Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Рашевський М.О. Про викладання комбінаторики у закладах вищої освіти. Фізико-математична освіта. 2018. Випуск 4(18). С. 136-142.

Rashevs'kyi Mykola. About Teaching Combinatorics In The Institutes Of Higher Education. Physical and Mathematical Education. 2018. Issue 4(18). P. 136-142.

DOI 10.31110/2413-1571-2018-018-4-023
УДК 372.851

М.О. Рашевський
Криворізький національний університет, Україна
mora290466@gmail.com

ПРО ВИКЛАДАННЯ КОМБІНАТОРИКИ У ЗАКЛАДАХ ВИЩОЇ ОСВІТИ

Анотація. *Викладанню комбінаторики і формуванню комбінаторного мислення присвячено багато досліджень. Вивчалися питання методики введення основних понять комбінаторики у шкільному курсі математики. Дослідження стосувалися формуванню комбінаторних понять у молодших школярів та підлітків. Комбінаторика є основою для вивчення теорії ймовірностей, дискретної математики та інших математичних курсів. Комбінаторне мислення необхідне інженеру, програмісту, вчителю математики і багатьом іншим спеціалістам різного спрямування. Перед закладом вищої освіти постає завдання продовжити формування комбінаторного мислення, провівши діагностику його сформованості на початку вивчення згаданого розділу.*

У статті обговорюються окремі методичні прийоми, що застосовуються при вивченні розділу «Комбінаторика» у навчальних закладах різного спрямування. Комбінаторні розділи математики складають основу як стохастичної лінії шкільного курсу математики, так і деяких математичних курсів вишів. При викладанні комбінаторики зручно використовувати уніфіковану схему комбінаторних структур. Обговорюються питання історії виникнення та методики використання уніфікованої схеми у шкільному курсі та у закладах вищої освіти. На початку вивчення корисно ознайомити студентів із згаданою схемою, і сформувати уміння використовувати її для розв'язування найпростіших задач. Доцільно також розробити набір компетентнісно орієнтованих або прикладних задач з урахуванням майбутньої спеціальності студентів. Подальше вивчення комбінаторики стосується спеціальних методів: методу твірних (продуктивних) функцій, методу рекурентних співвідношень та методу траєкторій. Названі методи вивчаються в курсі дискретної математики. У статті обговорюються можливості геометричної ілюстрації біномних коефіцієнтів у формуванні навичок математичного моделювання. Діагностика рівня комбінаторного мислення та можливе коригування можуть є проблемою для окремого дослідження.

Ключові слова: *викладання математики, комбінаторика, уніфікована схема, комбінаторне мислення, дискретна математика, метод траєкторій*

Постановка проблеми. Збільшення уваги дослідників до проблем викладання дискретної математики та її окремих розділів пов'язане як із реалізацією стохастичної лінії у шкільному курсі математики, так і з комп'ютеризацією всіх сторін життя, і освіти зокрема. Дискретна математика є не тільки теоретичною базою для комп'ютерних наук, а ще й основою математичного моделювання, оскільки використання комп'ютерів призводить до необхідності створювати дискретні моделі навіть із вже побудованих неперервних. Широкі можливості у моделюванні має комбінаторика. Комбінаторні методи і алгоритми розроблялися і в «докомп'ютерну» епоху, але саме комп'ютерні науки найбільше потребують апарату і методів дискретної математики. Комбінаторика у вишах вивчається як одна із тем курсу теорії ймовірностей, а також як розділ дискретної математики. Не зважаючи на численні методичні напрацювання, багато дослідників відзначають, що студенти, які вивчали згадану тему в шкільному курсі, часто мають низький рівень знань комбінаторних структур та умінь їх застосовувати при розв'язуванні задач. Студенти, що досить уміло застосовують комбінаторні формули у типових задачах, нерідко не можуть застосувати знання навіть при невеликих змінах умови задачі, тобто проявляються недоліки у їхньому «комбінаторному мисленні». Тому актуальними є питання розробки методики викладання згаданого матеріалу у закладі вищої освіти, коригування знань, отриманих раніше, і продовження формування комбінаторного мислення майбутнього спеціаліста, розпочате у шкільні роки. Важливою також є проблема діагностики сформованості комбінаторного мислення, але це питання окремого вивчення.

