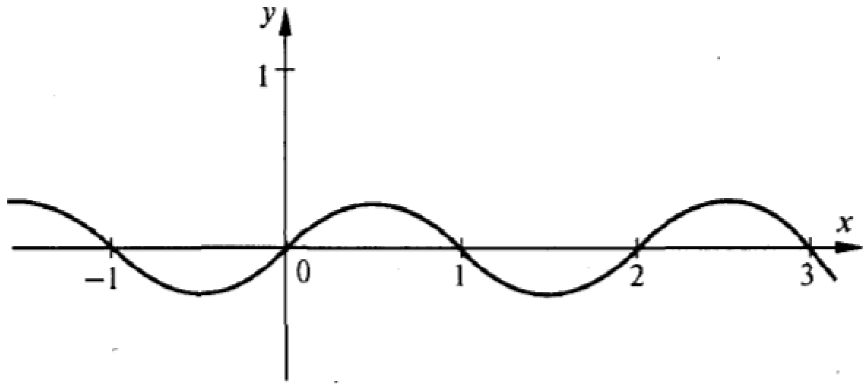

Рис. 35. Графік функції $y = (-1)^{[x]}\{x - 2018\}\{2019 - x\}$.

Приклад 49. Побудувати графік рівняння $\{|y|\} = \{|x|\}$.

За умови $x \geq 0$, $y \geq 0$ маємо рівняння $\{y\} = \{x\}$.

Якщо числа мають однакові дробові частини, то, зрозуміло, що різниця цих чисел є цілим числом. Тому $y - x = n$ або $y = x + n$, де n – ціле число, а $x \geq 0$, $y \geq 0$. Графіки цих функцій утворюють сімейство променів першого координатного кута: вони починаються в точках $(0; k)$ і $(n; 0)$, k, n – цілі невід\`ємні числа, і є паралельними бісектрисі цього кута.

Виконуючи симетрію спочатку відносно осі ординат, дістаємо графік рівняння $\{y\} = \{|x|\}$, $y \geq 0$, а після симетрії відносно вісі абсцис – графік даного рівняння (рис. 36) .

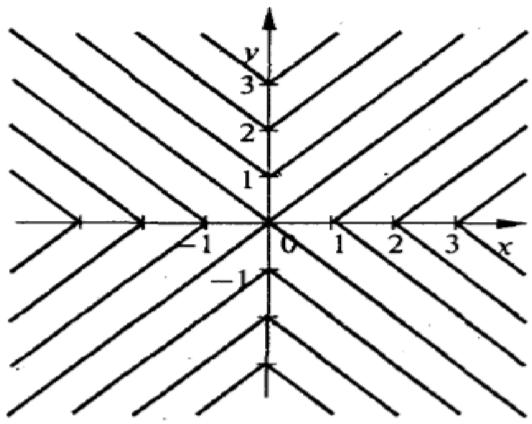

Рис. 36. Графік рівняння $\{|y|\} = \{|x|\}$.

Приклад 50. Побудувати графік рівняння

$$\{|y|\} + \{x\} = 1.$$

Якщо $y \geq 0$, то маємо рівняння

$$\{y\} = 1 - \{x\}.$$

Графіком цього рівняння буде сімейство променів

$$y = 1 - x + n,\ n \in Z,$$

першого і другого координатного кута, причому $x \notin Z$, оскільки у випадку $x \in Z$ рівняння не має змісту, бо $\{|y|\} = 1$, що неможливо. Ці промені починаються в точках $(n+1;\ 0)$, і розташовані паралельно бісектрисі другого координатного кута.

Якщо $y < 0$, то графік функції $y = 1 - x - n,\ n \in Z$ слід симетрично відобразити відносно осі абсцис, а сама функція буде мати вид $y = x - 1 - n,\ n \in Z$.

Отже, рівняння $\{|y|\} + \{x\} = 1$ рівносильне такій системі

$$\begin{cases} y = 1 - x + n, & y \geq 0, \quad x \notin Z, \\ y = x - 1 - n, & y < 0, \quad x \notin Z, \end{cases} \quad n \in Z.$$

Його графік подано на рис. 37.

Приклад 51. Побудувати графік рівняння

$$[3\{\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{3}\}] = 1.$$

З означення цілої частини випливає, що

$$1 \leq 3\{\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{3}\} < 2,\ \frac{1}{3} \leq \{\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{3}\} < \frac{2}{3}.$$

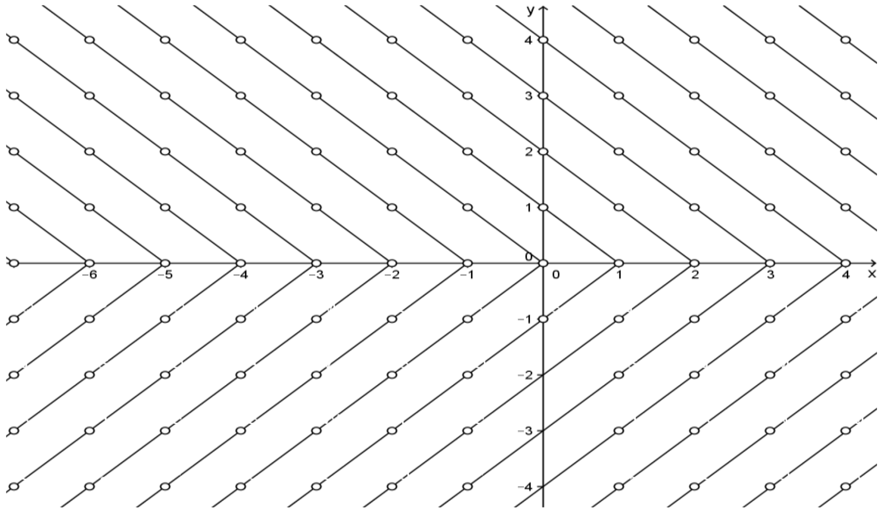

Рис. 37. Графік рівняння $\{|y|\} + \{x\}=1$.

Далі з означення дробової частини будемо мати:

$$\frac{1}{3}+k \le \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{3} < \frac{2}{3}+k,\ k \in Z^+.$$

Або після перетворень

$$3k+1 \le \sqrt{x^2+y^2} < 3k+2,\ (3k+1)^2 \le x^2+y^2 < (3k+2)^2 -$$

сімейство кілець з центром в початку координат, внутрішній радіус яких ($3k+1$), а зовнішній ($3k+2$), де $k \in Z^+$, при цьому внутрішня границя включається, а зовнішня – не включається в область. Графік рівняння подано на рис. 38.

4. Розв'язування рівнянь, що містять цілу та дробову частини числа

Не існує загального способу розв'язування рівнянь, що містять цілу та дробову частини числа. Про те, існують типи

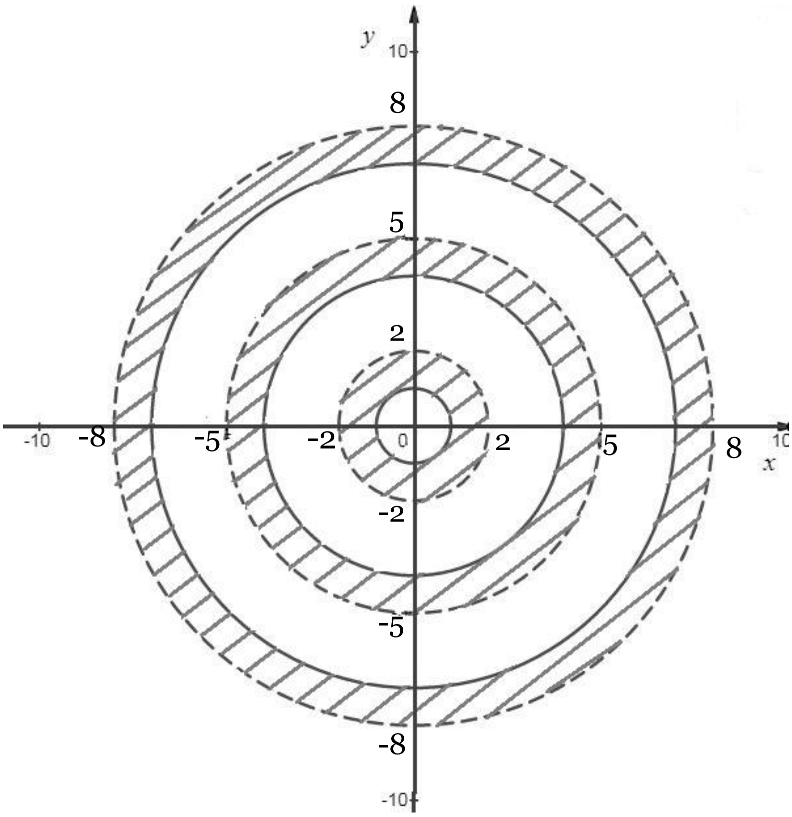

Рис. 38. Графік рівняння $[3\{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{3}\}]=1$.

рівнянь, які дозволяють розв'язування цілком визначеними способами. До таких способів можна віднести:

- спосіб підстановки;
- за допомогою означення відповідної числової функції;
- за допомогою мішаної системи;
- спосіб локалізації;
- графічний спосіб.

4.1. Спосіб підстановки

Найпростішим способом розв'язування є спосіб підстановки, який дозволяє алгебраїзувати рівняння наступних типів $f([x]) = 0$, $f([g(x)]) = 0$, $f(\{x\}) = 0$, $f(\{g(x)\}) = 0$, де $f(x)$ та $g(x)$ – елементарні функції. При цьому слід зазначити, що для рівнянь перших двох типів підстановка буде мати вид $t = [x]$ та $t = [g(x)]$ відповідно. Після розв’язування утвореного рівняння, відбирають лише цілі з них m_1, m_2, ..., m_k. Далі, користуючись означенням цілої частини, переходять до сукупності подвійних нерівностей виду

$$\left[\begin{array}{l} m_1 \le x < m_1 + 1, \\ m_2 \le x < m_2 + 1, \\ \ldots \\ m_k \le x < m_k + 1, \end{array}\right.$$

для рівнянь першого типу, та до сукупності нерівностей виду

$$\left[\begin{array}{l} m_1 \le g(x) < m_1 + 1, \\ m_2 \le g(x) < m_2 + 1, \\ \ldots \\ m_k \le g(x) < m_k + 1, \end{array}\right.$$

для рівнянь другого типу, яку в подальшому розв'язують відносно x.

Приклад 52. Розв’язати рівняння

$$2([x]^2 + 5[x])^2 - 11([x]^2 + 5[x]) = 6.$$

Робимо підстановку $t = [x]$ і отримуємо рівняння

$$2(t^2 + 5t)^2 - 11(t^2 + 5t) = 6,$$

далі ще раз підстановка $y = t^2 + 5t$, що зводить рівняння до квадратного

$$2y^2 - 11y - 6 = 0,$$

$$D = 121 + 48 = 169 = 13^2,$$

$$y_1 = \frac{11-13}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2},$$

$$y_2 = \frac{11+13}{4} = \frac{24}{4} = 6.$$

Повертаючись до t маємо:

$$\left[\begin{array}{l} t^2 + 5t + \frac{1}{2} = 0, \\ t^2 + 5t - 6 = 0, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 2t^2 + 10t + 1 = 0, \\ t^2 + 5t - 6 = 0, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} t_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{23}}{2}, \\ t_3 = 1, \\ t_4 = -6. \end{array}\right.$$

Якщо повертатися до самої першої підстановки, отримаємо:

$$[x] = \frac{-5 \pm \sqrt{23}}{2} \notin Z, \text{ то } x \in \varnothing;$$

$$[x] = 1, \text{ то } x \in [\,1; 2\,),$$

$$[x] = -6, \text{ то } x \in [\,-6\,; -5\,).$$

Відповідь: $x \in [\,-6\,; -5) \cup [1; 2)$.

Зауваження 5. Аналогічний результат можна отримати, якщо за вихідну взяти підстановку $t = [x]^2 + 5[x]$.

Приклад 53. Розв’язати рівняння

$$[x^2 + 5x]^2 - 2[x^2 + 5x] = 24.$$

Виконаємо підстановку $t = [x^2 + 5x]$ та отримаємо таке рівняння

$$t^2 - 2t - 24 = 0.$$

Розв’язуючи отримане рівняння за теоремою Вієта, будемо мати

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = -4, \\ t_2 = 6. \end{array}\right.$$

Розглянемо кожен випадок окремо, виконуючи зворотну підстановку.

1) t_1 = -4, $[x^2 + 5x] = -4$, $-4 \le x^2 + 5x < -3$ і розв'язуємо систему нерівностей

$$\begin{cases} x^2+5x+4\ge 0, \\ x^2+5x+3<0, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x\in(-\infty;-4]\cup[-1;+\infty), \\ x\in(-\frac{5+\sqrt{13}}{2};\frac{-5+\sqrt{13}}{2}). \end{cases}$$

Оскільки $-\frac{5+\sqrt{13}}{2}\approx -4{,}3$, а $\frac{-5+\sqrt{13}}{2}\approx -0{,}7$, то розв'язком системи буде $x\in(-\frac{5+\sqrt{13}}{2};-4]\cup[-1;\frac{-5+\sqrt{13}}{2})$.

2) t_2 = 6, $[x^2 + 5x] = 6$, $6 \le x^2 + 5x < 7$, розв'язуємо систему нерівностей

$$\begin{cases} x^2+5x-6\ge 0, \\ x^2+5x-7<0, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x\in(-\infty;-6]\cup[1;+\infty), \\ x\in(-\frac{5+\sqrt{53}}{2};\frac{-5+\sqrt{53}}{2}). \end{cases}$$

Враховуючи, що $-\frac{5+\sqrt{53}}{2}\approx -6{,}14$, а $\frac{-5+\sqrt{53}}{2}\approx 1{,}14$, отримуємо, що розв'язком системи у другому випадку буде $x\in(-\frac{5+\sqrt{53}}{2};-6]\cup[1;\frac{-5+\sqrt{53}}{2})$.

Відповіддю до вихідного рівняння буде об'єднання проміжків першого і другого випадків, тобто

$$x\in(-\frac{5+\sqrt{53}}{2};-6]\cup(-\frac{5+\sqrt{13}}{2};-4]\cup[-1;\frac{-5+\sqrt{13}}{2})\cup[1;\frac{-5+\sqrt{53}}{2}).$$

При розв'язуванні рівнянь третього та четвертого типів, тобто $f(\{x\}) = 0$, $f(\{g(x)\}) = 0$, де $f(x)$ та $g(x)$ – елементарні функції, доцільно виконати підстановки $t = \{x\}$ та $t = \{g\ (x)\}$ відповідно. Знайшовши корені новоутвореного рівняння і враховуючи межі дробової частини, слід зробити відбір коренів, що містяться в інтервалі [0, 1). Нехай це будуть числа α_1, α_2,..., α_k.

Тоді для рівнянь виду $f(\{x\}) = 0$ будемо мати таку сукупність

$$\left[\begin{array}{l} \{x\} = \alpha_1, \\ \{x\} = \alpha_2, \\ \ldots \\ \{x\} = \alpha_k. \end{array}\right.$$

Оскільки функція $y = \{x\}$ – періодична з найменшим періодом $T = 1$, то загальний розв'язок рівняння $f(\{x\}) = 0$ запишеться у вигляді

$$\left[\begin{array}{l} x = \alpha_1 + m_1, \\ x = \alpha_2 + m_2, \\ \ldots \\ x = \alpha_k + m_k, \end{array}\right. \quad \text{де } m_i \in Z,\ i = 1 \div k.$$

Для рівнянь же виду $f(\{g(x)\}) = 0$ використання зворотної підстановки призведе до такої сукупності рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} \{g(x)\} = \alpha_1, \\ \{g(x)\} = \alpha_2, \\ \ldots \\ \{g(x)\} = \alpha_k, \end{array}\right.$$

з якої отримаємо наступну сукупність, враховуючи періодичність дробової частини,

$$\left[\begin{array}{l} g(x) = \alpha_1 + m_1, \\ g(x) = \alpha_2 + m_2, \\ \ldots \\ g(x) = \alpha_k + m_k, \end{array}\right. \quad \text{де } m_i \in Z,\ i = 1 \div k.$$

Отриману сукупність рівнянь, зрозуміло, слід розв'язати відносно *x*.

Приклад 54. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{3+2\{x\}} + \sqrt{1+6\{x\}} = 4.$$

Знайдемо ОДЗ:

$$\begin{cases} 3+2\{x\} \geq 0, \\ 1+6\{x\} \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \{x\} \geq -\dfrac{3}{2}, \\ \{x\} \geq -\dfrac{1}{6}, \end{cases}$$

отже, $\{x\} \geq -\dfrac{1}{6}$, а це справедливо для всіх дійсних *x*.

Введемо підстановку $\{x\} = t$. Рівняння запишеться у вигляді

$$\sqrt{3+2t} + \sqrt{1+6t} = 4$$

Перетворимо рівняння

$$\sqrt{3+2t} = 4 - \sqrt{1+6t},$$

піднесемо обидві частини до квадрату

$$3 + 2t = 16 - 8\sqrt{1+6t} + 1 + 6t.$$

Після перетворень будемо мати:

$$8\sqrt{1+6t} = 14 + 4t \mid : 2,$$

$$4\sqrt{1+6t} = 7 + 2t,$$

ще раз піднесемо до квадрата обидві частини

$$16 + 96t = 49 + 28t + 4t^2,$$

$$4t^2 - 68t + 33 = 0.$$

Розв'язуючи останнє квадратне рівняння, отримаємо:

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{1}{2}, \\ t_2 = \dfrac{33}{2} = 16\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Розглянемо кожен випадок окремо.

1) $t_1 = \frac{1}{2}$, $\{x\} = \frac{1}{2} \in [0;\ 1)$ і розв'язок у цьому випадку розпишеться у вигляді $x = \frac{1}{2} + m$, де $m \in Z$.

