

МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ ПИТАННЯ ПРО ПОРІВНЯННЯ СТАТИСТИК В КУРСІ ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ ВНЗ

Розглядається методика викладання питання про порівняння статистик в курсі статистичної фізики. Встановлюються фізичні умови, при яких для опису властивостей макроскопічних систем можна використовувати класичну статистику Максвелла-Больцмана. Порівнюється критерій виродження для гелію та металів.

Ключові слова: спин, статистики Максвелла-Больцмана, Бозе-Ейнштейна, Фермі-Дирака.

Постановка проблеми. На початку ХХ століття в фізиці виникли протиріччя, які свідчать про те, що відмінності в станах і властивостях термодинамічних систем, пов'язані не лише з класичними відмінностями (маса, заряд тощо) атомів та молекул чи інших елементарних частинок, із яких вони складаються, але й з більш тонкими їх відмінностями, такими що виходять за рамки класичної фізики. Таким чином, для розв'язання протиріч, пов'язаних, наприклад, з електронною теплоємністю металів і тепловим випромінюванням (та деякими іншими), виникає задача про врахування цих «некласичних» властивостей частинок. Ними є наявність спіну та його величина. Річ у тому, що, як відомо із квантової механіки, частинки з напівцілим спіном (вони одержали назву – ферміони) підкоряються принципу Паулі про неможливість частинок знаходитись в одному й тому ж квантовому стані, а до всіх інших частинок (бозони) принцип Паулі не застосовується. Крім цього, з позицій квантової фізики всі частинки одного сорту є абсолютно тотожними. Класичні ж частинки зовсім не мають спіна і їх можна фізично розрізнити. В зв'язку із цими квантовими відмінностями

необхідно детально підійти до описання ймовірності стану термодинамічних систем.

Аналіз актуальних досліджень. Науковий розв'язок протиріч класичної статистики й експериментальних даних призвів до створення нового розділу теоретичної фізики – квантової статистики, вивчення якого в значній мірі розширює фізичний світогляд майбутнього вчителя фізики. Але, як показує аналіз, у навчальній та методичній літературі питання про зіставлення класичної та квантової статистик розглядається із занадто загальних позицій, що ускладнює їх розуміння і подальше використання.

Мета статті. На основі теоретичного, методичного та онтодидактичного аналізу навчально-методичної літератури з питань термодинаміки й статистичної фізики розробити авторську методику висвітлення питань про порівняння статистик в курсі теоретичної фізики.

Виклад основного матеріалу. Будемо розглядати найзагальніший випадок – відриті квантові системи, які можуть обмінюватися як енергією, так і частинками з навколишнім середовищем – термостатом. У цьому випадку для опису систем необхідно використовувати великий канонічний розподіл Гіббса, який визначає ймовірність виявлення системи з енергією E_i й кількістю частинок n :

$$\omega(E_i, n) = \frac{e^{\frac{\mu n - E_i}{\theta}} \cdot g(E_i, n)}{\sum e^{\frac{\mu n - E_i}{\theta}} \cdot g(E_i, n)}. \quad (I)$$

Для зіставлення статистик визначимо в кожній із них середнє число частинок, що знаходяться у деякому квантовому стані.

Виділимо деякий стан системи з енергією ε_i , і цей стан будемо розглядати як підсистему в термостаті. Це завжди можна зробити, оскільки в цьому стані буде деяка кількість частинок з енергією ε_i , і внаслідок взаємодії частинок деякі з них вибуватимуть із цього квантового стану, а на їх місце можуть потрапляти інші. Тоді загальна енергія підсистеми

$$E_i = n \cdot \varepsilon_i \quad (II)$$

може змінюватися за рахунок обміну частинок з іншими підсистемами (іншими рівнями енергії).