Аналіз актуальних досліджень. Численні дослідження математиків, методистів та психологів присвячено викладанню комбінаторики у шкільному курсі математики, методиці введення комбінаторних структур, вивченню та формуванню комбінаторного мислення. Згаданим питанням присвячено роботи А. М. Колмогорова, Н. Я. Віленкіна, Б. Інельдер, Ж. Піаже, Н. Ф. Тализіної, З. Г. Шефтеля, І. М. Яглома, М. Й. Ядренка, Є. Є. Бєлокурової, Г. В. Бурменської, Є. П. Віноградової, Н. М. Войналович, Л. В. Євдокимової, Ю. О. Захарійченка, І. В. Ігнатушиної, Н. Б. Істоміної, В. І. Імбер, Є. Н. Каткової, С. Р. Когаловського, В. В. Лебедєва, Е. Локвуд (E. Lockwood), Т. Г. Попової, Ю. А. Полуянова, Г. Ф. Хакімова та інших. Більшість авторів пропонує розпочинати формування комбінаторного мислення і ознайомлювати з основними поняттями комбінаторики ще учнів початкових та середніх класів. Формуванню комбінаторного мислення у майбутніх учителів технології присвячена дисертаційна робота А. Ф. Абдрашитова.

Практично у всіх дослідженнях згаданого питання відзначається, що комбінаторика виходить далеко за межі власне математичного знання, а комбінаторне мислення є необхідним як у практичній діяльності, так і у повсякденному житті. Вказано також на досить низький рівень успішності виконання комбінаторних завдань навіть у студентів-математиків педагогічних вишів [2], утруднення при виборі тієї чи іншої комбінаторної формули. Тому проблема методики викладання комбінаторики у закладах вищої освіти і формування комбінаторного мислення у майбутнього спеціаліста є наразі актуальною, і саме ці питання обговорюються у статті.

Категорію «комбінаторне мислення», яка з'явилася, певно, вже в нинішньому столітті, педагогічна і психологічна науки активно використовують, хоча й означення різних авторів різняться між собою. Більшість дослідників викладання комбінаторики говорять про формування або розвиток комбінаторного чи комбінаторно-логічного мислення, комбінаторного стилю мислення, розвиток комбінаторних здібностей тощо. Поняття «комбінаторні структури мислення» введено Ж. Піаже. Наведемо (мовою оригіналу) декілька прямих чи опосередкованих означень та характеристик понять, пов'язаних із «комбінаторним мисленням», взятих із різних джерел, не претендуючи на повноту дослідження.

Комбинаторные рассуждения – это рассуждения, содержанием которых является построение различных комбинаторных объектов дискретных элементов. (http://nauka-pedagogika.com/viewer/520522/a?#?page=4 Е. Е. Белокурова, 1993)
Феномен комбинаторных способностей является системным образованием и представляет собой взаимодействие качеств познавательных процессов (сенсорных, мыслительных и имажитивных), определяющих успешность комбинирования в любой деятельности, в том числе и комбинаторной. (http://www.dissercat.com/content/razvitie-kombinatornykh-sposobnostei-detei-doshkolnogo-vozrasta#ixzz5XzYmQHVg Е. Н. Каткова, 2005)
Необходимым психологическим условием развития комбинаторного мышления у детей и подростков выступает ориентировка на такие свойства множества и его подмножеств, как объем, а также состав, порядок и повторяемость элементов. (http://www.lib.ua-ru.net/diss/cont/195380.html Л. В. Евдокимова, 2007)
… принципиальное значение комбинаторики, выходящее далеко за пределы собственно математического знания, обусловлено тем, что в ее основе лежит способность субъекта определять, рассматривать и учитывать все возможные варианты. (http://www.vash-psiholog.info/voprospsih/214/17759-formirovanie-kombinatornogo-myshleniya-u-mladshix-shkolnikov-i-podrostkov.html Г. В. Бурменская, Л. В. Евдокимова, 2007)
Под комбинаторно-логическим мышлением будем понимать мышление, направленное на развитие логических законов, операций при конечной вариативности рассматриваемых явлений, понятий. (https://cyberleninka.ru/article/v/o-vazhnosti-razvitiya-kombinatorno-logicheskogo-myshleniya-starsheklassnikov Т. Г. Попова, 2008)
Комбинаторное мышление является психическим процессом, по содержанию и механизмам реализации относящимся к переходным от образного к логическому и обратно формам мышления. (http://www.dissercat.com/content/razvitie-kombinatornogo-myshleniya-u-budushchikh-uchitelei-tekhnologii-v-protsesse-grafiches А. Ф. Абдрашитов, 2010)
Комбинаторно-логическое мышление связано с решением таких задач, в ходе решения которых необходимо ориентироваться на составные части предмета или явления, их сочетание, а также на условия их комбинаций, при этом не забывая о возможных скрытых условиях, непосредственно не выступающих. (http://www.dissercat.com/content/razvitie-kombinatorno-logicheskogo-myshleniya-starsheklassnikov-v-usloviyakh-profilnogo-obuc#ixzz5XtuoN34N Т. Г. Попова, 2011)
By students' combinatorial thinking, I mean my interpretation of their thinking based on their observable words and actions… (https://www.researchgate.net/publication/261548119_A_Model_of_Students'_Combinatorial_Thinking_The_Role_of_Sets_of_Outcomes Elise Lockwood, 2012)
Під комбінаторним мисленням будемо розуміти такий вид розумової діяльності, який забезпечує усвідомлення варіативності ситуації, дає змогу розглядати і розрізняти різні варіанти подій, об'єктів, здійснювати їх перебір, підраховувати їх кількість. (http://bloggerhoptyana.blogspot.com/2014/11/blog-post.html Блог О. О. Хоптяної, 2014)
Комбинаторные схемы мышления используются при решении не только задач непосредственно по комбинаторике, но и многих других математических и нематематических задач. Данные схемы образуют основу экономического и инженерного мышления. (http://elar.rsvpu.ru/bitstream/123456789/18381/1/edscience_2016_1_130_002.pdf В. А. Тестов, 2016)