2) $t_2 = 16\frac{1}{2}$, $\{x\} = 16\frac{1}{2} \notin [0;\ 1)$, тому в цьому випадку $x \in \varnothing$.

Отже загальна відповідь: $x = \frac{1}{2} + m$, де $m \in Z$.

Приклад 55. Розв'язати рівняння

$$3\{x^2 + 2x\}^2 + 14\{x^2 + 2x\} - 5 = 0.$$

Виконаємо підстановку $t = \{x^2 + 2x\}$, отримаємо таке квадратне рівняння $3t^2 + 14t - 5 = 0$, коренями якого є

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{1}{3}, \\ t_2 = -5, \end{array}\right.$$

а отже, виконуючи зворотню підстановку, отримаємо

$$\left[\begin{array}{l} \{x^2 + 2x\} = \dfrac{1}{3}, \\ \{x^2 + 2x\} = -5. \end{array}\right.$$

Друге рівняння розв'язків не має, бо $\{x^2 + 2x\} \notin [0; 1)$. А перше перепишеться у вигляді

$$x^2 + 2x = \frac{1}{3} + m, \text{ де } m \in Z, \text{ або}$$

$$x^2 + 2x - \left(\frac{1}{3} + m\right) = 0.$$

Дискримінант цього рівняння $D_1 = 1 + \frac{1}{3} + m$.

Оцінимо значення, які може приймати m, оскільки рівняння має розв'язки, коли $D_1 \geq 0$.

$$1 + \frac{1}{3} + m \geq 0, m \geq -1\frac{1}{3}, m \in \{-1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Корені вихідного рівняння запишуться у вигляді

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{m + \frac{4}{3}} = \frac{-3 \pm \sqrt{9m + 12}}{3}, \text{ де } m \in \{-1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Приклад 56. Розв'язати рівняння $4^{\{sinx + cosx\}} = 2$.

Уведемо підстановку $t = \{sinx + cosx\}$ і запишемо рівняння у вигляді

$$4^t = 2,$$

$$2^{2t} = 2,$$

$$2t = 1,$$

$$t = \frac{1}{2} \text{ і}$$

$$\{sinx + cosx\} = \frac{1}{2} \in [0, 1).$$

Останнє рівняння перепишеться у вигляді

$$sinx + cosx = \frac{1}{2} + m, \text{ де } m \in \mathrm{Z}.$$

Застосовуючи метод допоміжного кута, перепишемо рівняння у вигляді

$$\sqrt{2}\,sin\,(\frac{\pi}{4} + x) = \frac{1}{2} + m,$$

$$sin\,(\frac{\pi}{4} + x) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{m}{\sqrt{2}}.$$

Звідси, оскільки $-1 \le sin\,(\frac{\pi}{4} + x) \le 1$, то

$$-1 \le \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{m}{\sqrt{2}} \le 1 \text{ і } m \in \mathrm{Z}.$$

Розв'язуючи систему

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{m}{\sqrt{2}} \ge -1, \\ \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{m}{\sqrt{2}} \le 1, \\ m \in Z, \end{cases}$$

отримаємо

$$\begin{cases} m \ge -\sqrt{2} - \frac{1}{2}, \\ m \le \sqrt{2} - \frac{1}{2}, \\ m \in Z, \end{cases} \quad \text{і } m = -1, 0.$$

Маємо сукупність двох рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} \sin(x+\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{4}, \\ \sin(x+\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{4}, \end{array}\right. \text{ або } \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{4} = (-1)^{k+1}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi k, \\ x+\frac{\pi}{4} = (-1)^{n}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi n, \end{array}\right. \quad k, n \in Z.$$

І розв'язок усього вихідного рівняння

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4}+(-1)^{k+1}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi k, \\ x = -\frac{\pi}{4}+(-1)^{n}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi n, \end{array}\right. \quad k, n \in Z,$$

або $x = -\frac{\pi}{4} \pm (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi k,\; k \in Z.$

4.2. Застосування означень цілої, дробової частин числа

Наступним способом розв'язування рівнянь, що містять цілу, або дробову частини числа, або і перше і друге разом, є використання лише означень відповідних частин числа. Розглянемо цей спосіб детальніше на конкретних прикладах.

Приклад 57. Розв'язати рівняння $[2x] + [5x] = 9$.

Використовуючи означення цілої частини, будемо мати

$$2x - 1 < [\,2x\,] \le 2x,\; 5x - 1 < [\,5x\,] \le 5x.$$

Додавши ці нерівності та врахувавши умову, матимемо

$$7x - 2 < [\,2x\,] + [\,5x\,] \le 7x,$$

$$7x - 2 < 9 \le 7x,$$

$$\begin{cases} 7x-2<9, \\ 7x \ge 9, \end{cases} \quad \begin{cases} x<\dfrac{11}{7}, \\ x \ge \dfrac{9}{7}, \end{cases}$$

тому $x \in [\ \frac{9}{7};\ \frac{11}{7})$ або $x \in [\ 1\frac{2}{7};\ 1\frac{4}{7})$.

З'ясуємо, які значення будуть приймати цілі частини виразів, що фігурують у рівнянні, при знайдених межах для *x*. Отже,

– якщо $x \in [\ \frac{9}{7};\ \frac{11}{7})$, то $2x \in [\ \frac{18}{7};\ \frac{22}{7})$, $2x \in [\ 2\frac{4}{7};\ 3\frac{1}{7})$ і $[2x] \in \{2;\ 3\}$.

Аналогічно $5x \in [\ \frac{45}{7};\ \frac{55}{7})$, $5x \in [\ 6\frac{3}{7};\ 7\frac{6}{7})$ і $[5x] \in \{6;\ 7\}$.

Оскільки $9 = 2 + 7 = 3 + 6$, вихідне рівняння будуть задовольняти ті *x*, для яких

$$\begin{cases} [2x]=2, \\ [5x]=7, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} [2x]=3, \\ [5x]=6. \end{cases}.$$

Враховуючи знайдені межі, матимемо

1) $\begin{cases} \dfrac{18}{7} \le 2x < 3, \\ 7 \le 5x < \dfrac{55}{7}, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{9}{7} \le x < \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{7}{5} \le x < \dfrac{11}{7}, \end{cases} \quad \begin{cases} 1\dfrac{2}{7} \le x < 1\dfrac{1}{2}, \\ 1\dfrac{2}{5} \le x < 1\dfrac{4}{7}, \end{cases}$ або

$$x \in [1\frac{2}{5};\ 1\frac{1}{2}\ ).$$

2) $\begin{cases} 3 \le 2x < 3\frac{1}{7}, \\ 6\frac{3}{7} \le 5x < 7, \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{3}{2} \le x < \frac{11}{7}, \\ \frac{9}{7} \le x < \frac{7}{5}, \end{cases}$ $\begin{cases} 1\frac{1}{2} \le x < 1\frac{4}{7}, \\ 1\frac{2}{7} \le x < 1\frac{2}{5}, \end{cases}$ і

$$x \in \varnothing.$$

Відповідь: $x \in [1\frac{2}{5};\ 1\frac{1}{2})$.

Приклад 58. Розв’язати рівняння $[20x] + 17[x] = 2017$.

З означення дробової частини

$x = [x] + \{x\}$ або $x = k + \theta$, де $[x] = k \in Z$, а $\theta \in [0, 1)$.

Тоді

$$20x = 20k + 20\theta, \text{ де } 20\theta \in [0; 20), \text{ а}$$

$$[20x] = 20k + \varepsilon,\ \varepsilon \in \{0, 1, 2, \ldots, 19\}.$$

За означенням цілої частини числа

$$20k + \varepsilon \le 20x < 20k + (\varepsilon + 1),$$

$$k + \frac{\varepsilon}{20} \le x < k + \frac{\varepsilon + 1}{20} -$$

це проміжок, що є розв’язком рівняння. Щоб знайти k та ε повернемось до вихідного рівняння

$$20k + \varepsilon + 17k = 2017,$$

$$37k + \varepsilon = 2017 -$$

діофантове рівняння, яке розв’яжемо методом спуску.

$$37k = 2017 - \varepsilon,\ k = \frac{2017 - \varepsilon}{37} = 54 + \frac{19 - \varepsilon}{37}.$$

Оскільки $k \in Z$, $54 \in Z$, то

$$\frac{19-\varepsilon}{37} \in Z,\ (19-\varepsilon) < 37 \text{ для } \varepsilon \in \{0, 1, 2, ..., 19\}.$$

Тому останнє можливо, коли $19 - \varepsilon = 0$, $\varepsilon = 19$, а $k = 54$.

Повертаючись до обмежувальної нерівності для x, матимемо

$$k + \frac{\varepsilon}{20} \le x < k + \frac{\varepsilon+1}{20},$$

$$54 + \frac{19}{20} \le x < 54 + \frac{20}{20},$$

$$54\frac{19}{20} \le x < 55.$$

І відповідь $x \in [\,54\frac{19}{20};\ 55\,)$.

Приклад 59. Розв'язати рівняння

$$[x^{2019}] + [x^{2018}] + [x^{2017}] + ... + [x] = \{x\} - 1.$$

Оцінимо значення лівої та правої частин рівняння. Очевидно, що ліва частина – ціле число, а права частина буде цілим числом, коли $\{x\} = 0$ (бо в іншому випадку $\{x\} \notin Z$ і відповідно $\{x\} - 1 \notin Z$).

Якщо ж $\{x\} = 0$, то x – ціле число та $[x^n] = x^n$ для будь-якого натурального n. У наслідок цього, рівняння перепишеться у вигляді

$$x^{2019} + x^{2018} + x^{2017} + ... + x = -1,$$

$$x^{2019} + x^{2018} + x^{2017} + ... + x + 1 = 0.$$

Згорнемо ліву частину за формулою суми n послідовних членів геометричної прогресії, перший член якої дорівнює x, а знаменник теж x:

$$\frac{x^{2020}-1}{x-1}=0,$$

Звідси

$$\begin{cases} x^{2020}-1=0, \\ x-1\neq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=1, \\ x_2=-1, \end{array}\right. \\ x\neq 1, \end{cases}$$

і розв'язок системи, як і вихідного рівняння, $x = -1$.

Приклад 60. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{1+\{2x\}} = [x^2] + 5[x] - 5.$$

Аналогічно до попереднього прикладу, враховуючи, що права частина є числом цілим, то рівність можлива, коли $\{2x\} = 0$, тобто $2x \in Z$. І тут можливі випадки: $2x$ – парне число та $2x$ – непарне число.

У першому випадку $2x = 2m$, $m \in Z$, $x = m$ і вихідне рівняння запишеться так

$$m^2 + 5m - 5 = 1, m^2 + 5m - 6 = 0.$$

За теоремою Вієта $m_1 = -6$, $m_2 = 1$ і, відповідно, $x_1 = -6$, $x_2 = 1$.

У другому випадку

$$2x = 2m + 1, m \in Z, \; x = m + \frac{1}{2}.$$

Тоді $[x] = m$, а

$$[x^2] = [(m + \frac{1}{2})^2] = [m^2 + m + \frac{1}{4}] = m^2 + m.$$

Відповідно до цього, вихідне рівняння подамо у вигляді

$$m^2 + m + 5m - 5 = 1,$$

$$m^2 + 6m - 6 = 0,$$

$$D_1 = 9 + 6 = 15, \text{ і корені}$$

$$\left[\begin{array}{l} m_1 = -3 - \sqrt{15}, \\ m_2 = -3 + \sqrt{15}. \end{array}\right.$$

Оскільки ні m_1, ні m_2 не є цілими числами, то у цьому випадку вихідне рівняння розв'язків не має.

І загальний розв'язок: $x_1 = -6$, $x_2 = 1$.

Приклад 61. Розв'язати рівняння $\sqrt{1+8\{x\}} = -\dfrac{[x]}{2} + 3$.

З означення дробової частини $0 \le \{x\} < 1$, тоді $1 \le 1 + 8\{x\} < 9$ і для правої частини рівняння буде справедливо

$$\begin{cases} -\dfrac{[x]}{2} + 3 \ge 1, \\ -\dfrac{[x]}{2} + 3 < 3, \end{cases} \quad \begin{cases} [x] \le 4, \\ [x] > 0, \end{cases}$$

тобто $[x] \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Розглянемо рівняння для окремих значень цілої частини.

1) $[x] = 1$, тоді отримаємо рівняння

$$\frac{5}{2} = \sqrt{1+8\{x\}},\ 1 + 8\{x\} = \frac{25}{4},\ 8\{x\} = \frac{21}{4},\ \{x\} = \frac{21}{32}.$$

Оскільки $x = [x] + \{x\}$, то $x_1 = 1\dfrac{21}{32}$.

2) $[x] = 2$, тоді маємо рівняння

$$2 = \sqrt{1+8\{x\}},\quad 1 + 8\{x\} = 4,\ 8\{x\} = 3,\ \{x\} = \frac{3}{8},$$

$$\text{а } x_2 = [x] + \{x\} = 2\frac{3}{8}.$$

3) $[x] = 3$, тоді маємо рівняння

$$\frac{3}{2} = \sqrt{1+8\{x\}},\ 1 + 8\{x\} = \frac{9}{4},\ 8\{x\} = \frac{5}{4},\ \{x\} = \frac{5}{32},$$

$$\text{а } x_3 = [x] + \{x\} = 3\frac{5}{32}.$$

4) $[x] = 4$, тоді маємо рівняння

$$1 = \sqrt{1+8\{x\}},\ 1 + 8\{x\} = 1,\ 8\{x\} = 0,\ \{x\} = 0,$$

$$\text{а } x_4 = [x] + \{x\} = 4.$$

Отже, загальний розв'язок вихідного рівняння

$$x_1 = 1\frac{21}{32},\ x_2 = 2\frac{3}{8},\ x_3 = 3\frac{5}{32},\ x_4 = 4.$$

Приклад 62. Розв'язати рівняння $\{x\}^2 + 2\{x\} = 3x^2$.

Зауважимо, що виконання підстановки $t = \{x\}$ не призведе до знаходження розв'язку рівняння елементарними способами, оскільки в результаті отримаємо рівняння з двома невідомими, що не є розв'язним ні відносно x, ні відносно t.

Розглянемо інший спосіб: оцінимо значення лівої частини. Оскільки $0 \le \{x\} < 1$, тому

$$0 \le \{x\}^2 < 1,$$

$$\text{а } 0 \le 2\{x\} < 2,$$

$$\text{то } 0 \le \{x\}^2 + 2\{x\} < 3.$$

Відповідно для правої частини $0 \le 3x^2 < 3$, $0 \le x^2 < 1$. З останньої нерівності випливає, що $|x| < 1$.

Якщо $x \in [0; 1)$, то $[x] = 0$ і $\{x\} = x$, а рівняння запишеться у вигляді

$$x^2 + 2x = 3x^2.$$

$$2x^2 - 2x = 0,$$

$$x^2 - x = 0,$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1 \notin [0, 1).$$

Якщо $x \in (-1;\ 0)$, то $[x] = -1$ і $\{x\} = x + 1$, а рівняння запишеться у вигляді

$$(x + 1)^2 + 2(x + 1) = 3x^2 .$$

$$x^2 + 2x + 1 + 2x + 2 = 3x^2,$$

$$2x^2 - 4x - 3 = 0,$$

$$D_1 = 4 + 6 = 10,$$

$$x_3 = \frac{2-\sqrt{10}}{2} \in (-1;\ 0),\ x_4 = \frac{2+\sqrt{10}}{2} \notin (-1;\ 0).$$

Отже, загальна відповідь $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{2-\sqrt{10}}{2}$.

Зауваження 6. Як видно з розв’язувань прикладів 56 – 62, головною ідеєю розглядуваного способу є аналіз значень, які може набувати права і ліва частини або вихідного або перетвореного рівнянь.

4.3. Застосування мішаної системи

Іншим дієвим способом розв’язування рівнянь є перехід до мішаної системи. Цей спосіб доцільно використовувати для рівнянь, які можна звести до виду $[f(x)] = g(x)$, $[f(x)] = [g(x)]$, де $f(x)$, $g(x)$ – елементарні функції.

Для рівнянь першого виду $[f(x)] = g(x)$ мішана система має вигляд

$$\begin{cases} [f(x)] = k, \\ k \le f(x) < k+1, \qquad k \in Z \\ g(x) = k, \end{cases}.$$

Розв'язуючи цю систему, шукають значення, які набуває k. Для цього виражають x через k (якщо це можливо) і підставляють отриманий вираз у подвійну нерівність, знаходять цілі значення k, а потім знаходять значення x. Зрозуміло, що подвійна нерівність – це розкриття першого рівняння за означенням цілої частини.

Приклад 63. Розв'язати рівняння $\left[\dfrac{x+1}{3}\right] = \dfrac{x-1}{2}$.

Запишемо мішану систему

$$\begin{cases} \left[\dfrac{x+1}{3}\right] = k, \\ k \le \dfrac{x+1}{3} < k+1, \qquad k \in Z \\ \dfrac{x-1}{2} = k, \end{cases}.$$

Виразимо x з третього рівняння $x = 2k + 1$ і підставимо у другу нерівність

$$k \le \frac{2k+1+1}{3} < k+1,$$

$$k \le \frac{2k+2}{3} < k+1,$$

$$\begin{cases} \dfrac{2k+2}{3} \ge k, \\ \dfrac{2k+2}{3} < k+1, \end{cases} \quad \begin{cases} k \le 2, \\ k > -1, \end{cases} \quad k \in (-1,\ 2].$$

Оскільки $k \in Z$, то k = 0, 1, 2 і відповідно $x = 2k + 1 = 1, 3, 5$.

Приклад 64. Розв'язати рівняння $\left[\sqrt{x+10}\right] = x + \dfrac{1}{2}$.

