Шаповалова Н. Панченко Л. Особливості навчання сферичної геометрії для підвищення компетентності майбутніх вчителів математики і фізики // Освіта. Інноватика. Практика : науковий журнал. 2016. №1. С. 49-53.

Shapovalova N. Panchenko L. The peculiarities of teaching spherical geometry while building up professional competence of future mathematics and physics teachers // Education. Innovation. Practice: scientific journal. 2016. Issue 1(1). P. 49-53.

Наталія Шаповалова[1], Лариса Панченко
Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, м. Київ

ОСОБЛИВОСТІ НАВЧАННЯ СФЕРИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ДЛЯ ПІДВИЩЕННЯ КОМПЕТЕНТНОСТІ МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ І ФІЗИКИ

Сферична геометрія має «небесне» походження: з геометрією на сфері люди зустрілись вперше в астрономії, колі вивчали «небесну сферу». У цій геометрії багато дивовижних фактів, яких немає в геометрії Евкліда.

Сферичною геометрією називають геометрію, що виражає закономірності і властивості фігур, які знаходяться на сферичній поверхні.

Родоначальниками сферичної геометрії вважаються Гіппарх Нікейський (180-185 рр. до н. е.) і Леонард Ейлер (1707-1783 рр.). Сферична геометрія виникла в I-II століттях нашої ери, коли після римських завоювань був встановлений тісний контакт між грецькими і олександрійськими геометрами і вавилонськими астрономами. В I ст. з'явилась «сферика» Менелая, яка була використана до астрономії відомим Клавдієм Птоломеєм. Пізніше, з розвитком мореплавства і географії, сферичну геометрію стали використовувати і до поверхні земної кулі.

Сферична геометрія застосовується в астрономії (при вивченні небесної сфери, траєкторій руху небесних тіл), космонавтиці (при вивченні траєкторій руху супутників, космічних кораблів та інших космічних об'єктів), геодезії, географії (при складанні карт), у мореплавстві та інших галузях знань.

Дана стаття присвячена дослідженню ролі та особливостей навчання сферичної геометрії в процесі навчання нормативної навчальної дисципліни «Основи геометрії» студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів та розкриттю основних методичних аспектів цього процесу.

Питання, пов'язані з вивченням сферичної геометрії, дуже тісно переплітаються з особливостями психології і теорії пізнання в цілому, з питаннями про те, яким чином виникають просторова уява та інтуїція. Дослідженням цих питань в різні часи займались відомі вчені Леонард Ейлер, Георг Фрідріх Бернхард Ріман, Фелікс Клейн, Анрі Пуанкаре, А.Д. Александров, І. П. Єгоров, О.С. Смогоржевський, Н.В. Єфімов, Л.С. Атанасян, О.В. Мантуров, В.П. Яковець та інші.

Метою статті є розкриття основних методичних аспектів навчання сферичної геометрії студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів. Для цього спочатку розглядаються мета, зміст та основні положення сферичної геометрії. Потім аналізуються особливості сферичної геометрії та пропонуються сучасні підходи і методи її навчання. Аналізуються методичні особливості використання засобів динамічної геометрії в процесі навчання сферичної геометрії і основ геометрії, різноманітні форми навчально-практичної і дослідницької діяльності студентів фізико-математичних спеціальностей.

В процесі викладання сферичної геометрії, яка є однією з неевклідових геометрій, доцільно використовувати порівняльний аналіз, а саме порівнювати твердження параболічної геометрії Евкліда, гіперболічної геометрії Лобачевського, сферичної геометрії, еліптичної геометрії або геометрії Рімана, активізуючи відомі студентам факти, та виявляти спільні або відмінні їх ознаки. Найбільш ефективними методами навчання неевклідових геометрій є пояснювально-ілюстративний метод та евристична бесіда. Саме під час евристичної бесіди студенти порівнюють твердження неевклідових геометрій з їх аналогами з евклідової геометрії.

