

РОЗДІЛ 2. СПРЯМОВАНІСТЬ НАВЧАННЯ  
ДИСЦИПЛІН ПРИРОДНИЧО-МАТЕМАТИЧНОГО ЦИКЛУ  
НА РОЗВИТОК ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИХ УМІНЬ ТА ТВОРЧИХ ЗДІБНОСТЕЙ  
УЧНІВ ТА СТУДЕНТІВ

УДК 511.1. 374

DOI 10.5281/zenodo.10214263

Т. В. Авдєєва

ORCID ID 0000-0001-7775-8512

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

О. І. Кушлик-Дивульська

ORCID ID 0000-0002-4999-6641

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Л. М. Іллічева

ORCID ID 0009-0000-5209-6823

Національний авіаційний університет

**ЗИМОВА МАТЕМАТИЧНА ШКОЛА. ПОЗАШКІЛЬНЕ ДОЗВІЛЛЯ**

*Проаналізовано стан математичної освіти під час війни, сформульовано пропозиції для вирішення проблем із залученням громадськості. Представлений екскурс роботи зимової математичної школи Київської МАН. Показано історичні аспекти дослідження множин чисел, теоретичні основи, наведений ряд простих чисел (які характеризуються спеціальними алгоритмами простоти), розглянута методика їх вивчення за допомогою сучасного програмного забезпечення. Значну увагу приділено таким числам, як прості, досконалі, дружні, числа-близнюки та паліндромні. Розглянуті періодичні та ланцюгові дроби, їх запис та представлення у вигляді звичайних дробів. Сформульовано декілька досі ще відкритих питань стосовно описаних множин чисел. Розв'язано нескладні рівняння із використанням понять антьє та мантиси.*

*Мета статті – дослідження особливостей проведення позашкільних занять з математики, які полягають у поєднанні теоретичного викладу матеріалу з ігровою (індивідуальною чи колективною) формою проведення дистанційних занять на прикладі розгляду основ теорії множин і теорії чисел.*

*Організація творчої роботи дітей-школярів різних вікових груп із профільних та непрофільних закладів освіти сприяла підвищенню їхньої самооцінки, становленню лідерських навичок, компенсувала майже повну відсутність спілкування із однолітками у гуртках та факультативах. Заняття заохочували до творчого пошуку, сприяли ліквідації прогалин шкільного курсу математики. Школярі під час занять математичної школи не лише залюбки вивчали математичні поняття та підходи, знайомилися із новим матеріалом, відкритими питаннями сучасної теорії чисел, але й перебували у стані психологічного комфорту, який дуже потрібен дітям в наші непрості часи.*

**Ключові слова:** математична освіта, множини чисел, прості числа, досконалі числа, двійнята, дружні числа, звичайний дріб, періодичний дріб, ланцюговий дріб, ціла частина дійсного числа, дробова частина дійсного числа.

**Постановка проблеми.** Ми живемо в період воєнного стану, в період сучасної війни, яку називають також ще війною технологій. Можливо, хтось вважає, що про якість освіти, у тому числі і природничої, говорити не на часі. Але ця думка є хибною. Математична підготовка є важливою складовою частиною, як початкової, так і середньої ланок освіти. Ще до війни суспільство шокувала новина, що за результатами міжнародного дослідження PISA більшість наших підлітків мають поверхові знання з математики. Невтішні результати і

досить простого, в порівнянні з ЗНО, тесту НМТ (2022). Звичайно, можна посилалися і на надзвичайні умови, в яких навчання в період пандемії проводилось дистанційно, і на відсутність планомірної роботи у гуртках та факультативах. Під час війни ситуація з математичною освітою значно погіршилася: багато дітей виїхали за кордон (діти-біженці вимушено поєднують навчання в українській школі з навчанням у закладах освіти за місцем тимчасового проживання); в умовах військового стану в країні, при постійних загрозах – повітряних тривогах, проблемах з енергоносіями, втратах близьких та рідних людей, знищених домівках, зруйнованих школах – учням важко зосередитися на оволодінні математичними знаннями. Але саме під час війни потрібно розглядати, концентрувати увагу на проблемах освіти, думати про наше майбутнє. Необхідно дбати про надання школярам базових фундаментальних знань, наші діти надалі стануть студентами, працюватимуть в різних сферах післявоєнної відбудови країни.