ОДЗ рівняння: [-10; + ∞).

Запишемо мішану систему

$$\begin{cases} \left[\sqrt{x+10}\right] = k, \\ k \le \sqrt{x+10} < k+1, \\ x + \dfrac{1}{2} = k, \end{cases} \qquad k \in Z.$$

Як і в попередньому прикладі, можна виразити x через k :

$$x = k - \frac{1}{2}.$$

Тоді подвійна нерівність запишеться у вигляді

$$k \le \sqrt{k + \frac{19}{2}} < k+1.$$

Звідси $k > -1$. Перепишемо нерівність як систему:

$$\begin{cases} \sqrt{k + \dfrac{19}{2}} \ge k, \\ \sqrt{k + \dfrac{19}{2}} < k+1, \end{cases} \quad \begin{cases} k + \dfrac{19}{2} \ge k^2, \\ k + \dfrac{19}{2} < k^2 + 2k + 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2k^2 - 2k - 19 \le 0, \\ 2k^2 + 2k - 17 > 0. \end{cases}$$

Перша нерівність системи:

$$2k^2-2k-19\le 0,$$

$$2k^2-2k-19=0,$$

$$D_1 = 1 + 38 = 39,$$

$$k_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{39}}{2}$$

і розв’язок нерівності $k \in [\frac{1-\sqrt{39}}{2};\frac{1+\sqrt{39}}{2}]$.

Аналогічно розв’язком другої нерівності системи буде:

$$k \in (-\infty; -\frac{1+\sqrt{35}}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{35}}{2}; +\infty).$$

Тому розв’язок системи нерівностей:

$$\begin{cases} \frac{1-\sqrt{39}}{2}\le k\le\frac{1+\sqrt{39}}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} k<-\frac{1+\sqrt{35}}{2}, \\ k>\frac{-1+\sqrt{35}}{2}, \end{array}\right. \end{cases}$$

$$k \in (\frac{-1+\sqrt{35}}{2};\ \frac{1+\sqrt{39}}{2}].$$

Оцінимо кінці проміжку:

$$\frac{-1+\sqrt{35}}{2}\approx 2{,}45,\quad \frac{1+\sqrt{39}}{2}\approx 3{,}62.$$

Оскільки k – число ціле, то єдине ціле число, належить знайденому проміжку $(\frac{-1+\sqrt{35}}{2};\ \frac{1+\sqrt{39}}{2}]$ – це $k = 3$. Відповідно розв’язок вихідного рівняння $x = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$.

Можливий випадок, коли у мішаній системі

$$\begin{cases} [f(x)] = k, \\ k \le f(x) < k+1, \qquad k \in Z \\ g(x) = k, \end{cases}$$

виразити x через k не можливо. Тоді знаходять межі для x з подвійної нерівності і третього рівняння.

Приклад 65. Розв'язати рівняння $x^2 - 7[x] + 10 = 0$.

Перетворимо дане рівняння

$$7[x] = x^2 + 10,$$

$$[x] = \frac{x^2+10}{7}.$$

Далі перехід до мішаної системи

$$\begin{cases} [x] = k, \\ k \le x < k+1, \qquad k \in Z. \\ \dfrac{x^2+10}{7} = k, \end{cases}$$

Очевидно, що виразити x через k однозначно не можливо, тому підставимо у подвійну нерівність замість k його вираз через x

$$\frac{x^2+10}{7} \le x < \frac{x^2+10}{7} + 1,$$

$$\frac{x^2+10}{7} \le x < \frac{x^2+17}{7},$$

$$x^2 + 10 \le 7x < x^2 + 17$$

і перейдемо до системи нерівностей

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 10 \le 0, \\ x^2 - 7x + 17 > 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи першу нерівність системи, отримуємо відповідне рівняння:

$$x^2 - 7x + 10 = 0,$$

розв'язки якого знаходяться за теоремою Вієта

$$x_1 = 2, x_2 = 5,$$

а розв'язок нерівності $x \in [2; 5]$.

Відповідно розв'язок другої – $x \in$ R, а розв'язок всієї мішаної системи $x \in [2; 5]$.

Розв'яжемо вихідне рівняння на одиничних проміжках (для конкретних k).

1) Якщо $x \in [2; 3)$, то $k = [x] = 2$ і вихідне рівняння запишеться у вигляді

$$x^2 - 14 + 10 = 0,$$

$$x^2 = 4,$$

$$x = \pm 2$$

і значення x, що належить розглядуваному проміжку [2; 3):

$$x_1 = 2.$$

2) Якщо $x \in [3; 4)$, то $k = [x] = 3$,

$$x^2 - 21 + 10 = 0,$$

$$x^2 = 11,$$

$$x = \pm\sqrt{11},$$

і значення x, що належить розглядуваному проміжку [3; 4): $x_2 = \sqrt{11}$.

3) Якщо $x \in [4; 5)$, то $k = [x] = 4$,

$$x^2 - 28 + 10 = 0,$$

$$x^2 = 18,$$

$$x = \pm 3\sqrt{2},$$

і значення, що належить розглядуваному проміжку [4; 5): $x_3 = 3\sqrt{2}$.

4) На останок, коли $x = 5$,

$$x^2 - 35 + 10 = 0,$$

$$x^2 = 25,$$

$$x = \pm 5,$$

то розв'язком буде $x_4 = 5$.

Отже, загальна відповідь вихідного рівняння $x = 2$, $\sqrt{11}$, $3\sqrt{2}$, 5.

Приклад 66. Розв'язати рівняння $\left[\frac{1-3x}{2}\right] = x^2 - 2x$.

Мішана система матиме вигляд $\begin{cases} \left[\frac{1-3x}{2}\right] = k, \\ k \le \frac{1-3x}{2} < k+1, \\ x^2 - 2x = k, \end{cases} \quad k \in Z$.

Аналогічно до попереднього прикладу, підставимо вираз для k у подвійну нерівність:

$$x^2 - 2x \le \frac{1-3x}{2} < x^2 - 2x + 1,$$

$$2x^2 - 4x \le 1 - 3x < 2x^2 - 4x + 2$$

і отримуємо систему нерівностей

$$\begin{cases} 2x^2 - x - 1 \le 0, \\ 2x^2 - x + 1 > 0. \end{cases}$$

Розв'язування першої нерівності системи:

відповідне рівняння $2x^2 - x - 1 = 0$,

$$D = 9,$$

$$x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = 1,$$

і розв'язок нерівності $x \in [-\frac{1}{2}, 1]$.

Розв'язуючи другу нерівність системи, отримаємо, що $x \in$ R, а розв'язок всієї мішаної системи $x \in [-\frac{1}{2}, 1]$.

Знайдемо межі для цілих k. На відміну від попереднього прикладу, де це було очевидно, в даному слід підставити кінці знайденого відрізка у перше рівняння мішаної системи, а саме

$$x = -\frac{1}{2},\ \left[\frac{1-3x}{2}\right] = \left[\frac{1-3(-\frac{1}{2})}{2}\right] = \left[\frac{5}{4}\right] = 1,$$

$$x = 1,\ \left[\frac{1-3x}{2}\right] = \left[\frac{1-3\cdot 1}{2}\right] = [-1] = -1.$$

Отже, відрізок зміни значень k – це [-1; 1], а оскільки $k \in Z$, то k = -1, 0, 1.

1) Якщо $k = -1$, то з перетвореної подвійної нерівності

$$-\frac{2k+1}{3} < x \le \frac{1-2k}{3}$$

знаходимо межі коренів рівняння $x \in (\frac{1}{3}; 1]$.

Відповідно третє рівняння мішаної системи запишеться

$$x^2 - 2x = -1,$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0,$$

$$(x - 1)^2 = 0,$$

звідки $x_1 = 1 \in (\frac{1}{3}; 1]$.

2) Якщо $k = 0$, то $x \in (-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}]$, а третє рівняння мішаної системи матиме вигляд

$$x^2 - 2x = 0,$$

$$x(x-2) = 0,$$

звідки $x = 0 \in (-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}]$, а $x = 2 \notin (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$.

3) Якщо $k = 1$, то $x \in (-1; -\frac{1}{3}]$, а враховуючи межі коренів, маємо, що $x \in [-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}]$, і третє рівняння мішаної системи –

$$x^2 - 2x = 1,$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0,$$

звідки $x = 1 - \sqrt{2} \in [-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}]$, $x = 1 + \sqrt{2} \notin [-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}]$.

Отже, коренями вихідного рівняння будуть $1 - \sqrt{2}$, 0, 1.

Приклад 67. Розв’язати рівняння $[20x] + 17[x] = 2017$.

Це рівняння вже було розв’язано у прикладі 58. Розв’яжемо його із застосуванням мішаної системи, попередньо перетворивши

$$17[x] = 2017 - [20x],$$

$$[x] = \frac{2017 - [20x]}{17}.$$

Тепер мішана система матиме вигляд

$$\begin{cases} [x] = k, \\ k \le x < k+1, \\ \dfrac{2017 - [20x]}{17} = k, \end{cases} \qquad k \in Z.$$

Перетворимо останнє рівняння

$$17k = 2017 - [20x],$$

$$[20x] = 2017 - 17k.$$

Тоді

$$2017 - 17k \le 20x < 2017 - 17k + 1,$$

$$2017 - 17k \le 20x < 2018 - 17k$$

і отримаємо таку систему

$$\begin{cases} [x] = k, \\ k \le x < k+1, \\ 2017 - 17k \le 20x < 2018 - 17k, \end{cases} \qquad k \in Z,$$

$$\begin{cases} [x] = k, \\ 20k \le 20x < 20k + 20, \\ 2017 - 17k \le 20x < 2018 - 17k, \end{cases} \qquad k \in Z.$$

Ця система містить дві невідомі x та k і буде сумісною, коли для кінців подвійних нерівностей виконуватиметься

$$\begin{cases} 20k < 2018 - 17k, \\ 2017 - 17k < 20k + 20. \end{cases}$$

(Пояснення цього факту див. пояснення способу розв'язування рівнянь виду $[f(x)] = [g(x)]$ через мішану систему, с. 86)

$$\begin{cases} 37k < 2018, \\ 37k > 1997, \end{cases}$$

$$\begin{cases} k < \dfrac{2018}{37}, \\ k > \dfrac{1997}{37}, \end{cases} \quad \begin{cases} k < 54\dfrac{20}{37}, \\ k > 53\dfrac{36}{37}. \end{cases}$$

Єдине ціле число, що задовольняє останню систему – це k = 54.

Тоді невідому x знайдемо із системи

$$\begin{cases} [x] = 54, \\ 20 \cdot 54 \le 20x < 20 \cdot 54 + 20, \\ 2017 - 17 \cdot 54 \le 20x < 2018 - 17 \cdot 54, \end{cases}$$

$$\begin{cases} [x] = 54, \\ 54 \le x < 55, \\ 1099 \le 20x < 1100, \end{cases}$$

$$\begin{cases} [x] = 54, \\ 54 \le x < 55, \\ \dfrac{1099}{20} \le x < \dfrac{110}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} [x] = 54, \\ 54 \le x < 55, \\ 54\dfrac{19}{20} \le x < 55, \end{cases}$$

$$x \in [54\frac{19}{20}; 55) -$$

таку відповідь було отримано і раніше, у прикладі 58.

Приклад 68. Розв’язати рівняння $\cos \pi x = [\frac{x}{2} - [\frac{x}{2}] - \frac{1}{2}]$.

Мішана система для цього рівняння буде мати вид

$$\begin{cases} \left[\dfrac{x}{2}-\left[\dfrac{x}{2}\right]-\dfrac{1}{2}\right]=k, \\ k\le \dfrac{x}{2}-\left[\dfrac{x}{2}\right]-\dfrac{1}{2}<k+1, \qquad k\in Z\,. \\ \cos\pi x=k \end{cases}$$

З останнього рівняння k буде приймати значення –1, 0 і 1. Розглянемо ці випадки окремо.

1) Якщо $k = -1$, то третє рівняння системи буде мати вид

$$\cos\pi x = -1, \text{ а}$$

$$\pi x = \pi + 2\pi n,\ n\in Z,$$

$$x = 1 + 2n,\ n\in Z,$$

і, відповідно, мішана система перепишеться наступним чином

$$\begin{cases} x=1+2n, \\ \left[\dfrac{1+2n}{2}-\left[\dfrac{1+2n}{2}\right]-\dfrac{1}{2}\right]=-1, \qquad n\in Z, \\ -1\le \dfrac{1+2n}{2}-\left[\dfrac{1+2n}{2}\right]-\dfrac{1}{2}<0. \end{cases}$$

Розв’язування останньої нерівності, дає наступну нерівність

$$-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}+n-n<\frac{1}{2},$$

$$-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}<\frac{1}{2}.$$

Звідки $n \in \varnothing$.

2) Якщо $k = 0$, то третє рівняння мішаної системи запишеться у вигляді

$$\cos \pi x = 0, \text{ а}$$

$$\pi x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z,$$

$$x = \frac{1}{2} + n,\ n \in Z,$$

і мішана система перепишеться наступним чином

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + n, \\ \left[\dfrac{\frac{1}{2}+n}{2} - \left[\dfrac{\frac{1}{2}+n}{2} \right] - \dfrac{1}{2} \right] = 0, \qquad n \in Z, \\ 0 \le \dfrac{\frac{1}{2}+n}{2} - \left[\dfrac{\frac{1}{2}+n}{2} \right] - \dfrac{1}{2} < 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + n, \\ \left[\dfrac{\frac{1}{2}+n}{2} - \left[\dfrac{\frac{1}{2}+n}{2} \right] - \dfrac{1}{2} \right] = 0, \qquad n \in Z, \\ \dfrac{1}{2} \le \dfrac{1}{4} + \dfrac{n}{2} - \left[\dfrac{1}{4} + \dfrac{n}{2} \right] - \dfrac{1}{2} < \dfrac{3}{2}, \end{cases}$$

Розв'язування останньої нерівності залежить від парності числа n. Тому, відповідно маємо 2 підвипадки.

2.1) $n = 2m,\ m \in Z,$

$$\frac{1}{2} \le \frac{1}{4} + m - \left[\frac{1}{4} + m\right] < \frac{3}{2},$$

$$\frac{1}{2} \le \frac{1}{4} + m - m < \frac{3}{2},$$

$$\frac{1}{2} \le \frac{1}{4} < \frac{3}{2},$$

і $m \in \varnothing$.

2.2) $n = 2m + 1$, $m \in Z$,

$$\frac{1}{2} \le \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + m - \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + m\right] < \frac{3}{2},$$

$$\frac{1}{2} \le \frac{3}{4} + m - m < \frac{3}{2},$$

$$\frac{1}{2} \le \frac{3}{4} < \frac{3}{2},$$

і m може бути будь-яким цілим числом, відповідно вихідне рівняння будуть задовольняти числа x виду

$$x = \frac{1}{2} + 2m + 1 = \frac{3}{2} + 2m, \ m \in Z.$$

3) $k = 1$, третє рівняння системи буде мати вид

$$\cos \pi x = 1, \text{ а}$$

$$\pi x = 2\pi n, \ n \in Z,$$

$$x = 2n, \ n \in Z,$$

і мішана система перепишеться наступним чином

$$\begin{cases} x = 2n, \\ \left[\frac{2n}{2} - \left[\frac{2n}{2}\right] - \frac{1}{2}\right] = 1, \qquad n \in Z, \\ 1 \le \frac{2n}{2} - \left[\frac{2n}{2}\right] - \frac{1}{2} < 2. \end{cases}$$

Розв'язування останньої нерівності:

$$1 \le n - n < 2,$$
$$1 \le 0 < 2.$$

Звідки $n \in \varnothing$.

Отже, відповідь вихідного рівняння: $x = \dfrac{3}{2} + 2m,\ m \in Z.$

При розв'язуванні рівнянь виду $[f(x)] = [g(x)]$, де $f(x)$, $g(x)$ – елементарні функції, мішана система матиме вигляд

$$\begin{cases} [f(x)] = [g(x)] = k, \\ k \le f(x) < k+1, \\ k \le g(x) < k+1, \end{cases} \qquad k \in Z.$$

Оскільки дана система містить 2 невідомі x та k, тому намагаються розв'язати подвійні нерівності відносно x, вважаючи k параметром. Це можна зробити, якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ є неперервними та монотонними.

Нехай в результаті отримаємо таку систему

$$(2) \quad \begin{cases} \varphi_1(k) \le x < \varphi_2(k), \\ \varphi_3(k) \le x < \varphi_4(k), \end{cases} \qquad k \in Z.$$

Ця система буде сумісною, якщо для меж інтервалів буде виконуватись

$$(3) \quad \begin{cases} \varphi_1(k) < \varphi_4(k), \\ \varphi_3(k) < \varphi_2(k), \end{cases}.$$

Данні співвідношення легко встановити із геометричних міркувань.

Нехай k_o – фіксоване дійсне число. І розв'язками при цьому фіксованому k_o першої нерівності системи (2) буде проміжок [x_1; x_2), а другої – [x_3; x_4). Тоді для цих проміжків можливі варіанти розташування (рис. 39):

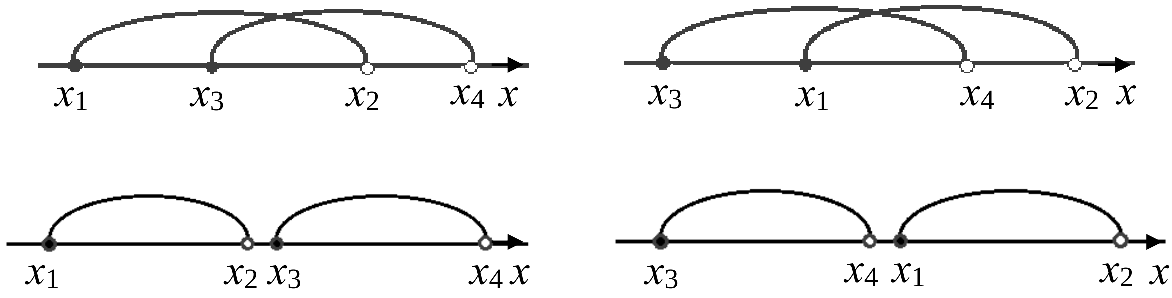

Рис. 39.