Використовуючи (I), визначимо середнє число частинок на вибраному рівні:

$$\langle n \rangle = \frac{\sum_{i,n} n \cdot e^{\frac{\mu n - E_i}{\theta}} \cdot g(\varepsilon_i, n)}{\sum_{i,n} e^{\frac{\mu n_i - E_i}{\theta}} \cdot g(\varepsilon_i, n)}. \quad (\text{III})$$

Підставляючи (II) в (III) ми тим самим автоматично враховуємо підсумовування по i :

$$\langle n \rangle = \frac{\sum_n n \cdot e^{\frac{\mu - \varepsilon_i}{\theta} n} \cdot g(n)}{\sum_n e^{\frac{\mu - \varepsilon_i}{\theta} n} \cdot g(n)}.$$

Цей вираз, очевидно, може бути перетворений до вигляду:

$$\langle n \rangle = \theta \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_n e^{\frac{\mu - \varepsilon_i}{\theta} n} \cdot g(n). \quad (\text{IV})$$

Відмінність квазікласичної статистики Масвелла-Больцмана від квантових статистик Бозе-Ейнштейна та Фермі-Дірака виявляється у підрахунку кратності виродження $g(n)$. У класичній статистиці кратність виродження визначимо діленням фазового об'єму, що відповідає вибраній системі (h^3 – так як всі частинки знаходяться в одному стані з енергією ε_i) на об'єм одного квантового стану (h^3) і на $n!$. Ділення на $n!$ враховує, що перестановки частинок в межах одного квантового стану, не дають нового стану. Тоді для квазікласичних частинок Максвелла-Больцмана кратність виродження буде рівною:

$$g(n) = \frac{h^3}{n! h^3} = \frac{1}{n!}.$$

Тому середнє значення кількості частинок на вибраному енергетичному рівні в статистиці Максвелла-Больцмана визначиться наступним чином:

$$\langle n \rangle = \theta \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_{n=0}^N e^{\frac{\mu - \varepsilon_i}{\theta} n} \frac{1}{n!}. \quad (\text{V})$$

Із цього виразу видно, що для квазікласичних частинок хімічний потенціал μ не може бути додатним, оскільки в протилежному випадку при $\mu > \varepsilon_i$ ряд в (V) буде розходитись. У такому випадку верхню межу в сумі по n можна замінити на (∞) , що відповідає додаванню нескінченно малих членів при $n > N$. Тоді ряд в (V) дорівнює $\sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, де $x = e^{\frac{\mu - \varepsilon_i}{\theta}}$ і середня кількість частинок на довільно вибраному енергетичному рівні ε_i в статистиці Максвелла-Больцмана буде дорівнювати:

$$n = e^{\frac{\mu - \varepsilon_i}{\theta}} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{\theta}}}, \quad (\text{VI})$$

де знак усереднення $\langle \rangle$ опущено. Цей вираз вперше одержав Больцман, тому класичну статистику часто називають статистикою Больцмана без згадки Максвелла. Проте неважко побачити, що вираз (VI) є аналогом розподілу Максвелла-Больцмана.

У випадку квантових статистик Фермі-Дірака та Бозе-Ейнштейна, на відміну від статистики Максвелла-Больцмана, згідно з квантовим принципом тотожності, всі частинки одного виду є абсолютно тотожні. Тому у виразі (IV) при підрахунку кратності виродження втрачає зміст ділення на $n!$. Для визначення кратності виродження в цьому випадку необхідно фазовий об'єм, що відповідає вибраній підсистемі (він дорівнює h^3 , оскільки підсистема містить один квантовий рівень) розділити на фазовий об'єм, що приходить на один квантовий рівень (він також дорівнює h^3), тоді в (IV) $g(\varepsilon_i) = 1$. Отже, середнє число тотожних частинок на i -том енергетичному рівні буде дорівнювати:

$$\langle n \rangle = \theta \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_n e^{\left(\frac{\mu - \varepsilon_i}{\theta}\right)n}. \quad (\text{VII})$$

В цьому виразі підсумовування виконується за кількістю всіх частинок

системи, які можуть знаходитися на i -тому рівні. У випадку частинок, що не підкоряються принципу Паулі, верхня межа може бути замінена на (∞) , оскільки при $n > N$ члени ряду в (VII) будуть нескінченно малими (за умови $\mu < 0$). Тоді:

$$\langle n \rangle = \theta \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_0^{\infty} e^{\left(\frac{\mu - \varepsilon_i}{\theta}\right)n}.$$

Тут ряд $\sum_0^{\infty} e^{\left(\frac{\mu - \varepsilon_i}{\theta}\right)n}$ є нескінченно спадною геометричною прогресією зі знаменником $q = e^{\frac{\mu - \varepsilon_i}{\theta}}$, сума якої, як відомо із математики, визначається наступним виразом: $\sum_0^{\infty} e^{\frac{\mu - \varepsilon_i}{\theta}n} = \frac{1}{1 - q}$.