Спільним же у всіх дослідників є те, що комбінаторного мислення потребує цілеспрямованого формування у процесі розв'язування комбінаторних задач, і не зводиться лише до засвоєння знань про комбінаторні структури. Всі автори сходяться на тому, що формувати математичне і, зокрема, комбінаторне мислення необхідно ще у ранньому шкільному віці.

Мета статті. Викладання комбінаторики у вишах має на меті продовжити формування комбінаторного мислення студента, виробити навички використання типових комбінаторних структур і націлити курс, що вивчається на формування компетенцій, передбачених обраною спеціальністю. Для реалізації сформульованих завдань пропонується використання у викладанні так званої уніфікованої схеми комбінаторних структур. Таке використання пропонується не вперше, обговорюється історія впровадження згаданої схеми у викладання комбінаторики. Для формування у студентів навичок математичного моделювання і взагалі математичного мислення корисними є окремі методичні прийоми під час ознайомлення зі спеціальними методами комбінаторного аналізу, передбаченими програмою курсу. Для деяких із них пропонується методика введення та використання при вивченні розділу «Комбінаторика».

Виклад основного матеріалу. В монографії [1] було запропоновано уніфіковану схему комбінаторних структур у вигляді таблиці, яка після деякого спрощення була застосована автором статті для викладання теми «Комбінаторика» в курсі теорії ймовірностей для студентів педагогічного університету (https://elibrary.ru/item.asp?id=21117479). Згадану таблицю можна подати таким чином.

Сполуки

	Без повторень	*З повтореннями*
Впорядковані	$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, $P_n = n!$	$\overline{A}_n^k = n^k$, $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$
Невпорядковані	$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$

Уперше схожа таблиця описана у посібнику [8, стор. 17] при аналізі ймовірнісної моделі експерименту зі скінченною кількістю результатів випробування (*n* виймань із урни, що містить *k* кульок). Як і в [1], метою побудови таблиці була систематизація всіх елементарних комбінаторних структур (сполук). Проте в [1, стор 30] було зауважено, що не для будь-якої задачі існуючі комбінаторні схеми можуть забезпечити уніфіковане розв'язання. Там же відзначалося, що створення «всеосяжної комбінаторної схеми» було давньою задумкою Лейбніца, яку, як виявилося, здійснити неможливо. Тому неможливо для всіх комбінаторних задач створити узагальнені алгоритми у вигляді схем орієнтовної основи дій. Хоча, мету звести розв'язання комбінаторної задачі до використання наведеної схеми або її варіацій було досягнуто рядом дослідників шляхом набору таких задач, розв'язання яких вкладається у згадану уніфіковану схему. Зауважимо, що набір згаданих задач досить широкий і цілком задовольняє вимогам шкільної програми з математики. Аналогічні таблиці або їхні графові реалізації неодноразово зустрічалися у різних авторів [4, Табл. 1, стор 278] із різноманітними назвами. Запропоновані в роботі [2] граф-схема (Схема полной ориентировочной основы действия) та у роботі [5, стор 129] «деятельностно-смысловая схема анализа задач по комбинаторике» є графовими реалізаціями згаданої уніфікованої схеми.

Таким чином, численні дослідження довели доцільність використання уніфікованої схеми та її варіацій у шкільному курсі математики, причому це використання не потребує багато часу і зусиль для підготовки: схема заповнюється у процесі введення комбінаторних структур, і в подальшому досить просто застосовується для розв'язування задач. Згадані автори разом із введенням граф-схем пропонували свої методи і прийоми формування понять «впорядкована» та «невпорядкована» множина.

Для розв'язування комбінаторної задачі на обчислення кількості варіантів вибору або виконання певної дії за допомогою наведеної таблиці необхідно з'ясувати такі питання (не обов'язково у вказаному порядку).