Цікавими є пропозиції для вирішення поставленої освітньої проблеми [6], які пропонує громадське суспільство.

*1. Бажано запровадити курси базової підготовки з математики та природничих наук відповідно до потреб конкретних спеціальностей (особливо, стосовно числової грамотності, основ природничих наук та аналізу даних). Такі курси слід запровадити для всіх спеціальностей, зокрема й гуманітарних.*

Доволі часто студенти вишів мають недостатній рівень знань із деяких предметів природничого циклу, які напряму не відносяться до обраного ними фаху. Але рівень розвитку сучасного суспільства вимагає серйозних навичок із царини аналізу даних. Такі курси для всіх спеціальностей є в університетах багатьох країн.

*2. Необхідно налагоджувати комунікацію усіх зацікавлених сторін: пояснювати батькам і дітям, що «зовсім без математики/фізики/хімії/біології» їхні особистісні професійні перспективи є досить сумнівними в умовах високої конкуренції вже досвідчених спеціалістів у галузях «без математики».*

Базові математичні знання потрібні всім. Сюди можна сміливо віднести такі навички, як проведення розрахунків без застосування калькулятора (доступ до гаджета з калькулятором не завжди гарантований, треба вміти вести усні розрахунки); основи геометрії; вміння вимірювати і оцінювати величини; основи знань з аналізу даних та числової інформації, основи теорії ймовірностей; використання пропорцій, відсотків та основ фінансової грамотності.

*3. Тим, хто навчався в школі, але не має твердих знань, допоможуть дистанційні курси. Для інших потрібно передбачити коригувальні курси в межах бодай професійного навчання та підвищення кваліфікації (зокрема й для юристів, учителів гуманітарних дисциплін, істориків, філологів, перекладачів, журналістів тощо).*

Цікаво, що багато західних довідників та підручників для інженерів, лікарів, фармацевтів, молодшого медичного персоналу (медсестер) і кваліфікованих робітників включають також інформацію з базової математики – арифметика, пропорції, відсотки... Право на роботу за цими спеціальностями підтверджується кваліфікаційними іспитами – де, крім суто професійних питань, є й завдання, що потребують знань базової математики.

*4. Вимоги та пропагування необхідності знань – це добре, але потрібна також інфраструктура для отримання цих знань, зокрема дорослими людьми.*

*Порада при необхідності «звернутися до шкільного підручника» не завжди допоможе – українські шкільні підручники не орієнтовані на самостійне навчання й на дорослих читачів. Тим, хто добре знає англійську, доступна велика кількість відповідних книжок і платформ для навчання. Непогано було б знайти ресурси для перекладу таких книжок і курсів чи створення власних українських. Сподіваємося, що міжнародна допомога буде залучена для освіти дорослих за цими напрямками.*

*5. Створити умови для підтримки та розвитку дітей, які хочуть і можуть вивчати математику на більш високому рівні.*

Війна різко звузила спектр можливостей для доступу дітей з України до системної якісної математичної освіти. Навіть ті, хто виїхав за кордон, навчаються у звичайних школах із досить легкою програмою. Базові знання у них будуть, але можливості для поглибленого занурення у математику – проблематичні. У багатьох країнах додаткові заняття на рівні, вищому за шкільний, є досить дорогим задоволенням та потребують гарного знання відповідної мови. Багато батьків втратили можливість оплачувати додаткові заняття та літні табори з навчанням. І знову потрібно думати, як це компенсувати бодай частково, як у цих скрутних обставинах налагодити розвиток наших обдарованих дітей. Для них це не лише улюблене заняття та розвиток здібностей, а й психологічний комфорт, який у ці складні часи дуже потрібний.

