Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики, фізики та методик їх навчання

Кіблицької Ольги Вікторівни

Критеріальні умови в задачах теорії ігор

Спеціальність: 014 Середня освіта (Математика)
Галузь знань: 01 Освіта/Педагогіка

Кваліфікаційна робота
на здобуття освітнього ступеню магістра

Науковий керівник
__________________ О.О. Одінцова,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри математики
«_____»_________________2021 року

Виконавець
__________________О.В. Кіблицька
«_____»_________________2021 року

Суми 2021

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність. Будь-яка людина протягом усього життя «приречена» приймати рішення з різних питань у різних областях. Прийняття рішень завжди було і залишається найважливішим аспектом різноманітних сторін життя та діяльності людей. Наука про вибір найбільш сприятливого варіанту рішення склалася порівняно недавно, а математична теорія прийняття рішень – близько 50 років. Вивченням оптимальних рішень в конфліктних ситуаціях займається один із розділів прикладної математики - теорія ігор.

Теорія ігор бере свій початок з неокласичної економіки. Вона була заснована Джоном фон Нейманом та Оскаром Моргенштерном в їхній першій роботі «The Theory of Games and Economic Behavior», виданої в 1944 році. Ще у 1928 році в математичних журналах фон Нейманом була опублікована стаття "Про теорію суспільних ігор", в якій вперше було застосовано поняття "теорія ігор". Використання цього поняття пояснюється схожістю логіки прийняття рішень у таких іграх, як шахи та покер. Іншим попередником теорії ігор вважається французький математик Е. Борель (1871-1956). Деякі фундаментальні ідеї були незалежно запропоновані А. Вальдом (1902-1950), що заклали основи нового підходу до статистичної теорії прийняття рішень.

Теорія прийняття рішень сформувалася на початку 60-х років, тоді була висунута основна мета цієї теорії - раціоналізувати процес прийняття рішень. У наступні роки була створена прикладна теорія статистичних рішень, що дозволяє аналізувати та вирішувати широкий клас управлінських завдань, пов'язаних з обмеженим ризиком – проблеми вибору, розміщення, розподілу тощо. Нині теорія прийняття рішень застосовується переважно аналізу тих проблем, які можна легко і однозначно формалізувати, а результати дослідження адекватно інтерпретувати.

Математична теорія ігор на сьогодні активно розвивається. Не дивлячись на те, що цей розділ прикладної математики має дещо несерйозну назву, він має широкий спектр застосувань. Саме теорія ігор дозволяє розглядати і з легкістю розв'язувати задачі прийняття рішень в ситуаціях з декількома учасниками, навіть в ситуаціях часткової або повної невизначеності, ризику.

Об'єкт дослідження – теорія ігор.

Предмет дослідження – критерії прийняття рішень в умовах конфлікту, ризику та повної невизначеності.

Мета дослідження – розглянути різні критерії прийняття рішень в умовах конфлікту, ризику та повної невизначеності і продемонструвати їх застосування для різних прикладних задач.

Відповідно до мети, були сформульовані наступні **завдання**:

1) опрацювати наукову літературу за темою дослідження;
2) розглянути основні поняття, «класичні» задачі теорії ігор;
3) показати як приймаються рішення в умовах конфлікту, ризику та повної невизначеності;
4) надати характеристику основним критеріям, що застосовуються при розв'язуванні задач;
5) розробити систему прикладів, які ілюструють застосування критеріїв.

Структура та обсяг роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків та списку використаних джерел.

У вступі обґрунтовано актуальність теми, визначено об'єкт, предмет, вказано мету, відповідно до якої поставлено завдання дослідження.

У першому розділі «Теоретичні основи теорії ігор» розглянуто основні поняття теорії ігор, класифікації ігор. Наведено приклади класичних задач із розв'язуванням та аналізом розв'язків. Надано характеристику матричних ігор, які розв'язуються в чистих та змішаних стратегіях. Розглянуто алгоритм перетворення матричних ігор в задачі лінійного програмування та методи їх розв'язування.

У другому розділі «Критерії оптимальності в задачах теорії ігор» розглянуто поняття матричних ігор з природою, наведено критерії прийняття рішень в умовах ризику та повної невизначеності, проілюстровано застосування кожного критерію конкретним прикладом. Створено низку задач, які розв’язано розглядуваними критеріями, проведено аналіз розв’язків.

Апробація результатів. Основні положення доповідалися на II Всеукраїнської науково-методичної інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-2021» Форум молодих дослідників» (Суми, 2021 рік) на тему «Критерії прийняття рішень в умовах повної невизначеності». За результатами дослідження було написано тези до збірників Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів і молодих учених «Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання» (Чернігів, 2020 рік) та Звітній студентській науково-практичній конференції фізико-математичного факультету (Суми, 2021) та стаття «Теорія ігор: основні поняття, типи ігор, приклади» у збірнику студентських наукових робіт.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ТЕОРІЇ ІГОР

1.1 Основні поняття теорії ігор.

Розглянемо дві ситуації, які можуть трапитися в реальному житті.

Ситуація 1. Покупець прийшов на ринок і хоче придбати м'ясо. Підходить до продавця, запитує ціну і починає з ним торгуватися. І тут задача покупця купити як можна дешевше, а продавця продати якомога дорожче.

Ситуація 2. Організовано аукціон по продажу рідкісної вази. Двоє чи більше покупців беруть в ньому участь, їх задача одночасно поставити ціну, при цьому, щоб вона була більшою ніж ціна іншого покупця і найбільш вигідною для кожного з них.

При розв'язанні цих ситуацій, кожна людина ставить перед собою питання: чи відповідні обставини для даного рішення? На кого вплине прийняте рішення? Як це вплине на мене? Що я отримаю в кожному конкретному випадку? І звичайно, який вибір зробити? В ході розв'язання таких ситуацій виграш кожного із учасників залежить не тільки від них, а й від опонента, відбувається зіткнення протилежних інтересів, утворення конфлікту, такі ситуації і розглядає теорія ігор.

Моментом народження теорії ігор прийнято вважати монографію Дж. Неймана і О. Моргенштерна "Теорія ігор і економічна поведінка". Після її публікації в 1944 р, вчені передбачили переворот в економічних науках завдяки використанню нового підходу. Ця теорія розкривала раціональність поведінки у прийнятті рішень у взаємовідносних ситуаціях, яка допомагала вирішувати багато актуальних проблем у різних галузях діяльності. Праця наголошувала, що стратегічна поведінка, кооперація, конкуренція, невизначеність і ризик, є базовими елементами в теорії ігор.

Теорія ігор як наукова дисципліна вивчає відносини між людьми, які керуються незбіжними (а іноді і протилежними) мотивами. Поряд з традиційними іграми, такими як покер, шахи, футбол і багато інших, теорія ігор вивчає і такі серйозні відносини як ринкова конкуренція, гонка озброєнь, забруднення навколишнього середовища. В теорії ігор всі ці серйозні відносини називають іграми, оскільки в них, як і в іграх, результат залежить від рішень (стратегій) всіх учасників. *Теорія ігор* - це математична дисципліна, яка застосовується в багатьох областях людської діяльності (економіка, військова справа, біологія і ін.) [2].

Гра – це математична модель конфліктної ситуації. Ця модель є ідеалізованою, оскільки реальні ситуації найчастіше обтяжені великою кількістю несуттєвих факторів, якими можна знехтувати. В грі описуються всі можливі варіанти дій і результат, її виконання кожним із учасників, тобто задаються правила гри. Слід зазначити, що під конфліктом розуміється не тільки антагоністична взаємодія сторін. Гравці можуть мати інтереси, які повністю або частково збігаються. Головне - це те, що дії гравців є взаємопов'язаними і впливають одна на одну [6].

Особливостями математичних ігор є:

- по-перше, наявність декількох учасників, яких називають *гравцями*;
- по-друге, опис усіх можливих варіантів дій (*стратегій*) учасників;
- по-третє, конкретних результатів дій кожного гравця (*функції виграшу*) [6].

Гравці є раціональними індивідами, які зацікавлені в ході гри і переслідують свої цілі, при цьому мають вплив на результат гри. Множину гравців позначається буквою N. У конкретний грі гравці можуть мати імена, однак в загальнотеоретичному плані гравців зазвичай нумерують (перший гравець, другий гравець тощо). Отже, елементами множини N можна вважати числа - номери гравців. Наприклад, якщо в грі беруть участь три гравці, то $N = \{1, 2, 3\}$. При виконанні всіма гравцями своїх дій, реалізується певний результат гри. Результати мають для гравців різну цінність. Раціональний гравець повинен прагнути досягнення найсприятливішого для себе результату. Однак ніякий гравець не в змозі забезпечити найкращий для себе результат тільки за рахунок власних дій. Приймаючи рішення про вибір дії, він повинен враховувати інтереси і можливі дії інших гравців, що впливають на результат гри.

Вибір однієї з можливих дій називається *ходом*. Сукупність правил, які однозначно визначають вибір ходу гравця, в залежності від ситуацій, які склалися під час гри, називають *стратегією* гравця [20]. Кожна стратегія визначає поведінку гравця в моменти, коли він повинен зробити вибір. У теорії ігор припускається, що гравець приймає всі рішення наперед, тобто він знає всі можливі ситуації і передбачає своє рішення для кожної з них. *Оптимальною* називається така стратегія, яка при багаторазовому повторенні дає максимально можливий середній виграш. Суть теорії ігор полягає в тому, щоб розробити рекомендації розумної поведінки гравців, тобто визначити оптимальну стратегії для кожного з них.

Функцією виграшу називається правило, за яким кожному набору стратегій ставиться у відповідність критерій їх ефективності[22]. Теорія ігор виходить із заздалегідь визначених значень того чи іншого критерію ефективності для конкретного поєднання стратегій обох гравців, тобто приймається, що функція виграшу задана. Таким чином, *виграш* - це оцінка очікуваних результатів всіх можливих поєднань стратегій одного гравця зі стратегіями іншого. Для отримання таких оцінок можуть застосовуватися методи теорії ймовірностей, теорії масового обслуговування, теорії управління запасами, теорії пошуку та різні економічні показники [2].

Введемо поняття гри в нормальній (стратегічній) формі. Існує найзагальніша формалізація гри, в яку вписуються всі можливі конфлікти зі скінченою кількістю учасників. У цій формалізації гра представляється як набір об'єктів: зацікавлені сторони, можливі дії кожної зі сторін, інтереси сторін, тому грою в нормальній формі називають набір об'єктів виду

$$G_N = \langle N;\ X_1, \dots, X_i \dots, X_n; K_1, \dots, K_i \dots, K_n \rangle.$$

Тут G_N – позначення гри. $N = \{1, \dots, i, \dots, n\}$ – множина гравців; $X_i = \{x_i\}$ – множина стратегій гравця $i \in N$; K_i – функція виграшу гравця $i \in N$. Значення функції виграшу являє собою виграш, який отримує гравець i, якщо гравці використовують стратегії $x_1, \dots x_i, \dots x_n$.

Гра відбувається наступним чином. Гравці одночасно і незалежно один від одного вибирають свої стратегії $x_i \in X_i$ із множини всіх своїх можливих стратегій X_i. В результаті формується набір стратегій $x_N = (x_1, \dots, x_j, \dots x_n), x_N \in X_N$, який в теорії ігор називається ситуацією. Після цього гра завершується, і кожен з гравців $i, i \in N$ отримує виграш, який обчислюється як значення функції його виграшу K_i [20].

1.2 Класифікація ігор

Питання класифікації ігор є досить актуальним, тому, що кожен клас ігор використовує свій математичний апарат. Єдиної системи класифікації ігор не існує, тому ігри групуються за різними ознаками і критеріями.

1. На першому рівні класифікаційні ігри поділяються на *статичні* та *динамічні*. У статичних іграх (на відміну від динамічних) стратегії гравців не залежать від часу.

2. Кожен клас можна розділити на *безкоаліційні* та *кооперативні* ігри. У кооперативних іграх на відмінну від безкоаліційних допускаються спільні дії гравців та перерозподіл виграшу.

3. Залежно від кількості стратегій у гравців та властивостей їх функцій виграшу гри можна розділити на *скінченні* (з скінченим числом стратегій у кожного гравця) та *нескінченні* ігри.

4. Залежно від знання гравцями самої гри у нормальній формі гри поділяються на ігри з *повною* та *неповною* інформацією відповідно [4].

Гра G_N називається *грою з повною інформацією*, якщо кожен елемент у поданні гри загальновідомий усім гравцям. В іншому випадку гра G_N називається грою з *неповною інформацією*.

5. Безкоаліційні ігри можна поділити на ігри з *постійною* та *змінною сумою*. Для ігор із постійною сумою для кожної ситуації x_N виконується умова:

$$\sum_{i=1}^{n} K_i(x_n) = const.$$

Особливість ігор з постійною сумою полягає в тому, що при будь-якому результаті гри сумарний виграш усіх гравців є величиною постійною. Якщо ця константа дорівнює 0, то говорять про ігри з *нульовою сумою*.

6. Спеціально виділяється підклас ігор двох осіб. Зауважимо, що будь-яка гра G_2 двох осіб визначається завданням наступних об'єктів: $G_2 = \langle X, Y, K_1, K_2 \rangle$, де X – множина стратегій гравця 1; Y – множина стратегій гравця 2; K_1, K_2 – функції виграшу гравців 1 і 2 відповідно.

7. Ігри двох осіб із нульовою сумою називаються *антагоністичними*. Особливість антагоністичної гри полягає в тому, що у будь-якій ситуації виграш кожного гравця дорівнює програшу іншого, тому формально антагоністична гра G_2 визначається завданням об'єктів виду $G_2 = \langle X, Y, K \rangle$, де X – множина стратегій гравця 1, Y - множина стратегій гравця 2, K – функція виграшу (програшу) гравця 1 (2) відповідно.

8. Найбільш розроблені класи скінчених ігор двох осіб, які називаються *біматричними* (якщо гра неантагоністична) та *матричними* (якщо гра антагоністична) відповідно.

9. Серед нескінченних ігор особливий інтерес представляє поділ на *неперервні* (ігри з неперервними функціями виграшу і компактними множинами стратегій) і *розривні* ігри.

10. Серед неперервних ігор виділяють підклас *увігнутих* ігор, коли функція виграшу кожного гравця увігнута за стратегіями цього гравця.

1.2 Класичні задачі теорії ігор

Розглянемо приклади основних класичних задач теорії ігор.

Приклад 1.1 «Дилема в’язнів»

Авторами «дилеми в’знів» були Меріл Флуд (Merill Flood) та Мелвіл Дрешер (Melvin Drescher). Вони вперше представили її у 1950 році. Але свою назву гра отримала від Альберта Такера (Albert W. Tucker) – американського математика, який застосував цю назву на семінарі з теорії ігор, який він проводив у 1950 році на психологічному факультеті Стендфордського університету. Нижче наведено один з варіантів формулювання «дилеми в’язнів».

«Поліція заарештувала двох людей, підозрюваних у пограбуванні та вбивстві. Хоча поліція впевнена у їхній винності, переконливих доказів для пред'явлення суду вона не має. Проте в обох підозрюваних вилучили незареєстровану вогнепальну зброю. Слідству хотілося якнайшвидше закінчити цю справу, і тому обом було запропоновано сприяти слідству. Зміст пропозиції слідчого був таким:

- якщо один «розколюється» і призводить до розкриття злочину, а інший відмовляється співпрацювати зі слідством, то перший негайно звільняється, а другий отримує 10 років ув'язнення;

- якщо обидва зізнаються, то обоє отримують по шість років ув'язнення, оскільки цінність визнання першого різко знижується;

- якщо обидва відмовляються співпрацювати зі слідством, то обоє отримують три роки за незаконне володіння зброєю.

Кожному із затриманих повідомили, що пропозиція зроблена обом і діє до 10 години ранку наступного дня. Затримані утримувалися в умовах, у яких вони не могли спілкуватися. Відомо також, що будь-яких зобов'язань один перед одним у затриманих немає.» [25].

Представлення гри, у вигляді матриці наведено в таблиці 1.

Таблиця 1. Матриця до гри «Дилема в’язнів»

	Злочинець Б Стратегія «мовчати»	**Злочинець Б Стратегія «зрадити»**
Злочинець А Стратегія «мовчати»	3 роки кожному	10 Років злочинцеві А Відпустити злочинця Б
Злочинець А Стратегія «зрадити»	10 Років злочинцеві Б Відпустити злочинця А	6 років кожному

Домінантною стратегією для обох є співпраця зі слідством, оскільки вона може призвести до негайного звільнення. Якщо співпрацює лише один, то другий теж має сенс співпрацювати, оскільки термін все ж таки на чотири роки зменшується. Начебто для обох має сенс зізнатися, і це цілком логічно. Але якщо обидва діятимуть раціонально (обидва зізнаються), і той та інший отримають більші терміни, ніж, якби діяли кооперативно (тобто обидва мовчали). Отже, індивідуальна раціональність веде до колективної нераціональності як наслідок, до шкоди собі самому.

У суспільному житті та у бізнесі випадків, які зводяться до «дилеми в’язнів велика кількість, тому виникає питання про те, як з ними поводитися. Заклики поводитися кооперативно допомагають мало. Потрібні реальні санкції, контрольні механізми та ринкові пільги.

Щоб краще зрозуміти сутність «дилеми в’язнів», доцільно провести її аналіз із позицій формальної логіки.

Отже, обидва партнери не є друзями, їх кооперація суто випадкова, вони не мають моральних зобов'язань стосовно один одного. Якщо стати на позицію одного з ув'язнених, можна простежити перебіг його логічних міркувань: «Якщо мій напарник зізнається, я можу або теж зізнатися і отримати 6 років, або ні, і тоді я отримаю 10 років. Тобто, якщо мій напарник зізнається, мені краще зізнатися. Якщо ж мій напарник не зізнається, у мене знову два вибори: я зізнаюся, і завтра вільний, або я не зізнаюся, і отримую три роки. Тобто якщо мій напарник не зізнається, мені краще зізнатися. Таким чином, незалежно від того, який вибір зробить партнер, мені краще зізнатися». Логіка диктує другому партнерові те саме. Вони обидва зізнаються та отримують по 6 років, хоча могли б обійтися трьома роками, якби обидва мовчали. Виникають питання: чи диктує логіка тільки таку поведінку і чи логіка виключає кооперативну поведінку? Наступний ланцюжок міркувань настільки ж логічний, як і попередній: «Я не особливо прив'язаний до свого напарника, але я знаю, що його інтелект на моєму рівні і він здатний так само логічно міркувати, інакше я б з ним і не зв'язався. Я знаю, що він у такому ж складному становищі, як і я. Він теж мені нічим не зобов'язаний і отримав ту саму пропозицію від слідчого, що я. Він прийматиме рішення, виходячи зі своїх інтересів та логіки, як і я. Отже, мій напарник дійде тих самих висновків. Тому, якщо я прийду до висновку, що слід зізнатися, він дійде того ж висновку, і ми отримаємо по 6 років. Якщо я прийду до висновку не зізнаватись, він теж прийде до цього висновку, і ми отримаємо три роки. Але три роки краще, ніж 6, тому я не зізнаватимуся». Виникає питання: у чому річ? Як можуть два логічні міркування призводити до різного результату? Це суперечить законам логіки. Уважний покроковий логічний аналіз двох наведених міркувань показує, що у другому міркуванні внесено одне додаткове міркування, саме: міркування обох ув'язнених неминуче приведуть їх до однакового висновку незалежно від цього, хто його робить. Але це, своєю чергою, означає, що «дилеми в’язнів» не може бути. Звичайна логіка не містить зазначеної додаткової умови. Тож у ситуації «дилеми в’знів» кооперативна поведінка обох ув'язнених виключається.

За моделлю «дилеми в’знів» розвивається і «*спіраль гонки озброєнь»*. Рівновага двох супротивників може бути забезпечено як у випадку, коли обидві сторони озброєні до зубів, так і на істотно більш низькому рівні, що економічно вигідно. Тому такий варіант є для обох сторін найвигіднішим.

«Дилему в’язнів» з багатьма учасниками називають також *«Проблемою громадського випасу».* Її можна проілюструвати так.

«Десять селян тримають по одній корові і пасуть їх на загальному пасовищі. Корови угодовані і здорові. Селяни стають багатшими, і деякі з них можуть собі дозволити придбати по другій корові. Коли перший селянин виганяє на пасовище дві корови, особливих змін не видно. Може бути, корови трохи менш угодовані. Коли кілька селян заводять по другій корові, то корму вже не вистачає, і корови стають худими. Цінність всіх корів, разом узятих, стає меншою цінності початкових десяти корів. Коли всі десять селян заводять по дві корови, все стадо стає дуже худим» [17].