- Впорядкована чи невпорядкована множина є моделлю задачі?
- Чи допускаються повторення елементів?
- З якої множини проводиться вибірка (знаходження *n*)?
- Скільки елементів вибирається (знаходження *k*)?

Після того, як відповіді на всі поставлені питання знайдено, необхідну формулу відшукаємо в таблиці.

Задача 1. [3, задача 20, авторський переклад]. Скільки треба видати словників, щоб можна було безпосередньо перекладати із однієї з п'яти мов – української, англійської, французької, німецької, китайської на будь-яку іншу?

Розв'язання. Будь-який словник, наприклад, німецько-англійський (Н-А), утворено вибором двох елементів (мов) Н і А із множини {У, А, Ф, Н, К}, звідки *k* = 2, а *n* = 5. Очевидно, що словники Н-А і А-Н – різні, отже маємо впорядковану множину, що не допускає повторень, оскільки у словнику А-А чи У-У не має потреби. За таблицею знаходимо потрібну формулу $A_5^2 = 20$.

Невелика зміна умови задачі, а саме: кількість словників має бути мінімальною, а переклад не обов'язково безпосереднім, робить недоцільним використання таблиці, хоча особливих труднощів студентам у більшості випадків не створює. Проте і використання таблиці там, де воно можливе, може бути здійсненим по-різному, оскільки по-різному можна побудувати множину-модель задачі. Розглянемо такий приклад.

Задача 2. [3, задача 30, авторський переклад]. У деякій країні не було двох мешканців з однаковим набором зубів. Якою найбільшою може бути кількість мешканців цієї країни (найбільше може бути 32 зуби)?

Розв'язання. Перший спосіб. Можна побудувати впорядковану структуру – послідовність довжини 32 вигляду 111001…101, де наявність зуба відповідає одиниці, відсутність – нулю. Очевидно, що повторення мають місце (вибираємо *k* = 32 елементи із *n* = 2 елементів 0 і 1), і в таблиці знаходимо необхідну формулу $\overline{A}_n^k = n^k$, отримуючи відповідь $\overline{A}_2^{32} = 2^{32}$.

Другий спосіб. Використаємо невпорядковану без повторень множину вигляду {1, 3,…, 32}, де наявність числа відповідає наявності зуба – порядок розташування номерів не має значення. Для побудови множини такого вигляду 33 рази вибираємо із *n* = 32 елементів *k* = 0, 1, 2,…, 32 елементи, підраховуючи кількість 0-зубих, 1-зубих,…, 32-зубих. Тому кількість мешканців за правилом суми дорівнює кількості всіх підмножин 32-елементної множини {1, 2,…, 32}. Маємо: $C_{32}^0 + C_{32}^1 + \ldots + C_{32}^{32} \left(= 2^{32}\right)$. Остання тотожність, щоправда, тепер вимагає доведення.

Таким чином, комбінаторна задача моделюється певною множиною, яка може бути (і, як правило, є) структурою (сполукою), що входить до уніфікованої схеми. При розв'язуванні задачі найскладнішим є з'ясування саме цього питання – яка структура моделює дану задачу? Відповідь на поставлене питання часто знайти досить складно: або множина-модель може бути побудована неоднозначно (як у задачі 2) або ця множина не відповідає жодній із наведених у схемі сполук. Та й складність комбінаторної задачі полягає не стільки у процесі з'ясування – впорядкована чи невпорядкована множина моделює задачу, і допускає чи не допускає ця структура повторення, а власне у побудові самої моделі,- множини. Наступний приклад показує, що описання множини, яка моделює задачу, з'ясування впорядкованості її та наявності повторень елементів ще не гарантують успішного розв'язання задачі.

Задача 3. [3, задача 285, авторський переклад]. Транспортна мережа міста збудована так, що кожен маршрут містить рівно *n* зупинок, причому будь-які два маршрути мають єдину спільну зупинку і з будь-якої зупинки на будь-яку іншу можна дістатися без пересадки. Скільки маршрутів є у цій мережі?

Для відповіді на питання задачі необхідно підрахувати, скільки *n*-елементних підмножин має множина (всіх зупинок, їхня кількість *k* невідома) $\{a_1, a_2, a_3,\ldots, a_k\}$ таких, що кожні два елементи множини входять до однієї з підмножин, і будь-які дві підмножини мають один і тільки один спільний елемент. Очевидно, що йдеться про невпорядковані множини, що не містять повторень. Проте кількість таких підмножин підрахувати досить складно, і таблиця безпосередньо тут не допомагає.