Між геометрією евклідової площини і сферичною геометріями є багато спільного; це пояснюється тим, що сфера володіє такою ж «рухомістю», як і площина: довільну точку площини, і напрямки, що виходять з неї можна сумістити рухом площини зі всякою іншою точкою площини і напрямком, що виходить з неї , і також довільну точку сфери і напрямок, що виходить з неї, можна сумістити обертанням цієї сфери зі всякою іншою точкою сфери і напрямком, що виходить з неї.

Якщо основними поняттями геометрії на евклідовій площині є точка, пряма і рух площини, то в сферичній геометрії таку ж роль грають точка сфери, велике коло і рух сфери [6, с.183].

Переріз сфери довільною площиною являє собою *коло*, оскільки якщо опустити з центра сфери перпендикуляр на цю площину і виконати поворот простору навколо цього перпендикуляра на довільний кут, то при повороті перейде в себе як сфера, так і площина і лінія їх перетину теж; тому довільна точка цієї лінії перетину знаходиться на одній і тій же відстані від точки перетину площини з перпендикуляром, а ця лінія перетину – коло.

Радіус ρ цього кола є катетом прямокутного трикутника, гіпотенуза якого – радіус r, а другий катет – перпендикуляр h, опущений з центра сфери на площину. Тому в силу теореми Піфагора: $\rho = \sqrt{r^2 - h^2}$. Ця формула показує, що величина ρ приймає максимальне значення $\rho=r$ при $h=0$, тобто в тому випадку, коли площина проходить через центр сфери, тобто являє собою діаметральну площину. В цьому випадку коло на сфері і називається *великим колом*. При $h>0$ ми маємо $\rho<r$; коло на сфері називається в цьому випадку *малим колом*.

Оскільки через довільні три точки простору, що не лежать на одній прямій, проходить єдина площина, то через дві довільні точки сфери, що не є діаметрально протилежними проходить єдина діаметральна площина.

Тому *через дві точки сфери, що не є діаметрально протилежними, проходить єдине велике коло*. Цей факт аналогічний тому, що на евклідовій площині через дві точки проходить єдина пряма. Через дві діаметрально протилежні точки можна провести нескінченну кількість великих кіл. Оскільки довільні дві діаметральні площини сфери перетинаються по її діаметру, то *довільні два великі кола перетинаються в двох діаметрально протилежних точках сфери*.

Оскільки площина поділяє простір на дві області, то *велике коло ділить сферу на дві області*, ці області називаються *напівсферами*. Через те що дві площини, що перетинаються, ділять простір на чотири області, то *два великих кола поділяють сферу на чотири області*. Оскільки три площини, що перетинаються в одній точці, поділяють простір на вісім областей, то *три великих кола, що не перетинаються в одній точці, поділяють сферу на вісім областей*.

Якщо перші дві з цих властивостей аналогічні властивостям прямих на евклідовій площині, яка ділиться на дві області прямою і на чотири області двома прямими, що перетинаються, то третя властивість не аналогічна відповідній властивості прямих на евклідовій площині, оскільки три попарно перетнуті прямі, що не проходять через одну точку, поділяють площину на сім частин.

Великому колу відповідають дві діаметрально протилежні точки сфери, що висікаються з неї діаметром, який є перпендикулярним до площини великого кола. Ці дві точки називаються *полюсами* великого кола.

Двом діаметрально протилежним точкам A і B на сфері відповідає єдине велике коло, для якого точки A і B є полюсами; це велике коло називається *полярою* пари діаметрально протилежних точок A і B. Кожна точка поляри називається *полярно спряженою* з кожним із її полюсів, інакше кажучи точки P і Q сфери є полярно спряженими, якщо радіуси OP і OQ перпендикулярні (O – центр сфери).

Поняття руху на сфері можна ввести аналогічно до відповідного поняття на евклідовій площині. *Рухом* сфери називається таке перетворення сфери, при якому зберігається відстань між точками. Іншими словами, перетворення φ сфери є рухом, якщо для довільних точок A, B сфери відстань між точками $A'=\varphi(A)$ і $B'=\varphi(B)$ дорівнює відстані між точками A і B: $AB = A'B'$.