Приклад 1.2 «Доларовий аукціон»

У 1971 році Мартін Шубік (Martin Shubik) запропонував гру, яка може служити моделлю багатьох реальних ситуацій. Сутність гри полягає в наступному. Проводиться аукціон, на якому пропонується один долар, з мінімальною ставкою в 1 цент. Гра проводиться за звичайними правилами аукціонів, за винятком одного доповнення: платить не тільки той хто запропонував максимальну суму і отримує долар, але і той, хто платить названу ним суму, але виграшу не отримує, тобто ці гроші йдуть ведучому.

Гра має три критичних моменти.

Перший пов'язаний з її запуском. Найлегше гру вдається почати під загальний веселий настрій. Але як тільки зроблено дві пропозиції, гра триває автоматично.

Другий критичний момент пов'язаний з досягненням пропозиції 50 центів. Тепер потрібно запропонувати більше 50 центів, і відповідно стає зрозуміло, що ведучий аукціону вже виграв. Але для того хто пропонує підвищення ставки все ще має фінансовий сенс. Коли гравці перейшли кордон 50 центів, гра практично завжди бадьоро триває до 99 центів.

Третій критичний момент досягається, коли хтось готовий заплатити 100 центів за долар. При цьому він, можливо, сподівається завершити гру без програшу. Але його противник знає, що він втратить 99 центів, якщо завершить гру, а якщо запропонує 101 цент, то, можливо, програє лише один цент. Він розуміє, що поводиться нераціонально, але зазвичай гра триває.

У більшості випадків в початковій стадії гри бере участь більше число гравців, а до кінця залишається завжди двоє. Дослідження показали, що при перетині кордону в 100 центів характер гри змінюється, і у гравців проявляються сильні емоції. У них, наприклад, як у парашутистів перед стрибком, раптово сповільнюється пульс [25].

Ситуації, відповідні моделі доларового аукціону, зустрічаються на кожному кроці і в повсякденному житті. Чим довше ми чекаємо автобус, тим важче нам сісти на таксі, навіть якщо спочатку ми були готові поїхати на таксі. Чим довше ми дивимося поганий фільм, тим імовірніше ми додивимося його до кінця, хоча ймовірність того, що в ньому ще буде щось цікаве, стає все менше. Ці обставини використовують на телеканалах, включаючи більше реклами в кінці фільму, оскільки ймовірність того, що глядачі переключаться на інший канал, буде невеликою.

Приклад 1.3 «Сімейна суперечка»

Проблема полягає в наступному. Молода сімейна пара вранці свариться з приводу того, як вони проведуть вечір. Чоловік пропонує піти на фінал змагань з боксу, в той час як дружина пропонує піти на концерт. Оскільки вони поспішають на роботу, вони не встигли домовитися, і протягом дня у них теж не було можливості поспілкуватися. Обидва закінчують роботу незадовго до початку змагань і концерту. Тому вони повинні незалежно один від одного визначитися, куди кожен з них піде.

Щоб ця проблема могла бути проблемою теорії ігор, обидва гравці повинні мати чіткі переваги. Наша пара їх має. Перш за все, вони хотіли б вечір провести разом. Це має для них найбільшу цінність. На другому місці за важливістю для них є перевага заходу. Найгірший варіант для них, якщо вони вечір проведуть роздільно, причому дружина буде на змаганнях з боксу, а чоловік на концерті. Трохи краще вони оцінюють варіант роздільного проведення вечора, коли він йде на бокс, а вона - на концерт. З найбільшим задоволенням дружина пішла б з чоловіком на концерт (варіант оцінюється в 4 бали), дещо гіршим для неї є відвідування змагання з боксу (3 бали). Для чоловіка ситуація прямо протилежна [6]. Матриця рішень представлена в таблиці 2

Таблиця 2. Матричне представлення гри «Сімейна суперечка»

Дружина / Чоловік	**На бокс**	**На концерт**
На бокс	4, 3	2, 2
На концерт	1, 1	3, 4

Розглянемо рішення цієї дилеми при застосуванні правил етики.

Спочатку розглянемо розв'язок в разі застосування «Золотого правила моральності» в формулюванні Конфуція: «Не роби іншим того, чого не бажаєш собі». В цьому випадку дружина повинна піти на бокс, оскільки це добре для її партнера. Її партнер відповідно піде на концерт, і в результаті реалізується найгірший варіант.

Якщо ми застосуємо категоричний імператив Канта: «Роби тільки відповідно до такої максими (правилом), керуючись якою ти в той же час можеш побажати, щоб вона стала загальним законом», то ми прийдемо до наступних результатів. Асиметричні випадки тут виключаються з визначення. Залишаються дві можливості, і в обох «для мене» (як для чоловіка, так і для дружини) краще слідувати егоїстичної стратегії. Отже, категоричний імператив наказує чоловікові піти на бокс, а дружині - на концерт. Це дійсно краще, ніж результат, отриманий за рахунок застосування «Золотого правила», але далеко від оптимального варіанту.

1.3 Матричні ігри

У теорії ігор досліджуються моделі і методи прийняття рішень в конфліктних ситуаціях. У межах теорії ігор розглядаються парні ігри або ігри багатьох осіб. Обмежимося розглядом парних ігор. Найефективніше в подібних випадках користуватися матричними іграми, які допомагають спростити ситуацію, що склалася і повністю оцінити важливість кожного фактора.

Означення 1.1. *Антогоністичні ігри в яких обоє гравці, щов мають скінчену множину стратегій, називають матричними* [21].

Матрична гра - одноходова скінченна гра з нульовою сумою. Матрична гра є теоретико-ігровою моделлю конфліктної ситуації, в якій противники для досягнення протилежних цілей роблять по одному вибору зі скінченого числа можливих способів дій. Відповідно до обраних способів дій визначається досягнення результату. *Стратегія* - це набір правил, що визначає поведінку гравця. *Оптимальною стратегією* називають таку стратегію, при якій досягається максимальний середній виграш при багаторазовому повторенні гри. Кожна фіксована стратегія, яку може вибрати гравець називається *чистою стратегією* [7].

Матричну гру можна представити у вигляді матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots & a_{1j} \cdots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} \dots & a_{ij} \cdots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \dots & a_{mj} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Учасників даної гри зазвичай позначають латинськими літерами *A* та *B* або нумеруються гравець 1 і гравець 2. Нехай гравець *A* (1) має m можливих стратегій $A_1, A_2, \dots A_m$, а гравець *B* (2) – n можливих стратегій $B_1, B_2, \dots B_n$. Така гра називається $m \times n$ – грою. Матриця *A* називається *матрицею виграшів* або платіжною матрицею. В цій матриці кожен рядок відповідає одному з m можливих ходів гравця *A*, а кожен стовпець відповідає одному з n можливих ходів гравця В. Елемент матриці a_{ij} є виграш гравця *A* в тому випадку, якщо він вибирає хід A_i, а гравець В в той же час вибирає хід B_j.

При цьому якщо величина a_{ij} від'ємна, то виграш дістається гравцеві *B*. Якщо $a_{ij} = 0$, то вибір відповідних стратегій A_i, B_j призводить до нічийного результату. Зауважимо, що якщо виграші представлені у відсотках, то вони завжди невід'ємні, a_{ij} = 50% означає нічию, а a_{ij} <50% - перемогу гравця *B*.

У теорії ігор передбачається, що обидва гравці діють раціонально, тобто прагнуть до отримання максимального виграшу, вважаючи, що суперник діє найкращим для себе чином. В основу вироблення поняття оптимальності для матричної гри можна покласти такі міркування.

Розглянемо дану гру з точки зору першого гравця. Він обираючи свою стратегію A_i, розуміє, що гравець 2 відповість йому такою стратегією B_j, щоб виграш гравця 1 був мінімальним. Тому із усіх найгірших варіантів (мінімальних елементів кожного рядку платіжної матриці) $a_i = \min_j(a_{ij})$, гравцю 1 вигідно вибрати стратегію, яка відповідає максимальному із цих елементів:

$$\alpha = \max_i(\alpha_i) = \max_i \min_j(a_{ij}).$$

Величина α називається *нижньою ціною гри, максимальним* виграшом або *максиміном.* Це гарантований виграш гравця 1. Та стратегія гравця 1, яка відповідає максиміну α, називається *максимінною стратегією.* Якщо гравець 1 притримується максимінної стратегії, при будь-якій поведінці гравця 2, він отримає гарантований виграш не менший α. Це той гарантований мінімум, який гравець 1 може собі забезпечити, притримуючись своєї найбільш обережної стратегії.

З іншого боку гравець 2 вибираючи свою стратегію B_j розуміє, що гравець 1 відповість такою стратегією A_i, щоб його виграш був максимальним. Тому найкращим варіантом для 1 гравця (максимальних варіантів із кожного стовпчика), гравцю 2 раціонально вибрати свою стратегію, яка відповідає мінімальному із таких чисел:

$$\beta = \min_j(\beta_i) = \min_j \max_i(a_{ij}).$$

Величина β називається *верхньої ціною гри*, інакше мінімаксним виграшом або *мінімаксом.* Це максимальний програш гравця 2. Притримуючись своєї найбільш обережної мінімаксної стратегії, гравцю 2 гарантовано, що в будь-якому випадку він програє не більше β.

Принцип обережності, який диктує гравцям вибір відповідних стратегій (максимінної або мінімаксної), є в теорії ігор одним із основних і називається *принципом мінімакса*.

Теорема 1.1 [5] *Для будь-якої матриці А справедлива нерівність*

$$\max_i \min_j (a_{ij}) \le \min_j \max_i (a_{ij})$$

Доведення. Зафіксуємо будь-який $j-$ й стовбець, наприклад $j = 1$. Тоді маємо: $a_{i1} \le \max_i (a_{i1}), \forall\, i = \overline{1, m}$.

Дана умова справедлива і для будь-яких інших $j = 2, \dots, n$. Тому $a_{ij} \le \max_i (a_{ij})$, при всіх $i, \forall j$.

Оскільки з правої сторони стоїть константа і при всіх «i» лівий вираз обмежений цією константою, то маємо $\max_i \min_j (a_{ij}) \le \min_j \max_i (a_{ij})$. Доведено.

Реальний результат розв'язання конфліктної ситуації, називається *ціною гри* v, яка обмежується верхньою і нижньої ціною:$\alpha \le v \le \beta$.

1.3.1 Ситуація рівноваги у матричній грі

Оптимальний розв'язок задачі досягається тоді, коли жодній стороні не вигідно змінювати стратегію, оскільки її супротивник може у відповідь вибрати іншу стратегію, яка забезпечить йому кращий результат.

Якщо $\alpha = \beta = v$, тобто $\max_i \min_j (a_{ij}) = \min_j \max_i (a_{ij}) = v$, то гра називається *цілком визначеною* [7]. В такому разі виграш гравця 1 (програш гравця 2) називається *значенням гри* і дорівнює елементу матриці $a_{i_o j_0}$. Цілком визначені ігри називаються *іграми із сідловою точкою*.

Означення 1.2 *Сідловою точкою матриці А називається така пара* (i, j) *номерів рядків і стовбців, для будь-яких* $i = 1, \dots, m$ і $i = 1, \dots, n$ *виконується нерівність* $a_{ij_0} \le a_{i_o j_0} \le a_{i_o j}$ [4]

Елемент $a_{i_o j_0}$ є сідловою точкою матричної гри. В сідловій точці цей елемент є одночасно мінімумом в своєму рядку і максимумом в стопці. В цій ситуації оптимальним рішення гри для обох сторін є вибір лише однієї з можливих, так званих чистих стратегій – максимінної для гравця 1 та мінімаксної для гравця 2, тобто якщо один із гравців притримується оптимальної стратегії, то для другого відхилення від його оптимальної стратегії не може бути вигідним. Сідлова точка існує не завжди.

Теорема 1.2 *Для існування в матричній грі сідлових точок (ситуації рівноваги) необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність:* $max_i\, min_j (a_{ij}) = min_j\, max_i (a_{ij})$ [5].

Доведення. Оскільки множина стратегій кожного гравця скінчена, тобто, екстремуми на них досягаються, і ці мінімакси існують.

Необхідність. Нехай $x_0 = (i_0, j_0)$ – сідлова точка, то задовольняється умова $a_{ij_0} \leq a_{i_o j_0} \leq a_{i_o j}, \forall i = \overline{1, m}$ і $\forall j = \overline{1, n}$.

Тоді з правої частини нерівності маємо:

$$\alpha \leq \max_i(\alpha_i) \leq \max_i \min_j \left(a_{ij}\right) \text{ за означенням } a_{i_o j_0} = \alpha.$$

Із лівої:

$$\beta \geq \min_j(\beta_i) \geq \min_j \max_i \left(a_{ij}\right) \text{ за означенням } a_{i_o j_0} = \beta\,.$$

Звідси маємо $\alpha \leq v = a_{i_o j_0} \leq \beta.$ Із теореми 1.1 випливає, що завжди $\alpha \leq \beta.$ Тоді отримаємо $\alpha = \beta = v.$

Достатність. Нехай виконується $\max_i \min_j (a_{ij}) = \min_j \max_i (a_{ij})$, тобто $\alpha = \beta$. Із теореми 1.1 випливає ,що для кожної пари $(i_i; j_i)$, $(i_i; j_i)$ маємо $\alpha = a_{i_i j_i} \leq a_{i_j j_j} = \ \beta.$

Оскільки $\alpha = \beta$, то з нерівності маємо рівності:

а) $a_{i_i j_i} = a_{i_i j_j} \leq a_{i_j j}\ \forall\ j = 1 \dots n;$

б) $a_{i_j j_j} = a_{i_i j_j} \leq a_{i j_j}\ \forall\ i = 1 \dots m$

Таким чином, маємо $a_{i_i j} \leq\ a_{i_i j_j} \leq a_{i j_j},$ тобто $(i_i; j_j)$ - сідлова точка. Доведено.

На основі теореми 1.2 отримаємо наступну властивість сідлових точок – *прямокутність множини сідлових точок*, тобто значення функції виграшу у всіх її сідлових точках дорівнюють один одному.

Схема знаходження сідлових точок для матриці А:

1. Для кожної стратегії i гравця 1 (по рядочках) знаходимо $\min_j (a_{ij})$.

2. Серед отриманих величин $\min_j(a_{ij})$ – визначається найбільша, тобто $\max_i \min_j(a_{ij})$.

3. Для кожної стратегії j гравця 2 (по стовпцях) знаходимо $\max_i(a_{ij})$.

4. Серед отриманих величин $\min_j(a_{ij})$ – визначається найбільша, тобто $\min_j \max_i(a_{ij})$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots & a_{1j} \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} \dots & a_{ij} \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \dots & a_{mj} \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \left.\begin{matrix} \min\limits_j(a_{1j}) \\ \dots \\ \min\limits_j(a_{ij}) \\ \dots \\ \min\limits_j(a_{mj}) \end{matrix}\right\} \max_i \min_j(a_{ij})$$

$$\underbrace{\max_i(a_{i1}) \quad \dots \quad \max_i(a_{ij}) \quad \dots \quad \max_i(a_{in})}_{\min\limits_j \max\limits_i(a_{ij})}$$

5. Якщо виконується рівність $\max_i \min_j(a_{ij}) = \min_j \max_i(a_{ij})$, то існує сідлова точка (i_0, j_0), при чому значення гри $v = a_{i_o j_0}$

Приклад 1.4. Дебітор А бажає вибрати один з чотирьох умов позики: $\text{А}_1, \text{А}_2, \text{А}_3, \text{А}_4$. Кредитор може на будь-який варіант позики відповісти варіантом надання кредиту $\text{В}_1, \text{В}_2, \text{В}_3, \text{В}_4,\ \text{В}_5$. Процентні ставки для дебітора при будь-якому варіанті кредитора представлені платіжною матрицею:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 & 4 & 4 \\ 9 & 6 & 7 & 5 & 8 \\ 3 & 7 & 6 & 2 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Розв’язання:

Оцінимо елементи матриці.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$\min\limits_j(a_{ij})$	$\max\limits_i \min\limits_j(a_{ij})$
A_1	6	1	8	4	4	1	5
A_2	9	6	7	5	8	5	
A_3	3	7	6	2	8	2	
A_4	2	6	7	3	3	2	

$\max_i(a_{ij})$	9	7	8	5	8
$\min_j \max_i(a_{ij})$	5				

Видно, що нижня і верхня ціни гри збігаються, $\alpha = \beta = v = 5$ Максимінною стратегією дебітора є стратегія A_2 (систематично її застосовуючи, можна гарантувати, що дебітор отримає виграш не менше 5). Мінімаксна стратегія кредитора - B_4 (застосовуючи її систематично, кредитору гарантується, що він програє не більше ніж 5). З цього випливає, що для обох гравців вигідні стратегії $(A_2;\ B_4)$ і процентна ставка дорівнює 5. Якщо гравці приймуть інші стратегії, відмінні від оптимальної, то вони можуть програти. Так, відступившись від оптимальної стратегії, дебітор вибере стратегію A_1, то кредитор може вибравши свою стратегію B_2, зменшить його виграш до 1. Рівноцінно і відступ кредитора від своєї мінімаксної стратегії може збільшити програш до 9.

1.3.2 Гра у змішаних стратегіях

Скінченні ігри, як правило, не мають сідлової точки, тобто максимінно-мінімаксні стратегії не є оптимальними. Це означає, що кожна із сторін може покращити свій результат, вибираючи інший підхід. Виявляється, гравцям доцільно вибирати свої стратегії випадково, тобто визначати розподіл ймовірностей на безлічі чистих стратегій, а потім надавати вибір конкретної чистої стратегії випадковому механізму, який відповідає заданому розподілу ймовірностей.

Вибір гравцями своїх чистих стратегій з деякими наперед заданими ймовірностями - це, по суті, один з планів проведення гри і, таким чином, теж є деякою стратегією. Оптимальний розв’язок такої гри знаходиться шляхом застосування змішаних стратегій, які є певними комбінаціями початкових «чистих» стратегій.

Означення 1.3 *Змішаною стратегією гравця називається розподіл ймовірностей на множині його чистих стратегій. Змішану стратегію гравця можна представити у вигляді вектора-рядочка*

$$X = (x_1, x_2 \dots x_m),$$

де x_i *– ймовірність вибору гравцем його* $i -$ ї *стратегії,* $x_i \geq 0, i = 1 \dots m.$ X^T *– транспонований вектор X. Де:*

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \text{ [21]}.$$

Зауваження 1.1 1) Задання змішаних стратегій гравця полягає в тому, що указуються ті ймовірності з якими вибираються його чисті стратегії.

2) Кожна чиста стратегія може розглядатися як змішана, в якій чиста стратегія вибирається з ймовірністю 1, а всі інші – з ймовірністю 0.

3) Множина всіх векторів змішаних стратегій гравця утворює $(m-1)$-й симплекс (опуклий многогранник), натягнутий на орти чистих стратегій.

Ймовірність вибору кожної стратегії задаються відповідними векторами:

для гравця 1 – вектор $X = (x_1, x_2 \dots x_m)$, де $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$, де x_i – ймовірність вибору гравцем його і $-$ ї стратегії

для гравця 2 – вектор $Y = (y_1, y_2 \dots y_n)$, де $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$, де y_j – *ймовірність вибору гравцем його* $j -$ ї *стратегії.*

Очевидно, що $x_i \geq 0, y_i \geq 0$.

Змішана стратегія – це вектор ймовірностей, зіставлених кожній із чистих стратегій гравця. Кожен гравець вибирає одну із стратегій у черговій партії гри відповідно до ймовірності, визначеної для неї його змішаною стратегією. Якщо позначити через x і y змішані стратегії гравців, то математичне сподівання на виграш першого гравця дорівнюватиме $M(A, x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$.

Стратегії x^0 і y^0 називаються *оптимальними змішаними стратегіями* гравців, якщо виконується наступна умова $M(A, x, y^0) \leq M(A, x^0, y^0) \leq M(A, x^0, y)$. Ліва частина даної нерівності $M(A, x, y^0) \leq M(A, x^0, y^0)$ означає, що якщо гравець 1 відхилиться від своєї оптимальної стратегії x^0, то його виграш може тільки зменшитися, за умови, що гравець 2 дотирмується своєї оптимальної стратегії y^0. Аналогічно нерівність $M(A, x^0, y^0) \le M(A, x^0, y)$ означає, що коли гравець 2 відхиляється від оптимальної стратегії y^0, то його програш може тільки збільшуватися.