Організацією та пошуком ресурсів для створення й розвитку інфраструктури додаткового позашкільного навчання займається комунальний позашкільний навчальний заклад «Київська мала академія наук учнівської молоді».

Протягом 2022-2023 н. р. року вихованці Київської МАН [7], долаючи виклики воєнного часу – повітряні тривоги, блек-ауті, недоліки дистанційного навчання, здобули понад 150 перемог на всеукраїнських конкурсах науково-технічної творчості молоді. Також, у 2022-2023 навчальному році одержали 36 перемог у міжнародних молодіжних науково-технічних конкурсах, які проводилися у Польщі, Швейцарії, Тунісі, Канаді, Тайвані, Хорватії та ін.

Варто відмітити випускника Київської МАН Ігоря Клименка, який у 2022 році визнаний кращим студентом-винахідником світу, нагороджений премією у розмірі 100 000 доларів (використав для вдосконалення свого винаходу: дрона-міношукача).

**Аналіз актуальних досліджень.** Розв'язування нестандартних задач, головоломок, відгадування ребусів та загадок активізує дитяче мислення. Для розвитку самостійного, евристичного мислення бажано відразу не пояснювати спосіб розв'язування завдань нового типу, а пропонувати учням самим його знайти. Бажано якомога частіше використовувати ігрову форму проведення занять, чергувати індивідуальну роботу учнів з колективною роботою в групах. Доцільно заохочувати учнів самостійно створювати завдання та ігри, оскільки це допомагає глибше осмислювати вивчений матеріал, є хорошою вправою для розвитку творчих здібностей.

Множини чисел – натуральні, цілі, раціональні, ірраціональні, дійсні, комплексні, ..., прості, складені, досконалі, дружні, близнюки, паліндромні.

Натуральне число є простим, якщо воно ділиться лише на 1 та на саме число. В [8] проведено огляд деяких проблем класичної теорії чисел, що пов'язані із простими числами. Значну увагу в статті приділено властивостям чисел Ферма та Мерсенна, наведено критерій Люка-Лемера перевірки чисел Мерсенна на простоту, а також вказано відомі на сьогоднішній день прості числа Мерсенна.

Давньогрецький математик Евклід (бл. 365 — бл. 300 до н. е.) у своїй книзі «Начала», що була протягом двох тисяч років головним підручником математики, довів, що простих чисел нескінченно багато, тобто за кожним простим числом знаходиться більше просте число. Найбільшого простого числа не існує.

*Теорема (Евкліда).* Множина простих чисел нескінченна.

Доведення теореми проведено методом від супротивного. Припустимо, що простих чисел скінченна кількість, тобто їх можна всі перелічити, як  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Оскільки число  $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$  при діленні на всі прості числа в остачі дає 1, то воно також є простим числом. Але це нове просте число, воно не належить до вказаного переліку простих чисел. Отже, припущення про скінченність множини простих чисел є помилковим.

Можна також отримати доведення теореми Евкліда із відомого результату Ейлера

про розбіжність ряду 
$$\sum_{p-\text{просте}} \frac{1}{p}$$

Інтерес до великих простих чисел пов'язаний із використанням їх у криптографії – чим більше вихідне просте число, тим складніше підібрати ключ, зламати шифр.