Таким чином, середнє число тотожних частинок, що не підкоряються принципу Паулі (світлові кванти, k -й π -мезони, атоми та молекули, що мають у своєму складі парне число елементарних частинок), які знаходяться на енергетичному рівні ε_i , дорівнює:

$$n = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{\theta}} - 1}. \quad (\text{VIII})$$

Цей вираз називається розподілом Бозе-Ейнштейна.

Відмінність квантових статистик Бозе-Ейнштейна й Фермі-Дірака, враховується межами підсумовування в (VI). Якщо частинки підкоряються принципу Паулі, то на кожному енергетичному рівні не може бути більше однієї частинки. Тоді в (VI) n змінюється від 0 до 1. Отже:

$$\langle n \rangle = \theta \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_0^1 e^{\left(\frac{\mu - \varepsilon_i}{\theta}\right)n} = \theta \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \left(1 + e^{\frac{\mu - \varepsilon_i}{\theta}} \right)$$

або

$$n = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{\theta}} + 1}. \quad (\text{IX})$$

Це і є розподіл Фермі-Дірака, що визначає середнє число тотожних частинок, що підкоряються принципу Паулі (атоми й молекули з непарним

числом елементарних частинок, нуклони, електрони та інші частинки з напівцілим спіном), які знаходяться на енергетичному рівні з енергією ε_i .

Графічно вирази (VI, VIII, IX) можна зобразити у вигляді кривих на рис. 1.

В макроскопічних системах рівні енергії розташовані достатньо густо (квазінеперервно) і часто потрібно визначати не кількість частинок, які

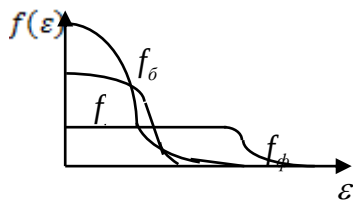


Рис.1.Графіки
розподілів
Маквелла-

знаходяться на деякому конкретно вибраному енергетичному рівні, а кількість частинок, які мають енергію від ε до $\varepsilon + d\varepsilon$. Очевидно для знаходження середнього числа частинок з енергією від ε до $\varepsilon + d\varepsilon$ необхідно середнє число частинок на одному рівні помножити на кількість рівнів $\frac{d\Gamma}{h^3}$, де $d\Gamma$ – фазовий об’єм, який відповідає станам з енергією від ε до $\varepsilon + d\varepsilon$.

Тоді кількість частинок, які знаходяться на рівнях енергії від ε до $\varepsilon + d\varepsilon$ буде дорівнювати:

$$dn = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{\theta}} + b} \cdot \frac{d\Gamma}{h^3}, \text{ де } b = \begin{cases} 0, & \text{класичні частинки,} \\ +1, & \text{ферміони,} \\ -1, & \text{бозони.} \end{cases} \quad (X)$$

Атоми, молекули та інші мікроскопічні частинки повинні описуватися законами квантової механіки, тобто підкорюватись розподілу Бозе-Ейнштейна або Фермі-Дірака. Разом з тим досвід показує, що в багатьох випадках їх рух можна розглядати як рух класичних частинок. Встановимо фізичні умови, при яких від точних квантових розподілів Бозе-Ейнштейна або Фермі-Дірака можна перейти до класичної статистики. Ці умови,

очевидно, визначатимуться виразом:

$$e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{\theta}} \gg 1, \quad (\text{XI})$$

оскільки в цьому випадку в знаменнику виразу (X) можна знехтувати одиницею і одержати розподіл Максвелла-Больцмана (VI).

Припустимо, що умова (XI) виконана і газ є класичним. Тоді, використовуючи (X) і умову нормування $N = \int dn$, запишемо:

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{h^3} \int_{\Gamma} e^{\frac{\mu - \varepsilon}{\theta}} d\Gamma = \frac{1}{h^3} e^{\frac{\mu}{\theta}} \int_{p,q} e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}} 4\pi p^2 dp dV = \\ &= 4\pi \frac{V}{h^3} e^{\frac{\mu}{\theta}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{p^2}{2m\theta}} p^2 dp = \frac{V}{h^3} e^{\frac{\mu}{\theta}} (2\pi m\theta)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Звідси:

$$e^{\frac{\mu}{\theta}} = \frac{Nh^3}{V(2\pi m\theta)^{\frac{3}{2}}}. \quad (\text{XII})$$