Означення 1.4 *Розв'язати матричну гру означає знайти оптимальні стратегії гравців і ціну гри (значення, які визначають виграші гравців)* [4].

Виявляється, що коли використовуються змішані стратегії, то для кожної скінченої гри можна знайти пару стійких оптимальних стратегій. Існування такого розв’язку визначає теорема.

Теорема 1.3. (Основна теорема теорії ігор) *Кожна скінчена гра має, принаймні, один розв’язок, який можливий в змішаних стратегій* [21].

(Без доведення)

Нехай скінченну матричну гру задано платіжною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots & a_{1j} \cdots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} \dots & a_{ij} \cdots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \dots & a_{mj} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Оптимальні змішані стратегії за теоремою визначають вектори $X = (x_1^*, x_2^*, \dots x_m^*)$ – для гравця 1 і $Y = (y_1^*, y_2^*, \dots y_m^*) -$ для гравця 2.

Якщо гравець 1 використає свої оптимальні змішані стратегії, то він має забезпечити виграш на рівні не меншому від ціни гри, при умові, що гравець 2 вибирає будь-які стратегії. Тобто $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, x_i^* > v \ (j = \overline{1, n})$.

З іншого боку, якщо гравець 2 використає свої оптимальні стратегії, за умови використання гравцем 1 будь-яких стратегій, то він забезпечить програш, що не перевищує ціну гри, тобто $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, y_i^* > v \ (i = \overline{1, m})$. Ці співвідношення використовуються для знаходження розв’язку гри.

У даному випадку розраховані оптимальні стратегії завжди є стійкими, тобто якщо один із гравців притримується своєї оптимальної змішаної стратегії, то його виграш залишається незмінним і дорівнює ціні гри v незалежно від того, яку із можливих стратегій вибрав інший гравець.

Властивості значень гри:

1°. *У матричній грі з матрицею виграшів A*

$$v(A) = \max_{X \in S_m} \min_{J=\overline{1,n}} X^T a_{(j)} = \min_{Y \in S_n} \max_{i=\overline{1,m}} a^{(i)} Y$$

(де $v(A)$ *– ціна гри заданої матрицею A,* $a_{(j)}$ *-* $j -$ й *стовпець матриці,* $a^{(i)} - i -$ й *рядок матриці,* S_m *– множина стратегій гравця 1,* S_n *-множина стратегій гравця 2), причому внутрішні екстремуми досягаються на оптимальних стратегіях гравців.*

(Без доведення)

Таким чином маємо оптимальні стратегії для гравців $v(A) = \min_{J=\overline{1,n}} X^{0T} a_{(j)} = \max_{i=\overline{1,m}} a^{(i)} Y^0$.

2°. *Для будь-якої матриці A виконуються нерівності* $max_i \, min_j (a_{ij}) \leq v(A) \leq min_j \, max_i (a_{ij})$.

(Без доведення)

3°. *Справедливі наступні твердження:*

1) Якщо гравець 1 має чисту оптимальну стратегію i_0, *то* $v(A) = max_i \, min_j (a_{ij}) = min_j (a_{i_0 j})$

2) Якщо гравець 2 має чисту оптимальну стратегію j_0, *то* $v(A) = min_j \, max_i (a_{ij}) = max_i (a_{i j_0})$ [3, 10, 21]

(Без доведення)

Перелічимо умови застосування змішаних стратегій:

1. гра без сідлової точки;

2. гравці використовують випадкову суміш чистих стратегій із заданими ймовірностями;

3. Гра багаторазово повторюється у подібних умовах;

4. за будь-якого ходу жоден з гравців не проінформований про стратегію іншого гравця;

5. допускається усереднення результатів ігор.

Для розв’язування матричних ігор у змішаних стратегіях використовуються наступні методи:

- розв’язування через систему рівнянь;
- розв’язування графічним методом;
- симплекс-метод.

Далі детальніше про кожен із методів.

1.3.3 Графічний спосіб розв’язування матричних задач

1.3.3.1 Розв'язування матричної гри 2×2

Приклад 1.5 Знайти розв' язок гри з наступною платіжною матрицею.

$$H = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Розв’язання:

	B_1	B_2	$\min\limits_j(a_{ij})$	$\max\limits_i \min\limits_j(a_{ij})$
A_1	5	3	3	2
A_2	2	8	2	
$\max\limits_i(a_{ij})$	5	8		
$\min\limits_j \max\limits_i(a_{ij})$	5			

Перевіряємо, чи існує сідлова точка. Визначаємо гарантований виграш, який визначається нижньою ціною гри $a = 3$, яка вказує на максимальну чисту стратегію. Верхня ціна гри $b = 5$. Оскільки $a \neq b$, можна стверджувати, що сідлова точка відсутня, це означає, що ціна гри знаходиться в інтервалі $3 \le y \le 5$. Знайдемо розв'язок матричної гри в змішаних стратегіях (через те, що гравцям доводиться випадковим чином змішувати свої чисті стратегії, виграш гравця буде випадковою величиною).

Знаходимо розв'язок гри (в змішаних стратегіях). Для цього запишемо систему рівнянь.

Для першого гравця

$$\begin{cases} 5p_1 + 2p_2 = y \\ 3p_1 + 8p_2 = y \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

Для другого гравця

$$\begin{cases} 5q + 3q_2 = y \\ 2q_1 + 8q_2 = y \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases}$$

Розв'язуючи ці дві системи, знаходимо: $y = 4\frac{1}{4}$, $p_1 = \frac{3}{4}$ (ймовірність застосування 1-ї стратегії), $p_2 = \frac{1}{4}$ (ймовірність застосування 2-ї стратегії). Для першого гравця найоптимальнішою змішаною стратегією є стратегія $P(\frac{3}{4};\frac{1}{4})$.

Для другого гравця: $q_1 = \frac{5}{8}$ (ймовірність застосування 1-ї стратегії), $q_2 = \frac{1}{4}$ (ймовірність застосування 2-ї стратегії). Для другого гравця найоптимальнішою змішаною стратегією є стратегія $Q(\frac{5}{8};\frac{3}{8})$.

Розглянемо аналітичний спосіб розв'язування матричної гри 2×2 з матрицею $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Припустимо, що у матричній грі A немає сідлової точки. Отже, розв'язуватися дана задача буде у змішаних стратегіях.

Задача для гравця 1. Серед чисел x_1, x_2, що задовольняють нерівності

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq v \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq v \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

знайти такі x_1^0, x_2^0, які задовольняють $\max v$.

Набір $X^0 =(x_1^0, x_2^0)$ визначає оптимальну стратегію гравця 1 в даній матричній грі. При цьому значення гри $v(A) = \max v$.

У грі 2×2 обидві чисті стратегії гравців є істотними (в іншому випадку гра мала б сідлову точку в чистих стратегіях). У задачі для гравця 1 це означає, що $x_1 > 0, x_2 > 0$. Тоді маємо дві рівності для оптимальних стратегій

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = v \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = v \end{cases}$$

Розв'язуючи систему отримаємо

$$x_1^0 = \frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}};\ x_2^0 = \frac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}$$

$$v = \frac{\Delta}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}, \text{де } \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

Тепер розглянемо задачу для гравця 2. Серед чисел y_1, y_2, що задовольняють нерівність

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \leq v \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \leq v \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

знайти такі y_1^0, y_2^0, які задовольняють $\min v$.

Оскільки чисті стратегії гравців є істотними, то $y_1 > 0, y_2 > 0$, причому для пошуку оптимальних стратегій гравця 2 маємо систему рівностей

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = v \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = v \end{cases}$$

Розв’язуючи яку отримаємо:

$$y_1^0 = \frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}};\ y_2^0 = \frac{a_{11}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}},$$

$$v = \frac{\Delta}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}, \text{де } \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

Перейдемо до розгляду матричних ігор 2×2 графічним способом. Розглянемо гру з матрицею A порядку 2. Почнемо із гравця 2. Серед чисел y_1, y_2, що задовольняють нерівність

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \leq v \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \leq v \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

знайти такі y_1^0, y_2^0, для яких отримаємо $\min v$.

Нехай гравець 2 вибере свою стратегію $j = 1$ з ймовірністю $y_1 = y$ і стратегію $j = 2$ з ймовірністю $y_2 = 1 - y$. Якщо при цьому гравець 1 вибере свою стратегію $i = 1$, то математичне сподівання програшу гравця 2 буде дорівнювати $M\xi_2 = v_2^{(1)} = a_{11}y - a_{12}(1 - y)$.

Якщо при цьому гравець 1 вибере свою стратегію $i = 2$, то математичне сподівння програшу гравця 2 дорівнює $M\xi_2 = v_2^{(2)} = a_{21}y - a_{22}(1 - y)$.

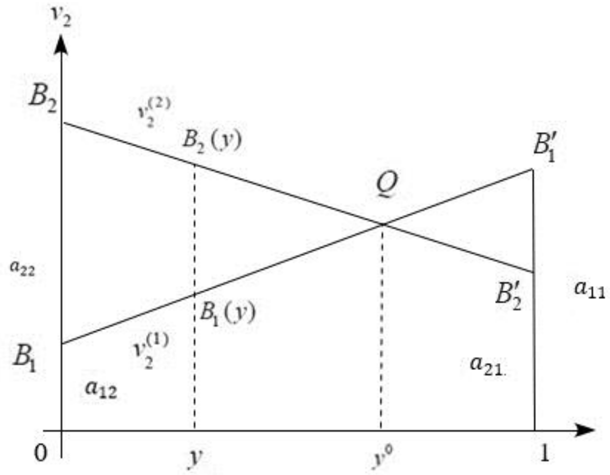

Рис.1 Графічна ілюстрація розв’язування задачі для гравця 2.

На рисунку 1 маємо в області $y \in [0; 1]$ відрізки прямих B_1B_1' і B_2B_2', які відповідають чистим стратегіям гравця 1. При даному y на рисунку 4 показано дві точки $B_1(y)$ і $B_2(y)$ (на цих відрізках), які відповідають значенню виграшу $v_2^{(1)}, v_2^{(2)}$, які гравець 2 може отримати, якщо гравець 1 використовує свої чисті стратегії. Проміжні значення v_2, відповідних точок відрізка $B_1(y)B_2(y)$, виходять, якщо гравець 1 використовує змішані стратегії.

Отже, множинам ситуацій в змішаних стратегіях відповідає множина точок між відрізками прямих B_1B_1' і B_2B_2'.

Ламана лінія B_2QB_1' представляє найбільший програш гравця 2 при різних наборах y, тобто відповідає $\max_j v_2^{(i)}$. Гравець 2 вибирає y так, щоб достигнути нижньої точки Q (отримати мінімум програшу, тобто $\min_{0 \le y \le 1} \max_i v_2^{(i)}$). Отже, отримаємо $y_1^0 = y^0$, $y_2^0 = 1 - y^0$, $v(A) = v_2(y^0) = v^0$. Оскільки для точки $Q(y^0; v^0)$ маємо рівність $a_{11}y^0 + a_{12}(1 - y^0) = a_{21}y^0 + a_{22}(1 - y^0)$, то отримаємо $y^0 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$; $v = \frac{\Delta}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$. Як бачимо для $y_1^0 = y^0$, $y_2^0 = 1 - y^0$, розв'язки збігаються з розв’язком отриманим аналітично.

Задача для гравця 1. Серед чисел x_1, x_2, що задовольняють нерівності

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ge v \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ge v \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

знайти такі x_1^0, x_2^0, для яких отримаємо $\max v$.

Нехай гравець 1 вибере свою стратегію $i = 1$ з ймовірність $x_1 = x$ і стратегію $i = 2$ з ймовірністю $x_2 = 1 - x$. Якщо при цьому гравець 2 вибере свою стратегію $j = 1$, то математичне очікування виграшу гравця 1 буде дорівнювати $M\xi_1 = v_1^{(1)} = a_{11}x - a_{21}(1 - x)$.

Якщо при цьому гравець 2 вибере свою стратегію $j = 2$, то математичне сподівання виграшу гравця 1 дорівнюватиме $M\xi_1 = v_1^{(2)} = a_{12}x - a_{22}(1 - x)$.

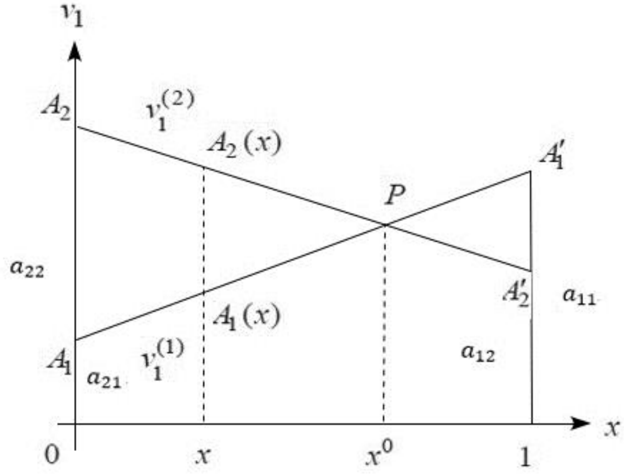

Рис 2. Графічна ілюстрація розв'язування задачі для гравця 1.

На рисунку 2 маємо в області $x \in [0; 1]$ відрізки прямих A_1A_1' і A_2A_2', які відповідають чистим стратегіям гравця 1. Ситуаціям у змішаних стратегіях відповідають множини точок між відрізками прямих. Ламана лінія A_1PA_2' представляє найменший виграш гравця 1 при різних наборах x, тобто відповідає $min_{\,i}\, v_1^{(j)}$. Гравець 1 вибирає x так, щоб досягати найвищої точки P (отримати максимум виграшу, тобто $\max_{0\leq x\leq 1} \min_i v_1^{(j)}$). Отже, отримаємо $x_1^0 = x^0$, $x_2^0 = 1 - x^0$, $v(A) = v_1(x^0) = v^0$. Оскільки для точки $P(x^0; v^0)$ маємо рівність $a_{11}x^0 + a_{21}(1 - x^0) = a_{12}x^0 + a_{22}(1 - x^0)$, то отримаємо $x^0 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$; $v = \frac{\Delta}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$. Як бачимо для $x_1^0 = x^0$, $x_2^0 = 1 - x^0$, розв'язки співпадають з аналітичним розв'язанням [20, 21].

Приклад 1.6 Знайти розв'язок гри з наступною платіжною матрицею.

$$H = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Розв'язання:

<table>
<tr><td></td><td>B_1</td><td>B_2</td><td>$\min_j(a_{ij})$</td><td>$\max_i \min_j(a_{ij})$</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>4</td><td>7</td><td>4</td><td rowspan="2">4</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>9</td><td>3</td><td>3</td></tr>
<tr><td>$\max_i(a_{ij})$</td><td>9</td><td>7</td></tr>
<tr><td>$\min_j \max_i(a_{ij})$</td><td colspan="2">7</td></tr>
</table>

Визначаємо гарантований виграш, який визначається нижньою ціною гри $\alpha = 4$, яка вказує на максимальну чисту стратегію. Верхня ціна гри $\beta = 5$. Оскільки $\alpha \neq \beta$,це означає, що сідлова точка відсутня і ціна гри знаходиться в інтервалі $4 \leq y \leq 5$. Знайдемо розв'язок матричної гри в змішаних стратегіях.

Для розв'язання будемо використовувати графічний метод, що складається з декількох етапів.

1) У декартовій прямокутній системі координат на осі абсцис відкладаємо відрізок довжини 1. Лівий кінець відрізка, що лежить в точці x = 0, буде стратегією A_1, а правий кінець відрізка, що лежить в точці x = 1, - стратегією A_2. Точки, що лежать в проміжках цього відрізка, відповідають можливостям деяких стратегій $S_1 = (p_1; p_2)$

2) Значення стратегії A_1 відкладаємо на лівій осі ординат. А на прямій, що паралельна осі ординат і проходить через x = 1, відкладаємо виграші стратегії A_2. Розв'язок даної гри проводимо з позиції гравця A, який дотримується максимінної стратегії. Жоден гравець не має ні дублюючу, ні домінуючу стратегію. Визначимо нижню межу виграшу A_1PA_2. Точка P відповідає максимінній оптимальної стратегії гравця А, яка лежить на перетині відрізків A_1A_1' і A_2A_2'. Для цих відрізків можна записати систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = 4 + (9-4)p_1 \\ y = 7 + (3-7)p_2 \end{cases}$$

Звідки отримуємо: $p_1 = \frac{2}{3}$, $p_2 = \frac{1}{3}$

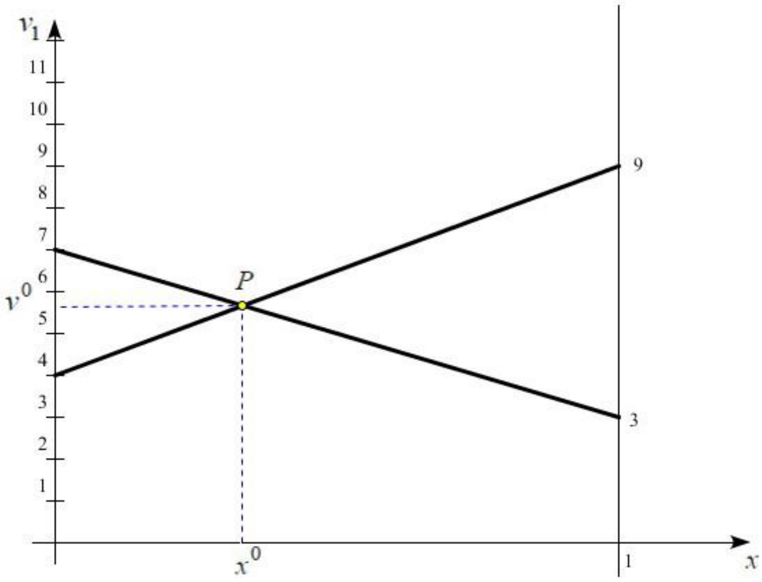

Рис.3. Графічний розв'язок гри прикладу 1.6.

Запишемо ціну гри: $y = \frac{17}{3}$. Тепер знайдемо максимальну стратегію гравця В за допомогою системи рівнянь:

$$\begin{cases} 4q + 7q_2 = y \\ 9q_1 + 3q_2 = y \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases}$$

Розв’язавши, дану систему, отримуємо: $q_1 = \frac{4}{9}$, $q_2 = \frac{5}{9}$.

Відповідь: ціна гри $y = \frac{17}{3}$, стратегії першого та другого гравців: $P\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right), Q(\frac{4}{9};\frac{5}{9})$.

Наступну гру розв’яжемо аналітичним і графічним способами.

Приклад 1.7 Розв’язати матричну гру з наступною платіжною матрицею.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 40 & 20 \end{pmatrix}$$

Розв’язання:

	B_1	B_2	$\min\limits_j(a_{ij})$	$\max\limits_i \min\limits_j(a_{ij})$
A_1	10	30	10	20
A_2	40	20	20	
$\max\limits_i(a_{ij})$	40	30		
$\min\limits_j \max\limits_i(a_{ij})$	30			

Дана матрична гра немає ситуації рівноваги в чистих стратегіях, причому $\alpha = 20 < \beta = 30$. Таким чином $20 \le v(A) \le 30$.

Задача для гравця 1. Спочатку розглянемо аналітичний спосіб розв'язування. У відповідності до формул отримаємо:

$$\Delta = 10 \cdot 20 - 40 \cdot 30 = -1000 \neq 0$$

$$v^0 = \frac{-1000}{10 + 20 - 30 - 40} = -\frac{1000}{-40} = 25$$

$$x_1^0 = \frac{20 - 40}{-40} = \frac{-20}{-40} = 0{,}5;\ x_2^0 = \frac{10 - 30}{-40} = \frac{-20}{-40} = 0{,}5.$$

Таким чином маємо оптимальну стратегію гравця 1: $X^0 = (0{,}5; 0{,}5)$.

Розв'яжемо задачу гравця 1 графічно

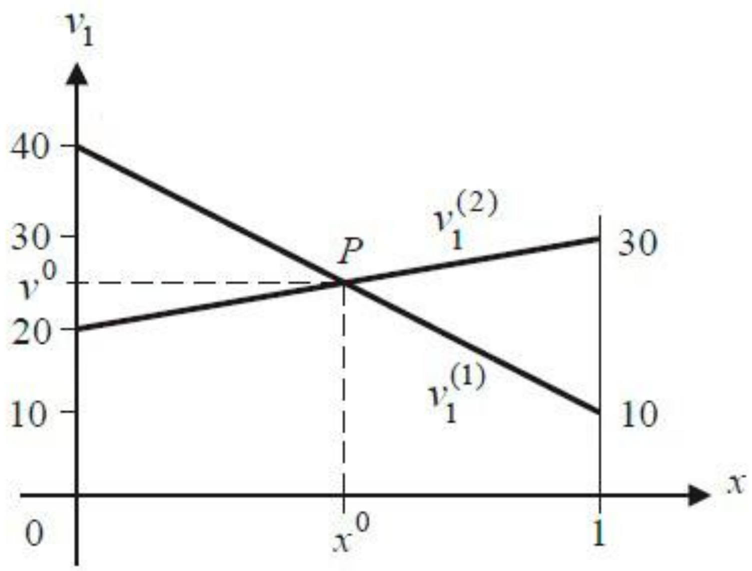

Рис. 4 Графічне розв'язування гри для гравця 1.