Вивчення комбінаторики у виші можна розпочати саме з уніфікованої схеми, заповненої «шкільними» сполуками. Увівши далі ті сполуки, з якими студенти не ознайомлені у шкільному курсі (перестановки і комбінації з повтореннями), корисно ознайомити студентів зі способом доведення формул для обчислення кількості таких сполук, що полягає в інтерпретації даної сполуки у вигляді послідовності нулів і одиниць. Заповнюючи таблицю, можна перевірити залишкові знання комбінаторики, уміння використовувати формули, і в разі необхідності скоригувати їх. Як правило, шкільні знання комбінаторики швидко відновлюються у пам'яті, і непорозумінь із властивостями сполук (впорядкованість, наявність повторень), не виникає. Частіше з'являються труднощі у з'ясуванні питання впорядкованості-невпорядкованості у конкретних задачах чи практичних ситуаціях.

Перевірку залишкових знань після шкільного вивчення комбінаторики корисно поєднати із пропедевтикою понять спеціальних дисциплін шляхом розв'язування компетентнісно орієнтованих або прикладних задач залежно від спеціальності студентів. При цьому навіть у задачах можна ознайомити студентів із деякими поняттями, що вивчатимуться у спеціальних дисциплінах, увівши прості означення у формулювання задачі. Наступна задача є пропедевтикою деяких понять курсу «Теорія інформації і кодування» для студентів комп'ютерних спеціальностей.

Задача 4. Кодовим словом довжини *m* називатимемо двійкове *m*-розрядне число. Відстанню $d(a, b)$ Хеммінга між кодовими словами називається кількість позицій, якими різняться ці слова. Наприклад, відстань між словами $a = 01101$ і $b = 00111$ дорівнює 2. Скільки можна побудувати кодових слів, відстань від яких до даного слова довжини 6 дорівнює 3?

Для розв'язання задачі використовується невпорядкована структура C_n^k: із $n = 6$ місць вибираємо $k = 3$ для заміни символу 0 або 1 на протилежний, отже слів можна побудувати C_6^3. В межах сформульованої задачі можна також задіяти впорядковані структури, ставлячи запитання «Скільки існує кодових слів тієї чи іншої довжини?» або «Скільки існує кодових слів довжини 5, що не містять поряд двох нулів?». Для відповіді на друге запитання вже не досить самої лише таблиці. Ще дві задачі, що безпосередньо пов'язані з комп'ютерними спеціальностями.

Задача 5. Скількома способами можна записати 10 Гб інформації на диски, якщо у наявності є 5 DVD дисків об'ємом 4,7 Гб, 3 DVD диски об'ємом 1,4 Мб і 3 CD диски обсягом 700 Мб?

Задача 6. Паліндромом (від грец. πάλιν – назад, знов та δρόμος – біг) називається рядок символів, що читається однаково як зліва направо, так і справа наліво. Напр., 1230321. Скільки існує одинадцятицифрових чисел-паліндромів, що містять лише непарні цифри? Скільки існує бітових рядків-паліндромів довжини *n*?

Підбір прикладних та компетентнісно орієнтованих задачі досить копітким і непростим завданням, для розв'язання якого необхідна співпраця із випусковими кафедрами. Проте розв'язування саме таких задач стимулює студентів до вивчення комбінаторики. При цьому можна запропонувати під час розв'язування задач заповнювати і в подальшому користуватися такою таблицею.

Кількість розміщень *n* кульок у *k* комірках

Кульки, n\ Комірки, k	*Розрізняються*	*Не розрізняються*		*Можливі обмеження*
Розрізняються	*1.* $\overline{A}_k^n$ *2.* A_k^n $(n \le k)$ *3. k!S(n, k)*	*1.* $\sum_{i=1}^{\min\{n,k\}} S(n,i)$ *2.* 1 $(n \le k)$ *3. S(n, k)*		*1.Немає обмежень;* *2. Не більше однієї кульки в комірці;* *3. Немає порожніх комірок*
Не розрізняються	*1.* $\overline{C}_k^n$ *2.* C_k^n $(n \le k)$ *3.* $\overline{C}_k^{n-k}$ $(n \ge k)$	*1.* $\sum_{k=1}^{n} P(n,k)$ *2.* 1 $(n \le k)$ *3. P(n, k)* $(n \ge k)$		

Заповнювати і користуватися таблицею доцільно саме у процесі розв'язування задач на практичних заняттях, а не давати її вже заповнену на лекції. Можна додати умови у третьому пункті «немає обмежень на кількість частинок у комірці», або «у першій комірці – n_1, у другій – n_2, … , у k - й – n_k частинок». Можна також розширити таблицю, додавши інші умови, залежно від корисності тієї чи іншої комбінаторної задачі при подальшому вивченні дисциплін, так чи інакше пов'язаних із комбінаторикою. Заповнюється вся таблиця лише деякими комп'ютерними спеціальностями, оскільки необхідні для цього знання про числа Стірлінга другого роду $S(n, k)$ та числа Белла отримують не всі спеціальності. Числа