Із рис. 39 легко бачити, що сумісність системи (2) можлива, коли для кінців проміжків виконується співвідношення

$$\begin{cases} x_1 < x_4, \\ x_3 < x_2, \end{cases}$$

тобто сумісною повинна бути система (3).

Далі, серед розв'язків k останньої системи відбирають цілі $k_1, k_2, \ldots, k_n$ і підставляють їх значення в систему

$$\begin{cases} \varphi_1(k) \le x < \varphi_2(k), \\ \varphi_3(k) \le x < \varphi_4(k), \end{cases}$$

знаходячи розв'язки вихідного рівняння.

Отже, розв'язком рівняння $[f(x)] = [g(x)]$, де $f(x)$, $g(x)$ – елементарні функції, буде об'єднання проміжків, які в свою чергу є розв'язками попередньої системи нерівностей.

Міркування щодо кінців подвійних нерівностей системи

$$\begin{cases} \varphi_1(k) \le x < \varphi_2(k), \\ \varphi_3(k) \le x < \varphi_4(k), \end{cases} \qquad k \in Z$$

були використані при розв'язуванні прикладу 67.

Приклад 69. Розв’язати рівняння $\left[\dfrac{x-3}{2}\right]=\left[\dfrac{x-2}{3}\right]$.

Запишемо мішану систему

$$\begin{cases}\left[\dfrac{x-3}{2}\right]=\left[\dfrac{x-2}{3}\right]=k,\\ k\le\dfrac{x-3}{2}<k+1, \qquad k\in Z.\\ k\le\dfrac{x-2}{3}<k+1,\end{cases}$$

Перетворивши подвійні нерівності, отримаємо таку систему

$$(4)\quad \begin{cases}2k+3\le x<2k+5,\\ 3k+2\le x<3k+5,\end{cases}$$

яка буде сумісною, якщо

$$\begin{cases}2k+3<3k+5,\\ 3k+2<2k+5,\end{cases}\qquad \begin{cases}k>-2,\\ k<3.\end{cases}$$

Отже, $k\in(-2, 3)$ і $k\in Z$. Тому k = -1, 0, 1, 2 і маємо випадки

1) $k=-1$, система (4) матиме вид

$$\begin{cases}2(-1)+3\le x<2(-1)+5,\\ 3(-1)+2\le x<3(-1)+5,\end{cases}$$

$$\begin{cases}1\le x<3,\\ -1\le x<2,\end{cases}\quad x\in[1;\,2),$$

2) $k=0$, $\begin{cases}3\le x<5,\\ 2\le x<5,\end{cases}\quad x\in[3;\,5),$

3) $k=1$, $\begin{cases}5\le x<7,\\ 5\le x<8,\end{cases}\quad x\in[5;\,7),$

4) $k = 2,\quad \begin{cases} 7 \le x < 9, \\ 8 \le x < 11, \end{cases}\quad x \in [8;\,9).$

І загальний розв'язок рівняння: $x \in [1;\,2) \cup [3;\,7) \cup [8;\,9)$.

Зауваження **7.** При розв'язуванні рівнянь виду $[f(x)] = [g(x)]$ монотонність і неперервність функцій $f(x)$, $g(x)$ є суттєвим фактором. Переконаємось у цьому на прикладі.

Приклад 70. Розв'язати рівняння $[3x - x^2] = [x^2 + \frac{1}{2}]$.

Якщо для цього рівняння застосувати мішану систему, то отримаємо систему:

$$\begin{cases} [3x - x^2] = [x^2 + \frac{1}{2}] = k, \\ k \le 3x - x^2 < k + 1, \quad k \in Z, \\ k \le x^2 + \frac{1}{2} < k + 1, \end{cases}$$

яка по суті є системою квадратичних нерівностей різних знаків з параметром. Зрозуміло, що розв'язати її можна, про те досить складно, оскільки постійно слід накладати обмеження на цілий параметр k.

Розв'яжемо дане рівняння $[3x - x^2] = [x^2 + \frac{1}{2}]$ дещо іншим способом.

З лівого боку під знаком цілої частини стоїть квадратична функція $y = 3x - x^2$, графіком якої є парабола з вітками направленими вниз, тому максиму вона досягає у своїй вершині. Отже,

$$max\,\{[3x - x^2]\} = max\,\{[-(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{9}{4}]\} = [\frac{9}{4}] = [2\frac{1}{4}] = 2.$$

З правого боку – функція $y = x^2 + \frac{1}{2}$, графік якої – парабола з вітками направленими вгору, тому

$$min\ \{[x^2 + \frac{1}{2}]\} = [\frac{1}{2}] = 0.$$

Отже, спільними значеннями цілих частин обох частин рівняння буде 0, 1, 2. По суті це значення параметра k мішаної системи. Розв'яжемо тепер мішану систему для конкретного k.

1) $k = 0$ і мішана система у цьому випадку має вигляд

$$\begin{cases} 0 \le 3x - x^2 < 1, \\ 0 \le x^2 + \frac{1}{2} < 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - x^2 \le 0, \\ x^2 - 3x + 1 > 0, \\ x^2 < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Після розв'язування кожної нерівності окремо, будемо мати

$$\begin{cases} x \in [0,3] \\ x \in (-\infty, \frac{3-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty) \\ x \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}). \end{cases}$$

і в результаті $x \in [0, \frac{3-\sqrt{5}}{2})$.

2) Якщо $k = 1$, то мішана система має вид

$$\begin{cases} 1 \le 3x - x^2 < 2, \\ 1 \le x^2 + \dfrac{1}{2} < 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 3x + 1 \le 0, \\ x^2 - 3x + 2 > 0, \\ x^2 \ge \dfrac{1}{2}, \\ x^2 < \dfrac{3}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in [\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}], \\ x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty), \\ x \in (-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}] \cup [\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty), \\ x \in (-\dfrac{\sqrt{6}}{2}, \dfrac{\sqrt{6}}{2}). \end{cases}$$

Відповідь з цієї системи $x \in [\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1)$.

3) Якщо $k = 2$, то мішана система має вид

$$\begin{cases} 2 \le 3x - x^2 < 3, \\ 2 \le x^2 + \dfrac{1}{2} < 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \le 0, \\ x^2 - 3x + 3 > 0, \\ x^2 \ge \dfrac{3}{2}, \\ x^2 < \dfrac{5}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in [1;2], \\ x \in (-\infty, +\infty), \\ x \in (-\infty; -\dfrac{\sqrt{6}}{2}] \cup [\dfrac{\sqrt{6}}{2}; +\infty), \\ x \in (-\dfrac{\sqrt{10}}{2}; \dfrac{\sqrt{10}}{2}). \end{cases}$$

Відповідь з системи випадку 3: $x \in [\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{10}}{2})$.

Об’єднуючи отримані проміжки, знаходимо множину розв’язків вихідного рівняння

$$x \in [\,0; \frac{3-\sqrt{5}}{2}) \cup [\frac{\sqrt{2}}{2}; 1) \cup [\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{10}}{2}).$$

4.4. Спосіб локалізації

При розв’язуванні рівняння з прикладів 69, 70 множину значень цілої частини – k було знайдено способом, який можна назвати способом локалізації. Це ще один дієвий спосіб при розв’язуванні рівнянь, що містять цілу або дробову частини числа. Суть його полягає в наступному: виходячи з умови рівняння та властивостей функцій, що в ньому фігурують, намагаються в області допустимих значень рівняння виділити ту підмножину, в якій містяться розв’язки рівняння, які згодом знаходять безпосереднім перебором.

Розглянемо, як спосіб локалізації буде реалізовано для рівнянь вище розглянутих видів, тобто $[f(x)] = g(x)$ та $[f(x)] = [g(x)]$, де $f(x)$, $g(x)$ – елементарні функції.

Так, у рівнянні $[f(x)] = g(x)$ роблять заміну $[f(x)] = f(x) -$ $- \{f(x)\}$ і перетворюють рівняння до вигляду $\{f(x)\} = f(x) - g(x)$. Враховуючи обмеженість дробової частини, а саме з того, що $0 \le \{f(x)\} < 1$, отримаємо, що $0 \le f(x) - g(x) < 1$.

Розв'язуючи останню подвійну нерівність, знаходять підмножину області допустимих значень вихідного рівняння, в якій містяться його корені.

Далі, знайдену підмножину ОДЗ розбивають на проміжки, де $[f(x)] = k$, $k \in Z$, по суті отримуючи рівняння виду $g(x) = k$, яке в свою чергу розв'язують відомими способами.

Продемонструємо цей спосіб для рівнянь, що були розв'язані у прикладах 63 – 66.

Приклад 71. Розв'язати рівняння $\left[\frac{x+1}{3}\right] = \frac{x-1}{2}$.

Робимо заміну

$$\left[\frac{x+1}{3}\right] = \frac{x+1}{3} - \left\{\frac{x+1}{3}\right\},$$

перетворене рівняння має вигляд

$$\left\{\frac{x+1}{3}\right\} = \frac{x+1}{3} - \frac{x-1}{2},$$

і відповідно подвійна нерівність запишеться так

$$0 \le \frac{x+1}{3} - \frac{x-1}{2} < 1.$$

Розв'яжемо її :

$$\begin{cases} \frac{x+1}{3} - \frac{x-1}{2} \ge 0, \\ \frac{x+1}{3} - \frac{x-1}{2} < 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{-x+5}{6} \ge 0, \\ \frac{x+1}{6} > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x \le 5, \\ x > -1, \end{cases}$$

тобто $x \in (-1; 5]$.

Оцінимо значення виразу $\left[\frac{x+1}{3}\right]$ на кінцях знайденого проміжку (-1; 5].

Якщо x = -1, то $\left[\frac{x+1}{3}\right]$ = 0, якщо x = 5, то $\left[\frac{x+1}{3}\right]$ = 2. Враховуючи це, корені вихідного рівняння будуть розв'язками таких систем:

1) $\begin{cases} 0 \le \frac{x+1}{3} < 1, \\ \frac{x-1}{2} = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} -1 \le x < 3, \\ x = 1, \end{cases}$ $x = 1;$

2) $\begin{cases} 1 \le \frac{x+1}{3} < 2, \\ \frac{x-1}{2} = 1, \end{cases}$ $\begin{cases} 2 \le x < 5, \\ x = 3, \end{cases}$ $x = 3;$

3) $x = 5$, тоді $\left[\frac{x+1}{3}\right] = \left[\frac{5+1}{3}\right] = 2, = \frac{x-1}{2} = \frac{5-1}{2} = 2$.

Отже, розв'язками вихідного рівняння є числа 1, 3, 5, що і було отримано у прикладі 63.

Приклад 72. Розв'язати рівняння $\left\lfloor\sqrt{x+10}\right\rfloor = x + \frac{1}{2}$.

Запишемо відповідну подвійну нерівність

$$0 \le \sqrt{x+10} - (x + \frac{1}{2}) < 1$$

і отримаємо таку систему ірраціональних нерівностей

$$\begin{cases} \sqrt{x+10} \ge x + \dfrac{1}{2}, \\ \sqrt{x+10} < x + \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Розв’яжемо кожну нерівність окремо.

1) $\sqrt{x+10} \ge x + \dfrac{1}{2}$ дана нерівність рівносильна наступній сукупності систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+10 \ge 0, \\ x + \dfrac{1}{2} < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x + \dfrac{1}{2} \ge 0, \\ x+10 \ge (x+\dfrac{1}{2})^2, \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge -10, \\ x < -\dfrac{1}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2}, \\ x^2 \le \dfrac{39}{4}, \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x \in [-10;-\dfrac{1}{2}), \\ \begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2}, \\ |x| \le \dfrac{\sqrt{39}}{2}, \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x \in [-10;-\dfrac{1}{2}), \\ x \in [-\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{39}}{2}] \end{array}\right.$$

і $x \in [-10;\dfrac{\sqrt{39}}{2}]$.

2) $\sqrt{x+10} < x + \dfrac{3}{2}$ дана нерівність рівносильна наступній системі

$$\begin{cases} x+10 \ge 0, \\ x+\dfrac{3}{2} > 0, \\ x+10 < (x+\dfrac{3}{2})^2, \end{cases} \quad \begin{cases} x \ge -10, \\ x > -\dfrac{3}{2}, \\ x^2+2x-\dfrac{31}{4} > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x \ge -10, \\ x > -\dfrac{3}{2}, \\ 4x^2+8x-31 > 0. \end{cases}$$

Для квадратичної нерівності будемо мати

$$D_1 = 16 + 124 = 140,$$

$$x_{1,2} = \ = \frac{-4 \pm \sqrt{140}}{4} = \frac{-2 \pm \sqrt{35}}{2}$$

і розв'язок нерівності $x \in (-\infty\ ;\ \dfrac{-2-\sqrt{35}}{2}) \cup (\dfrac{-2+\sqrt{35}}{2}\ ;\ +\infty)$.

Отже, розв'язком системи

$$\begin{cases} x \ge -10, \\ x > -\dfrac{3}{2}, \\ 4x^2+8x-31 > 0, \end{cases}$$

буде

$$\begin{cases} x \in (-\dfrac{3}{2}; +\infty), \\ x \in (-\infty; \dfrac{-2-\sqrt{35}}{2}) \cup (\dfrac{-2+\sqrt{35}}{2}; +\infty), \end{cases} \quad x \in (\frac{-2+\sqrt{35}}{2}; +\infty).$$

Повертаючись до системи

$$\begin{cases} \sqrt{x+10} \ge x+\dfrac{1}{2}, \\ \sqrt{x+10} < x+\dfrac{3}{2}, \end{cases}$$

отримаємо

$$\begin{cases} x \in [-10; \frac{\sqrt{39}}{2}], \\ x \in (\frac{-2+\sqrt{35}}{2}; +\infty), \end{cases} \quad \text{і} \quad x \in (\frac{-2+\sqrt{35}}{2}; \frac{\sqrt{39}}{2}].$$

Оцінимо значення цілої частини $[\sqrt{x+10}]$ на кінцях знайденого інтервалу коренів.

1) Якщо $x = \frac{-2+\sqrt{35}}{2}$, то оскільки

$$5 \le \sqrt{35} < 6,$$

отримаємо

$$3 \le -2+\sqrt{35} < 4,$$

$$1{,}5 \le \frac{-2+\sqrt{35}}{2} < 2,$$

$$11{,}5 \le \frac{-2+\sqrt{35}}{2} + 10 < 12,$$

$$3 \le \sqrt{\frac{-2+\sqrt{35}}{2}+10} < 4, \text{ тому}$$

$$\left[\sqrt{\frac{-2+\sqrt{35}}{2}+10}\right] = 3.$$

2) Якщо $x = \frac{\sqrt{39}}{2}$, то оскільки

$$6 \le \sqrt{39} < 7,$$

то будемо мати

$$3 \le \frac{\sqrt{39}}{2} < 3{,}5,$$

$$13 \le \frac{\sqrt{39}}{2} + 10 < 13{,}5,$$

$$3 \le \sqrt{\frac{\sqrt{39}}{2} + 10} < 4, \text{ і знов}$$

$$\left[\sqrt{\frac{\sqrt{39}}{2} + 10}\right] = 3.$$

Отже, єдине значення, яке приймає ціла частина $\left[\sqrt{x+10}\right]$ – це 3. Тому рівняння запишеться у вигляді $x + \frac{1}{2} = 3$, а $x = 2{,}5$, що і було отримано раніше.

Приклад 73. Розв'язати рівняння $x^2 - 7[x] + 10 = 0$.

Скориставшись зв'язком цілої та дробової частини

$$[x] = x - \{x\},$$

отримаємо

$$x^2 - 7(x - \{x\}) + 10 = 0,$$

$$x^2 - 7x + 10 = -7\{x\}.$$

Оскільки $0 \le \{x\} < 1$, то

$$-7 < -7\{x\} \le 0 \text{ і}$$

$$-7 < x^2 - 7x + 10 \le 0.$$

Розпишемо подвійну нерівність як систему:

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 10 > -7, \\ x^2 - 7x + 10 \le 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 7x + 17 > 0, \\ x^2 - 7x + 10 \le 0. \end{cases}$$

Розв'язок першої нерівності:

$$x^2 - 7x + 17 > 0,$$

$$x^2 - 7x + 17 = 0,$$

$$D = 49 - 68 < 0 \text{ і } x \in R.$$

Розв’язок другої нерівності:

$$x^2 - 7x + 10 \le 0,$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0,$$

$$x_1 = 2,\ x_2 = 5 \text{ та } x \in [2, 5].$$

Отже, розв’язком усієї системи нерівностей є відрізок [2; 5].

Розіб’ємо цей відрізок на окремі одиничні проміжки, де ціла частина приймає одне й те саме постійне значення, та розглянемо вихідне рівняння на них.

1) $x \in [2; 3)$, $[x] = 2$, вихідне рівняння запишеться у вигляді

$$x^2 - 14 + 10 = 0 \text{ або } x^2 = 4,$$

$$x = \pm 2,$$

$$x = -2 \notin [2; 3), \text{ і } x_1 = 2.$$

2) $x \in [3; 4)$, $[x] = 3$,

$$x^2 - 21 + 10 = 0,$$

$$x^2 = 11,$$

$$x = \pm \sqrt{11},$$

$$x = -\sqrt{11} \notin [3; 4), \text{ і } x_2 = \sqrt{11}.$$

3) $x \in [4; 5)$, $[x] = 4$,

$$x^2 - 28 + 10 = 0,$$

$$x^2 = 18,\ x = \pm 3\sqrt{2},$$

$$x = -3\sqrt{2} \notin [4; 5), \text{ і } x_3 = 3\sqrt{2}.$$

4) $x = 5$, $[x] = 5$,

$$x^2 - 35 + 10 = 0,$$

$$x^2 = 25,$$

$$x = \pm 5,$$

$$x = -5 \text{ – сторонній корінь і } x_4 = 5.$$

Тобто розв'язками рівняння є 2, $\sqrt{11}$, $3\sqrt{2}$, 5, що і було отримано раніше у прикладі 65.