Для точки $P(x^0; v^0)$ отримаємо з рівності $v_1^{(1)} = v_1^{(2)}$: $10x + 40(1 - x) = 30x + 20(1 - x) \Rightarrow x = \frac{1}{2}$, тобто $x_0 = 0{,}5$; $v_0 = v(A) = 25$. Звідси маємо $x_1^0 = x^0 = 0{,}5$; $x_2^0 = 1 - x^0 = 1 - 0{,}5 = 0{,}5; v(A) = 25$.

Задача для гравця 2. Розв'язуючи задачу аналітично - отримаємо $y_1^0 = \frac{20-30}{-40} = \frac{-10}{-40} = 0{,}25$; $y_2^0 = \frac{10-40}{-40} = \frac{-30}{-40} = 0{,}75$.

Таким чином маємо оптимальну стратегію для гравця 2: $Y^0 = (0{,}25; 0{,}75)$.

Знайдемо розв'язок гри графічно (рисунок 4).

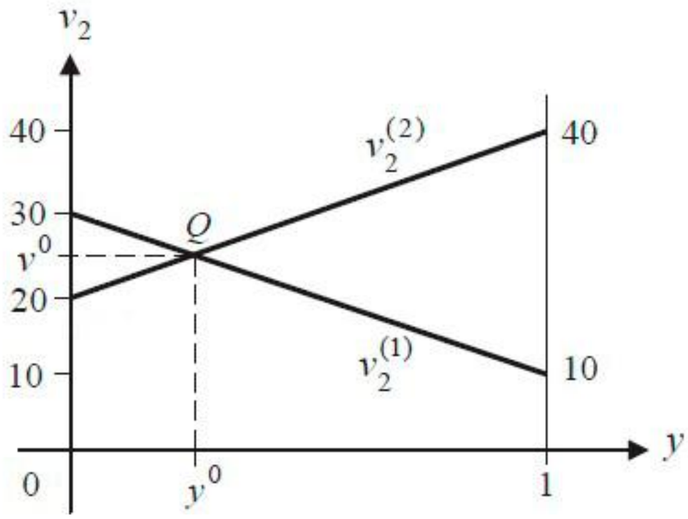

Рис. 5 Графічне розв’язання гри для гравця 2.

Для точки Q значення y^0 і v^0 отримаємо з рівності $v_2^{(1)} = v_2^{(2)}$: $10y + 30(1-y) = 40y + 20(1-y) \Rightarrow y = \frac{1}{4}$, тобто $y_0 = 0{,}25;\ v_0 = v(A) = 25$. Звідси маємо $y_1^0 = x^0 = 0{,}25;\ y_2^0 = 1 - y^0 = 1 - 0{,}25 = 0{,}75; v(A) = 25$.

1.3.3.2 Розв'язування матричної гри $2 \times n$ та $m \times 2$

Аналогічно до розв’язування гри 2×2 можна розв’язати гру $2 \times n$, тобто коли гравець 1 має лише дві стратегії, а гравець 2 - n стратегій. У такому разі на графіку слід зобразити перетин n прямих, що відповідають n стратегіям гравця 2. Мінімальні виграші гравця 1 – це теж ламана лінія, максимальне значення якої і визначатиме оптимальну стратегію для гравця 1.

Можна також розв’язувати $m \times 2$, з тією різницею, що необхідно визначати не нижню величину виграшу, а верхню, і знаходити не максимальне, а мінімальне з можливих значень.

Приклад 1.8 Розв’язати гру, задану матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 3 & 8 \\ 1 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

Розв’язання

	B_1	B_2	B_3	$\min\limits_j(a_{ij})$	$\max\limits_i \min\limits_j(a_{ij})$
A_1	11	3	8	3	3

A_2	1	10	9	1	
$\max\limits_{i}(a_{ij})$	11	10	9		
$\min\limits_{j}\max\limits_{i}(a_{ij})$	9				

Дана гра немає ситуації рівноваги в чистих стратегіях, причому $3 \leq \ v \leq 9$.

Гравець 1 має дві чисті стратегії, відповідно, число змінних дорівнює 2: $x_1; x_2$. Тому застосуємо графічний метод розв'язування задачі для гравця 1.

Нехай гравець 1 вибере свою стратегію $i = 1$ з ймовірність $x_1 = x$ і стратегію $i = 2$ з ймовірність $x_2 = 1 - x$. Якщо при цьому гравець 2 вибере свою стратегію $j = 1$, то математичне очікування виграшу гравця 1 буде рівно $M\xi_1 = \ v_1^{(1)} = 11x - (1 - x) = 10x + 1$. Якщо при цьому гравець 2 вибере свою стратегію $j = 2$, то математичне очікування виграшу гравця 1 буде рівно $M\xi_1 = \ v_1^{(2)} = 3x - 10(1 - x) = -7x + 10$. При виборі стратегії $j = 3$, математичне очікування виграшу гравця 1 буде рівно $M\xi_1 = v_1^{(3)} = 8x - 9(1 - x) = -x + 9$.

Графічний розв'язок цієї гри зображено на рисунку 6.

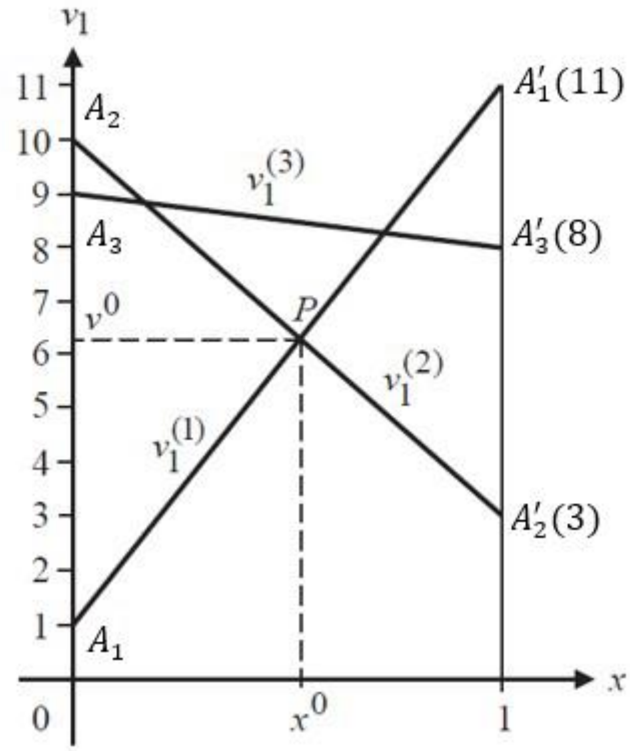

Рис. 6 Графічне розв'язання задачі 1.8 для гравця 1.

Ламана лінія $A_1PA_3'(8)$ являє собою найменший виграш гравця 1 у різних виборах $0 \leq x \leq 1$ (відповідає $\min_j v_1^{(j)}$). При цьому відрізок прямої $v_1^{(3)}$ строго розміщений вище цієї прямої (гарантований виграш гравця 1). Це означає, що гравець 2 свідомо не буде вибирати свою стратегію 3.

Гравець 1 вибирає x так, щоб досягнути найвищої точки P (отримати максимум виграшу, тобто $\max_{0\leq x\leq 1} \min_i v_1^{(j)}$). Точка P – точка перетину прямих $v_1^{(1)}$ і $v_1^{(2)}$, тобто стратегії $j = 1$ і $j = 2$ гравця 2 є активними.

Для точки $P(x^0; v^0)$ отримаємо з рівності $v_1^{(1)} = v_1^{(2)}$:

$10x + 1 = -7x + 10 \Rightarrow x = \frac{9}{17}$, тобто $x^0 = \frac{9}{17}, v^0 = v_1(x^0) = \frac{107}{17} = 6\frac{15}{17}$. Звідси маємо: $x_1^0 = x^0 = \frac{9}{17}$; $x_2^0 = 1 - x^0 = \frac{8}{17}; v(A) = v^0 = \frac{107}{17} = 6\frac{15}{17}$.

Отже маємо оптимальну стратегію гравця 1: $X^0 = \left(\frac{9}{17}; \frac{8}{17}\right)$ з ціною гри $v^0 = 6\frac{15}{17}$.

1. Розглянемо задачу для гравця 2. Серед чисел y_1, y_2, y_3, що задовольняють нерівність

$$\begin{cases} 11y_1 + 3y_2 + 8y_3 \leq v \\ y_1 + 10y_2 + 9y_3 \leq v \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_1 + y_2 + y_3 = 1 \end{cases}$$

знайти такі y_1^0, y_2^0, y_3^0, які задовольняють $\min v$.

Оскільки стратегії y_1, y_2 – активні, y_3- неактивна, то $y_3^0 = 0$; $y_1^0 \geq 0$, $y_2^0 \geq 0$, тоді маємо рівності

$$\begin{cases} 11y_1 + 3y_2 = v \\ y_1 + 10y_2 = v \end{cases}$$

за умови $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$; $y_1 + y_2 = 1$.

Тоді отримаємо $y_1^0 = \frac{7}{17}$; $y_2^0 = \frac{10}{17}; v(A) = v^0 = \frac{107}{17}$.

Отже, маємо оптимальну змішану стратегії для гравця 2: $Y^0 = \left(\frac{7}{17}; \frac{10}{17}; 0\right)$ з ціною гри $v^0 = 6\frac{15}{17}$.

1.3.4 Запис матричної гри у вигляді задачі лінійного програмування

Якщо гра $2 \times n$ або $m \times 2$ може бути розв'язана геометрично, то у випадку коли гра є $3 \times n$ ($m \times 3$) геометрична інтерпретація переходить у простір, що ускладнює як її побудову, так і сприйняття. Коли ж $n > 3$, $m > 3$, геометрична інтерпретація взагалі неможлива. Для розв'язування гри $m \times n$ використовують прийом зведення її до задачі лінійного програмування.

Нехай розглядається матрична гра $m \times n$ з матрицею А, при чому будемо вважати, що всі $a_{ij} > 0, i = 1 \dots m; j = 1 \dots n$. Тоді значення гри $v(A) > 0$.

Знайдемо спочатку оптимальну стратегію гравця 1. За основною теоремою теорії ігор така стратегія має забезпечити гравцеві виграш, не менший за ціну гри (поки що невідому величину) $v(\beta)$, за будь-якої поведінки гравця *2*.

Допустимо, що гравець А застосовує свою оптимальну стратегію, а гравець 2 — свою «чисту» j-ту стратегію B_j, тоді середній виграш гравця А дорівнюватиме:

$$a_{1j}x_1^0 + a_{2j}x_2^0 + \dots + a_{mj}x_m^0 \quad (1)$$

За цих обставин виграш має бути не меншим, ніж ціна гри. Отже, для будь-якого значення $j = \overline{1, n}$ величина (1) має бути не меншою, ніж υ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^0 + a_{21}x_2^0 + \dots + a_{m1}x_m^0 \geq v \\ a_{12}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + \dots + a_{m2}x_m^0 \geq v \\ \dots \\ a_{1n}x_1^0 + a_{2n}x_2^0 + \dots + a_{mn}x_m^0 \geq v \end{cases}$$

Розділимо всі обмеження на υ, маємо:

$$\begin{cases} \frac{a_{11}x_1^0}{v} + \frac{a_{21}x_2^0}{v} + \dots + \frac{a_{m1}x_m^0}{v} \geq 1 \\ \frac{a_{12}x_1^0}{v} + \frac{a_{22}x_2^0}{v} + \dots + \frac{a_{m2}x_m^0}{v} \geq 1 \\ \dots \\ \frac{a_{1n}x_1^0}{v} + \frac{a_{2n}x_2^0}{v} + \dots + \frac{a_{mn}x_m^0}{v} \geq 1 \end{cases}$$

Позначимо $\frac{x_i^0}{v} = t_i$ маємо:

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \cdots + a_{m1}t_m \geq 1 \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \cdots + a_{m2}t_m \geq 1 \\ \ldots \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \cdots + a_{mn}t_m \geq 1 \end{cases}$$

$t_i \geq 0$ $(i = \overline{1,m}$.

Враховуючи те, що $x_1^0 + x_2^0 + \ldots + x_m^0 = 1$, отримуємо $t_1 + t_2 + \ldots + t_m = \frac{1}{v}$.

Необхідно зробити виграш максимальним. Цього можна досягти, коли вираз $t_1 + t_2 + \ldots + t_m = \frac{1}{v}$ набуватиме мінімального значення. Отже, врешті маємо звичайну задачу лінійного програмування.

Цільова функція:

$$max\, v = min \frac{1}{v} = min \sum_{i=1}^{m} t_i$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \ldots + a_{m1}t_m \geq 1; \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \ldots + a_{m2}t_m \geq 1; \\ \ldots \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \ldots + a_{mn}t_m \geq 1. \end{cases} \quad t_i \geq 0 \left(i = \overline{1,m}\right).$$

Розв'язуючи цю задачу, знаходимо значення t_i $\left(i = \overline{1,m}\right)$, а також величину $\frac{1}{v}$ і значення $x_i^0 = vt_i$, що є оптимальним розв'язком початкової задачі. Отже, визначено змішану оптимальну стратегію $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ для гравця 1.

За аналогією можна записати задачу лінійного програмування для визначення оптимальної стратегії гравця 2. З цією метою позначимо:

$u_j = \frac{y_j^0}{v} \left(j = \overline{1,n}\right)$.

Маємо таку лінійну модель задачі:

$$max\, f = \sum_{j=1}^{n} u_j$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \ldots + a_{1n}u_n \leq 1; \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{2n}u_n \leq 1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \ldots + a_{mn}u_n \leq 1. \end{cases}$$

$u_j \geq 0 \left(j = \overline{1, n}\right)$.

Очевидно, що задача лінійного програмування для гравця *2* є двоїстою до задачі гравця A, а тому оптимальний розв'язок однієї з них визначає також оптимальний розв'язок спряженої.

Властивість (принцип двоїстості). Якщо одна із двоїстих задач має розв'язок, то і інша задача також має розв'язок, і при цьому для величини $f_{max} = \max_{y \in S} f(y)$ і $f^*_{min} = \min_{x \in T} f^*(y)$, справедлива рівність $f_{max} = f^*_{min}$.

Приклад 1.9 Розв'язати гру з платіжною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 8 \\ -4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Розглянемо стратегічно еквівалентну гру з матрицею $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 11 & 3 & 8 \\ 1 & 10 & 9 \end{pmatrix}$. При цьому всі елементи матриці додатні, тому значення гри пов'язані рівністю $v(\tilde{A}) = v(A) + 5$.

1. Запишемо задачу для гравця 1 в формі задачі лінійного програмування.

Задача для гравця 1. Серед чисел x_1, x_2, які задовольняють нерівності

$$\begin{cases} 11x_1 + x_2 \geq 1 \\ 3x_1 + 10x_2 \geq 1 \\ 8x_1 + 9x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Знайти такі розв'язки, які задовольняють $f^* = x_1 + x_2 \to min$.

Розв'яжемо дану задачу лінійного програмування графічним способом.

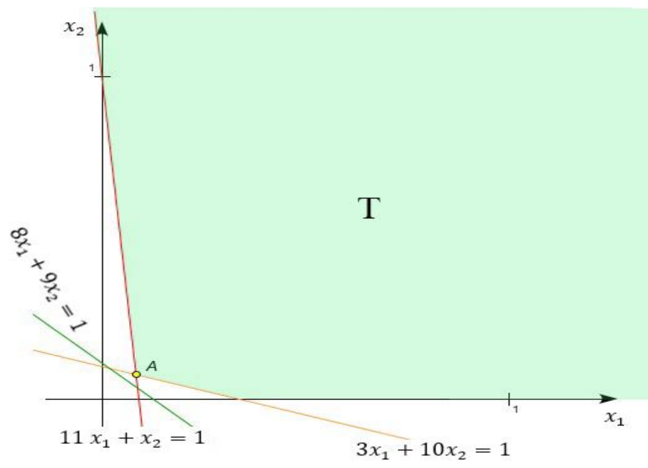

Рис. 7 Задача для гравця 1.

Допустима множина T, визначається системою обмежень $T = \{x = (x_1, x_2) \in R^2 : \tilde{A}x \geq c, x \geq 0\}$ показано на рис.7 заштрихованою багатокутною необмеженою областю. Лінії рівня цільової функції $x_1 + x_2 = \alpha, \alpha = const$. При паралельному зміщенні лінії рівня вздовж напряму антиградієнта величина α зменшується. Тоді значення f^*_{min} досягається в точці $A(x_1^0, x_2^0)$ – точка перетину ліній $\begin{cases} 11\,x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 + 10x_2 = 1 \end{cases}$. Таким чином координати точки А визначають розв'язання даної задачі лінійного програмування: $x_1^0 = \frac{9}{107}, x_2^0 = \frac{8}{107}$ $f^*_{min} = \frac{17}{107}, v(\tilde{A}) = \frac{107}{17}$.

Звідси маємо:

$$p_1^0 = \frac{107}{17} \cdot \frac{9}{107} = \frac{9}{17}, \; p_2^0 = \frac{107}{17} \cdot \frac{8}{107} = \frac{8}{17} \Rightarrow p^0 = \left(\frac{9}{17}; \frac{8}{17}\right)$$

$$v(A) = v(\tilde{A}) - 5 = \frac{107}{17} - 5 = \frac{22}{107}$$

2. Запишемо двоїсту до задачі гравця 1 – задачу для гравця 2.

Серед чисел y_1, y_2, y_3, які задовольняють нерівності

$$\begin{cases} 11y_1 + 3y_2 + 8y_3 \leq 1 \\ y_1 + 10 + 9y_3 \leq 1 \\ y_1 \geq 0, \quad\quad y_2 \geq 0, y_3 0 \end{cases}$$

Знайти такі y_1^0, y_2^0, y_3^0, які задовольняють $y_1 + y_2 + y_3 \to max$.

Розв'язавши дану систему графічно рисунок 8, отримаємо:

$$y_1 + y_2 = 17/107$$

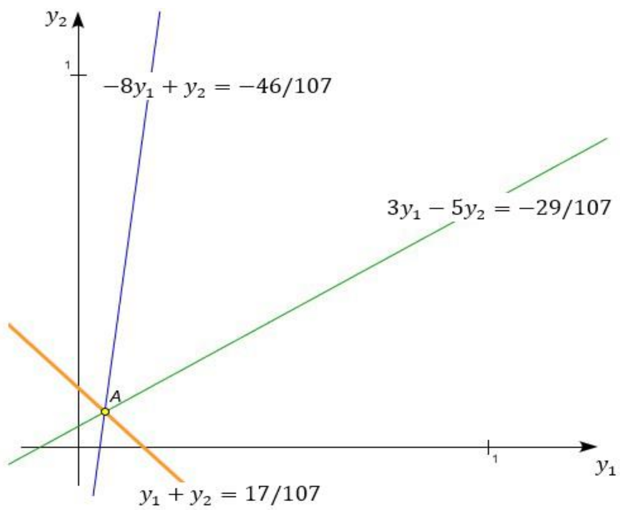

Рис.8 Задача для гравця 2

$$y_1^0 = \frac{7}{107}, y_2^0 = \frac{10}{107}, y_3^0 = 0, v(\tilde{A}) = \frac{107}{17}$$

Оптимальна стратегія $Q^0 = (q_1^0, q_2^0, \dots q_n^0)$ гравця 2 знаходиться із відношень $q_j^0 = v^0 y_j^0 = \frac{y_j^0}{f^0}$, для $j = 1, 2, 3.$ З цього маємо $Q^0 = \left(\frac{7}{17}, \frac{10}{17}, \dots 0\right)$.

1.3.5 Розв'язування матричних ігор симплекс методом

Алгоритм отримання оптимального розв'язку в задачі лінійного програмування представлений в симплекс-методі і реалізовується за допомогою симплекс-таблиць.

Симплекс-метод полягає в поступовому переході від одного опорного плану до іншого так, щоб значення цільової функції лише зменшувалося.