Як відомо, перехід частинок із одного рівня енергії на інший відбувається за рахунок теплових збуджень ($\theta \geq \varepsilon_i$), тому умову (XI) можна записати у вигляді:

$$e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{\theta}} \approx e^{-\frac{\mu}{\theta}} \gg 1 \Rightarrow e^{\frac{\mu}{\theta}} \ll 1.$$

Таким чином, умова (XII) можливості застосування класичної статистики запишеться у вигляді:

$$c = \frac{V}{N} \left(\frac{2\pi m\theta}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \gg 1. \quad (\text{XIII})$$

Газ, для якого умова (XIII) не виконується, є квантовим або виродженим. Відповідно умову обернену до (XIII):

$$\frac{V}{N} \left(\frac{2\pi m\theta}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \ll 1 \quad (\text{XIV})$$

називають умовою виродження, тобто умовою при виконанні якої потрібно

використовувати квантові статистики. Аналіз виразу (XIV) показує, що виродження газу може відбутися, якщо має місце хоча б одна із наступних причин:

- 1) велика концентрація частинок;
- 2) мала маса частинок;
- 3) низька температура.

У якості ілюстрації наведених міркувань, оцінимо критерій виродження для гелію при $T=10\text{ K}$ і $p=1\text{ атм}$ та для електронного газу в алюмінії при $T=10^4\text{ K}$, густина алюмінію $\rho = 2,69 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Підстановка чисельних значень в (XIII) для гелію дає $C \approx 58$, тобто гелій навіть при такій низькій температурі є невиродженим (класичним). Важчі ж гази будуть невиродженими до дуже низьких температур. Тому у випадку газових систем практично завжди можна використовувати квазікласичну статистику Максвелла-Больцмана, яка даватиме результати, які принаймні якісно узгоджуються з досвідом.

У випадку електронів в алюмінії (та в усіх інших металах), як показують розрахунки, $c \ll 1$, тобто електронний газ в металах навіть при високих температурах є виродженим і до нього не можна застосовувати квазікласичну статистику Максвелла-Больцмана.

Якщо умова виродження (XIV) виконується, тобто газ є квантовим, то кількість частинок у заданому квантовому стані буде набагато менша одиниці, тобто принцип Паулі виконується автоматично, оскільки кількість частинок набагато менша кількості станів, і вони потрапляють в кожний стан по одній або взагалі стан залишається незаповненим.

Не дивлячись на те, що у ряді випадків результати класичних статистик співпадають із експериментальними даними, лише створення квантових статистик дозволило пояснити відмічені раніше протиріччя теорії й експерименту.

Висновки. Як показує досвід викладання статистичної фізики, розглянута методика висвітлення питань про створення квантових статистик і

порівняння їх з класичною статистикою, достатньо легко сприймається студентами, що дозволяє їм в подальшому ефективно використовувати квантові статистики при розгляді бозе та фермі газів.

Література

1. Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц. Статистическая физика. - М.: Наука, 1964, - 567 с.
2. Я.П. Терлецкий. Статистическая физики. М.: Высшая школа, 1973, 277 с.
3. В.Г. Левич. Курс теоретической физики. Т.1. М.: ГИФМЛ, 1962, 695 с.
4. А.И. Ансельм. Основы статистической физики и термодинамики. – М.: Наука, 1973, -423с.
5. Ч. Киттель. Статистическая термодинамика. – М.: Наука, 1977, - 335с.
6. А.М. Федорченко. Вступ до курсу статистичної фізики та термодинаміки. К.: Вища школа, 1973, 187 с.

РЕЗЮМЕ

Рассматривается методика изложения вопроса о сравнении статистик в курсе статистической физики. Устанавливаются физические условия, при которых для описания свойств макроскопических систем можно использовать классическую статистику Максвелла-Больцмана. Сравнивается критерий вырождения для гелия и металлов.

Ключевые слова: спин, статистики Максвелла-Больцмана, Бозе-Эйнштейна, Ферми-Дирака.

SUMMARY

Methodology of teaching of question is examined about comparison statistician in a course statistical physics. Physical terms at which for description of properties of the macroscopic systems it is possible to use classic statistics of Maxwell-Boltzmann are set. The criterion of degeneration is compared for helium and metals.

Key words: spin, statisticians of Maxwell-Boltzmann, Booze-Einstein.

Відомості про автора:

Мороз Іван Олексійович, канд. техн. наук, доцент, професор кафедри експериментальної та теоретичної фізики.