Приклад 74. Розв'язати рівняння $\left[\frac{1-3x}{2}\right] = x^2 - 2x$.

Обмежувальна нерівність для коренів цього рівняння:

$$0 \le \frac{1-3x}{2} - x^2 + 2x < 1.$$

$$0 \le 1 - 3x - 2x^2 + 4x < 2,$$

Після перетворень матимемо систему:

$$\begin{cases} 2x^2 - x - 1 \le 0, \\ 2x^2 - x + 1 > 0. \end{cases}$$

Розв'язування першої нерівності:

$$2x^2 - x - 1 \le 0:$$

$$2x^2 - x - 1 = 0,$$

$$D = 9,$$

$$x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{1}{2},$$

тому $x \in [-\frac{1}{2}; 1]$.

Розв'язування другої нерівності:

$$2x^2 - x + 1 > 0,$$

$$2x^2 - x + 1 = 0,$$

$$D = -7 < 0, \text{ а } x \in R.$$

Відповідно розв’язок усієї системи нерівностей $x \in [-\frac{1}{2}, 1]$.

Знайдемо значення, що приймає ціла частина на кінцях знайденого проміжку коренів:

– якщо $x = -\frac{1}{2}$, то $\left[\frac{1+3\cdot\frac{1}{2}}{2}\right] = \left[\frac{5}{4}\right] = 1$;

– якщо ж $x = 1$, то $\left[\frac{1-3\cdot 1}{2}\right] = [-1] = -1$.

Тобто ціла частина буде приймати значення: -1, 0, 1 (такі самі значення були отримані у прикладі 66).

Маємо такі випадки:

1) $\left[\frac{1-3x}{2}\right] = -1$, $-1 \le \frac{1-3x}{2} < 0$ або $\frac{1}{3} < x \le 1$.

При цьому вихідне рівняння матиме вигляд

$$x^2 - 2x = -1,$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0,\ (x-1)^2 = 0,$$

$$x = 1 \in (\frac{1}{3}; 1],\ x_1 = 1.$$

2) $\left[\frac{1-3x}{2}\right] = 0$, $0 \le \frac{1-3x}{2} < 1$ або $-\frac{1}{3} < x \le \frac{1}{3}$.

Вихідне рівняння:

$$x^2 - 2x = 0,$$

$$x = 0 \in (-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}],$$

$$x = 2 \notin (-\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}],\text{ тому}$$

$$x_2 = 0.$$

3) $\left[\frac{1-3x}{2}\right] = 1$, $1 \le \frac{1-3x}{2} < 2$ або $-1 < x \le -\frac{1}{3}$. Але корені рівняння належать проміжку $[-\frac{1}{2}; 1]$, тому $x \in [-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}]$.

Відповідно вихідне рівняння запишеться:

$$x^2 - 2x = 1,$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0,$$

$$D_1 = 2,$$

$$x = 1-\sqrt{2} \in (-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{3}],$$

$$x = 1+\sqrt{2} \notin (-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}],\ \text{тому}$$

$$x_3 = 1-\sqrt{2}.$$

І загальні розв'язки рівняння $1-\sqrt{2}$, 0, 1– аналогічні до розв'язків, отриманих у прикладі 66.

При розв'язуванні рівнянь виду $[f(x)] = [g(x)]$ способом локалізації користуються властивістю 7°, тобто якщо $[f(x)] = [g(x)]$, то $|\,f(x) - g(x)\,| < 1$.

Розв'язуючи останню подвійну нерівність, знаходять підмножину області допустимих значень вихідного рівняння, в якій містяться його корені. Далі, знаходять множину значень k_1, k_2, ..., k_m, $k_j \in Z$, $j = 1 \div m$, які можуть приймати $[f(x)]$ та $[g(x)]$ одночасно для знайденого проміжку коренів. По суті отримують сукупність рівнянь $[f(x)] = [g(x)] = k_j,\ k_j \in Z, j = 1 \div m$. Ці рівняння свою чергу розписують подвійними нерівностями

$$\begin{cases} k_j \le f(x) < k_j + 1, \\ k_j \le g(x) < k_j + 1, \end{cases}$$

і розв'язують відомими способами. Об'єднання отриманих проміжків з урахуванням проміжку коренів – це і є розв'язок вихідного рівняння.

Розв'яжемо способом локалізації рівняння, що були розв'язані у прикладах 69 і 70.

Приклад 75. Розв'язати рівняння $\left[\dfrac{x-3}{2}\right] = \left[\dfrac{x-2}{3}\right]$.

Знайдемо обмежувальний проміжок коренів із нерівності

$$-1 < \frac{x-3}{2} - \frac{x-2}{3} < 1,$$

$$-1 < \frac{x-5}{6} < 1,$$

$$\begin{cases} x - 5 > -6, \\ x - 5 < 6, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -1, \\ x < 11. \end{cases}$$

Отже корені рівняння містяться у проміжку $(-1, 11)$.

Оцінимо значення цілих частин $\left[\dfrac{x-3}{2}\right]$ та $\left[\dfrac{x-2}{3}\right]$ для знайденого проміжку. Знайдемо найменше таке значення.

Якщо $x = 0$, то

$$\left[\frac{x-3}{2}\right] = \left[-\frac{3}{2}\right] = -2, \text{ а } \left[\frac{x-2}{3}\right] = \left[-\frac{2}{3}\right] = -1.$$

Тобто спільних значень цілі частини не приймають.

Якщо x = 1, то

$$\left[\frac{x-3}{2}\right] = \left[\frac{1-3}{2}\right] = [-1] = -1, \text{ а}$$

$$\left[\frac{x-2}{3}\right] = \left[\frac{1-2}{3}\right] = \left[-\frac{1}{3}\right] = -1.$$

Отже, найменше спільне значення, яке приймають цілі частини, – це -1.

Тепер зайдемо найбільше значення, що можуть приймати цілі частини $\left[\frac{x-3}{2}\right]$ та $\left[\frac{x-2}{3}\right]$.

Якщо x = 10, то

$$\left[\frac{x-3}{2}\right] = \left[\frac{10-3}{2}\right] = \left[\frac{7}{2}\right] = [3{,}5] = 3, \text{ а}$$

$$\left[\frac{x-2}{3}\right] = \left[\frac{10-2}{3}\right] = \left[\frac{8}{3}\right] = [2\frac{2}{3}] = 2.$$

У цьому випадку цілі частини приймають різні значення.

Якщо x = 9, то

$$\left[\frac{x-3}{2}\right] = \left[\frac{9-3}{2}\right] = \left[\frac{6}{2}\right] = [3] = 3, \text{ а}$$

$$\left[\frac{x-2}{3}\right] = \left[\frac{9-2}{3}\right] = \left[\frac{7}{3}\right] = [2\frac{1}{3}] = 2.$$

У цьому випадку цілі частини знов приймають різні значення.

Якщо x = 8, то

$$\left[\frac{x-3}{2}\right] = \left[\frac{8-3}{2}\right] = \left[\frac{5}{2}\right] = [2{,}5] = 2, \text{ а}$$

$$\left[\frac{x-2}{3}\right] = \left[\frac{8-2}{3}\right] = \left[\frac{6}{3}\right] = [2] = 2.$$

Отже, найбільше значення, що приймають цілі частини, – це 2.

Далі, розв'яжемо рівняння для кожного значення цілої частини {–1, 0, 1, 2} окремо. До речі, ці ж значення для цілих частин були отримані при розв'язуванні прикладу 69.

Якщо $\left[\frac{x-3}{2}\right] = \left[\frac{x-2}{3}\right]$ = -1, то за означенням цілої частини будемо мати:

$$\begin{cases} -1 \le \dfrac{x-3}{2} < 0, \\ -1 \le \dfrac{x-2}{3} < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \le x < 3, \\ -1 \le x < 2, \end{cases} \quad x \in [1;\, 2).$$

Оскільки під час розв'язування, отримали систему, що вже була розв'язана у прикладі 69, тому відразу можна записати відповідь, аналогічну до отриманої у прикладі 69:

$$x \in [1;\, 2) \cup [3;\, 7) \cup [8;\, 9).$$

Приклад 76. Розв'язати рівняння $[3x - x^2] = [x^2 + \frac{1}{2}]$.

Знаходимо обмежувальний проміжок для коренів:

$$-1 < 3x - x^2 - x^2 - \frac{1}{2} < 1,$$

$$-2 < 6x - 4x^2 - 1 < 2,$$

$$\begin{cases} 4x^2 - 6x - 1 < 0, \\ 4x^2 - 6x + 3 > 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи першу нерівність системи, отримаємо, що:

$$D_1 = 13,$$

$$x_1 = \frac{3-\sqrt{13}}{4},\ x_2 = \frac{3+\sqrt{13}}{4} \text{ та}$$

$$x \in \left(\frac{3-\sqrt{13}}{4};\ \frac{3+\sqrt{13}}{4}\right).$$

Другу нерівність задовольняють всі дійсні значення невідомої x, бо $D_1 = -3 < 0$.

Отже, корені заданого рівняння містяться у проміжку

$$\left(\frac{3-\sqrt{13}}{4};\ \frac{3+\sqrt{13}}{4}\right).$$

Далі знайдемо межі для значень цілих частин. Найменше значення.

Якщо $x = \frac{3-\sqrt{13}}{4}$, то

$$[3x - x^2] = \left[3\left(\frac{3-\sqrt{13}}{4}\right) - \left(\frac{3-\sqrt{13}}{4}\right)^2\right] = \left[3\frac{3-\sqrt{13}}{4} - \frac{9-6\sqrt{13}+13}{16}\right] =$$

$$\left[\frac{36-12\sqrt{13}-22+6\sqrt{13}}{16}\right] = \left[\frac{14-6\sqrt{13}}{16}\right] = \left[\frac{7-3\sqrt{13}}{8}\right].$$

Оскільки $3 < \sqrt{13} < 4$, то

$$-12 < -3\sqrt{13} < -9,$$

$$-5 < 7-\sqrt{13} < -2,$$

$$-\frac{5}{8} < \frac{7-3\sqrt{13}}{8} < -\frac{1}{4} \text{ і}$$

$$\left[\frac{7-3\sqrt{13}}{8}\right] = -1,$$

$$\text{а } \left[x^2 + \frac{1}{2}\right] > 0 \text{ для всіх } x \in R.$$

Тобто, у цьому випадку цілі частини приймають різні значення.

Якщо $x = 0$, то

$$[3x - x^2] = [3 \cdot 0 - 0^2] = [0] = 0, \text{ а}$$

$$\left[x^2 + \frac{1}{2}\right] = \left[0^2 + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{1}{4}\right] = 0.$$

Отже, найменше значення, яке приймають цілі частини – це 0.

Знайдемо найбільше значення для цілих частин.

Якщо $x = \frac{3+\sqrt{13}}{4}$, то

$$[3x - x^2] = \left[3\left(\frac{3+\sqrt{13}}{4}\right) - \left(\frac{3+\sqrt{13}}{4}\right)^2\right] = \left[3\frac{3+\sqrt{13}}{4} - \frac{9+6\sqrt{13}+13}{16}\right] =$$

$$\left[\frac{36+12\sqrt{13}-22-6\sqrt{13}}{16}\right] = \left[\frac{14+6\sqrt{13}}{16}\right] = \left[\frac{7+3\sqrt{13}}{8}\right],$$

оскільки $3 < \sqrt{13} < 4$, то

$$9 < 3\sqrt{13} < 12,$$

$$16 < 7+3\sqrt{13} < 19,$$

$$2 < \frac{7+3\sqrt{13}}{8} < \frac{19}{8} \text{ і}$$

$$\left[\frac{7+3\sqrt{13}}{8}\right] = 2.$$

$$\text{А } \left[x^2 + \frac{1}{2}\right] = \left[\left(\frac{3+\sqrt{13}}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{30+6\sqrt{13}}{16}\right] = \left[\frac{15+3\sqrt{13}}{8}\right],$$

а $9 < 3\sqrt{13} < 12$, $24 < 15+3\sqrt{13} < 27$,

$$3 < \frac{15+3\sqrt{13}}{8} < \frac{27}{8},$$

$$[\frac{15+3\sqrt{13}}{8}] = 3.$$

У цьому випадку цілі частини приймають різні значення.

Якщо $x = \frac{3}{2}$, то

$$[3x - x^2] = [3\cdot\frac{3}{2} - (\frac{3}{2})^2] = [\frac{9}{2} - \frac{9}{4}] = [\frac{9}{4}] = [2\frac{1}{4}] = 2, \text{ а}$$

$$[x^2 + \frac{1}{2}] = [(\frac{3}{2})^2 + \frac{1}{2}] = [\frac{11}{4}] = [2\frac{3}{4}] = 2$$

і найбільше спільне значення цілих частин – це 2.

Отже, цілі частини можуть набувати значень 0, 1, 2, аналогічно до прикладу 70.

Якщо $[3x - x^2] = [x^2 + \frac{1}{2}] = 0$, то рівняння можна подати у вигляді

$$\begin{cases} 0 \le 3x - x^2 < 1, \\ 0 \le x^2 + \frac{1}{2} < 1. \end{cases}$$

Дану систему було отримано та розв’язано у прикладі 70 (випадок $k = 0$), тому зразу можна записати не тільки відповідь для цього випадку

$$x \in [0; \frac{3-\sqrt{5}}{2}),$$

так і відповідь усього рівняння

$$x \in [0;\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}) \cup [\frac{\sqrt{2}}{2};\ 1) \cup [\frac{\sqrt{6}}{2};\ \frac{\sqrt{10}}{2}).$$

Зауваження **8.** При розв'язуванні рівнянь виду $[f(x)] = [g(x)]$, де $f(x)$, $g(x)$ – елементарні функції, слід враховувати властивості функцій $f(x)$, $g(x)$ (на приклад, область визначення, область значень, періодичність, тощо). Так область значень правої та лівої частин рівняння була використана при розв'язуванні рівняння у прикладі 70.

Приклад 77. Розв'язати рівняння

$$[\sqrt{-x^2+x+2}] = [\,2 - \cos x].$$

Знайдемо ОДЗ рівняння:

$$-x^2 + x + 2 \geq 0,$$

$$x^2 - x - 2 \leq 0,$$

$$x^2 - x - 2 = 0,$$

$$x_1 = -1,\ x_2 = 2$$

і остаточно $x \in [\,-1;\ 2]$.

У цій області права частина набуває значень 1 і 2, бо:

1) якщо $x = -1$, то

$$[\,2 - \cos x] = [\,2 - \cos(-1)] = [\,2 - \cos 1] = 1, \text{ бо } 0 < \cos 1 < 1;$$

2) якщо $x = 0$, то

$$[\,2 - \cos x] = [\,2 - \cos 0] = [\,2 - 1] = 1;$$

3) якщо $x = 2$, то

$$-1 < \cos 2 < 0 \text{ і } 2 < 2 - \cos 2 < 3,$$

тому

$$[\,2 - \cos x] = [\,2 - \cos 2] = 2.$$

Отже вихідне рівняння розпишеться як сукупність 2-х рівнянь

$$\left[\begin{array}{l}[\sqrt{-x^2+x+2}]=[2-\cos x]=1,\\ [\sqrt{-x^2+x+2}]=[2-\cos x]=2,\end{array}\right.$$

кожне з яких в свою чергу розписується як система нерівностей. У результаті отримаємо наступну сукупність систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{-x^2+x+2}\ge 1,\\ \sqrt{-x^2+x+2}<2,\\ 2-\cos x\ge 1,\\ 2-\cos x<2,\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{-x^2+x+2}\ge 2,\\ \sqrt{-x^2+x+2}<3,\\ 2-\cos x\ge 2,\\ 2-\cos x<3.\end{cases}\end{array}\right.$$

Розв'яжемо кожну з систем окремо.

1) $\begin{cases}-x^2+x+2\ge 1,\\ -x^2+x+2<4,\\ \cos x\le 1,\\ \cos x>0,\end{cases}$ $\qquad\begin{cases}x^2-x-1\le 0,\\ x^2-x+2>0,\\ \cos x\le 1,\\ \cos x>0,\end{cases}$

$$\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\le x\le\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\\ x\in R,\\ x\in R,\\ -\dfrac{\pi}{2}+2\pi n<x<\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\end{cases}\qquad n\in \mathrm{Z},$$

і розв'язок системи $x \in [\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{\pi}{2})$, оскільки $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}62$, а $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$.

$$2)\quad \begin{cases} -x^2+x+2 \ge 4, \\ -x^2+x+2 < 9, \\ \cos x \le 0, \\ \cos x > -1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-x+2 \le 0, \\ x^2-x+7 > 0, \\ \cos x \le 0, \\ \cos x > -1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \varnothing (D=-7<0), \\ x \in R(D=-27<0), \\ -\frac{\pi}{2}+2\pi n < x < \frac{3\pi}{2}+2\pi n, \\ x \ne \pi + 2\pi k, \end{cases} \quad n, k \in Z,$$

і розв'язок цієї системи $x \in \varnothing$.

Враховуючи ОДЗ рівняння $x \in [-1;\ 2]$ та оскільки $\frac{1-\sqrt{5}}{2} > -1$, а $\frac{\pi}{2} < 2$, то розв'язком вихідного рівняння є $[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{\pi}{2})$.