Нехай задано задачу в канонічній формі:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to min$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_i \geq 0;\ i = \overline{1, n},\ b_i \geq 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Вектор $\bar{x}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_3)$ називають *планом* задачі лінійного програмування, якщо він задовольняє систему обмежень цієї задачі.

Означення План $\bar{x}$ задачі лінійного програмування називають опорним, якщо вектори стовпці системи обмежень $A_j(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$, що відповідають додатнім компонентам вектору $\bar{x}$ утворюють лінійно незалежну невід'ємну систему [1].

Оскільки опорних планів будь-яка задача має скінченну кількість, то за скінченне число кроків можна показати, що існує оптимальний план, або те, що цільова функція не обмежена на множині планів.

Нехай задано задачу в канонічній формі (1). Припустимо, що система обмежень не містить нульових та суперечливих рівнянь і всі вони лінійно незалежні. Використовуючи метод Гауса зробимо так, щоб система була розв'язною відносно деякого базису. Тобто базові невідомі були виражені через вільні.

Не порушуючи загальності будемо вважати, що базовими є перші m невідмих:

$$S_1 \begin{cases} x_1 + \cdots + a'_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a'_{1n,}x_n = b'_1 \\ x_2 + \cdots + a'_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + a'_{2n,}x_n = b'_2 \\ \cdots \\ x_m + a'_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + a'_{mn}x_n = b_m \\ x_i \geq 0;\ i = 1 \div n \end{cases}$$

Виразимо через вільні невідомі цільову функцію:

$$z = c'_0 + c'_{m+1}x_{m+1} + \cdots + c'_n x_n$$

Нехай всі вільні невідомі дорівнюють 0, тоді $x_{m+1} = x_{m+2} = x_n = 0$

$\overline{X}(b'_1, b'_2, \dots, b'_m, 0, \dots 0)$ – опорний план, оскільки $\{A_1, A_2 \dots, A_m\}$ – лінійно незалежна і такими ж будуть вектори A_i, що їм відповідають.

Створений таким чином опорний план і значення цільової функції називають базовими $X_{\text{баз.}}, Z_{\text{баз.}} = C'_0$.

Слід оцінити знайдене значення Z на оптимальність. Для цього проведемо на аналіз коефіцієнтів біля вільних невідомих у виразі для Z і коефіцієнти системи S_1.

Порядок роботи з симплекс-методом:

1) Зведення задачі до канонічної форми і до виду розв'язаного відносно деякого базису.

2) Знаходження значень базових невідомих оптимального плану та базового значення цільової функції Z (через прирівнювання до 0 вільних невідомих).

3) Перевірка отриманого значення Z на оптимальність. Аналіз коефіцієнтів біля вільних невідомих у виразі для Z:

3.1) якщо всі вони додатні, то значення Z мінімальне;

3.2) якщо існує додатний коефіцієнт, то аналізують коефіцієнти біля відповідної невідомої в перетвореній системі обмежень:

3.2.1) якщо всі коефіцієнти - від'ємні, то $Z_{min} \to -\infty$;

3.2.2) якщо існує додатній, то роблять перерахунок і знову аналізують коефіцієнти [16].

Задачу лінійного програмування зручніше розв'язувати використовуючи симплекс-таблиці.

Розглянемо систему :

$$S_1 \begin{cases} x_1 + a'_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a'_{1n,}x_n = b'_1 \\ x_2 + a'_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + a'_{2n,}x_n = b'_2 \\ \cdots \\ x_p + a'_{p,m+1}x_{m+1} + \cdots + a'_{pn}x_n = b'_p \\ \cdots \\ x_m + a'_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_n \end{cases}$$

Запишемо цю систему в першу симплекс таблицю

Таблиця 3

Bas	…	ВЧ	x_1	…	x_p	…	x_m	x_{m+1}	…	$\downarrow x_l$	…	x_n	θ
x_1	…	b'_1	1	…	0	…	0	a'_{1m+1}	…	a'_{1l}	…	a'_{1n}	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
$\to x_p$	…	b'_p	0	…	1	…	0	a'_{pm+1}	…	a'_{pl}	…	a'_{pn}	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
x_m	…	b'_m	0	…	0	…	1	a'_{mm+1}	…	a'_{nl}	…	a'_{mn}	
Z	…	c'_0	0	…	0	…	0	$-c'_{m+1}$	…	$\underline{-c'_l}$ $\underline{> 0}$	…	$-c'_n$	

В останньому рядочку шукають $c_j > 0$ і виділяють стовпчик. Якщо цих коефіцієнтів декілька обирають найбільший.

Розглядають відношення стовпчика вільних членів до відповідних елементів виділеного стовпця, серед цих відношень записують лише невід'ємні і обирають найменше.

Коли невідому x_p виключену з базису, а x_l включим, то отримали систему S_5, яку записують у другу симплекс таблицю.

$$S_2\begin{cases} x_1 + a''_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a''_{1n}x_p + \cdots + a''_{1n}x_n = b''_1 \\ \cdots \\ x_l + a''_{lm+1}x_{m+1} + \cdots + a''_{lp}x_p + \cdots + a''_{ln}x_n = b''_l \\ \cdots \\ x_m + a''_{mm+1}x_{m+1} + \cdots + a''_{mp}x_p + \cdots + a''_{mn}x_n = b''_m \end{cases}$$

$$z = c''_0 - (c''_{m+1} + x_{m+1} - \cdots - c''_p x_p - \cdots - c''_n) \to min$$

Друга симплекс таблиця

Таблиця 4

Bas	…	ВЧ	x_1	…	x_p	…	x_m	x_{m+1}	…	x_l	…	x_n	θ
x_1	…	b''_1	1	…	a''_{1p}	…	0	a''_{1m+1}	…	0	…	a''_{1n}	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
x_l	…	b''_l	0	…	a''_{lp}	…	0	a''_{lm+1}	…	1	…	a''_{ln}	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
x_m	…	b''_m	0	…	a''_{mp}	…	1	a''_{mm+1}	…	0	…	a''_{mn}	
z	…	c''_0	0	…	$-c''_p$	…	0	$-c''_{m+1}$	…	0	…	$-c''_n$	

Щоб перейти від таблиці 1 до таблиці 2 потрібно:

1) Поділити виділений рядочок на розв’язковий a'_{pl}. Тобто на місці a'_{pl} утвориться 1. І записати цей рядочок у таблицю 2 першим.

2) За методом Гауса робимо 0 у виділеному стовпчику, крім місця a'_{pl}. В результаті отримаємо таблицю 2.

Отже, процес розв’язування задачі симплекс-методом полягає у переході від однієї симплекс-таблиці до іншої за вказаними правилами.

Цей процес триває доти поки в останньому рядочку симплекс-таблиці, крім стовпчика вільних членів, не буде одержано недодатні числа або не буде показано, що цільова функція не обмежена на множині планів, тобто $z_{min} \to \infty$.

Розглянутий підхід можна застосовувати для розв'язування матричних ігор з матрицею А порядку $m \times n$. Оптимальні змішані стратегії $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ щодо гравців 1 і 2 та ціна гри повинна задовольняти співвідноження:

$$(2)\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \geq v \ (j = \overline{1,n}) \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \ (i = \overline{1,m}) \end{cases}; \ (3)\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \leq v \ (i = \overline{1,m}) \\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ y_j \geq 0 \ (j = \overline{1,n}) \end{cases}$$

Розділимо всі рівняння і нерівності у даних співвідношеннях на v (це можна зробити оскільки за припущенням $v > 0$) і введемо позначення:

$$\frac{x_i}{v} = p_i \ (i = \overline{1,m}), \frac{y_i}{v} = q_j \ (j = \overline{1,n})$$

Тоді співвідношення (2) і (3) відповідно перепишуться у вигляді:

$$(2') \sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i \geq 1, \sum_{i=1}^{m} p_i = \frac{1}{v}, p_i \geq 0 \ (i = \overline{1,m})$$

$$(3') \sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j \geq 1, \sum_{j=1}^{n} q_j = \frac{1}{v}, q_j \geq 0 \ (j = \overline{1,n})$$

Оскільки перший гравець прагне знайти такі значення x_i і в свою чергу p_i, щоб ціна гри була максимальною, розв'язок першої задачі зводиться до пошуку таких додатніх значень p_i $(i = \overline{1,m})$, для яких

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \to \min, \ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i \geq 1$$

Відповідно другий гравець прагне знайти такі значення y_j, а отже і q_j, щоб ціна гри була найменшою, розв'язок другої задачі зводиться до пошуку таких додатніх значень $q_j (j = \overline{1,n})$,

$$\sum_{i=1}^{m} q_j \to \max, \ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}q_j \geq 1$$

Дані формули описують двоїсті одна до одної задачі лінійного програмування. Розв'язавши ці задачі, отримаємо значення p_i, q_j і v. Змішані стратегії отримаємо з виразів $x_i = vp_i, y_j = vq_j$.

Приклад 1.10 Розв'язати симплекс методом гру задану матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Розв'язання

Складемо пару двоїстих задач

$$Z = p_1 + p_2 + p_3 \to min$$

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + 3p_3 \geq 1 \\ p_1 + 3p_2 + 2p_3 \geq 1 \\ 3p_1 + 2p_2 + 2p_3 \geq 1 \\ p_1, p_2, p_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$F = q_1 + q_2 + q_3 \to max$$

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + 3q_3 \leq 1 \\ q_1 + 3q_2 + 2q_3 \leq 1 \\ 3q_1 + 2q_2 + 2q_3 \leq 1 \\ q_1, q_2, q_3 \geq 0 \end{cases}$$

Розглянемо першу з них:

$$p_1 + p_2 + p_3 \to min$$

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + 3p_3 - p_4 = 1 \\ p_1 + 3p_2 + 2p_3 - p_5 = 1 \\ 3p_1 + 2p_2 + 2p_3 - p_6 = 1 \\ p_1, p_2, p_3 \geq 0 \end{cases}$$

Запишемо симплекс таблиці:

Bas	БК	ВЧ	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
$\to p_4$	0	1	1	1	3	-1 !	0	0
p_5	0	1	1	3	2	0	-1	0
p_6	0	1	3	2	2	0	0	-1
Z	-	0	-1	-1	-1	0	0	0
p_3	1	1/3	1/3	1/3	1	-1/3	0	0
$\to p_5$	0	1/3	1/3	7/3	0	2/3	-1 !	0

p_6	0	1/3	7/3	4/3	0	2/3	0	-1
Z	-	1/3	-2/3	-2/3	0	-1/3	0	0
p_3	1	2/7	2/7	0	1	-3/7	1/7	0
p_2	1	1/7	1/7	1	0	2/7	-3/7	0
$\rightarrow p_6$	0	1/7	15/7	0	0	2/7	4/7	-1 !
Z	-	3/7	-4/7	0	0	-1/7	-2/7	0
p_3	1	4/15	0	0	1	-7/15	1/15	2/15
p_2	1	2/15	0	1	0	4/15	-7/15	1/15
p_3	1	1/15	1	0	0	2/15	4/15	-7/15
Z	-	7/15	0	0	0	-1/15	-2/15	-4/15

$(p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{1}{15}; \frac{2}{15}; \frac{4}{15}\right)$

Тоді $(q_1, q_2, q_3) = (-1; -1; -1)\begin{pmatrix} \frac{-7}{15} & \frac{1}{15} & \frac{2}{15} \\ \frac{4}{15} & \frac{-7}{15} & \frac{-7}{15} \\ \frac{2}{15} & \frac{4}{15} & \frac{-7}{15} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{15}; \frac{2}{15}; \frac{4}{15}\right)$

Отже, ціна гри з платіжною матрицею A

$$v = \frac{1}{p_1 + p_2 + p_3} = \frac{1}{\frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{4}{15}} = \frac{1}{\frac{7}{15}} = \frac{15}{7}$$

$$X = (x_1, x_2, x_3) = (vp_1, vp_2, vp_3) = \left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{4}{7}\right)$$

$$Y = (y_1, y_2, y_3) = (vq_1, vq_2, vq_3) = \left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{4}{7}\right).$$

РОЗДІЛ 2. КРИТЕРІЇ ОПТИМАЛЬНОСТІ В ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ІГОР.

2.1 Матричні ігри з природою

Математична теорія ігор містить наукові та обґрунтовані пропозиції щодо поведінки у конфліктних ситуаціях, демонструючи «як грати без поразки». Щоб застосувати цю теорію, потрібно вміти виражати конфлікт у формі гри. Характерними рисами для будь-якого конфлікту є те, що жодна зі сторін заздалегідь не має точних і повних знань про всі можливі шляхи їх вирішення, а також про інші сторони, їх майбутню поведінку, отже, кожен змушений діяти у невизначених умовах. Невизначеність результату може бути викликана свідомою поведінкою активного супротивника та несвідомою пасивною діяльністю, наприклад природними силами природи: дощем, сонцем, вітром, лавиною тощо. У цьому випадку виключається можливість точних результатів прогнозування. У деяких конфліктах опонент - свідомий і цілеспрямований активний опонент, зацікавлений у невдачі іншого гравця і навмисно перешкоджає успіху і безсовісно прагне до перемоги. В інших конфліктах таких свідомих опонентів немає, лише так звані «сліпі сили природи»: погодні умови, стан торгового обладнання компанії, хвороби працівників, економічна нестабільність, ринкові умови, динаміка обмінного курсу, інфляція, податки, політики, зміна споживчого попиту тощо. У цьому випадку природа діятиме пасивно. Іноді це може згубно впливати на людей, а іноді це вигідно людям, але її стани значно впливають на результати діяльності. Іншими словами, у цьому типі проблем вибір рішення залежить від стану об’єктивної реальності, який у моделі називається «природа».

Гра з природою це парна матрична гра, в якій свідомий гравець виступає проти учасника байдужого до результату гри [9]. Такого учасника називають природою.

У подібних іграх рішення полягає в знаходженні оптимальної стратегії першого гравця. Стану природи реалізуються під впливом багатьох випадкових і невипадкових факторів і в рекомендаціях природа не потребує.

В іграх з природою платіжна матриця формується з виграшів свідомого гравця. Природа в даних іграх не програє, вона дозволяє або не дозволяє отримати в результаті визначеної стратегії в бізнесі, інвестуванні і тощо якийсь виграш свідомому гравцеві.

Чисті стратегії свідомого гравця будемо позначати $A_1, A_2, \dots, A_m$. Природа ж має не стратегії, а різні стани, які позначимо $N_1, N_2, \dots, N_n$. Під *станами природи* розуміють повну сукупність зовнішніх умов, в яких статисту (1-му гравцю) потрібно вибрати свою стратегію. Із попереднього досвіду статисту зазвичай відомі можливі стани природи, а іноді і ймовірності q_{ij}, з якими природа їх реалізує. Ці ймовірності називають *апріорними*.

Платіжна матриця гри з природою має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots & a_{1j} \cdots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} \dots & a_{ij} \cdots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \dots & a_{mj} \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

де a_{ij} − виграш свідомого гравця, який використав чисту стратегію A_i за умови, що природа реалізувала свій стан N_j.

Крім платіжної матриці в іграх з природою розглядають також матрицю ризиків. *Ризиком* гравця 1 (статиста) для стану природи N_j і використаної стратегії A_i називають різницю між максимальним виграшом, який гравець міг би отримати, знаючи наперед, що природа реалізує свій стан N_j і тим виграшом, який реально він отримав: $r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}$.

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} \dots & r_{1j} \cdots & r_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{i1} \dots & r_{ij} \cdots & r_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} \dots & r_{mj} \dots & r_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матриця ризиків є додатною. В більшості випадків вона характеризує виграш, який не отримав гравець 1. Слід зауважити, що вихідна платіжна матриця (матриця виграшів) може однозначно бути перетворена в матрицю ризиків, але не навпаки.

Приклад 2.1 Перетворити платіжну матрицю в матрицю ризиків.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 9 \\ 3 & 8 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Знаходимо масимальні елементи для кожного стовпця $\max_i a_{ij}$, і облислимо різницю для знаходження елемента $r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}$.

$$R = \begin{pmatrix} 4-1 & 8-4 & 6-5 & 9-9 \\ 4-3 & 8-8 & 6-4 & 9-3 \\ 4-4 & 8-6 & 6-6 & 9-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

При розв'язанні матричних ігор з природою достатньо знайти найкращі рекомендації тільки для гравця 1. Перед тим, як переходити до вибору оптимальних стратегій, необхідно порівняти нижню і верхню ціни гри і у випадку, коли вони не є рівними, є можливість спростити платіжну матрицю (зменшити її розмірність). Такий процес називається домінуванням стратегій. Так, якщо $k -$ тий рядочок домінується яким небуть іншим $s -$ м рядочком, тобто виконується нерівність $a_{kj} \leq a_{sj}$, для $\forall\, j = 1 \ldots n$. То стратегію A_k, яка домінується, тобто $k -$ тий рядочок, можна видалити з матриці, тому що раніше відомо, що вона є гіршою за стратегію A_s. При цьому не можна відкидати стовпці, оскільки природа може реалізувати будь-які свої стани, незалежно від того вигідно це гравцю 1 чи ні.

Приклад 2.2 Домінування стратегій в грі з природою.

Нехай матрична гра з природою задана платіжною матрицею $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 5 & 6 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 9 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 7 & 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

В даному прикладі стратегія A_5 домінує стратегії A_1 і A_3, тому рядочки, які відповідають цим стратегіям можна вилучити.

$$A' = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 6 & 1 & 3 \\ 3 & 9 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 7 & 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

У результаті число рядочків в отриманій матриці на 2 менше, чим у вихідній матриці. Отже, зменшилася кількість кроків розв'язання.

Після спрощення платіжної матриці, іноді краще перейти від неї до матриці ризиків, яка дозволить більш чітко виявити переваги однієї стратегії над іншою при даному стані природи. Так, якщо в платіжній матриці $a_{kl} < a_{st}$, то це ще не означає, що стратегія A_k краще стратегії A_s. Оскільки можливо, що стан природи N_l більш сприятливе для гравця 1 чим N_t.

Методи прийняття рішень у матричних іграх з природою залежать від того відомі чи ні ймовірності станів природи N.

Розглянемо перший випадок. Нехай події, які складаються з того, що природа перебуває в одному із своїх станів $N_1, N_2, \dots, N_n$, несумісні і складають повну групу подій. При цьому ймовірності станів природи - q_j відомі, тобто відомі значення $q_1 = p(N_1), q_2 = p(N_2), \dots, q_n = p(N_n)$, і виконуються умови $q_j > 0, j = 1 \dots n, \sum_{j=1}^{n} q_j = 1$. У такому випадку має місце ситуація *ризику* і рішення приймаються і *умовах ризику*. Прийняття рішень в умовах ризику характеризується тим, що поведінка природи має випадковий характер. Це проявляється в тому, що існує деяка ймовірність, в результаті якої відбуваються ті чи інші події (виникають різні стани природи). При цьому, гравець який приймає рішення, має певну інформацію про ймовірності виникнення цих подій. Статистична модель прийняття рішень в даній ситуації представляє собою гру двох осіб (людини і природи) з використанням людини додаткової статистичної інформації про стани природи.

Розглянемо другий випадок. Якщо ймовірності, з якими природа може перебувати в тому чи іншому стані, невідомі і відсутня можливість отримати про них будь-яку інформацію, то має місце ситуація *повної невизначеності* і рішення приймаються в умовах повної невизначеності.

Розглянемо детальніше кожен із випадків.

2.2 Критерії прийняття рішень в умовах ризику

Розглянемо гру в якій гравцю відомо ймовірності настання того чи іншого стану природи.

Задачу прийняття оптимальних рішень в умовах ризику формулюють таким чином. Нехай відомі ймовірності станів середовища Тоді для кожного рядка платіжної матриці можна визначити очікуваний виграш для фіксованого рішення у вигляді математичного сподівання.

Оптимальною стратегією буде та стратегія, яка забезпечить найбільш очікуваний виграш.

Нехай така гра задана таблицею 6:

Таблиця 6.

	N_1	N_2	$\dots$	N_j	$\dots$	N_n	$\overline{a_\iota}$
A_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1j}	$\dots$	a_{1n}	$\overline{a_1}$
A_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2j}	$\dots$	a_{2n}	$\overline{a_2}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_i	a_{i1}	a_{i2}	$\dots$	a_{ij}	$\dots$	a_{in}	$\overline{a_\iota}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mj}	$\dots$	a_{mn}	$\overline{a_m}$
q_i	q_1	q_2	$\dots$	q_j	$\dots$	q_n	

де $\overline{a_\iota}$ - середнє значення виграшу: $\overline{a_\iota} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_j$, $i = \overline{1, m}$, яке визначається для кожної чистої стратегії A_i гравця 1; q_i - апріорні ймовірності природи.