Основні властивості рухів евклідової площини переносяться відповідно на рухи сфери, але рухи на сфері мають деякі відмінні властивості, яких не мають рухи на евклідовій площині. Зокрема, оскільки дві точки A і B у тому і тільки в тому випадку є діаметрально протилежними, якщо відстань між ними є найбільше можливе значення рівне $2r$ (де r – радіус сфери), то з означення руху випливає, що *при довільному русі сфери діаметрально протилежні точки сфери переходять в діаметрально протилежні точки*. Ця властивість не має аналога в евклідовій геометрії площини, оскільки на евклідовій площині не існує таких пар точок, що рух однієї з цих точок визначає рух другої. Тому, якщо рух площини є перетворенням множини точок цієї площини, то рух сфери по суті є перетворенням множини пар діаметрально протилежних точок сфери.

Найпростішими рухами сфери є *поворот сфери навколо будь-якої осі,* що проходить через центр сфери, *симетрія сфери відносно будь-якої площини,* що проходить через центр сфери, *симетрія сфери відносно її центра.*

Як і в планіметрії, *композиція будь-яких двох рухів сфери теж є рухом сфери. Сферична геометрія вивчає ті властивості фігур на сфері, які зберігаються при довільних рухах сфери.*

Фігури на сфері, які можуть бути переведені одна в другу деяким рухом сфери, називаються *рівними* фігурами, геометричні властивості рівних фігур однакові.

Оскільки довільний рух сфери переводить пару діаметрально протилежних точок в пару діаметрально протилежних точок, то *пара діаметрально протилежних точок в сферичній геометрії є самостійним геометричним об'єктом.*

Доцільно звернути увагу студентів на одну чудову властивість цих пар точок: *кожній теоремі сферичної геометрії відповідає інша теорема цієї геометрії, яка отримується з першої заміною слів:* «пара діаметрально протилежних точок» і «велике коло», «лежить на» і «проходить через», «з'єднуються» і «перетинаються».

Наприклад:

Дві пари діаметрально протилежних точок сфери з'єднуються одним великим колом.	Два великі кола на сфері перетинаються в одній парі діаметрально протилежних точок.

Ця властивість теорем сферичної геометрії є наслідком того, що кожному великому колу на сфері взаємно однозначно відповідає пара її полюсів, а довільній парі діаметрально протилежних точок сфери взаємно однозначно відповідає їх поляра, причому якщо велике коло проходить через пару діаметрально протилежних точок, то полюси цього кола лежать на полярі цієї пари точок. І називається ця властивість *принципом двоїстості*, а теореми, що отримуються одна із одної шляхом вказаної заміни, називаються *двоїстими одна одній теоремами*. Якщо одна з двоїстих теорем доведена, то доведення другої теореми може бути отримана з доведення першої теореми шляхом переходу від кожного великого кола до його полюсів, а від кожної пари діаметрально протилежних точок – до його поляри.

Кутом між двома лініями, що перетинаються в просторі, називається кут між дотичними до цих ліній в точці їх перетину. Частинним випадком загального поняття кута між двома лініями є кут між двома великими колами на сфері. *Кут на сфері рівний довжині дуги великого кола між точками сторін кута, полярно спряженими з вершиною кута, поділено на радіус сфери.*

Прямі, кути, трикутники, криві та інші фігури на сфері мають специфічні властивості.

Два великі кола визначають чотири кута між двома півколами, попарно рівні один одному. Ті з цих кутів, обидві сторони яких є продовженням сторін другого кута, рівні і називаються *вертикальними кутами*, ці з цих кутів, які мають одну спільну сторону, і в сумі складають розгорнутий кут π називаються *суміжними кутами*. *Кут між двома великими колами дорівнює довжині дуги, що з'єднує полюси, яка поділена на радіус сфери. Великі кола, одне з яких проходить через полюс іншого, перетинаються під прямим кутом*. Такі великі кола називаються *перпендикулярними*. *Кожне з двох перпендикулярних великих кіл проходить через полюс другого великого кола*. Звідси випливає, що велике коло, є полярою точки перетину двох великих кіл, перпендикулярне до двох великих кіл, тобто *два великі кола завжди володіють єдиним великим колом, яке перпендикулярне до них обох*.