Розв'яжемо рівняння з приклада 68, використовуючи спосіб локалізації.

Приклад 78. Розв'язати рівняння $\cos \pi x = [\frac{x}{2} - [\frac{x}{2}] - \frac{1}{2}]$.

Якщо виконати заміну $[\frac{x}{2}] = \frac{x}{2} - \{\frac{x}{2}\}$, то отримаємо рівняння:

$$\cos \pi x = [\frac{x}{2} - \frac{x}{2} + \{\frac{x}{2}\} - \frac{1}{2}] = [\{\frac{x}{2}\} - \frac{1}{2}].$$

Враховуючи, що

$$0 \le \{\frac{x}{2}\} < 1, \text{ а } -\frac{1}{2} \le \{\frac{x}{2}\} - \frac{1}{2} < \frac{1}{2},$$

то для цілої частини $[\{\frac{x}{2}\} - \frac{1}{2}]$ можливі випадки:

1) $[\{\frac{x}{2}\} - \frac{1}{2}] = -1$ та

2) $[\{\frac{x}{2}\} - \frac{1}{2}] = 0$.

У першому випадку

$$\cos \pi x = -1,$$

$$\pi x = \pi + 2\pi n, \text{ де } n \in Z.$$

Тоді $x = 1 + 2n$, а

$$\{\frac{x}{2}\} = \{\frac{1+2n}{2}\} = \{\frac{1}{2} + n\} = \frac{1}{2},$$

враховуючи властивість дробової частини, а

$$[\{\frac{x}{2}\} - \frac{1}{2}] = [\frac{1}{2} - \frac{1}{2}] = 0 \ne -1,$$

тобто коренів немає.

У другому випадку

$$\cos \pi x = 0,$$

$$\pi x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \text{ де } n \in Z.$$

Тоді

$$x = \frac{1}{2} + n, \text{ де } n \in Z,$$

$$\text{а } \{\frac{x}{2}\} = \{\frac{\frac{1}{2}+n}{2}\} = \{\frac{1}{4}+\frac{n}{2}\}$$

і маємо знову 2 підвипадки

2.1) $\{\frac{x}{2}\} = \frac{1}{4}$, якщо $n = 2k$ та

2.2) $\{\frac{x}{2}\} = \frac{3}{4}$, якщо $n = 2k + 1$, де $k \in Z$.

У випадку 2.1, коли $\{\frac{x}{2}\} = \frac{1}{4}$, отримаємо

$$[\{\frac{x}{2}\} - \frac{1}{2}] = [\frac{1}{4} - \frac{1}{2}] = [-\frac{1}{4}] = -1 \neq 0$$

і коренів немає.

Якщо ж $\{\frac{x}{2}\} = \frac{3}{4}$ (випадок 2.2), то

$$[\{\frac{x}{2}\} - \frac{1}{2}] = [\frac{3}{4} - \frac{1}{2}] = [\frac{1}{4}] = 0 = \cos \pi x.$$

Отже всі числа виду $x = \frac{1}{2} + n = \frac{1}{2} + 2k + 1 = \frac{3}{2} + 2k$, де $k \in Z$, є розв'язками вихідного рівняння.

4.5. Графічний спосіб

Не менш дієвим способом розв'язування рівнянь, що містять цілу, дробову частини числа, ніж розглянуті вище, є графічний. Для цього потрібно перетворити рівняння так, щоб зручно було будувати графіки правої $f(x)$ та лівої $g(x)$ частин.

Розв'язками рівняння будуть абсциси спільних точок графіків функцій $f(x)$ і $g(x)$.

Детально алгоритм розв'язування такий: спочатку визначають ординати b_i спільних точок $P(a_i, b_i)$ графіків правої $f(x)$ та лівої $g(x)$ частин, а це найчастіше можна зробити точно, бо вони можуть бути цілими з умови. Потім з рівняння $b_i = f(a_i)$ слід знайти її абсцису a_i. Точність розв'язків рівнянь з цілою частиною, які дістаємо графічним способом, визначається точністю розв'язків рівнянь $f(x) = k$, де $k \in Z$.

Приклад 79. Розв'язати графічним способом рівняння

$$x^3 - [x] = 3.$$

Замінимо рівняння рівносильним

$$x^3 - 3 = [x].$$

Побудуємо графіки функцій $y = x^3 - 3$ та $y = [x]$ (рис. 40). Графіки мають єдину спільну точку, ордината k якої дорівнює 1, тобто $[x] = 1$ і, відповідно,

$$x^3 - 3 = 1.$$

Абсцису спільної точки графіків знаходимо з останнього рівняння

$$x^3 - 3 = 1,\ x^3 = 4,\ x = \sqrt[3]{4}.$$

Приклад 80. Розв'язати графічним способом рівняння

$$x^2 - 7[x] + 10 = 0.$$

Перетворимо рівняння наступним чином

$$[x] = \frac{x^2 + 10}{7}$$

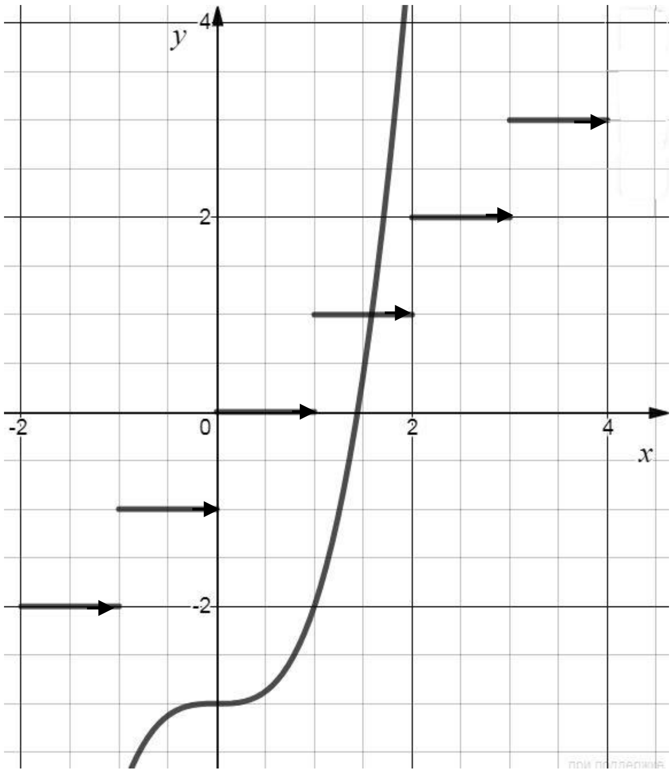

Рис. 40. Графіки функцій $y = x^3 - 3$ і $y = [x]$.

та знайдемо ординати k спільних точок графіків функцій

$$y = [x] \text{ і } y = \frac{x^2+10}{7} \text{ (рис. 41): } k = 2, 3, 4, 5.$$

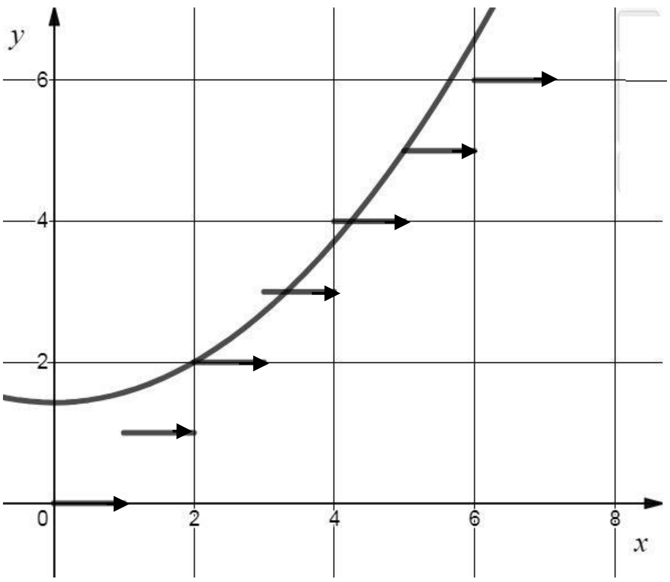

Рис. 41. Графіки функцій $y = [x]$ і $y = \dfrac{x^2+10}{7}$.

Розв’язуючи рівняння $\frac{x^2+10}{7} = k$ та враховуючи, що $k \le x < k + 1$, знаходимо розв’язки вихідного рівняння:

1) $k = 2$, $2 \le x < 3$, $\frac{x^2+10}{7} = 2$, $x^2 = 4$, $x = \pm 2$, відповідно, $x_1 = 2$;

2) $k = 3$, $3 \le x < 4$, $\frac{x^2+10}{7} = 3$, $x^2 = 11$, $x = \pm\sqrt{11}$ і $x_2 = \sqrt{11}$;

3) $k = 4$, $4 \le x < 5$, $\frac{x^2+10}{7} = 4$, $x^2 = 18$, $x = \pm 3\sqrt{2}$ і $x_3 = 3\sqrt{2}$;

4) $k = 5$, $5 \le x < 6$, $\frac{x^2+10}{7} = 5$, $x^2 = 25$, $x = \pm 5$ та $x_4 = 5$.

Отже, розв’язками рівняння є 2, $\sqrt{11}$, $3\sqrt{2}$, 5, що і було отримано раніше у прикладах 65 і 73.

Приклад 81. Розв’язати графічним способом рівняння

$$\lfloor\sqrt{x+10}\rfloor = x + \frac{1}{2}.$$

Будуємо графік функції $y = \lfloor\sqrt{x+10}\rfloor$, використовуючи алгоритм 2 (п.3): спочатку будуємо графік функції $y = \sqrt{x+10}$, потім – прямі $y = k$, де $k \in Z$, і остаточно, – графік функції $y = \lfloor\sqrt{x+10}\rfloor$. На рис. 42 графік $y = \lfloor\sqrt{x+10}\rfloor$ подано стрілками на тлі графіка $y = \sqrt{x+10}$.

Добудовуємо в цій ж системі координат графік функції $y = x + \frac{1}{2}$ (рис. 43).

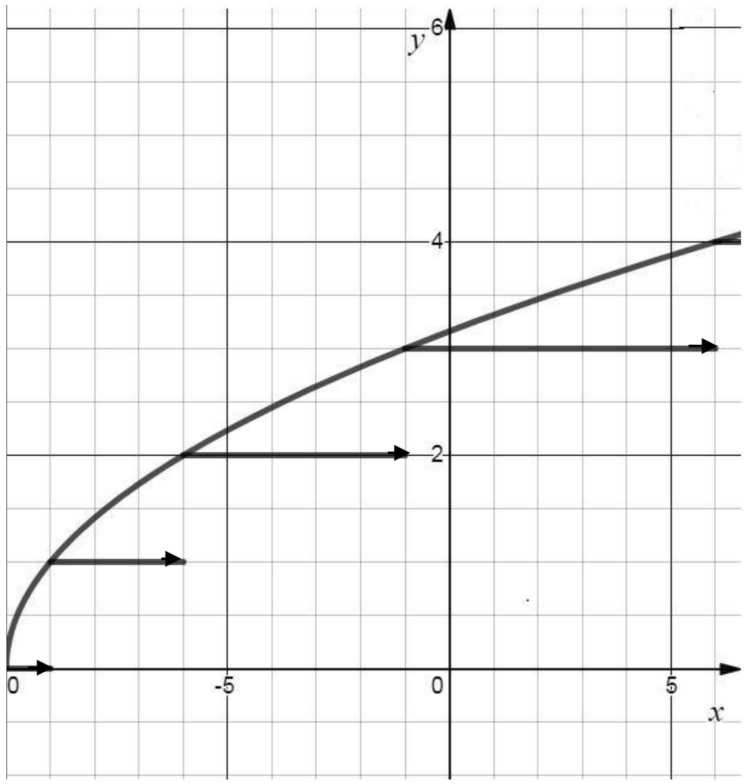

Рис. 42. Графіки функцій $y = \sqrt{x+10}$ і $y = \left\lfloor\sqrt{x+10}\right\rfloor$.

Знаходимо ординату k спільної точки графіків $y = \left\lfloor\sqrt{x+10}\right\rfloor$ та $y = x + \frac{1}{2}$: $k = 3$. Тому

$$x + \frac{1}{2} = 3,\ x = 2\frac{1}{2},$$

що збігається з отриманим раніше розв'язком у прикладах 64 та 72.

Приклад 82. Розв'язати графічним способом рівняння

$$\left[\frac{1-3x}{2}\right] = x^2 - 2x.$$

Будуємо графіки функцій $y = \left[\frac{1-3x}{2}\right]$ (алгоритм 2, п.3) та $y = x^2 - 2x$ в одній системі координат (рис. 44).

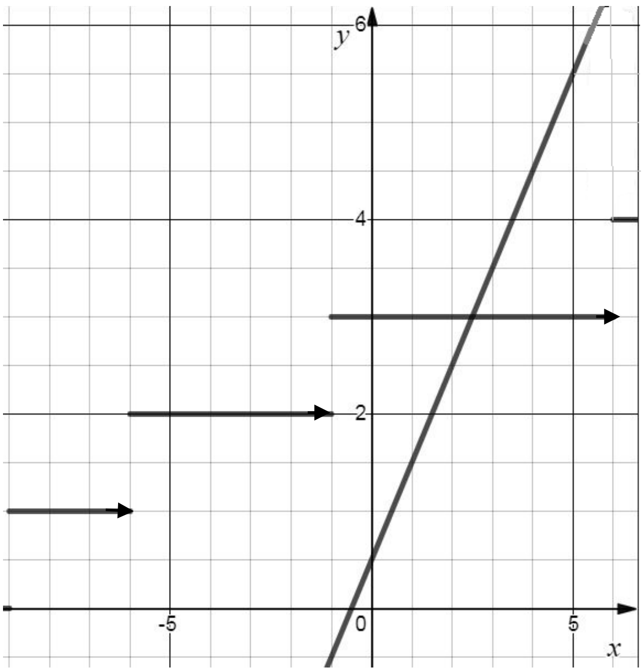

Рис. 43. Графіки функцій $y = \lfloor \sqrt{x+10} \rfloor$ та $y = x + \dfrac{1}{2}$.

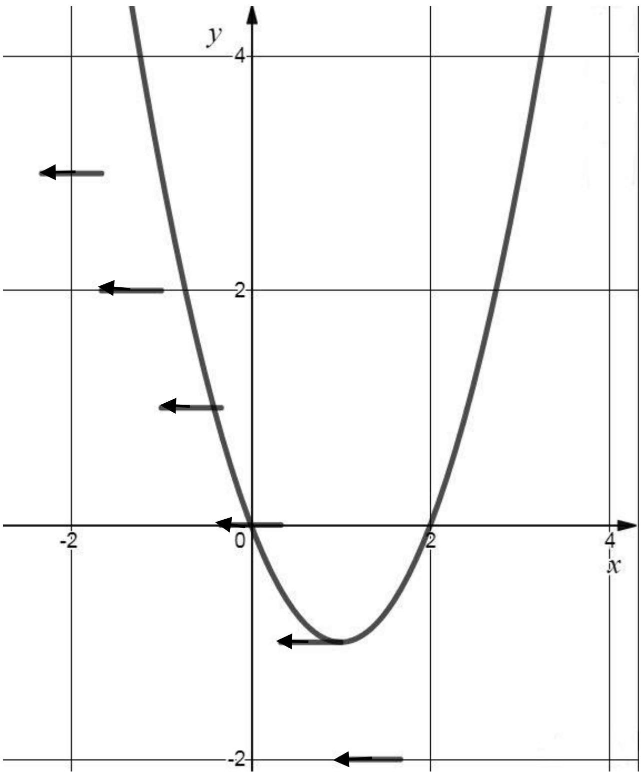

Рис. 44. Графіки функцій $y = \left[\dfrac{1-3x}{2} \right]$ та $y = x^2 - 2x$.

Знаходимо ординати k спільних точок цих графіків: k = -1, 0, 1 (аналогічні значення для цілої частини $\left[\frac{1-3x}{2}\right]$ були отримані у прикладі 44).

Розв'язуючи рівняння

$$x^2 - 2x = k$$

для знайдених значень k і, враховуючи, що для коренів повинно виконуватись

$$-\frac{1+2k}{3} < x \le \frac{1-2k}{3},$$

знаходимо розв'язки вихідного рівняння.

1) $k = -1$, $\frac{1}{3} < x \le 1$, $x^2 - 2x = -1$, маємо $x_1 = 1$;

2) $k = 0$, $-\frac{1}{3} < x \le \frac{1}{3}$, $x^2 - 2x = 0$, маємо $x_2 = 0$;

3) $k = 1$, $-1 < x \le -\frac{1}{3}$, $x^2 - 2x = 1$, маємо $x_3 = 1-\sqrt{2}$.

Отже, розв'язками будуть числа 1, 0 та $1-\sqrt{2}$, як у прикладах 66 та 74.

Приклад 83. Розв'язати графічним способом рівняння

$$\left[\frac{x-3}{2}\right] = \left[\frac{x-2}{3}\right].$$

Будуємо графіки функцій $y = \left[\frac{x-3}{2}\right]$ та $y = \left[\frac{x-2}{3}\right]$, використовуючи, як і раніше, алгоритм 2, п.3, (рис. 45, 46 відповідно).