Для розв’зання таких задач застосовують такі критеоії:

- критерій Байеса;
- критерій Лапласа;
- критерій Ходжа-Лемана;
- критерій Геймеєра.

Розглянемо детальніше кожен із критеріїв.

2.2.1 Критерій Байеса

Припустимо, що гравцю 1 із минулого досвіду відомі не тільки стани природи $N_1, N_2, \dots, N_n$, але й відповідні ймовірності $q_j, j = \overline{1, n}$ з якими природа реалізує ці стани.

Показник ефективності стратегії A_i за критерієм Байеса відносно виграшів називається середнє значення, або математичне сподівання виграшу $i-$го рядочку з врахуванням ймовірностей всіх можливих станів природи. Позначимо це значення через $\overline{a_i} = q_1 a_{i1} + q_2 a_{i2} + \dots + q_n a_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_j$, $i = \overline{1, m}$.

Оптимальною серед чистих стратегій за критерієм Байеса відносно виграшів вважається стратегія A_{i0} з максимальним показником ефективності, тобто максимальним серед виграшів $B = \overline{a_{i0}} = \max_{1 \le i \le m} \overline{a_i}$. Отже, вибраний розв’язок за критерієм Байеса є оптимальним не в кожному окремому випадку, а в загальному.

Розглянемо ту ж гру з природою в якій відомі ймовірності станів природи $q_j, j = \overline{1, n}$. При прийнятті рішень можна користуватися не тільки середніми виграшами, а й середніми ризиками. Тому слід створити матрицю ризиків R.

Показником неефективності стратегії A_i за критерієм Байеса відносно ризиків називають середнє, або математичне сподівання ризиків $i-$го рядочку, ймовірності яких співпадають зі станами природи. Позначимо середні ризик при стратегії A_i через $\overline{r_i}$, тоді $\overline{r_i} = q_1 r_{i1} + q_2 r_{i2} + \dots + q_n r_{in} = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} g_j$, $i = \overline{1, m}$ [24].

Оптимальною серед чистих стратегій за критерієм Байеса відносно ризиків називається середнє значення є стратегія Q_j показник неефективності якої мінімальний, тобто мінімальний середній ризик $\overline{r_{i0}} = \min_{1 \le i \le m} \overline{r_i}$.

Критерії Байеса відносно виграшів і відносно ризиків є еквівалентними, тобто якщо стратегія A_i є оптимальною за критерієм Байеса відносно виграшів, то вона є оптимальною і за критерієм Байеса відносно ризиків і навпаки.

Приклад 2.3 Сільськогосподарське підприємство може реалізувати деяку продукцію наступним чином:

A_1 – відразу після збору;

A_2 – в зимові місяці;

A_3 – у весняні місяці.

Прибуток залежить від ціни реалізації в даний період часу, витрат на зберігання і можливих втрат. Розмір доходу, розрахований для різних станів відношень прибутку і витрат, протягом всього періоду наведено у матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ -1 & 5 & 4 \\ -7 & 13 & -3 \end{pmatrix}.$$

Визначити найбільш вигідну стратегію за критерієм Байеса, якщо ймовірності станів попиту: 0,2; 0,5; 0,3.

Розв'язання.

За критерієм Байеса маємо:

$\overline{a_1} = 2 * 0{,}2 + (-3) * 0{,}5 + 7 * 0{,}3 = 0{,}4 - 1{,}5 + 2{,}1 = 1.$

$\overline{a_2} = -1 * 0{,}2 + 5 * 0{,}5 + 4 + 0{,}3 = -0{,}2 + 2{,}5 + 1{,}2 = 3{,}5.$

$\overline{a_3} = -7 * 0{,}2 + 13 * 0{,}5 + (-3) * 0{,}3 = -1{,}4 + 6{,}5 - 0{,}9 = 4{,}2.$

Серед отриманих значень виберемо максимальне $\overline{a_{\iota 0}} = \max_{1 \le i \le m} \overline{a_\iota} = \overline{a_3}$. Отже стратегія A_3 – продавати все у весняні місяці є оптимальною за даним критерієм.

2.2.2 Критерій Лапласа

Для застосування критерія Байеса потрібно, щоб були відомі ймовірності $q_j, j = \overline{1, n}$ з якими природа реалізує той чи інший свій стан. Але доволі часто складається така ситуація, коли гравець не має можливості визначити ймовірності станів природи, тому відбувається суб'єктивна оцінка таких ймовірностей. Один із таких методів полягає в тому, що ми не можемо віддати перевагу тому чи іншому стану природи, і просто вважаємо їх всі рівноймовірними, тобто

$q_1 = \cdots = q_n = \frac{1}{n}$. Цей принцип і є основою критерію Лапласа.

Показником ефективності стратегії A_i за критерієм Лапласа відносно виграшів називається середнє арифметичне виграшів $i-$ го рядочку:

$\overline{a_i} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,, i = \overline{1,m}$ [18].

Оптимальною серед чистих стратегій за критерієм Лапласа відностно виграшів вважається стратегія A_{i0} з максимальним показником ефективності, тобто максимальним серед виграшів $\overline{a_{i0}} = \max_{1\le i\le m} \overline{a_i}$.

Критерій Лапласа є окремим випадком критерія Байеса за умови, що $q_1 = \cdots = q_n = \frac{1}{n}$. Розглянемо як він застосовується.

Приклад 2.4 Є два проекти X_1 і X_2, які можуть бути реалізовані за трьома можливими сценаріями розвитку регіону і забезпечують різний прибуток. Значення прибутків наведено у матриці

$$A = \begin{pmatrix} 45 & 25 & 50 \\ 20 & 60 & 25 \end{pmatrix}.$$

Необхідно вибрати проект для реалізації.

Розв'язання.

Застосуємо критерій Лапласа, вважаючи, що

$q_1 = q_2 = q_3 = \frac{1}{3}$.

Знайдемо показник ефективності для кожного проекту:

$\overline{a_1} = \frac{1}{3}(45 + 25 + 50) = \frac{1}{3} * 120 = 40.$

$\overline{a_1} = \frac{1}{3}(20 + 60 + 25) = \frac{1}{3} * 105 = 35.$

Серед отриманих значень виберемо максимальне $\overline{a_{i0}} = \max_{1\le i\le m} \overline{a_i} = \overline{a_1}$. Отже, за критерієм Лапласа оптимальним є реалізація проекту X_1, у якого найбільший середній прибуток (40).

Зрозуміло, що припущення $q_1 = \cdots = q_n = \frac{1}{n}$ не завжди є обгрунтованив. В цьому і полягає недолік критерію Лапласа. Розглянемо це на конкретному прикладі.

Приклад 2.5 Гра задана наступною матрицею

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7	Q_8	Q_9	Q_{10}
A_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	100
A_2	9,9	10	10	10	10	10	10	10	10	10,1

Знайдемо показник ефективності для кожної стратегії:

$\overline{a_1} = 101$

$\overline{a_2} = 100$

За критерієм Лапласа оптимальним вважають стратегію A_1, оскільки показник ефективності її максимальний. Однак з таблиці видно, що в стратегії A_1 вкрай нерівномірно розподіллено стани природи. І при виборі даної стратегії гравець може взагалі нічого не отримати. На відміну від стратегії A_2, яке гарантує виграш в 9,9 одиниць.

Зауваження 2.1 У критеріях Байеса і Лапласа мова йшла про вибір оптимальної стратегії свідомого гравця з множини його чистих стратегій. У теорії ігор доводиться, що якщо відомі апріорні ймовірності станів природи, то статистику немає сенсу користуватися змішаними стратегіями, оскільки при цьому його середній виграш не збільшується.

2.2.3 Критерій Ходжа-Лемана

Цей критерій опирається одночасно на критерій Вальда, який розлянуто у пункці 2.3.1 і критерій Байєса. Нехай $W_i = \min_{1\le j\le n} a_{ij}, i = \overline{1,m}$ – показник ефективності стратегії A_i за критерієм Вальда, і нехай B_i – показник ефективності стратегії A_i за критерієм Байєса. Показник ефективності за критерієм Ходжа-Лемана знаходиться за формулою $HL_i = (1-h)\min_{1\le j\le n} a_{ij} + h\sum_{j=1}^{n} p_j a_{ij}, i = \overline{1,m}, 0 \le \mathrm{h} \le 1.$

В правій частині формули коефіцієнт h – це кількісний показник ступеня довіри свідомого гравця даному розподілу ймовірностей $q_j, j = \overline{1,n}$, а коефіцієнт відповідно $1 - h$ характеризує кількісний ступень песимізму свідомого гравця. Чим більше довіри гравця даному розподілу станів природи, тим менше песимізм і навпаки. Чим більше показник довіри, тим більше вибір схиляється до критерію Байєса, в іншому випадку – домінує критерій Вальда. З цього слідує, що критерій Ходжа-Лемана є проміжним між критеріями Вальда і Байєса.

Вибір параметру h є суб'єктивним, так як визначити степінь достовірності якої-небуть функції розподілу доволі складно.

Оптимальною стратегією за критерієм Ходжа-Лемана є стратегія з найбільшим показником ефективності. $HL = \max((1-h)\min_{1\le j\le n} a_{ij} + h\sum_{j=1}^{n} p_j a_{ij})\, , i = \overline{1,m}, 0 \le \text{h} \le 1$ [11]. Розглянемо конкретний приклад.

Приклад 2.6 Підприємство може випускати товари трьох видів, при цьому попит на ці товари залежить від трьох факторів. Платіжна матриця має вид

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 16 & 12 & 14 \\ 13 & 18 & 15 \end{pmatrix}.$$

Знайти оптимальну стратегію за критерієм Ходжа-Лемана при $h = 0{,}6$та ймовірних станів природи 0,2; 0,3; 0,5.

Розв'язання.

Знайдемо показник ефективності кожної з стратегій.

$HL_1 = (1 - 0{,}6) * 10 + 0{,}6 * (20 * 0{,}2 + 15 * 0{,}3 + 10 * 0{,}5) = 0{,}4 * 10 + 0{,}6 * (4 + 4{,}5 + 5) = 4 + 0{,}6 * 13{,}5 = 4 + 8{,}1 = 12{,}1.$

$HL_2 = (1 - 0{,}6) * 12 + 0{,}6 * (16 * 0{,}2 + 12 * 0{,}3 + 14 * 0{,}5) = 0{,}4 * 12 + 0{,}6 * (3{,}2 + 3{,}6 + 7) = 4{,}8 + 0{,}6 * 13{,}8 = 4{,}8 + 8{,}28 = 13{,}08.$

$HL_3 = (1 - 0{,}6) * 13 + 0{,}6 * (13 * 0{,}2 + 18 * 0{,}3 + 15 * 0{,}5) = 0{,}4 * 13 + 0{,}6 * (2{,}6 + 5{,}4 + 7{,}5) = 5{,}2 + 0{,}6 * 15{,}5 = 5{,}2 + 9{,}3 = 14{,}5.$

Знайдемо стратегію з найбільшим показником ефективності. Це $HL_3 = 14{,}5.$ Отже, стратегія A_3 – випускати продукцію 3-го типу є оптимальною.

2.2.4 Критерій Геймеєра

Даний критерій орієнтується на величину втрат. Показник ефективності стратегії A_i за критерієм Геймеєра знаходиться за формулою: $GW_i = \min_{1\leq j\leq n} q_j a_{ij}, i = \overline{1,m}.$

Якщо гравець 1 дотримується своєї стратегії A_i, то ймовірність виграшу a_{ij} при цій стратегії і даному стані природи рівна, ймовірності q_j стану природи. Оптимальною за даним критерієм вважається стратегія з максимальним показником ефективності: $GW = \max_{1\leq i\leq m} GW_i = \max_{1\leq i\leq m} \min_{1\leq j\leq n} q_j a_{ij}$ [24]. Для застосування цього критерію потрібно побудувати матрицю Геймеєра, для цього потрібно кожен елемент матриці A помножити на ймовірності станів природи.

$$G = \begin{pmatrix} a_{11} * p_1 \ldots & a_{1j} * p_j \ldots & a_{1n} * p_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} * p_1 \ldots & a_{ij} * p_j \ldots & a_{in} * p_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} * p_1 \ldots & a_{mj} * p_j \ldots & a_{mn} * p_n \end{pmatrix}.$$

Оскільки $GW_i = \min_{1\leq j\leq n} q_j a_{ij}, i = \overline{1,m},$ то критерій Геймеєра можна інтерпретувати, як критерій Вальда, , який розлянуто у пункті 2.3.1, за умови його застосовання до матричної гри з природою з матрицею Геймеєра.

Критерій Геймеєра як і критерій Вальда є критерієм крайнього песимізму свідомого гравця, но на відміну від критерію Вальда гравець приймаючи рішення з максимальною обачливістю враховує ймовірності станів природи.

Якщо функція розподілу відома не надійно, а числа реалізації малі, то, відповідно до критерію Гермейєра, отримують, взагалі кажучи, невиправдано великий ризик.

Зауваження 2.2 У випадку рівномірного розподілу ймовірностей станів природи $p_j = \frac{1}{n}$, показник ефективності стратегії A_i буде рівний $GW_i = \frac{1}{n}\min_{1\le j\le n} a_{ij}\,, i = \overline{1,m}$. Тобто критерій Геймеєра стане еквівалентним критерію Вальда.

Приклад 2.7 Є 100 урн, у кожній по 10 куль. При цьому скриньки бувають двох типів: в скриньці типу I знаходиться 5 чорних та 5 білих куль, а в урні типу II – 8 чорних та 2 білих кулі.

Відомо, що урн типу I – 70 штук, а урн типу II – 30 штук. Гравець підходить до випадково обраної скриньки і повинен сказати, якого вона типу чи відмовитися від гри. Якщо він називає тип I і вона справді цього типу, він виграє \$500, якщо вона типу II, він програє \$200. Якщо граючий називає тип II і урна дійсно цього типу, він виграє \$1000, якщо вона типу I, він програє \$150. Яке рішення має ухвалити гравець? Ймовірності того, що гравець вибере скриньку I-го типу дорівнює 0,7, а скриньку II-го типу – 0,3.

Розв'язання.

Складемо платіжну матрицю $A = \begin{pmatrix} 500 & -200 \\ -150 & 1000 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

нижній рядок відповідає умові відмови від гри.

Застосуємо критерій Гермейєра. Для цього складемо матрицю Гермейера $G = \begin{pmatrix} 500 * 0,7 & -200 * 0,3 \\ -150 * 0,7 & 1000 * 0,3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 350 & -60 \\ -105 & 300 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Знайдемо показники ефективності кожної стратегії.

$GW_1 = \; -60;$

$GW_2 = \; -150;$

$GW_3 = 0;$

Знайдемо оптимальну стратегію $GW = \max_{1\le i\le m} GW_i = GW_3$.

Отже, оптимальною стратегією за критерієм Гермейєра є стратегія A_3 – відмовитися від гри.

2.3 Критерії прийняття рішень в умовах повної невизначеності

Розглянемо гру з природою, в якій ймовірності q_j станів природи N_j невідомі і отримати будь-яку статистичну інформацію про них неможливо. Тобто гравець перебуває в стані повної невизначеності, пов'язаної з відсутністю інформації про ймовірні стани природи. Таку ймовірність називають «безнадійною». В таких випадках для вибору найкращих рішень в матричних іграх з природою застосовуються наступні критерії, які можна поділити на групи.

Перша група – критерії вибору оптимальних розв'язків *відносно виграшів*. До цієї групи входять:

- максимінний критерій Вальда;
- критерій максимакса (критерій крайнього оптимізму);
- критерій добутків в умовах повної невизначеності;
- критерій песимізму-оптимізму Гурвиця відносно виграшів з показником отимізму λ.

Друга група критеріїв – це критерії вибору оптимальних розв'язків відносно ризиків. До них відносять:

- критерій мінімаксного ризику Севиджа.

Далі детальніше про кожен із критеріїв.

2.3.1 Максимінний критерій Вальда

При застосуванні цього критерію природа розглядається як агресивно налаштований і свідомо діючий супротивником, як в звичайній матричній грі. Тому вибирається стратегія, яка гарантує виграш не менший за нижню ціну гри. У відповідності з цим критерієм із всіх найгірших результатів вибирається найкращий. Застосовувати таку стратегію можна, коли гравець не стільки зацікавлений у власному виграші, а бажає застрахуватися від програшу. Вибрані таким чином рішення повністю виключають ризик. Це означає, що свідомий гравець не може зіткнутися з гіршим результатом, чим той на який він орієнтується. Ця властивість дозволяє вважати критерій Вальда одним із фундаментальних у теорії ігор.

Позначимо показник ефективності стратегій A_i за критерієм Вальда як W_i. Для показника ефективності W_i маємо формулу: $W_i = \min_{1\le j\le n} a_{ij}, i = \overline{1,m}$. Таким чином, показник ефективності W_i стратегії A_i за критерієм Вальда є мінімальний виграш 1 гравця при застосуванні ним цієї стратегії. Ціна гри за чим критерієм знаходиться за формулою: $W = \max_{1\le i\le m} \min_{1\le j\le n} a_{ij}$ [10].

Сформулюємо правило вибору оптимального розв'язку за критерієм Вальда. Нам потрібно знайти елементи W_i – показники ефективності кожної стратегії A_i. Серед всіх чистих стратегій $A_1, A_2, \dots, A_m$ потрібно вибрати ті стратегії A_k, у яких показник ефективності W_k є найбільшим, тобто $W_k = W = \max_{1\le i\le m} \min_{1\le j\le n} a_{ij}$.

Отже, оптимальною серед чистих стратегій за критерієм Вальда вважається та чиста стратегія, при якій мінімальний виграш є максимальним серед усіх мінімальних виграшів всіх чистих стратегій. Вибір оптимального розв'язку не є однозначним. Цьому критерію оптимальності може відповідати декілька чистих стратегій. Вибрані таким чином варіанти розв'язки повністю виключають ризик.

Максимінний критерій Вальда є критерієм крайнього песимізму, оскільки гравець 1 приймаючи рішення діє за принципом найбільшої обережності.

У практичних ситуаціях застосування критерію Вальда може виявитися невигідним. Застосування цього критерію може бути виправдане наступними умовами:

- про ймовірності станів природи нічого невідомо;

- реалізується лише мала кількість розв'язків;
- не допускається ніякий ризик.

Приклад 2.8 Підприємство готується до переходу на виготовлення нових видів продукції. При цьому можливі чотири варіанти A_1, A_2, A_3, A_4. Кожному із варіантів відповідає конкретний вид виготовлення продукції і їх поєднання. Економічна ситуація залежить від попиту на нову продукцію і може бути трьох типів N_1, N_2, N_3. Виграші характеризують відносну величину результату. Гру задано платіжною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,8 & 0,4 \\ 0,6 & 0,5 & 0,6 \\ 0,4 & 0,3 & 0,8 \\ 0,1 & 0,7 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

Знайти оптимальну стратегію для підприємства.

Розв'язання:

1. Знайдемо мінімальні W_i для кожної стратегії

$$W_1 = 0,3$$

$$W_2 = 0,5$$

$$W_3 = 0,3$$

$$W_4 = 0,1$$

2. Використовуючи критерій Вальда,потрібно знайти максимальне значення серед показників ефективності

$W = \max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} a_{ij} = 0,5.$

Таким чином, за критерієм Вальда оптимальним рішенням є стратегія A_2. Вибираючи стратегію A_2, гравець незалежно від варіантів економічної ситуації отримає виграш не менше 0,5.

2.3.2 Критерій максимакса (критерій крайнього оптимізму)

При застосуванні даного критерію гравець 1 орієнтується на те, що умови функціонування систем будуть для нього сприятливі. Внаслідок цього оптимальним вважається розв'язок, який приводить до отримання максимального значення критерія оптимальності в платіжній матриці. Критерій максимакса максимізує максимальні виграші для кожного стану природи. Свідомий гравець, при застосуванні цього критерію вважає, що природа буде знаходитися в найсприятливішому для нього стані.

В економіці нерідко виникають ситуації для застосування цього критерію. Наприклад, коли гравець перебуває перед вибором або отримати найбільший виграш, або стати банкротом.

Показник ефективності стратегії A_i за критерієм максимакса позначимо через M і знаходиться він за формулою: $M = \max_{1\le i\le m} \max_{1\le j\le n} a_{ij}$. Таким чином, показник ефективності чистої стратегії A_i рівний максимальному виграшу гравця при виборі ним цієї стратегії [3].