Відомий ряд чисел, простота яких встановлюється за допомогою спеціальних алгоритмів, так званих тестів простоти (Люка-Лемера; Люка-Лемера-Різера; Міллера-Рабина; Пепіно) [2]. Такими є числа: Мерсенна  $n = 2^n - 1$ ; Ферма  $F_n = 2^{2^n} + 1$ ; Каллена  $C_n = n \cdot 2^n + 1$ ; Вудала  $W_n = n \cdot 2^n - 1$ . Варто зауважити, що за допомогою тесту Бріллхарта-Лемера-Селфріджа можна перевірити простоту чисел Каллена та Прота. Власне, числа Прота є числами вигляду  $P = k \cdot 2^n + 1$  для непарних  $k$  та  $2^n > k$ . Із формули задання випливає, що числа Каллена – окремий випадок чисел Прота для  $k = n$ , також при  $k = 1, n = 2^m$  числа Прота описують множину простих чисел Ферма, якими на 2023 р. є такі: 3, 5, 17, 257, 65537 (відповідно при  $m = 0, 1, 2, 3, 4$ ). Висловлена гіпотеза, що інших простих чисел Ферма немає.

Відомий широкомасштабний проект добровільних обчислень знаходження простих чисел Мерсенна *GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search)*. 21 грудня 2018 р. ця міжнародна колаборація [9] виявила найбільше просте число Мерсенна, яким є  $2^{82589933} - 1$ , що має 24 862 048 цифр. Це також найбільше відоме просте число будь-якого типу. Причина інтересу до чисел Мерсенна полягає в тому, що для їх пошуку ефективно використовувати критерій простоти Люка-Лемера, який застосовується зокрема для тестування суперкомп'ютерів.

Відомо, досконале число – це число, яке дорівнює сумі всіх своїх дільників [3], в тому числі одиниці, але виключаючи саме себе. Перше і найменше з таких чисел 6. Досконале число шість дорівнює сумі трьох своїх дільників 1, 2 і 3. Наступне досконале число

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.$$

Далі ці числа зустрічаються дуже нечасто: 496, 8128, 2096128 і т.д.[10].

Першим великим досягненням в області теорії досконалих чисел була *теорема Евкліда*: число  $2^{n-1}(2^n - 1)$  – парне і досконале в тому випадку, якщо число  $2^n - 1$  просте. Через багато століть Леонардо Ейлер довів справедливості теорії Евкліда. Таким чином, у формулі Евкліда містяться всі парні досконалі числа. За весь час вивчення чисел не було знайдено жодного непарного досконалиго числа. У зв'язку з цим вчені говорять лише про існування парних досконалих чисел. Однак, не виключена можливість існування і непарного досконалиго числа.

Для натурального числа вводиться числова функція – сума всіх дільників цього числа, які менше самого числа (тобто, за виключенням самого числа). Ще Піфагор [11] помітив, що  $s(6) = 1 + 2 + 3 = 6$ , тобто  $s(n) = n$ , такі числа  $n$  він називав ідеальними (досконалими або повними). Функція  $s(n)$  є мультиплікативною, тобто  $s(n) \neq 0$  та для довільних взаємно простих натуральних чисел  $m, n$  виконується рівність

$$s(m \cdot n) = s(m) \cdot s(n).$$

Оскільки кожне досконале число має вигляд  $n = 2^n (2^{n+1} - 1)$  та враховуючи, що

$$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1} - 1} = \frac{2^{n+1} - 1 + 1}{2^n \cdot (2^{n+1} - 1)} = \frac{2}{2^{n+1} - 1},$$

Його також можна представити в термінах давньоегипетських дробів наступним чином:

$$n = k \cdot m (k < m) \Rightarrow \frac{2}{m} = \frac{1}{k} + \frac{1}{n}.$$

Отже, маємо:

$$6 = 2 \cdot 3 \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}; \quad 28 = 4 \cdot 7 \Rightarrow \frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}; \quad 496 = 16 \cdot 31 \Rightarrow \frac{2}{31} = \frac{1}{16} + \frac{1}{496}.$$

Досконале число  $n$  також можна представити у вигляді різниці двох дробів наступним чином:

$$n = k \cdot m (k < m) \Rightarrow \frac{m-k}{n} = \frac{1}{k} - \frac{1}{m}.$$

$$6 = 2 \cdot 3 \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \quad 28 = 4 \cdot 7 \Rightarrow \frac{3}{28} = \frac{1}{4} - \frac{1}{7}; \quad 496 = 16 \cdot 31 \Rightarrow \frac{15}{496} = \frac{1}{16} - \frac{1}{31}.$$

Всі парні досконалі числа є трикутними числами, що означає, якщо взяти досконале число куль, завжди можна скласти з них рівносторонній трикутник.