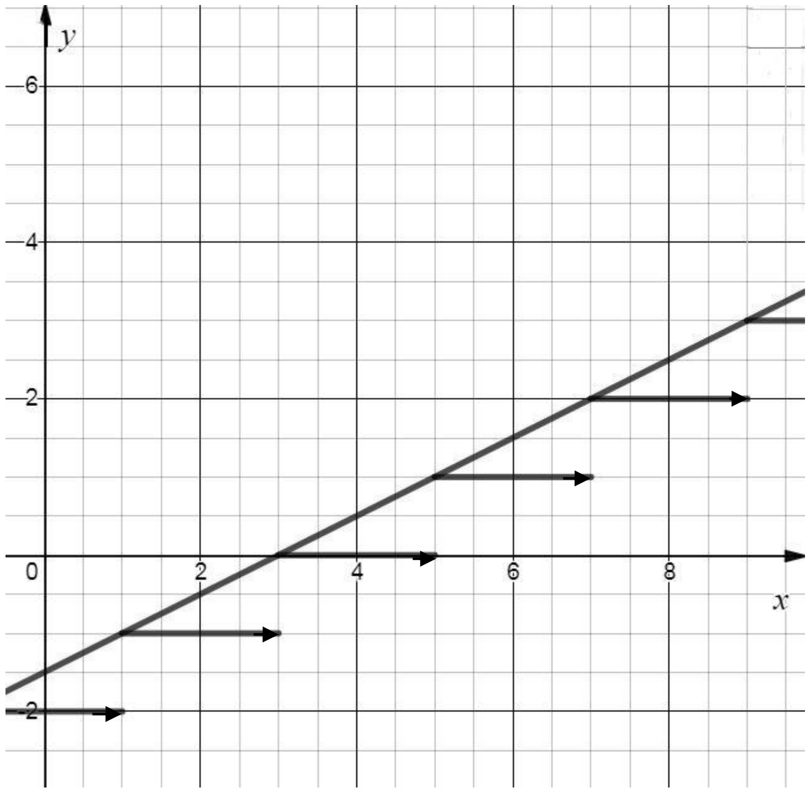

Рис. 45. Графіки функцій $y = \frac{x-3}{2}$ та $y = \left[\frac{x-3}{2}\right]$.

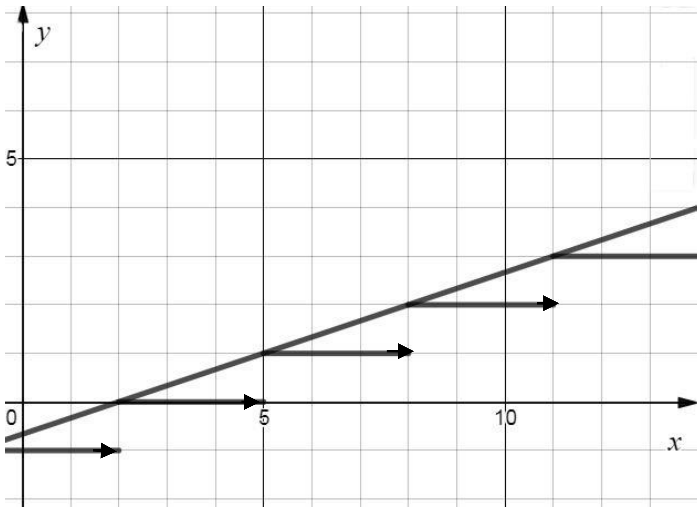

Рис. 46. Графік функції $y = \left[\frac{x-2}{3}\right]$.

Знаходимо ординати k спільних точок побудованих графіків (рис. 47): k = -1, 0, 1, 2, які збігаються з отриманими раніше у прикладах 69 та 75.

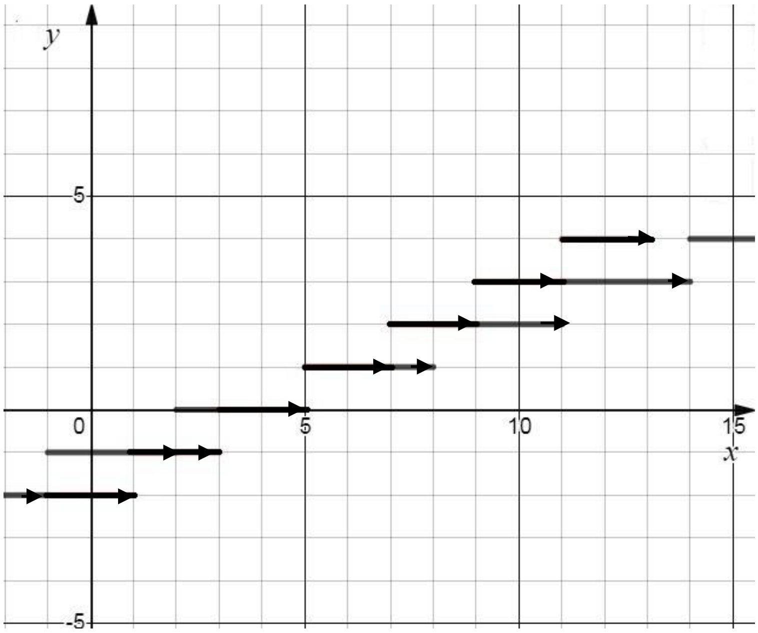

Рис. 47. Графіки функцій $y = \left[\frac{x-3}{2}\right]$ та $y = \left[\frac{x-2}{3}\right]$.

Для кожного значення k розв'язуємо наступну систему

$$\begin{cases} k \le \dfrac{x-3}{2} < k+1, \\ k \le \dfrac{x-2}{3} < k+1, \end{cases}$$

знаходячи розв'язки вихідного рівняння. Оскільки під час розв'язування цього прикладу, отримали систему, що була розв'язана у прикладі 69, тому відразу можна записати відповідь, аналогічну до отриманої у прикладі 69:

$$x \in [1;\, 2) \cup [3;\, 7) \cup [8;\, 9).$$

Приклад 84. Розв’язати графічним способом рівняння

$$[3x - x^2] = [x^2 + \frac{1}{2}].$$

Аналогічно до попередніх прикладів, будуємо графіки функцій $y = [3x - x^2]$ та $y = [x^2 + \frac{1}{2}]$. Графіки цих функцій зображено на фоні вихідних функцій $y = 3x - x^2$ та $y = x^2 + \frac{1}{2}$ відповідно на рис. 48 та рис. 49 .

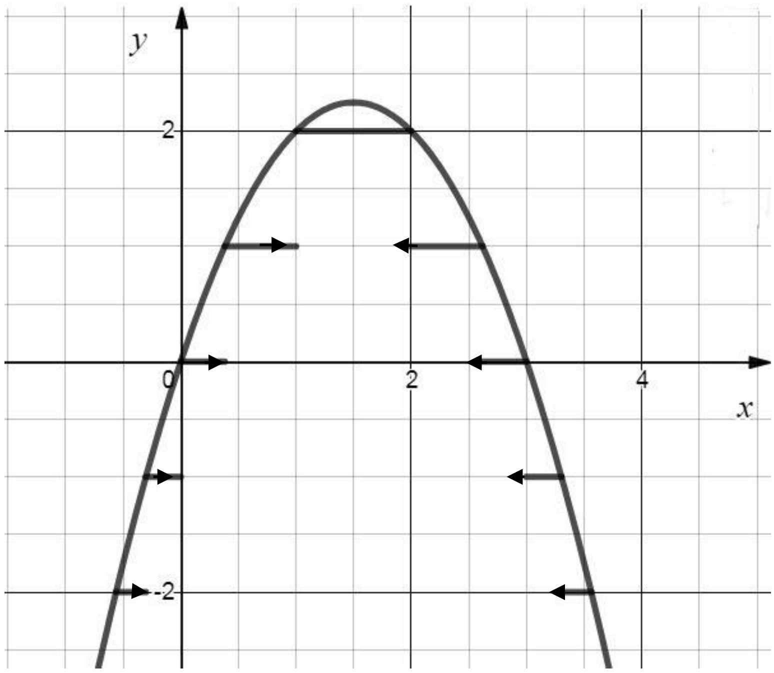

Рис. 48. Графіки функцій $y = 3x - x^2$ та $y = [3x - x^2]$.

Накладаючи графіки функцій $y = [3x - x^2]$ та $y = [x^2 + \frac{1}{2}]$, знаходимо ординати k спільних точок: k = 0, 1, 2 (читач це може зробити самостійно). Аналогічні значення для цілих частин обох частин рівняння були отримані під час розв’язування прикладів 70 та 76.

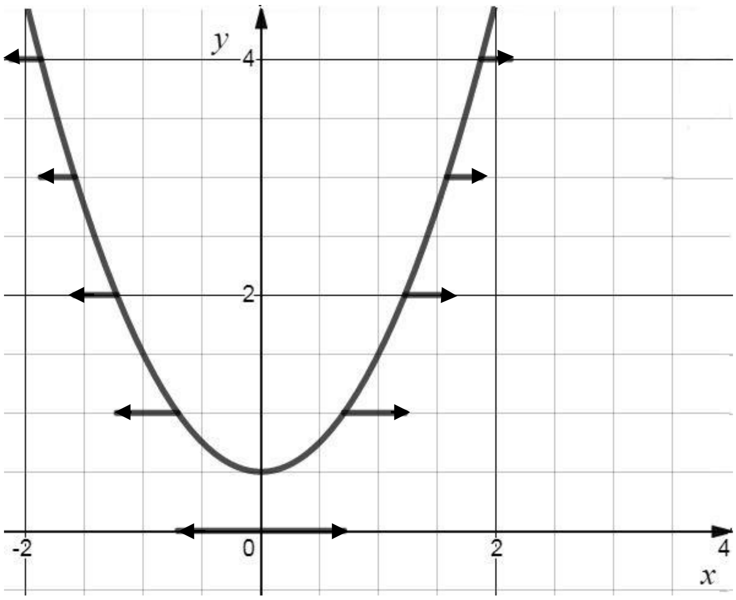

Рис. 49. Графіки функцій $y = x^2 + \frac{1}{2}$ та $y = [x^2 + \frac{1}{2}]$.

Подальше розв'язування зводиться до знаходження розв'язків системи

$$\begin{cases} k \le 3x - x^2 < k + 1, \\ k \le x^2 + \frac{1}{2} < k + 1, \end{cases}$$

для кожного знайденого цілого значення k. Але оскільки аналогічні системи були розв'язані у прикладах 70 та 76, тому запишемо зразу відповідь усього рівняння

$$x \in [0; \frac{3-\sqrt{5}}{2}) \cup [\frac{\sqrt{2}}{2}; 1) \cup [\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{10}}{2}).$$

Приклад 85. Розв'язати графічним способом рівняння

$$\{x\}^2 + 2\{x\} = 3x^2.$$

Будуємо графіки лівої та правої частин рівняння:

$$y = \{x\}^2 + 2\{x\} \text{ та } y = 3x^2$$

в одній системі координат (рис. 50).

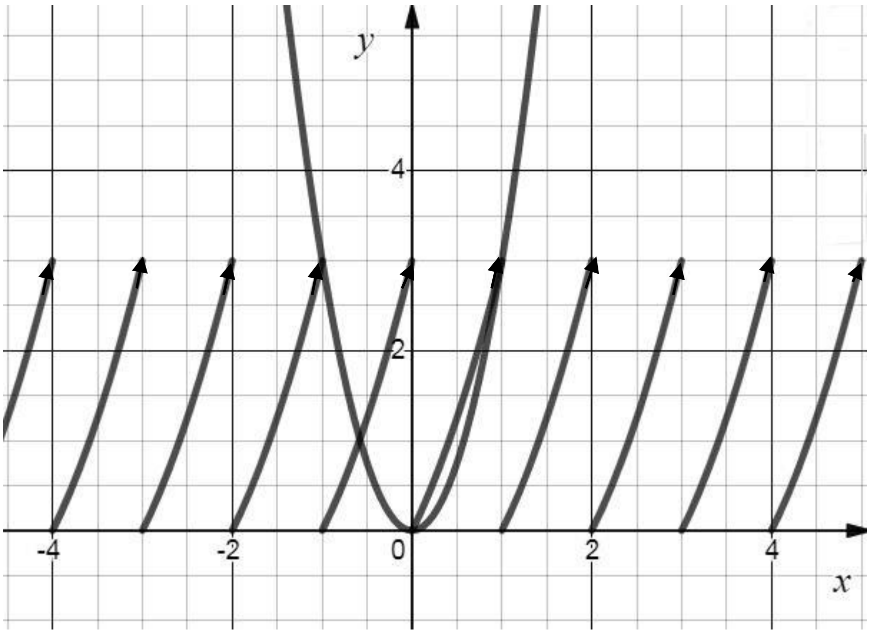

Рис. 50. Графіки функцій $y = \{x\}^2 + 2\{x\}$ та $y = 3x^2$.

Слід зазначити, що при побудові графіка функції $y = \{x\}^2 + 2\{x\}$ використано алгоритм 3, п.3.

Із рис. 50 видно, що графіки лівої та правої частин рівняння мають 2 спільні точки, одна з яких є початком координат O ($x_1 = 0$), а абсциса іншої належить проміжку (-1; 0). Тому для даного проміжку

$$\{x\} = x - [x] = x + 1,$$

і відповідно вихідне рівняння запишеться у вигляді

$$(x + 1)^2 + 2(x + 1) = 3x^2,$$

$$2x^2 - 4x - 3 = 0,$$

(аналогічне рівняння було отримане і під час розв'язування прикладу 52), тому $x_3 = \dfrac{2-\sqrt{10}}{2} \in (-1; 0)$, а $x_4 = \dfrac{2+\sqrt{10}}{2} \notin (-1; 0)$.

І загальна відповідь: 0, $\dfrac{2-\sqrt{10}}{2}$.

Приклад 86. Розв'язати графічним способом рівняння

$$[2x] + [5x] = 9.$$

Перетворимо вихідне рівняння наступним чином

$$[2x] = 9 - [5x].$$

Далі побудуємо графіки лівої та правої частин рівняння $y = [2x]$ та $y = 9 - [5x] = [9 - 5x]$ (властивість 1°, п.1) в одній системі координат, користуючись при цьому алгоритмом 2, п.3 (рис. 51).

Ординати спільних точок графіків мають єдине значення $k = 2$. Тому розв'язки рівняння знаходимо із системи, зробивше зворотне перетворення для другого рівняння,

$$\begin{cases}[2x]=2,\\ [9-5x]=2,\end{cases} \quad \begin{cases}2\le 2x<3,\\ 9-[5x]=2,\end{cases} \quad \begin{cases}2\le 2x<3,\\ [5x]=7,\end{cases}$$

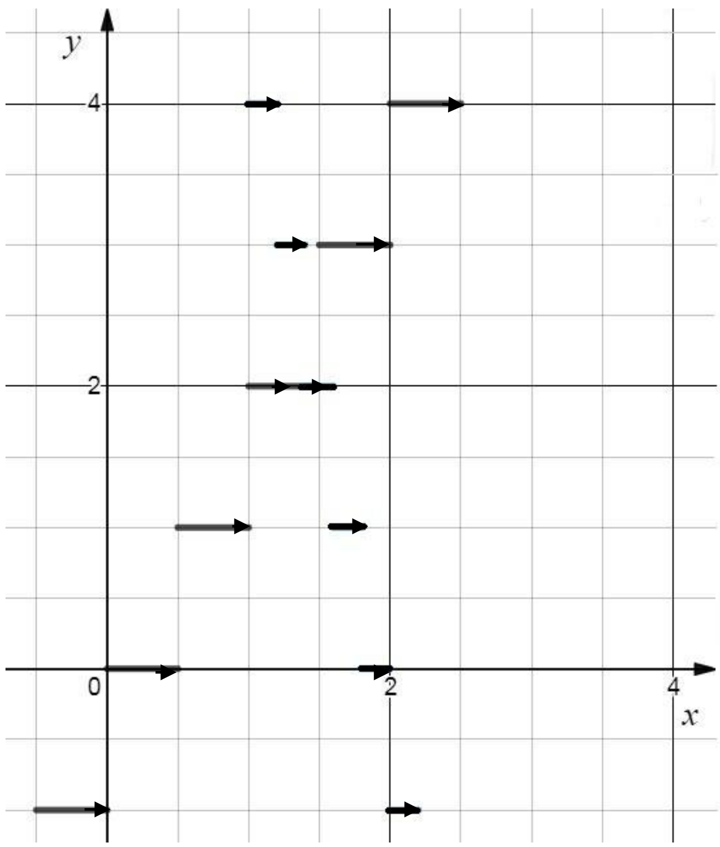

Рис. 51. Графіки функцій $y = [2x]$ та $y = [9 - 5x]$.

$$\begin{cases} 1 \le x < \dfrac{3}{2}, \\ 7 \le 5x < 8, \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \le x < 1\dfrac{1}{2}, \\ 1\dfrac{2}{5} \le x < 1\dfrac{3}{5}, \end{cases} \quad x \in [1\frac{2}{5};\ 1\frac{1}{5}).$$

Отриманий розв'язок збігається із розв'язком, отриманим у прикладі 57.

Приклад 87. Розв'язати графічним способом рівняння

$$\sqrt{1+8\{x\}} = -\frac{[x]}{2}+3.$$

Будуємо графіки лівої та правої частин рівняння $y = \sqrt{1+8\{x\}}$ та $y = -\dfrac{[x]}{2}+3$, застосовуючи алгоритми 3 та 1, п.3 відповідно (рис. 52).