Правило вибору оптимальних стратегій за критерієм максимаксу (крайнього оптимізму) полягає у наступному. У кожному рядочку вибрати число, яке дорівнює максимальному виграшу гравця $\max_{1\le j\le n} a_{ij}, i = \overline{1,m}$. Серед усіх чистих стратегій A_i вибрати ті стратегії у яких показник ефективності є найбільшим $M = \max_{1\le i\le m} \max_{1\le j\le n} a_{ij}$.

Приклад 2.9 Деяка фірма вирішує збудувати готель в одному з курортних місць. Необхідно визначити найбільш доцільну кількість кімнат у цьому готелі: $A_1 -$ на 20 кімнат, $A_2 -$ на 30 кімнат, $A_3 -$ на 40 кімнат. Для вирішення проблеми створюють кошторис витрат на будівництво готелю з різним числом
кімнат, а також розраховують прибуток залежно від кількості місць, які будуть зняті.

Розрахункові дані наведено у таблиці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ -1 & 5 & 4 \\ -7 & 13 & -3 \end{pmatrix}.$$

Визначимо $\max_{1\le j\le n} a_{ij}, i = \overline{1,m}$

$\max_{1\le j\le n} a_{1j} = 7$, $\max_{1\le j\le n} a_{2j} = 5$, $\max_{1\le j\le n} a_{3j} = 13$.

Визначимо $M = \max_{1\le i\le m} \max_{1\le j\le n} a_{ij} = 13$.

Отже, оптимальною за даним критерієм є стратегія $A_3 -$ будувати готель на 40 кімнат.

2.3.3 Критерій добутків в умовах повної невизначеності ($\boldsymbol{P}$ −критерій)

З самого початку цей критерій орієнтувався величини виграшів, тобто на додатні значенням a_{ij}. Даний критерій можна застосовувати у випадку, коли всі $a_{ij} > 0, i = \overline{1, m},, j = \overline{1, n}.$

Показником ефективності стратегії A_i у відповідності до критерію добутків позначимо через P_i і визначатимемо за допомогою формули:

$$P_i = \prod_j a_{ij}.$$

Отже, показник ефективності чистої стратегії A_i за критерієм добутків дорівнює добутку всіх виграшів гравця 1 при виборі їм даної стратегії. Ціна гри за Р-критерієм визначається за формулою:

$$P = \max_i P_i = \max_i \prod_j a_{ij}.$$

Оптимальною вважається стратегія з максимальним показником ефективності $P_i = P = \max_i P_i$.

Для застосування цього критерію потрібно знайти добутки по рядочках $P_i = \prod_j a_{ij}$, серед цих добутків знайти найбільший. Стратегіє, яка відповідає цьому показнику ефективності є оптимальною для гравця.

Застосування цього критерію зумовлено наступними умовами, що:

- ймовірності реалізації того чи іншого стану природи невідомі;
- появу кожного стану природи потрібно враховувати;
- цей критерій можна застосовувати і при малому числі реалізацій розв’язку;
- допускається деякий ризик.

Якщо умова $a_{ij} > 0,\ i = \overline{1,m},, j = \overline{1,n}$, не виконується, то для застосування $P -$ критерію, потрібно виконати деякий зсув $a_{ij} + b$ кожного елементу матриці, де $b > \left|\min a_{ij}\right|$. На практиці зазвичай $b = \left|\min a_{ij}\right| + 1$.

Вибір розв'язку відповідно $P -$ критерію виявляється менш песимістичним за критерій Вальда. В результаті застосування $P -$ критерію відбувається вирівнювання між значеннями виграшів a_{ij}, тому можна отримати кращі результати, але при цьому слід враховувати і появу гірших результатів.

Приклад 2.10 Сільськогосподарське підприємство має три ділянки землі: вологу, середньої вологості, суху. Одну із цих ділянок рекомендується застосовувати для вирощування картоплі, а інші для посіву зерна. При надлишку вологи посаженна картопля почне гнити, а при не достатній кількості вологи буде погано розвиватися і призведе до неурожаю. Підприємство має три стратегії

$A_1 -$ садити картоплю на вологій ділянці;

$A_2 -$ на ділянці середньої вологості;

$A_3 -$ на сухій ділянці.

Стани природи $N_1, N_2, N_3 -$ кількість осадків, де N_1 – менше норми, N_2 – норма, N_3 – більше норми.

Урожайність картоплі задано матрицею $A = \begin{pmatrix} 250 & 200 & 100 \\ 200 & 230 & 120 \\ 100 & 240 & 260 \end{pmatrix}$.

Знайти оптимальну стратегію для сількогосподарського підприємства.

Розв'язання.

Застосуємо критерій добутків.

1. Перевіримо умову застосування критерію добутків. Всі $a_{ij} > 0, i = \overline{1,m},, j = \overline{1,n}$, тому можна використовувати даний критерій.

2. Знайдемо добутки по рядочках $P_i = \prod_j a_{ij}$:

$P_1 = 250 * 200 * 100 = 5000000$

$P_2 = 200 * 230 * 120 = 5520000$

$P_3 = 100 * 240 * 260 = 6240000.$

3. Знайдемо оптимальну стратегію за формулою $\mathrm{P} = \max_{\mathrm{i}} \mathrm{P_i}$. У розглядуваній задачі $\max_{\mathrm{i}} \mathrm{P_i} = P_3$.

Отже, оптимальною є стратегія $A_3 -$ садити картоплю на сухій ділянці.

2.3.4 Критерій песимізму-оптимізму Гурвіца відносно виграшів з показником отимізму λ

Логічним, при виборі оптимальної стратегії замість двох крайностей (песимізму-оптимізму) в оцінці ситуації дотримання деякої проміжної позиції, яка враховує як найгірший так і найкращий стани природи. Такий компромісний варіант був запропонований Гурвіцем, оціночна функція якого знаходиться десь між точками крайнього оптимізму і крайнього песимізму. Цей критерій рекомендує керуватися якимось середнім результатом. Критерій Гурвіца дозволяє свідомому гравцю самостійно визначити рівень песимізму-оптимізму за допомогою параметра $\lambda \in [0; 1]$ [9].

Визначити показник ефективності стратегії можна за формулою $H_i = \lambda max_j \, a_{ij} + (1 - \lambda) min_j \, a_{ij}$. У формулі величина λ називається показником оптимізму, відповідно $1 - \lambda -$ це показник песимізму гравця.

Вибір оптимальних стратегій з урахуванням розглядуваного критерію у відповідності з максимальним показником ефективності:

$$H_A = \max_{1 \le i \le m} \{\lambda \max_j a_{ij} + (1 - \lambda) \min_j a_{ij}\} = \max_{1 \le i \le m} H_i.$$

Таким чином, відповідно до критерію песимізму-оптимізму Гурвіца для кожної стратегії A_i необхідно визначити опуклу лінійну комбінацію H_i мінімального і максимального виграшів для даної стратегії, і вибрати ту стратегію для якої величина H_A максимальна. Чим ближче до одиниці показник оптимізму $\lambda,$ тим ближче до нуля показник песимізму $1 - \lambda$ і навпаки. При $\lambda = 0$ критерій Гурвіца збігається з критерієм Вальда, а при $\lambda = 1$ отримаємо критерій крайнього оптимізму (максимакса). У випадку коли показник оптимізму і песимізму однакові, тобто $\lambda = 0{,}5$, $1 - \lambda = 0{,}5$, це означає, що гравець веде себе нейтрально. На практиці доволі складно вибрати показник значення λ. Коефіцієнт оптимізму вибирається інтуїтивно, на основі попереднього досвіду, в залежності від серйозності ситуації в якій приймаються рішення.

Приклад 2.11 Інвестор обирає стратегію інвестування на півроку. Наявні грошові кошти він може вкласти в акції (чиста стратегія A_1), облігації (чиста стратегія A_2) або покласти на депозит (чиста стратегія A_3). Критерій оптимізму $\lambda = 0{,}6$.

Платіжна матриця даної гри має наступний вигляд

	N_1	N_2	N_3
A_1	50	5	-40
A_2	25	15	-5
A_3	10	10	10

Бізнес-аналітики прогнозують, що наприкінці півріччя можливі наступні ситуації з фондовим ринком: ринок зросте N_1, ринок зазнаватиме незначних коливань зростання N_2,ринок падатиме N_3. Знайти оптимальні стратегії для Інвестора.

Розв’язання.

Застосуємо критерій песимізму-оптимізму Гурвіца.

Знайдемо показники ефективності для кожної стратегії

$H_1 = 0{,}6 * 50 + 0{,}4 * (-40) = 30 - 16 = 14.$

$H_2 = 0{,}6 * 25 + 0{,}4 * (-5) = 15 - 2 = 13\ .$

$H_3 = 0{,}6 * 10 + 0{,}4 * 10 = 6 + 4 = 10.$

Максимальним показником ефективності є H_1, отже стратегія A_1 - вкласти в акції, є оптимальною за критерієм Гурвіца.

2.3.5. Критерій мінімаксного ризику Севіджа

На практиці, вибираючи одне із можливих рішень, досить часто зупиняються на тих, які приведуть до найменш тяжких наслідків, якщо вибір виявиться помилковим. Такий підхід до вибору рішення був сформованим американським статистом Севіджем (1917-1971) і отримав назву «принцип Севіджа». Особливо зручним цей принцип є для розв’язання економічних задач. Як і критерій Вальда, він є критерієм крайнього песимізму, оскільки і тут гравець 1 вважає, що природа реалізує найбільш несприятливі свої стани. Критерій Севіджа рекомендує вибирати як оптимальну ту чисту стратегію A_i, при якій величина максимального ризику буде найменшою. Розв’язок знаходиться за формулою: $S = \min_{1 \le i \le m} \max_{1 \le j \le n} r_{ij}$.

Сутність цього критерію полягає у мінімізації ризику. Як і критерій Вальда, критерій Севіджа дуже обережний. Вони різняться різним розумінням найгіршої ситуації: у першому випадку – це мінімальний виграш, у другому - максимальна втрата виграшу в порівнянні з тим, чого можна було б досягти у цих умовах.

Приклад 2.12 Відповідно до попиту на деяку продукцію в місті планується збудувати підприємство з її виробництва. Попит на продукцію точно не визначено, але може виражатися числами 10, 20, 30, 40 тисяч одиниць, причому ймовірність того, що попит встановиться на одному із названих рівнів, невідомі. Робота подібних підприємств показує, що прибуток від реалізації одиниці виробленої продукції становить 15 г.о., а збитки від нереалізованої одиниці продукції, пов'язані з її зберіганням та уцінкою, дорівнюють 5 г.о. Яка має бути потужність підприємства, щоб його очікуваний прибуток був максимальним?

Розв’язання.

Оскільки ймовірності різних рівнів попиту невідомі, дане завдання являє собою ситуацію прийняття рішень в умовах невизначеності. Рішення має обрати одну з чотирьох альтернатив: A_1 – побудувати підприємство потужністю 10 тисяч одиниць, A_2 – побудувати підприємство потужністю 20 тисяч одиниць, А $_3$- побудувати підприємство потужністю 30 тисяч одиниць, A_4 – побудувати підприємство потужністю 40 тисяч одиниць.

Платіжна матриця має вигляд $A = \begin{pmatrix} 150 & 150 & 150 & 150 \\ 100 & 300 & 300 & 300 \\ 50 & 250 & 450 & 450 \\ 0 & 200 & 400 & 600 \end{pmatrix}$.

Застосуємо критерій Севіджа, для цього побудуємо матрицю ризиків.

$$R = \begin{pmatrix} 150-150 & 300-150 & 450-150 & 600-150 \\ 150-100 & 300-300 & 450-300 & 600-300 \\ 150-50 & 300-250 & 450-450 & 600-450 \\ 150-0 & 300-200 & 450-400 & 600-600 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 150 & 200 & 450 \\ 50 & 0 & 150 & 300 \\ 100 & 50 & 0 & 150 \\ 150 & 100 & 50 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\max_{1\le j\le n} r_{1j} = 450$

$\max_{1\le j\le n} r_{2j} = 300$

$\max_{1\le j\le n} r_{3j} = 150$

$\max_{1\le j\le n} r_{4j} = 150$

$S = \min_{1\le i\le m} \max_{1\le j\le n} r_{ij} = 150$

За критерієм Севіджа оптимальними стратегіями є А $_3$- побудувати підприємство потужністю 30 тисяч одиниць або A_4 – побудувати підприємство потужністю 40 тисяч одиниць.

Для обрання оптимального розв'язку слід застосувати інший критерій.

2.4 Розв'язування задач за допомогою критеріїв

Розглянемо як застосування різних критерії впливає на розв'язок задачі.

Приклад 2.13 Після декількох років експлуатації обладнання може опинитися в одному з трьох станів: потрібно профілактичний ремонт; потрібна заміна окремих деталей і вузлів; потрібен капітальний ремонт.

Залежно від ситуації керівництво підприємства може прийняти такі рішення: 1) відремонтувати обладнання своїми силами, що потребують витрат

$4, 6, 9$; 2) викликати спеціальну бригаду ремонтників, витрати в цьому випадку складуть 5, 3, 7 ; 3)замінити обладнання новим, реалізувавши застаріле за залишковою вартістю. Сукупні витрати на цей захід складуть $20, 15, 6$.

Потрібно знайти оптимальне розв'язок даної проблеми з урахуванням наступних припущень:

- на основі узагальнення досвіду експлуатації аналогічного обладнання визначені ймовірності настання відповідних станів - $0{,}4; 0{,}45; 0{,}15$
- наявний досвід свідчить про рівну ймовірності настання відповідних станів;
- показник ступеня довіри $h = 0{,}6$;
- про можливості настання відповідних станів нічого певного сказати не можна;
- критерій песимізму $\lambda = 0{,}9$

Розв'язання.

Гра парна, статистична. У грі беруть участь 2 гравця: керівництво підприємства і «природа».

Під «природою» в даному випадку розуміємо сукупність зовнішніх чинників, які визначають стан обладнання.

Стратегія керівництва:

A_1 - відремонтувати обладнання своїми силами

A_2 - викликати бригаду фахівців

A_3 - замінити обладнання новим

Стратегія природи - 3 можливих стану обладнання.

N_1 - потрібно профілактичний ремонт;

N_2 - слід замінити окремі деталі і вузли;

N_3 - потрібен капітальний ремонт.

Розрахунок платіжної матриці і матриці ризиків

Оскільки елементи матриці - витрати, то будемо вважати їх виграшними але зі знаком мінус. Тому платіжна матриця буде мати вид:

	N_1	N_2	N_3	$\min a_{ij}$
A_1	-4	-6	-9	-9
A_2	-5	-3	-7	-7
A_3	-20	-15	-6	-20
q_i	0.4	0.45	0.15	

Складаємо матрицю ризиків:

	N_1	N_2	N_3	$max\ r_{ij}$
A_1	(-4) - (- 4) = 0	(-3) - (- 6) = 3	(-6) - (- 9) = 3	3
A_2	(-4) - (- 5) = 1	(-3) - (- 3) = 0	(-6) - (- 7) = 1	1
A_3	(-4) - (- 20) = 16	(-3) - (- 15) = 12	(-6) - (- 6) = 0	16

Використаємо критерій Байеса:

Визначаємо середні виграші:

$\overline{a_1} = -4 * 0{,}4 - 6 * 0{,}45 - 9 * 0{,}15 = -5{,}65,$

$\overline{a_2} = -5 * 0{,}4 - 3 * 0{,}45 - 7 * 0{,}15 = -4{,}4,$

$\overline{a_3} = -20 * 0{,}4 - 15 * 0{,}45 - 6 * 0{,}15 = -15{,}65.$

Серед отриманих результатів виберемо максимальне: $-4{,}4 = \overline{a_2}$.

Отже, за критерієм Байєса оптимальною є стратегія A_2 - викликати бригаду фахівців.

Використаємо критерій Лапласа. Приймемо $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$. Визначимо показник ефективності для кожної стратегії:

$\overline{a_1} = -4 * \frac{1}{3} - 6 * \frac{1}{3} - 9 * \frac{1}{3} = -6{,}33,$

$\overline{a_2} = -5 * \frac{1}{3} - 3 * \frac{1}{3} - 7 * \frac{1}{3} = -5,$

$\overline{a_3} = -20 * \frac{1}{3} - 15 * \frac{1}{3} - 6 * \frac{1}{3} = -15{,}65.$

Серед отриманих значень виберемо максимальне: $-5 = \overline{a_2}$.

Отже, критерієм Лапласа оптимальною є стратегія A_2 - викликати бригаду фахівців.

Використаємо критерій Ходжа-Лемана. Знайдемо показники ефективності для кожної стратегії:

$$HL_i = (1-h)\min_{1\le j\le n} a_{ij} + h\sum_{j=1}^{n} p_j a_{ij},$$

$HL_1 = (1-0{,}6)*(-9) + 0{,}6*(-4*0{,}4 - 6*0{,}45 - 9*0{,}15) = 0{,}4*(-9) + 0{,}6*(-1{,}6 - 2{,}7 - 1{,}35) = -3{,}6 + 0{,}6*(-5{,}65) = -3{,}6 - 3{,}39 = -6{,}99$;

$HL_2 = (1-0{,}6)*(-7) + 0{,}6*(-5*0{,}4 - 3*0{,}45 - 7*0{,}15) = 0{,}4*(-7) + 0{,}6*(-2 - 1{,}35 - 1{,}05) = -2{,}8 + 0{,}6*(-4{,}4) = -2{,}8 - 2{,}64 = -5{,}44$;

$HL_3 = (1-0{,}6)*(-20) + 0{,}6*(-20*0{,}4 - 15*0{,}45 - 6*0{,}15) = 0{,}4*(-20) + 0{,}6*(-8 - 6{,}75 - 0{,}9) = -8 + 0{,}6*(-15{,}65) = -8 - 9{,}39 = -17{,}39$.

Знайдемо оптимальну стратегію, за критерієм Ходжа Лемана: $HL = \max HL_i = -5{,}44 = HL_2$.

Отже, критерієм Ходжа-Лемана оптимальною є стратегія A_2 - викликати бригаду фахівців.

Для застосування критерій Геймеєра складемо матрицю $G = \begin{pmatrix} -4*0{,}4 & -6*0{,}45 & -9*0{,}15 \\ -5*0{,}4 & -3*0{,}45 & -7*0{,}15 \\ -20*0{,}4 & -15*0{,}45 & -6*0{,}15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}6 & -2{,}7 & -1{,}35 \\ -2 & -1{,}35 & -1{,}05 \\ -8 & -6{,}75 & -0{,}9 \end{pmatrix}$ – матриця Геймеєра.

Знайдемо показники ефективності кожної стратегії:

$GW_1 = \min_{1\le j\le n} a_{1j} = -2{,}7$

$GW_2 = \min_{1\le j\le n} a_{2j} = -2$

$GW_3 = \min_{1\le j\le n} a_{3j} = -8$

Оптимальну стратегії відповідає показник ефективності $GW = \max GW_i = GW_2 = -2$. Отже, за критерієм Геймеєра оптимальною є стратегія A_2 - викликати бригаду фахівців

Для застосування критерій Вальда обчислимо $W = \max_i \min_j a_{ij} = \max(-9, -7, -20) = -7$

За критерієм Вальда оптимальною є стратегія A_2 - викликати бригаду фахівців.

Для застосування критерій максимакса обчислимо $max_i \max_j a_{ij} = \max(-4; -3; -6) = -3$. За критерієм максимакса оптимальною є стратегія A_2 - викликати бригаду фахівців.

Критерій добутків в умовах повної невизначеності.

Для застосування даного критерію слід перетворити матрицю так, щоб $a_{ij} > 0$, для цього потрібно виконати зсув на $b = \left|\min a_{ij}\right| + 1 = 21$.

Патіжна матриця матиме вигляд $A' = \begin{pmatrix} 17 & 15 & 12 \\ 16 & 18 & 14 \\ 1 & 6 & 15 \end{pmatrix}$.

Знайдемо добутки по рядочках:

$P_1 = 17 * 15 * 12 = 3060$

$P_2 = 16 * 18 * 14 = 3456$

$P_3 = 1 * 6 * 15 = 90$

Знайдемо оптимальну стратегію за критерієм добутків, $P = \max P_i = P_2 = 3456$. Отже, за критерієм добутків оптимальною є стратегія A_2 - викликати бригаду фахівців

Для застосування критерій Гурвіца обчислимо показники

$H_1 = -9 * 0{,}9 - 4 * (1 - 0{,}9) = -8{,}5$,

$H_2 = -7 * 0{,}9 - 3 * (1 - 0{,}9) = -6{,}6$,

$H_3 = -20 * 0{,}9 - 6 * (1 - 0{,}9) = -18{,}6$

За критерієм Гурвіца оптимальною є стратегія A_2 - викликати бригаду фахівців.