Для порівняння відмітимо, що на евклідовій площині спільний перпендикуляр можна провести лише до паралельних прямих, причому до двох паралельних прямих можна провести не один, а безліч спільних перпендикулярів.

Три великих кола на сфері, що не перетинаються в одній точці, ділять сферу на вісім областей. Кожна з цих областей, обмежена дугами трьох великих кіл, називається *сферичним трикутником*. Тобто *сферичним трикутником* називається фігура, утворена трьома дугами великих кіл, які перетинаються в трьох точках, наприклад, трикутник *ABC*. Дуги великих кіл, що обмежують сферичний трикутник, називаються його *сторонами*, кінці цих дуг називаються його *вершинами*, а кути, що утворені сторонами сферичного трикутника в його вершинах, називаються *кутами* сферичного трикутника [3, с.111-112]. Зрозуміло, що кожна сторона сферичного трикутника менше половини великого кола.

Розглядаючи властивості трикутників на сфері слід відмітити, що в той час, коли сторони трикутника на евклідовій площині є відрізками прямої і вимірюються лінійними одиницями, сторони сферичного трикутника є дугами великих кіл і вимірюються дуговими одиницями – *градусами*, або *радіанами*.

Кожна сторона сферичного трикутника менша від суми двох інших і більша за їх різницю. Півпериметр сферичного трикутника завжди більший від кожної його сторони. Сума сторін (периметр) сферичного трикутника завжди менша від 360^o і більша від нуля.

В сферичній геометрії існує така фігура як двокутник, якої немає на евклідові площині. *Двокутником* являється частина сфери, що обмежена двома половинами великих кіл з спільними кінцями, які називаються *вершинами* двокутника, і є діаметрально протилежними точками сфери.

Два сферичних трикутника називаються *рівними*, якщо їх можна сумістити один з одним рухом сфери. Очевидно, що між вершинами двох рівних сферичних трикутників можна встановити таку відповідність, при якій і відповідні сторони, і відповідні кути цих сферичних трикутників рівні: для цього треба поставити у відповідність кожній вершині першого сферичного трикутника ту вершину другого сферичного трикутника, в яку він переходить при суміщенні цих сферичних трикутників.

Маємо ***шість ознак рівності сферичних трикутників***: два сферичних трикутника рівні, якщо:

1) дві сторони одного сферичного трикутника рівні двом сторонам іншого сферичного трикутника і рівні кути між цими сторонами;

2) два кути одного сферичного трикутника рівні двом відповідним кутам іншого сферичного трикутника і рівні сторони між цими кутами;

3) всі сторони одного сферичного трикутника рівні відповідним сторонам іншого сферичного трикутника;

4) дві сторони одного сферичного трикутника рівні двом відповідним сторонам іншого сферичного трикутника, кути, що лежать проти двох інших сторін, одночасно гострі або тупі;

5) два кути одного сферичного трикутника рівні двом відповідним кутам іншого сферичного трикутника, сторони, що лежать проти двох рівних кутів, рівні, а сторони, що лежать проти двох інших рівних кутів, одночасно менші або більші πr;

6) всі три кути одного сферичного трикутника рівні відповідним кутам іншого сферичного трикутника.

Перші чотири з цих ознак рівності є аналогічними до ознак рівності трикутників на евклідовій площині. П'ята ознака рівності сферичних трикутників також має аналог в геометрії на евклідовій площині, але з тією різницею, що в п'ятому критерії рівності плоских трикутників, тобто трикутників на евклідовій площині, немає умови, аналогічної до умови, що сформульована в кінці п'ятої ознаки рівності сферичних трикутників. Шоста ознака рівності сферичних трикутників зовсім не має аналога в геометрії евклідової площині, де рівність відповідних кутів двох трикутників є ознакою не рівності, а подібності трикутників.

Поняття *рівності фігур на сфері* можна ввести аналогічно до того, як це робиться для фігур на евклідовій площині. По-перше, дві сферичні фігури називаються *рівними*, якщо вони мають рівні відповідні елементи. По-друге, *дві сферичні фігури називаються рівними, якщо якимось рухом на сфері одна з них відображається на другу*, при цьому вершини однієї фігури переходять у вершини другої так, що порядок вершин зберігається. У шкільному курсі геометрії доводиться, що для площини такі два означення рівності фігур рівносильні.