P(n, k), які дорівнюють кількості способів запису натурального числа у вигляді суми ненульових натуральних доданків, визначаються із рекурентного співвідношення, і тому відповідні місця в таблиці, як правило, не заповнюються. Час від часу до згаданих чисел студентам доводиться звертатися н заняттях з програмування. Постійне використання записаних таблиць при розв'язуванні задач сприяє виробленню навичок абстрагуватися від конкретного змісту задачі, вбачаючи у ній одну із комбінаторних структур, і навпаки – у кожній абстракції побачити реальну ситуацію. Такі навички є необхідними при побудові математичних моделей реальних явищ. Практика показує, що більше можливостей для цього має саме друга таблиця. Уніфікована схема ефективна при ознайомленні з предметом, друга таблиця – при набутті навичок застосування комбінаторних структур.

Як зазначалося вище, далеко не кожна задача розв'язується за допомогою уніфікованої схеми, і навіть останньої таблиці. Тому виникає потреба в інших методах. Такими є метод твірних (продуктивних) функцій, метод рекурентних співвідношень і метод траєкторій. Кожен із методів, як правило, входить до стандартного курсу дискретної математики, і кожен метод доцільно пов'язати із курсом вищої математики, який здебільшого передує згаданій дисципліні. Так, із твірною функцією послідовності та її застосуванням можна ознайомити студентів при вивченні рядів. Ознайомити із рекурентними співвідношеннями доцільно в розділі «Диференціальні рівняння», провівши паралель між лінійними рекурентними співвідношеннями та лінійними диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами. Часто для економічних спеціальностей вивчення рекурентних співвідношень поєднують із вивченням диференціальних рівнянь. Зупинимося детальніше на методі траєкторій.

Вивченню метода траєкторій передує ознайомлення з геометричною інтерпретацією біномних коефіцієнтів (Рис. 1). При цьому ознайомленні у будь-якому посібнику чи підручнику поза увагою залишається питання, яка саме підмножина (комбінація) відповідатиме тій чи іншій траєкторії. З'ясування поставленого питання сприяє формуванню у студентів навичок математичного моделювання. Так, для підрахунку кількості найкоротших ламаних, що з'єднують точки $(0, 0)$ і $(k, n-k)$, зауважують, що для побудови ламаної необхідно вибрати із n відрізків k горизонтальних ($n-k$ вертикальних), а це можна здійснити C_n^k (C_n^{n-k}) способами. Отже, число ламаних дорівнює числу комбінацій $C_n^k (= C_n^{n-k})$. Якщо кожній ламаній поставити у відповідність послідовність із n нулів і одиниць (вправо – 0, вгору – 1), а також нехай одиниця на s- му місці означатиме, що елемент a_s множини $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ увійшов до її k-елементної комбінації, то ламаній 01101…10…000100, зображеній на рис. 1 відповідатиме комбінація $\{a_2, a_3, a_5, \ldots, a_{n-3}\}$. Замінимо шкалу на осі *Ox*, як показано на рис. 2, і наявність вертикальних ланок над елементом нехай означає входження елемента у комбінацію (з повтореннями) стільки разів, яку довжину має ланка ламаної над цим елементом. Ламаній на рис. 2 відповідатиме комбінація $\{a_2, a_2, a_3, \ldots, a_{k-1}\}$. Студентам пропонується довести взаємно однозначну відповідність між траєкторіями та комбінаціями з повтореннями. Оскільки очевидна взаємно-однозначна відповідність траєкторій на рисунках 1 і 2, то маємо такий наслідок: $\overline{C}_{k+1}^{n-k} = C_n^k$, або у більш звичному записі $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$.

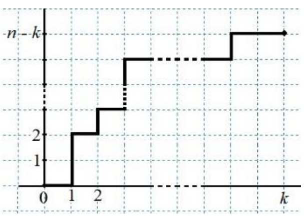


Рис. 1.

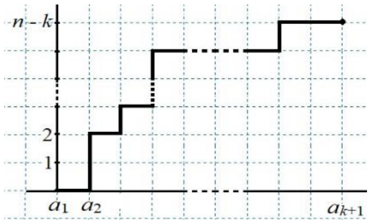


Рис. 2.

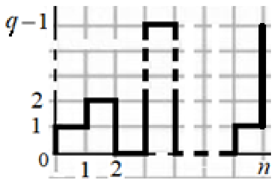
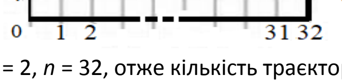
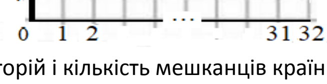
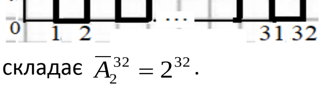


Рис. 3.