Критерій Севіджа: з матриці ризиків знаходимо $S = \min_i \max_j r_{ij} = \min(3{,}1{,}16) = 1$. За критерієм Севіджа оптимальною є стратегія A_2-викликати бригаду фахівців.

Отже, оптимальною стратегією за різними критеріями є стратегія A_2- викликати бригаду фахівців.

Приклад 2.14 Фермер може посіяти на ділянці одну з трьох культур A_1, A_2, A_3. Урожайність кожної з культур багато в чому залежить від погоди, яка може бути посушливою, нормальною чи дощовою (вплив інших факторів не враховується). Відома ціна $c_1 = 3$; $c_2 = 5$; $c_3 = 4$ одного центнера культури, а також урожайності (ц/га) кожної культури a_{i1} – врожайність за посушливої погоди, a_{i2} – урожайність за нормальної погоди, a_{i3} – врожайність за дощової погоди. Багаторічні спостереження за погодою даного району показують, що ймовірності посушливої, нормальної та дощової погоди становлять відповідно $q_1 = 0{,}3$; $q_2 = 0{,}4$; $q_3 = 0{,}8$.

Матриця врожайності: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 0{,}8; h = 0{,}7$.

Потрібно описати ігрову схему, за допомогою критеріїв визначити, яку культуру потрібно сіяти, щоб забезпечити найбільший прибуток.

Розв’язання:

Гра парна матрична з природою. Перший гравець – фермер. Його можливі стратегії:

$A_1 -$ посіяти 1-шу культуру;

$A_2 -$ посіяти 2-гу культуру;

$A_3 -$ посіяти 3-тю культуру.

Другий гравець – природа, яка являє сукупність умов, які визначають врожайність. Можливі стани природи такі:

$N_1 -$ погода буде засушливою;

$N_2 -$ погода буде нормальною;

$N_3 -$ погода буде дощова.

Складемо платіжну матрицю,

	N_1	N_2	N_3
A_1	3*2=6	3*3=9	3*1=3
A_2	5*1=5	5*2=10	5*6=30

A_3	4*2=8	4*3=12	4*1=4

Платіжна матриця має вид: $A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 5 & 10 & 30 \\ 8 & 12 & 4 \end{pmatrix}$.

Знайдемо матрицю ризиків:

$$R = \begin{pmatrix} 8-6 & 12-9 & 30-3 \\ 8-5 & 12-10 & 30-30 \\ 8-8 & 12-12 & 30-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 27 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 26 \end{pmatrix}.$$

Критерій Байеса:

Визначаємо середні виграші: $\overline{a_1} = 6*0{,}3 + 9*0{,}4 + 3*0{,}3 = 6{,}3$,

$\overline{a_2} = 5*0{,}3 + 10*0{,}4 + 30*0{,}3 = 14{,}5$,

$\overline{a_3} = 8*0{,}3 + 12*0{,}4 + 3*0{,}3 = 8{,}1$.

Серед отриманих результатів виберемо максимальне: $\overline{a_2} = 14{,}5$.

Отже, за критерієм Байєса оптимальною є стратегія A_2 - посіяти 2-гу культуру.

Критерій Лапласа. Приймемо $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$. Визначимо показник ефективності для кожної стратегії: $\overline{a_1} = 6*\frac{1}{3} + 9*\frac{1}{3} + 3*\frac{1}{3} = 6$,

$\overline{a_2} = 5*\frac{1}{3} + 10*\frac{1}{3} + 30*\frac{1}{3} = 15$,

$\overline{a_3} = 8*\frac{1}{3} + 12*\frac{1}{3} + 4*\frac{1}{3} = 8$.

Серед отриманих значень виберемо максимальне: $\overline{a_2} = 15$.

Отже, критерієм Лапласа оптимальною є стратегія A_2 - посіяти 2-гу культуру.

Критерій Ходжа-Лемана. Знайдемо показники ефективності:

$$HL_i = (1-h)\min_{1\le j\le n} a_{ij} + h\sum_{j=1}^{n} p_j a_{ij},$$

$HL_1 = (1-0{,}7)*3 + 0{,}7*(6*0{,}3 + 9*0{,}4 + 3*0{,}3) = 0{,}3*3 + 0{,}7*(1{,}8 + 3{,}6 + 0{,}9) = 0{,}9 + 0{,}7*6{,}3 = 0{,}9 + 4{,}41 = 5{,}31$;

$HL_2 = (1-0{,}7)*5 + 0{,}7*(5*0{,}3 + 10*0{,}4 + 30*0{,}3) = 0{,}3*7 + 0{,}7*(1{,}5 + 4 + 9) = 2{,}1 + 0{,}7*14{,}5 = 2{,}1 + 10{,}15 = 12{,}25$;

$HL_3 = (1 - 0{,}7) * 4 + 0{,}7 * (8 * 0{,}3 + 12 * 0{,}4 + 4 * 0{,}3) = 0{,}3 * 4 + 0{,}7 * (2{,}4 + 4{,}8 + 1{,}2) = 1{,}2 + 0{,}7 * 8{,}4 = 1{,}2 + 5{,}88 = 7{,}08.$

Знайдемо оптимальну стратегію, за критерієм Ходжа Лемана: $HL = \max HL_i = 12{,}25$.

Отже, критерієм Ходжа-Лемана оптимальною є стратегія A_2 - посіяти 2-гу культуру.

Критерій Геймеєра: Складемо матрицю Геймеєра $G = \begin{pmatrix} 6 * 0{,}3 & 9 * 0{,}4 & 3 * 0{,}3 \\ 5 * 0{,}3 & 10 * 0{,}4 & 30 * 0{,}3 \\ 8 * 0{,}3 & 12 * 0{,}4 & 4 * 0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}8 & 3{,}6 & 0{,}9 \\ 1{,}5 & 4 & 9 \\ 2{,}4 & 4{,}8 & 1{,}2 \end{pmatrix}$.

Знайдемо показники ефективності кожної стратегії:

$GW_1 = 0{,}9$

$GW_2 = 1{,}5$

$GW_3 = 1{,}2$

Знайдемо оптимальну стратегію $GW = \max GW_i = GW_2 = 1{,}5$. Отже, за критерієм Геймеєра оптимальною є стратегія посіяти 2-гу культуру.

Критерій Вальда: $W = \mathrm{m}ax_i \min_j a_{ij} = \max(3,\ 5,\ 4\ ) = 5$

За критерієм Вальда оптимальною є стратегія A_2 - посіяти 2-гу культуру.

Критерій максимакса: $\mathrm{m}ax_i \max_j a_{ij} = \max(9,\ 30, 12\ ) = 30$. За критерієм максимакса оптимальною є стратегія A_2 - посіяти 2-гу культуру.

Критерій добутків в умовах повної невизначеності.

Для застосування даного критерію перевіримо, щоб $a_{ij} > 0$. Для даної задачі умова виконується.

Знайдемо добутки по рядочках:

$P_1 = 6 * 9 * 3 = 162;$

$P_2 = 5 * 10 * 30 = 1500;$

$P_3 = 8 * 12 * 4 = 384$

Знайдемо оптимальну стратегію за критерієм добутків, $P = \max P_i = P_2 = 1500$. Отже, за критерієм добутків оптимальною є стратегія A_2 - посіяти 2-гу культуру.

Критерій Гурвіца. $H_1 = 0{,}8 * 9 + 3 * (1 - 0{,}8) = 7{,}8$, $H_2 = 0{,}8 * 30 + (1 - 0{,}8) * 5 = 25$, $H_3 = 0{,}8 * 12 + (1 - 0{,}8) * 4 = 10{,}4$

За критерієм Гурвіца оптимальною є стратегія A_2 - посіяти 2-гу культуру.

Критерій Севіджа: $S = \min_i \max_j r_{ij} = \min(27,\ 3,\ 26) = 3$. За критерієм Севіджа оптимальної є стратегія A_2 - посіяти 2-гу культуру.

Отже, за даними критеріями оптимальною є стратегія A_2 - посіяти 2-гу культуру.

Розв'язуючи дані приклади, ми отримали, що оптимальною є одна стратегія, в практичних ситуаціях не завжди так відбувається. Слід пам'ятати, що вибір оптимального рішення значною мірою є суб'єктивним, тому що залежить від вибору критерій оптимальності. Розглянемо приклад такої задачі.

Приклад 2.15 Необхідно закупити вугілля для обігріву будинку. Кількість вугілля обмежена і протягом холодного періоду має бути повністю витрачено. Купувати вугілля можна в будь-який час, проте влітку воно дешевше, ніж узимку. Невизначеність полягає в тому, що невідомо, якою буде зима: суворою, тоді доведеться докуповувати вугілля або м'якою, тоді частина вугілля може залишитися невикористаною.

Є такі дані про кількості та ціни вугілля, необхідного взимку для опалення:

Зима	Кількість вугілля, т	Середня ціна
М'яка	4	7
Середня	5	7,5
Холодна	6	8

Ці ціни відносяться до покупок вугілля взимку. Влітку ціна вугілля 6 за 1 т. є місце для зберігання запасу вугілля до 6 т., заготованого влітку. Якщо потрібно взимку докупити вугілля, якого бракує, докупка буде за зимовими цінами. Передбачається, що все вугілля, яке збережеться до кінця зими, влітку стає не якісним.

Потрібно описати ігрову схему, за допомогою критеріїв визначити скільки вугілля влітку потрібно закупити на зиму з урахуванням наступних припущень:

- відомі ймовірності настання кожної зими: для м'якої зими – 0,35; для середньої зими – 0,5; холодної – 0,15
- наявний досвід свідчить про рівну ймовірності настання відповідних станів;
- показник ступеня довіри $h = 0{,}4$;
- про можливості настання відповідних станів нічого певного сказати не можна;
- критерій песимізму $\lambda = 0{,}7$;

Розв’язання:

Гра парна матрична з природою. Перший гравець – людина, яка закуповує вугілля. Її можливі стратегії:

$A_1 -$ купити 4 т вугілля;

$A_2 -$ купити 5 т вугілля;

$A_3 -$ купити 5 т вугілля.

Другий гравець – природа. Можливі стани природи такі:

$N_1 -$ зима буде м’якою;

$N_2 -$ зима буде середньою;

$N_3 -$ зима буде холодною.

Складемо платіжну матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} -24 & -31{,}5 & -40 \\ -30 & -30 & -38 \\ -36 & -36 & -36 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю ризиків:

$$R = \begin{pmatrix} -24+24 & -30+31{,}5 & -36+40 \\ -24+30 & -30+30 & -36+38 \\ -24+36 & -30+36 & -36+36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1{,}5 & 4 \\ 6 & 0 & 2 \\ 12 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Критерій Байеса:

Визначаємо середні виграші:

$\overline{a_1} = -24 * 0{,}35 - 31{,}5 * 0{,}5 - 40 * 0{,}15 = -30{,}15,$

$\overline{a_2} = -30 * 0{,}35 - 30 * 0{,}5 - 38 * 0{,}15 = -31{,}2,$

$\overline{a_3} = -36 * 0{,}35 - 36 * 0{,}5 - 36 * 0{,}15 = -36.$

Серед отриманих результатів виберемо максимальне: $\overline{a_1} = -30{,}15.$

Отже, за критерієм Байєса оптимальною є стратегія A_1 - купити 4 т вугілля.

Критерій Лапласа. Приймемо $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$. Визначимо показник ефективності для кожної стратегії: $\overline{a_1} = -24 * \frac{1}{3} - 31{,}5 * \frac{1}{3} - 40 * \frac{1}{3} = -\frac{95{,}5}{3}$,

$\overline{a_2} = -30 * \frac{1}{3} - 30 * \frac{1}{3} - 38 * \frac{1}{3} = -\frac{98}{3}$,

$\overline{a_3} = -36 * \frac{1}{3} - 36 * \frac{1}{3} - 36 * \frac{1}{3} = -36.$

Серед отриманих значень виберемо максимальне: $\overline{a_1} = -\frac{95}{3}$.

Отже, критерієм Лапласа оптимальною є стратегія A_1 - купити 4 т вугілля.

Критерій Ходжа-Лемана. Знайдемо показники ефективності:

$HL_1 = (1 - 0{,}4) * (-40) + 0{,}4 * (-31{,}5) = -36{,}06;$

$HL_2 = (1 - 0{,}4) * (-38) + 0{,}4 * (-31{,}2) = -35{,}28;$

$HL_3 = (1 - 0{,}4) * (-36) + 0{,}4 * (-36) = -36.$

Знайдемо оптимальну стратегію, за критерієм Ходжа Лемана: $HL = \max HL_i = \ -35{,}28.$

Отже, критерієм Ходжа-Лемана оптимальною є стратегія A_2 - купити 5 т вугілля.

Критерій Геймеєра: Складемо матрицю Геймеєра $G = \begin{pmatrix} -8{,}4 & -15{,}75 & -6 \\ -10{,}5 & -15 & -5{,}7 \\ -12{,}6 & -18 & -5{,}4 \end{pmatrix}$.

Знайдемо показники ефективності кожної стратегії:

$GW_1 = -15{,}75$

$GW_2 = -15$

$GW_3 = -18$

Знайдемо оптимальну стратегію $GW = \max GW_i = GW_2 = -15$. Отже, за критерієм Геймеєра оптимальною є стратегія A_2 - купити 5 т вугілля.

Критерій Вальда: $W = \max_i \min_j a_{ij} = \max(-40, -38, -36\ ) = -36$

За критерієм Вальда оптимальною є стратегія A_3 - купити 6 т вугілля.

Критерій максимакса: $\max_i \max_j a_{ij} = \max(-24,\ -30, -36\ ) = -24$. За критерієм максимакса оптимальною є стратегія A_1 - купити 4 т вугілля.

Критерій добутків в умовах повної невизначеності. Для застосування даного критерію слід перетворити матрицю так, щоб $a_{ij} > 0$, для цього потрібно виконати зсув на $b = \left|\min a_{ij}\right| + 1 = 41$.

Патіжна матриця матиме вигляд $A' = \begin{pmatrix} 17 & 9,5 & 1 \\ 10 & 10 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

Знайдемо добутки по рядочках:

$P_1 = 17 * 9,5 * 1 = 161,5$;

$P_2 = 10 * 10 * 3 = 300$;

$P_3 = 5 * 5 * 5 = 125$

Знайдемо оптимальну стратегію за критерієм добутків, $P = \max P_i = P_2 = 300$. Отже, за критерієм добутків оптимальною є стратегія A_2 - купити 5 т вугілля.

Критерій Гурвіца. $H_1 = 0,6 * (-24) - 40 * (1 - 0,6) = -30,4$,

$H_2 = 0,6 * (-30) - 38 * (1 - 0,6) = -33,2$,

$H_3 = 0,6 * (-36) - 36 * (1 - 0,6) = -36$

За критерієм Гурвіца оптимальною є стратегія A_1 - купити 4 т вугілля.

Критерій Севіджа: $S = \min_i \max_j r_{ij} = \min(4,\ 6,\ 12) = 4$. За критерієм Севіджа оптимальної є стратегія A_1 - купити 4 т вугілля.

Отже, за даними критеріями:

- A_1 - купити 4 т вугілля є оптимальною 4 рази;
- A_2 - купити 5 т вугілля є оптимальною 3 рази;
- A_3 - купити 6 т вугілля є оптимальною 1 раз.

Таким чином, розглянутий приклад демонструє, що оптимальне рішення задачі залежить від обраного критерію.

ВИСНОВКИ

Теорія ігор - теорія математичних моделей прийняття рішень в умовах невизначеності, в умовах ризику, конфліктних ситуаціях, коли суб'єкт (гравець), що приймає рішення, має інформацію лише про можливі ситуації, в одній з яких він насправді знаходиться, про можливі кроки, які він може виконати, і кількісну характеристику його виграшу. Теорія ігор намагається математично пояснити явища, що виникають у конфліктних ситуаціях, за умов зіткнення сторін.

У ході роботи було розглянуто:

- основні поняття теорії ігор (гра, гравці, ходи, стратегії, оптимальні стратегії, виграш, сідлова точка);
- проаналізовано матричні ігри та методи їх розв'язування в чистих (знаходження сідлової точки) та змішаних стратегіях (графічний метод, аналітичний метод, перетворенням гри до задачі лінійного програмування, симплекс-метод).
- наведено основні критерії прийняття рішень в умовах ризику (критерій Байєса, критерій Лапласа, критерій Ходжа-Лемана, критерій Геймеєра) та повної невизначеності (максимінний критерій Вальда, критерій максимакса, критерій добутків в умовах повної невизначеності, критерій Гурвіца, критерій Севіджа);
- проілюстровано застосування кожного критерію конкретним прикладом;
- створено низку задач, які розв'язано розглядуваними критеріями, проведено аналіз розв'язків.

Дана кваліфікаційна робота буде цікава викладачам та студентам, що вивчають математичне програмування, теорію ігор.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абрамов Л. М., Капустин В. Ф. Математическое программирование. Л., Изд-во Ленинград. ун-та, 1976. — 184 с.
2. Васин А. А., Морозов В. В. Теория игр и модели математической экономики. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2005, 272 с.
3. Волошин О.Ф. Моделі та методи прийняття рішень: навч. посіб. /О.Ф. Волошин, С.О. Мащенко. – Київ : Вид.-полігр. центр «Київ.ун-т», 2010. – 336 с.
4. Воробьев, Н.Н. Теория игр. Лекции для экономистов-кибернетиков/ Н.Н. Воробьев. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1974. – 160с.
5. Давыдов Э. Г. Методы и модели теории антагонистических игр. — М.: Изд-во МГУ, 1978, с. 135.
6. Данилов В.И. Лекции по теории игр. М.: Российская экономическая школа, 2001.
7. Данскин Дж. М. Теория максимина. — М.: Сов. радио, 1970, с. 126.
8. Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщение и приложения. — М.: Прогресс, 1966.
9. Де Гроот М. Оптимальные статистические решения (пер. с англ.)/ М. Де Гроот. – М. : Мир, 1971. – 491 с.
10. Замков, О.О. Математические методы в экономике: Учебник. 3-е изд., перераб. /О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных. – М.: «Дело и сервис», 2001. – 368с.
11. Кини Р.Л. Принятие решений по многим критериям: Предпочтения и замещения (пер. с англ.) / Р. Л. Кини, Х. Райфа. – М. : Радио
12. Кіблицька О., Одінцова О.О. Класичні задачі теорії ігор. Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання: Збірник тез доповідей Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів і молодих учених (20 листопада 2020 р., м. Чернігів). Чернігів : НУЧК імені Т. Г. Шевченка, 2020. С.28-29

13. Кіблицька О. Теорія ігор: основні поняття, типи ігор, приклади. *Студентська звітна конференція: Матеріали результатів наукових досліджень молодих науковців.* Суми: Вид-во фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2021. Вип. 15. Т. 1. С. 14-20.

14. Кіблицька О. Застосування критеріальних умов в задачах теорії ігор *Студентська звітна конференція: Матеріали результатів наукових досліджень молодих науковців.* Суми: Вид-во фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2021. Вип. 15. Т. 2. С. 10-12.

15. Кіблицька О. Критерії прийняття рішень в умовах повної невизначеності. *ІІ Всеукраїнська науково-методична інтернет-конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу – ІТМ*плюс-2021 Форум молодих дослідників».* 12 листопада 2021 р. Суми. С. 56-58.

16. Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. И., Волощенко А. Б. Математическое программирование. — М.: Высш. школа, 1980. — 300 с

17. Мулен, Э. Теория игр с примерами из математической экономики * Э. Мулен. – М.: Мир, 1985. – 200с.

18. Мушик Э., Мюллер П. Методы принятия технических решений: Пер. с нем. – М.: Мир, 1990. – 208 с., ил.

19. Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. — М.: Наука, 1970.

20. Оуэн Г. Теория игр. — Москва, 1971, с. 230

21. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А. Оптимальный поиск в условиях конфликта. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1986, с. 96.

22. Печерский С.Л., Беляева А.А. Теория игр для экономистов. Вводный курс. Учебное пособие. СПб.: 2001.

23. Фомин Г.П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности: Учебник. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Финансы и статистика, 2005. — 616 с: ил.

24. Шапкин, А.С. Теория риска и моделирование рисковых ситуаций: Учебник. / А.С. Шапкин, В.А. Шапкин. – М.: Дашков и К° , 2005. – 880с.

25. Шикин Е. В. От игр к играм. Математическое введение. Изд. 2-е, исправл. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 112 с.