**Мета статті** – дослідження особливостей проведення позашкільних занять з математики, які полягають у поєднанні теоретичного викладу матеріалу з ігровою (індивідуальною чи колективною) формою проведення дистанційних занять на прикладі розгляду основ теорії множин і теорії чисел.

**Виклад основного матеріалу.** В наш непростий воєнний час практично відсутні факультативні заняття та майже припинили роботу тематичні гуртки. І тільки професійна організація шкільної роботи та самовіддана праця викладачів може частково компенсувати ці недоліки. А як же це все необхідно нашим обдарованим дітям. З метою популяризації математики серед учнівської молоді м. Києва і активного залучення школярів до пошуково-дослідницьких проєктів у січні 2023 р. працювала науково-профільна школа за напрямом «Математика» для учнів-членів Київської Малої академії наук. У рамках зимової математичної школи проходили вебінари, практичні заняття, різноманітні математичні розваги. Заплановані і проведені вебінари за наступною тематикою.

Числа: які вони? (прості, досконалі, близнюки тощо).

Що таке життя? Це гра!

Антъє та мантиса дійсного числа: означення, властивості, розв'язування рівнянь та нерівностей.

Системи числення.

Чи можлива математика без складних формул? Так! Графи, орграфи, цикли, дерева.

Китайська теорема про лишки.

Кожний день роботи профільної школи складався із трьох частин: теоретичної (лекція), практичної та розважальної. Відповідно до теоретичної частини матеріалу школярі виконували практичні завдання. Цікавими, захоплюючими та змістовними були розваги для слухачів, такі як «Математичні фокуси», «Прокачай свій розум», «Чи знайомі тобі поняття: підбери шифр (відгадай ребус)», «Фокуси із гральними кубиками», «Математика та логіка у житті» (знайти фальшиву монетку, відміряй рівно 3 літри тощо), «Вікторина: Знаю! Вмію! Переможу!».

Після наведення теоретичних даних розглядалися приклади практичного їх застосування. Розглянемо, який план викладу стосувався поняття числа. Достатньо повно описано числові множини [4], де проілюстровано на схемі зв'язок між ними, вказано на основні арифметичні дії над дійсними числами. Також показано відповідність між множиною дійсних чисел та множиною точок на координатній прямій (геометрична інтерпретація).

Простими називають числа, які діляться тільки на 1 та на себе (мають рівно два дільника). Відомо, що 1 не є ні простим, ні складеним числом, оскільки вона має лише один дільник.

Запропоновано, наприклад, користуючись методом «решета Ератосфена», скласти таблицю простих чисел, менших за 100, за 200. Отримано для першої сотні: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. В період інформатизації та бурхливого розвитку комп'ютерної індустрії, програмного забезпечення складені таблиці простих чисел за допомогою обчислювальних машин. На даний час відомі перші 50 мільйонів простих чисел.

За отриманою таблицею простих чисел досліджується кількість простих чисел в кожній з перших десяти сотень (тобто серед чисел від 1 до 100, від 101 до 200), встановлюються деякі закономірності в їхньому розташуванні. Відповідь-запис вказаних чисел приводить до нових

понять: прості двійні та трійні, можливо, також четвірні. Два простих числа, різниця яких дорівнює 2, називають «близнюками» або просто «двійнями». «Простими трійнями» називають тоді такі три числа, у яких різниця між кожним наступним і попереднім дорівнює 2. За таблицею пари «чисел-близнюків» першої сотні: (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19) (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73). На даний момент (2019 р.) найбільшими відомими простими «близнюками» є числа  $3756801695685 \cdot 2^{666669} \pm 1$ , містять 200700 знаків. Відкритим на сьогоднішній день є питання скінченності кількості чисел «простих-близнюків».