Траєкторія, що ілюструє біномні коефіцієнти, має бути найкоротшою. Якщо відмовитись від вимоги, щоб ламана ішла найкоротшим шляхом, а «дозволити» також іти донизу (але вліво по *Ox* забороняється), не виходячи за межі прямокутника (розміру $n \times (q-1)$), то матимемо геометричну ілюстрацію для вибірок з повтореннями. Дійсно,кожній ламаній, що має вигляд стовпчикової діаграми (рис. 3), поставимо у відповідність n-значне число в системі числення з основою q так, що висота s-го стовпчика дорівнює цифрі, яка стоїть на s-му місці в запису числа. Ламаній на рис.3 відповідає число $(120\ldots(q-1)0\ldots01)_q$. Кількість таких чисел (кожне число є впорядкованою множиною, утвореною вибором n цифр із q, з повтореннями), а отже і ламаних, що з'єднують точку $(0, 0)$ із точкою $(n, q-1)$, дорівнює $\overline{A}_q^n = q^n$. Остання геометрична інтерпретація надає можливість розв'язати задачу 2, поставивши у відповідність кожному мешканцю країни ламану, що з'єднує точки $(0, 0)$ і $(32, 1)$. На рисунку зображено ламані, що відповідають наборам зубів 0, 32 і 16 (через один).







Тут $q = 2$, $n = 32$, отже кількість траєкторій і кількість мешканців країни складає $\overline{A}_2^{32} = 2^{32}$.

Як показує досвід, аналіз геометричної інтерпретації комбінацій та вибірок сприяє ґрунтовному засвоєнню цього поняття та формуванню навичок математичного моделювання. Студент, що оперує з моделями, позначеннями чи символами реальних об'єктів, розвиває абстрактне мислення, необхідне для математичного моделювання. Проте це не єдина мета вивчення комбінаторики.

На теперішній час педагоги і психологи не дійшли до єдиної думки щодо категорії «математичне мислення». Існує багато досліджень щодо його формування у школярів, майбутніх спеціалістів тощо. Кожен автор дає своє означення математичного мислення і пропонує відповідну методику формування. Проте інші автори заперечують навіть існування такого поняття, як математичне мислення. Так, Л. М. Фрідман, З. І. Слєпкань і інші науковці вважають штучним термін «математичне мислення». Цікаво відзначити, що відомий математик і фізик-теоретик Герман Вейль означив математичний спосіб мислення (а не суто математичне мислення) так [4, стор. 6, цитується мовою оригіналу видання]:

«Под математическим способом мышления я понимаю… особую форму рассуждений, посредством которых математика проникает в науки о внешнем мире…и… ту форму рассуждений, к которой прибегает в своей собственной области математик, будучи предоставленным самому себе…», тобто визнавав існування математичного способу мислення, і там же стверджував [4, стор. 6], що «мышление…не сводится к набору механически применяемых правил и не может быть разделено … на такие отсеки, как мышление историческое, философское, математическое и другое. Мы, математики, не ку-клус-клан с неким тайным ритуалом мышления…». Тобто стверджує неможливість його виділити, вирізнити із мислення взагалі. Саме таку думку сформульовано і З. І. Слєпкань [8, стор. 18].

Відповісти однозначно на питання як співвідносяться комбінаторне та математичне мислення, або чи можна геометричні міркування, що застосовуються до розв'язування комбінаторних задач вважати проявом суто комбінаторного мислення (тобто виділити у названих міркуваннях «чисту комбінаторність») досить складно. На думку автора, усвідомлення суб'єктом варіативності ситуації, навіть без уміння (до певного часу) навести правильні обчислення можна вважати проявом комбінаторного мислення. І комбінаторне, і математичне мислення не зводяться лише до уміння розв'язувати суто математичні або суто комбінаторні задачі (особливо «типові») і до засвоєння відповідних знань.

Усвідомлення «комбінаторності» ситуації та перехід від реального об'єкта до його моделі є проявом того, що багато дослідників називають «комбінаторним мисленням». Для такого усвідомлення і переходу знання суто математичні, і зокрема, знання комбінаторики інколи не є необхідною умовою. Проте математика, і зокрема, комбінаторика є одним із найбільш ефективних інструментів для формування мислення взагалі. У психології найбільше емпіричних досліджень мислення проводилося саме на матеріалах дисциплін фізико-математичного циклу. Говорячи про формування комбінаторного мислення, розумітимемо формування здатності студента вбачати «комбінаторність» (варіативність) у реальній ситуації і вміння змоделювати останню за допомогою відповідних комбінаторних структур, а також навпаки – вбачати в конкретній комбінаторній структурі деяку реальну ситуацію. Саме з цією метою і запропоновано використання другої таблиці.