Таким чином, вивчення властивостей геометричних фігур в сферичній геометрії розширюють уявлення студентів про сучасну картину Всесвіту, підвищують компетентність майбутніх вчителів математики і фізики та стимулюють їх власний пошук нових математичних, геометричних та фізичних ідей і теорій.

Список використаних джерел

1. Атанасян Л.С. Геометрия. Ч. 2 / Л.С. Атанасян, В.Т. Базылев. – М.: Просвещение, 1987. – 352 с.
2. Боровик В.Н. Курс вищої геометрії : навчальний посібник / В.Н. Боровик, В.П. Яковець. – Суми: ВТД «Університетська книга», 2004. – 464 с.
3. Данилевський М.П. Основи сферичної геометрії та тригонометрії : навчальний посібник / М.П. Данилевський, А.І. Колосов, А.В. Якунін; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Х.: ХНАМГ, 2011. – 92 с.
4. Егоров И.П. Основания геометрии : учебное пособие / И.П. Егоров. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 146 с.
5. Ефимов Н.В. Высшая геометрия / Н.В. Ефимов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 584 с.
6. Степанов Н. Н. Сферическая геометрия и тригонометрия / Н. Н. Степанов. – Москва-Ленинград, Гостехиздат, 1948. – 154 с.
7. Энциклопедия элементарной математики: Книга четвёртая: Геометрия. – М.: Наука, 1963. – 568 с.

Анотація. Шаповалова Н., Панченко Л. Особливості навчання сферичної геометрії для підвищення компетентності майбутніх вчителів математики і фізики. *У статті проаналізовані особливості навчання сферичної геометрії в процесі вивчення нормативної навчальної дисципліни «Основи геометрії» студентами математичних спеціальностей педагогічних університетів та розкриті основні методичні аспекти цього процесу. Розглянуті мета, зміст, основні положення сферичної геометрії та запропоновані сучасні підходи і методи її навчання. Запропоноване використання в навчальному процесі практичних і прикладних застосувань фактів сферичної геометрії, засобів динамічної геометрії, міжпредметних зв'язків сферичної геометрії з фізикою, біологією, астрономією, космологією.*

Ключові слова: *сферична геометрія, основи геометрії, сфера, компетентність, міжпредметні зв'язки, навчальний процес, навчання, науковий підхід, фізика.*

Аннотация. Шаповалова Н., Панченко Л. Особенности обучения сферической геометрии для повышения компетентности будущих учителей математики и физики. *В статье проанализированы особенности обучения* сферической *геометрии в процессе изучения нормативной учебной дисциплины «Основания геометрии» студентами математических специальностей педагогических университетов и раскрыты основные методические аспекты этого процесса. Рассмотрены цель, содержание, основные положения сферической геометрии и предложены современные подходы и методы её обучения. Предложено использование в учебном процессе практических и прикладных применений фактов сферической геометрии, средств динамической геометрии, межпредметных связей гиперболической геометрии с физикой, биологией, астрономией, космологией.*

***Ключевые слова**: сферическая геометрия, основания геометрии, сфера, компетентность, межпредметные связи, учебный процесс, обучение, научный подход, физика.*

Abstract. **Shapovalova N., Panchenko L. The peculiarities of teaching spherical geometry while building up professional competence of future mathematics and physics teachers.** *The article analyzes the peculiarities of teaching spherical geometry in the normative course "Foundations of Geometry" for students of mathematics of pedagogical universities and explores basic methodical aspects of this process. The authors examine the purpose and main provisions of spherical geometry and suggest up-to-date approaches and methods of teaching it. The authors propose to employ practical and applied use of spherical geometry facts in studying process, and outline interdisciplinary ties of spherical geometry with physics, biology, astronomy, cosmology.*

***Keywords:** spherical geometry, foundations of geometry, sphere, competence, interdisciplinary ties, studying process, teaching, scientific approach, physics.*