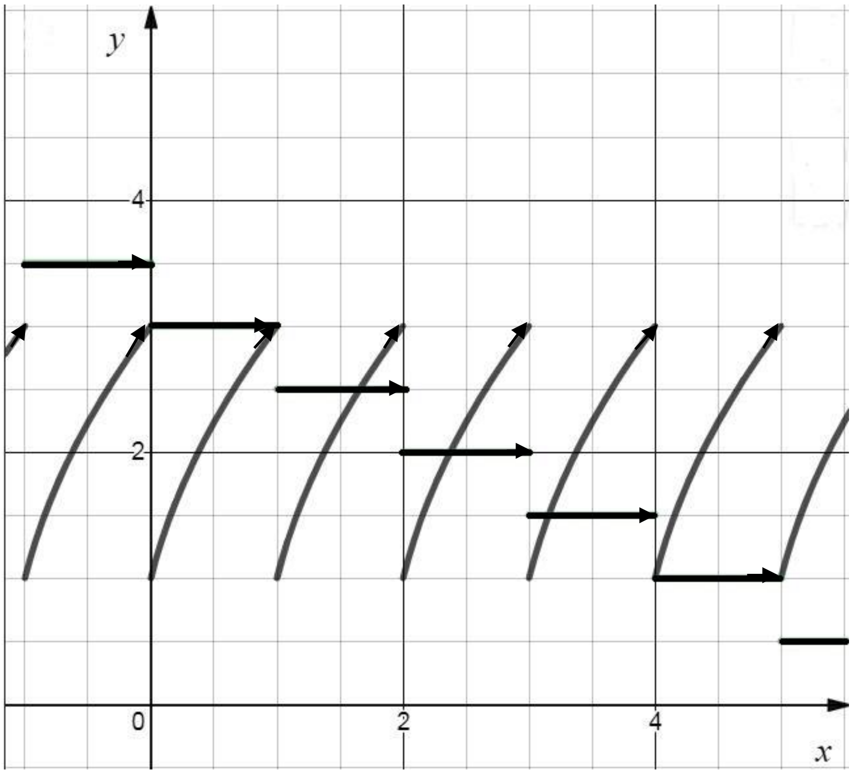

Рис. 52. Графіки функцій $y = \sqrt{1+8\{x\}}$ та $y = -\dfrac{[x]}{2}+3$.

Для знаходження розв'язків рівняння слід розв'язати наступну систему рівнянь

$$\begin{cases} [x] = k, \\ \sqrt{1+8\{x\}} = -\dfrac{k}{2}+3 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} k \le x < k+1, \\ \sqrt{1+8(x-k)} = -\dfrac{k}{2}+3, \end{cases}$$

де k – це значення цілих частин абсцис спільних точок графіків функцій $y = \sqrt{1+8\{x\}}$ та $y = -\dfrac{[x]}{2}+3$. Із рис. 52 видно, що: k = 1, 2, 3, 4.

1) Для k = 1 система набуває виду

$$\begin{cases} 1 \le x < 2, \\ \sqrt{1+8(x-1)} = \dfrac{5}{2}, \end{cases} \begin{cases} 1 \le x < 2, \\ 8x - 7 = \dfrac{25}{4}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \le x < 2, \\ x = \dfrac{53}{32}, \end{cases} \text{ і } x_1 = 1\frac{21}{32}.$$

2) Для k = 2 система набуває виду

$$\begin{cases} 2 \le x < 3, \\ \sqrt{1+8(x-2)} = 2, \end{cases} \begin{cases} 2 \le x < 3, \\ 8x - 15 = 4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \le x < 3, \\ x = \dfrac{19}{8}, \end{cases} \text{ і } x_2 = 2\frac{3}{8}.$$

3) Для k = 3 маємо

$$\begin{cases} 3 \le x < 4, \\ \sqrt{1+8(x-3)} = \dfrac{3}{2}, \end{cases} \begin{cases} 3 \le x < 4, \\ 8x - 23 = \dfrac{9}{4}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 \le x < 4, \\ x = \dfrac{101}{32}, \end{cases} \text{ і } x_3 = 3\frac{5}{32}.$$

4) Для $k = 4$ маємо

$$\begin{cases} 4 \le x < 5, \\ \sqrt{1 + 8(x - 4)} = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} 4 \le x < 5, \\ 8x - 31 = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 \le x < 5, \\ x = 4, \end{cases} \text{ і } x_4 = 4.$$

Отримані розв'язки $1\frac{21}{32}$, $2\frac{3}{8}$, $3\frac{5}{32}$ і 4 збігаються із розв'язками приклада 61.

Приклад 88. Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння

$$x^2 - 3x[x] + 2x = a$$

має 2 додатні корені.

Побудуємо, використовуючи алгоритм 1 п.3, графік функції

$$y = x^2 - 3x[x] + 2x$$

для додатних значень змінної x (враховуючи умову завдання):

$$x \in [0; 1):\ y = x^2 - 3 \cdot 0 \cdot x + 2x = x^2 + 2x,$$

$$x \in [1; 2):\ y = x^2 - 3 \cdot 1 \cdot x + 2x = x^2 - x,$$

$$x \in [2; 3):\ y = x^2 - 3 \cdot 2 \cdot x + 2x = x^2 - 4x,$$

$$x \in [3; 4):\ y = x^2 - 3 \cdot 3 \cdot x + 2x = x^2 - 7x.$$

Графік функції $y = x^2 - 3x[x] + 2x$ на розглянутих проміжках подано на рис. 53.

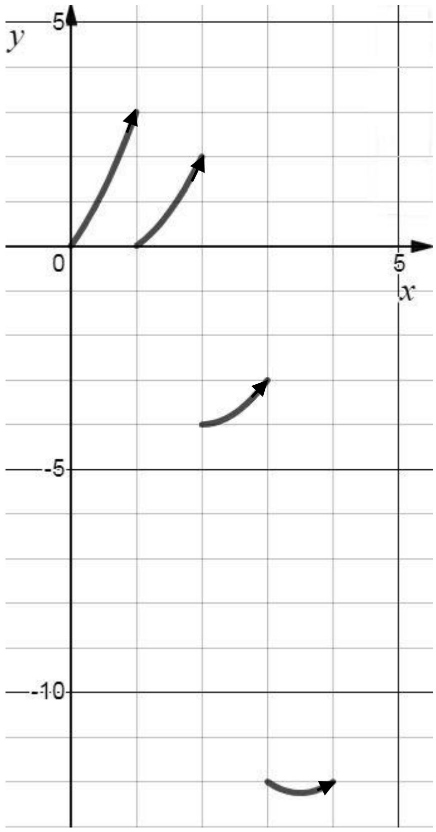

Рис. 53. Графік функції $y = x^2 - 3x[x] + 2x$.

Проаналізуємо поведінку розглядуваної функції

$$y = x^2 - 3x[x] + 2x$$

як частин параболи для $x \geq 4$. У цьому випадку вершина параболи

$$y = x^2 - 3x[x] + 2x = x^2 - x(3[x] - 2)$$

знаходиться в точці

$$x_0 = \frac{-2 + 3[x]}{2} = -1 + [x] + \frac{[x]}{2}.$$

При розглядуваних значеннях x ($x \geq 4$) $x_0 \geq [x] + 1$, яке рівносильне тому, що $[x] \geq 4$. Це означає, що функція $y = x^2 - 3x[x] + 2x$ є спадною на кожному проміжку $[n; n + 1)$, де $n \geq 4$.

Отже, рівняння має точно 2 додатних значення, коли $x < 4$. Зокрема, аналізуючи побудований графік (рис. 53), видно, що це виконується для $a \in (0; 2) \cup (-13; -12)$. Останній проміжок потребує уточнення, бо там розташована вершина параболи і для параметра меншому, ніж її ордината рівняння розв'язків не має взагалі.

Якщо $a \in (-13; -12)$, то $x \in [3; 4)$ і відповідно функція має вид

$$y = x^2 - 7x = (x - \frac{7}{2})^2 - \frac{49}{4},$$

тобто ордината вершини якої має значення

$$y_в = -\frac{49}{4} = -12\frac{1}{4},$$

і загальна відповідь: рівняння $x^2 - 3x[x] + 2x = a$ має 2 додатні значення, коли $a \in (0; 2) \cup (-12\frac{1}{4}; -12)$.

Приклад 89. Розв'язати систему рівнянь графічним способом

$$\begin{cases} x|x| + y|y| = 1, \\ [x] + [y] = 1. \end{cases}$$

Перетворимо перше рівняння відповідно до знаків змінних x та y, враховуючи, що при $x < 0$ та $y < 0$ рівняння змісту не має. Отримаємо такі системи:

$$\begin{cases} x \ge 0, y \ge 0, \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x \ge 0, y < 0, \\ x^2 - y^2 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0, y \ge 0, \\ -x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Тобто, графіком першого рівняння буде сукупність дуг віток рівнобічних гіпербол та дуги кола, зображені на рис. 53.

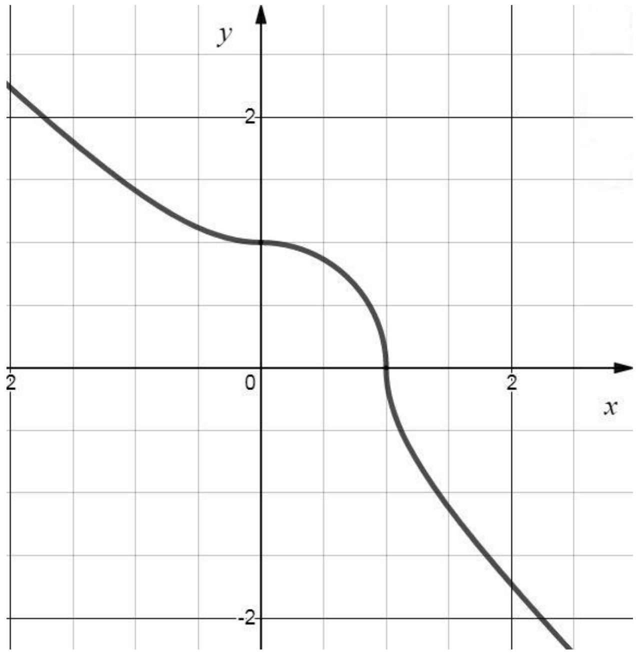

Рис. 54. Графік рівняння $x|x|+y|y|=1$.

Перетворимо друге рівняння відповідно до властивості 1° п.1:

$$[y] = -[x] + 1 = -([x]-1) = -[x-1],$$

яке, в свою чергу, можна подати як систему:

$$\begin{cases} [y]=k, \\ [x-1]=-k, \end{cases} k\in Z \quad \text{або} \begin{cases} k\le y<k+1, \\ -k\le x-1<-k+1, \end{cases} k\in Z,$$

$$\begin{cases} k\le y<k+1, \\ -k+1\le x<-k+2, \end{cases} k\in Z.$$

Тобто, графічно рівняння $[y] + [x] = 1$ – це сукупність квадратів– частин площини, для яких змінні x та y задовольняють попередню систему

$$\begin{cases} k\le y<k+1, \\ -k+1\le x<-k+2, \end{cases} k\in Z.$$

Надаючи k конкретних цілих значень, матимемо

$$k=0:\ \begin{cases}0\le y<1,\\1\le x<2,\end{cases}\quad k=1:\ \begin{cases}1\le y<2,\\0\le x<1,\end{cases}\quad k=2:\ \begin{cases}2\le y<3,\\-1\le x<0,\end{cases}$$

$$k=3:\ \begin{cases}3\le y<4,\\-2\le x<-1,\end{cases}\ldots$$

$$k=-1:\ \begin{cases}-1\le y<0,\\2\le x<3,\end{cases}\quad k=-2:\ \begin{cases}-2\le y<-1,\\3\le x<4,\end{cases}$$

$$k=-3:\ \begin{cases}-3\le y<-2,\\4\le x<5,\end{cases}\ldots$$

Остаточно, графік рівняння $[y]+[x]=1$ зображено на рис. 55.

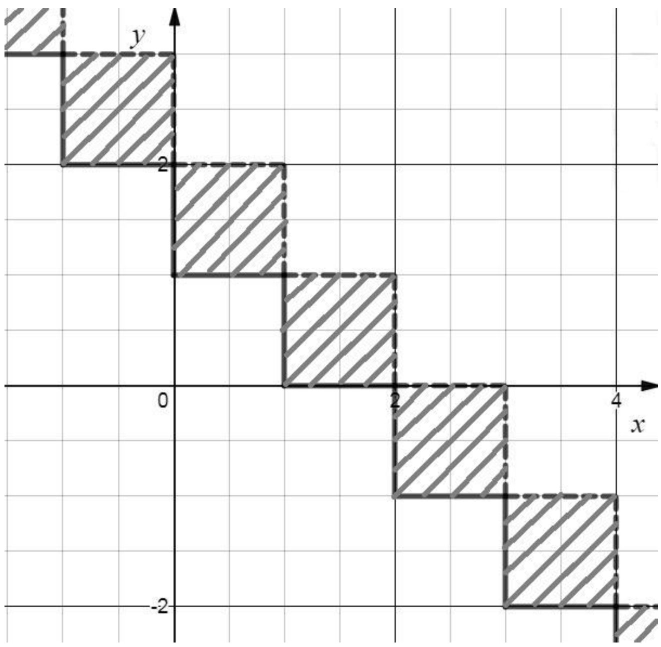

Рис. 55. Графік рівняння $[y]+[x]=1$.

Накладаючи графіки обох рівнянь (рис. 56), видно, що вихідна система має лише 2 розв’язки (1, 0) та (0,1).

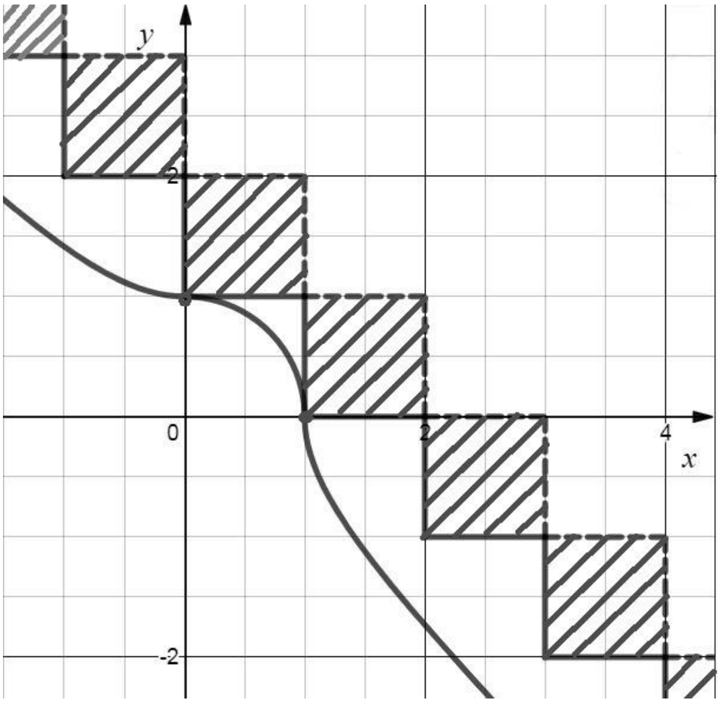

Рис. 56. Графіки рівнянь $x|x|+y|y|=1$ та $[y]+[x]=1$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Апостолова Г.В.* Ціла і дробова частина числа / Апостолова Г.В., Панкратова І.Є., Фінкельштейн Л.П. – К.: Факт, 1996. – 97 с.
2. *Апостолова Г.В.* Ант'є і мантиса числа / Апостолова Г.В., Ясінський В.А. – К.: Факт, 2006. – 128с.
3. Антье и мантиса чила. Сборник задач с решениями / Под ред.. Е.В.Хоршиловой. – М. ИПМ им. М.В. Келдыша, 2015. – 432 с. [електроний ресурс]. – Режим доступу https://keldysh.ru/e-biblio/entier/.
4. *Бородін О.І.* Теорія чисел / Бородін О. І. – Київ: Вища школа, 1970. – 275 с.
5. *Вірченко Н.О.* Графіки елементарних та спеціальних функцій: довідник / Вірченко Н.О., Ляшко І.І. – К.: Наукова думка,1996. – 584 с.
6. *Вороний О.М.* Готуємось до олімпіад з математики/ Вороний О.М. – Харків: Видав. група «Основа», 2008. – 225 с.
7. *Гаус І.Б.* Ціла та дробова частини числа / Гаус І.Б., Дерієнко Л.В. –Харків: Основа, 2015.– 95 с.
8. Київські міські математичні олімпіади 2003 – 2011 / [А.В. Анікушин, О.О. Клурман, Г.В. Крюковата та інші: за заг. ред. Б.В. Рубльова]. – Харків: Гімназія, 2011. – 192 с.
9. *Кушнир И.* Шедевры школьной математики. Задачи с решениями в 2-х книгах. Книга 1./ Кушнир И. – К.: Астарта, 1995. – 576 с.

10. *Михелович Ш.Х.* Теория чисел / Михелович Ш.Х. – Москва: Высшая школа, 1967. – 336 с.
11. *Ніколенко Н.* Ціла і дробова частина числа. Розв’язування рівнянь і нерівностей / Ніколенко Н. –К.: Шкільний світ, 2013.– 87 с.
12. Розв’язуємо разом. – Харків: Видав. група «Основа», 2003. – 144с. – [Серія «Бібліотека журналу «Математика в школах України», Вип.3]. – Зміст: Лейфура В.М. Задачі з цілими числами; Мітельман І.М. Комбінаторика клітчастої дошки.
13. *Сарана О.А.* Математичні олімпіади: просте і складне поруч: [Навч. посібник, видання друге, доповнене] / Сарана О.А. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2011. – 400 с.
14. *Требенко Д.Я.* Алгебра і теорія чисел: [навч. посібн., у 2-х част., Ч.1] / Требенко Д.Я., Требенко О.О. – Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2006. – 400 с.
15. *Требенко Д.Я.* Збірник індивідуальних розрахункових завдань з алгебри і теорія чисел: [Ч. 1.] / Требенко Д.Я., Требенко О.О. – Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2010. – 170 с.
16. *Шунда Н. М.* Розв’язування рівнянь, пов’язаних з функціями: ціла частина дійсного числа, дробова частина дійсного числа / Шунда Н.М. – Вінниця: Видав-тво Вінницького держ. пед інституту імені Володимира Винниченка, 1996. –116 с.

17. *Ясінський В.А.* Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язання / Ясінський В.А. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2012. – 208 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Одінцова Оксана Олександрівна

Ціла та дробова частини числа в завданнях елементарної математики