Висновки. Вивчення комбінаторики у закладах вищої освіти має бути націленим на розвиток комбінаторного мислення у майбутніх фахівців, на формування компетенцій, передбачених вимогами відповідних освітньо-кваліфікаційних характеристик. Викладання цього розділу математики у виші має скоригувати знання і уміння, отримані в шкільному курсі, і націлити майбутнього спеціаліста на опанування спеціальними дисциплінами та застосування у практичній діяльності отриманих навичок використання комбінаторних структур.

Список використаних джерел

1. Баранов В. И. Стечкин Б. С. Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения. М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 160 с.
2. Бурменская Г. В., Евдокимова Л. В. Формирование комбинаторного мышления у младших школьников и подростков. *Вопросы психологии*. 2007. № 2. С. 30-44.
3. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. 328 с.
4. Вейль Г. Математическое мышление. М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 400 с.
5. Игнатушина И. В. Методический прием обучения школьников решению комбинаторных задач. *Вестник ОГПУ*. 2016. № 4(20). С. 276-283.
6. Лебедев В. В. Эффективное обучение комбинаторике и теории вероятностей. Школьные технологии. М., 2012. № 2. С. 126-134.
7. Lockwood E. A model of students' combinatorial thinking. *The Journal of Mathematical Behavior*. 2013, 32. P. 251-265.
8. Слепкань З. И. Психолого-педагогические основы обучения математике. К : Рад. школа. 1983. 192 с.
9. Ширяев А.Н. Вероятность. М. : Наука, 1980. 581 с.

References

1. Baranov V. I., Stechkin B. S. Extremal combinatorial problems and their applications. M. : Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1989. 160 s. (in Russian)
2. Burmenskaya G. V., Yevdokimova L. V. The formation of combinatorial thinking in younger schoolchildren and adolescents // Voprosy Psikhologii. 2007. № 2. P. 30-44. (in Russian)
3. Vilenkin N. Ya. Combinatorics. M. : Nauka. Gl. red. fiz.-mat. Lit., 1969. 328 s. (in Russian)
4. Weyl H. Mathematical thinking. M. : Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1989. 400 s. (in Russian)
5. Ignatushina I. V. Methodical way of teaching students the solution of combinatorial problems // Vestnik OGPU. 2016. № 4(20). S. 276-283. (in Russian)
6. Lebedev V. V. Effective training of combinatorics and probability theory // Shkol'nye tekhnologii. M., 2012. № 2. S. 126-134. (in Russian)
7. Lockwood E. A model of students' combinatorial thinking // The Journal of Mathematical Behavior. 2013, 32. P. 251-265.
8. Slepkan' Z. I. Psycho-pedagogical bases of teaching mathematics: study guide. K. : Rad. Shkola, 1983. 192 s. (in Russian)
9. Shiryaev A. N. Probability. M. : Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1980. 206 s. (in Russian)

ABOUT TEACHING COMBINATORICS IN THE INSTITUTES OF HIGHER EDUCATION

Mykola Rashevs'kyi

Kryvyi Rih National University, Ukraine

Abstract. *Many studies are devoted to the question of teaching of combinatorics and the formation of combinatorial thinking. The questions of the methodic of introducing the basic concepts of combinatorics in the school course of mathematics were studied. The investigations were concerned to the formation of combinatorial concepts of junior pupils and adolescents. Combinatorics is the basis for the study of the probability theory, discrete mathematics and other mathematical courses.*

Combinatorial thinking is necessary for the engineer, programmer, mathematics teacher and many other specialists of different directions. The task for the institution of higher education faces is a continuing the formation of combinatorial thinking, having conduction a diagnosis of its formation at the beginning of the study of the mentioned section.

The article discusses some methodical techniques used in the study of the section "Combinatorics" in educational institutions of different directions. Combinatorial sections of mathematics form the basis of both the stochastic line of the school course of mathematics and some mathematical courses of higher education. When teaching combinatorics it is convenient to use a unified scheme of combinatorial structures. Issues of the history of origin and methodics of using the unified scheme in the school course and in higher education institutions are discussed. At the beginning of the study of combinatorics it is useful to familiarize students with the mentioned above scheme, and to form the ability to use it to solve the simplest tasks. It is also advisable to develop a set of competence-oriented or applied tasks, taking into account the future specialty of students. Further study of combinatorics relate to special methods: the method of generating functions, the method of recurrence relations and the method of trajectories. These methods are studied in the course of discrete mathematics. The article discusses the possibilities of geometric illustration of binomial coefficients for the formation of mathematical modeling skills. Diagnosis of the level of combinatorial thinking and possible its correction may be a problem for another investigation.

Key words: *teaching mathematics, combinatorics, unified combinatorial scheme, combinatorial thinking, discrete mathematics, trajectories method in combinatorics.*