Стосовно досконалих чисел у першій сотні, користуючись означенням, школярі досить швидко їх назвали: 6 та 28. Далі стало важче, але допомогла властивість, що кожне досконале число, за виключенням 6, можна представити у вигляді суми кубів послідовних непарних чисел, починаючи з 1:

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1).$$

$$\text{Отже, } 28 = 1^3 + 3^3, \quad 496 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3.$$

Ще одна дивна властивість цих чисел полягає в наступному: сума зворотних значень дільників, в тому числі рівного самому числу, завжди буде дорівнювати 2. Наприклад, для числа 28:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} = 2.$$

Всі досконалі числа, крім першого, можна представити у вигляді 3-членних дробів, наприклад:

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{6} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21}, \quad \frac{2}{31} = \frac{1}{20} + \frac{1}{124} + \frac{1}{155}.$$

Отримано разом із учасниками заняття загальну формулу задання досконалих чисел. Проведений запис у вигляді добутків із числами, що містять степені числа 2, а саме:

$$6 = 2^1 \cdot (2^2 - 1) = 2 \cdot 3;$$

$$28 = 2^2 \cdot (2^3 - 1) = 4 \cdot 7;$$

$$496 = 2^4 \cdot (2^5 - 1) = 16 \cdot 31;$$

$$8128 = 2^6 \cdot (2^7 - 1) = 64 \cdot 127;$$

.....

$$33550336 = 2^{12} \cdot (2^{13} - 1) = 4096 \cdot 8191$$

привів до формули:

$$m = 2^{2n} \cdot (2^{2n+1} - 1).$$

Постало питання, а чи можна вивести загальну формулу для подання у вигляді суми трьох дробів? (в літературі, зазвичай, подається запис для двох, інколи для трьох досконалих чисел). Якщо так, то перевірити її на числові 33550336.

З підказками та бажанням творити, досягати виведено і доведено формулу:

$$\frac{2}{2^{2n+1} - 1} = \frac{1}{2^n \cdot (2^n + 1)} + \frac{1}{2^n \cdot (2^{2n+1} - 1)} + \frac{1}{(2^n + 1) \cdot (2^{2n+1} - 1)}.$$

Відповідно, маючи запис числа 33550336 у вигляді

$$33550336 = 2^{12} \cdot (2^{13} - 1) = (2^6)^2 \cdot 8191$$

учасниками школи отримано результат:

$$\frac{2}{8191} = \frac{1}{64 \cdot 65} + \frac{1}{64 \cdot 8191} + \frac{1}{65 \cdot 8191}.$$

Ідеальні числа можна виразити як суму двох унікальних чисел, тобто

$$4 + 2 = 6, \quad 16 + 12 = 28, \quad 256 + 240 = 496...$$

Для перших трьох досконалих числа виведено формулу їх запису через суму двох чисел вигляду:

$$2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} \cdot (2^{2^{n-1}} - 1).$$

Отримано таке задання із спеціального запису вказаних досконалих чисел:

$$6 = 2^{2^1} + 2^{2^{1-1}} \cdot (2^{2^{1-1}} - 1) = 2^2 + 2^1 \cdot (2^1 - 1) = 4 + 2 \cdot 1;$$

$$28 = 2^{2^2} + 2^{2^{2-1}} \cdot (2^{2^{2-1}} - 1) = 2^4 + 2^2 \cdot (2^2 - 1) = 16 + 4 \cdot 3;$$

$$496 = 2^{2^3} + 2^{2^{3-1}} \cdot (2^{2^{3-1}} - 1) = 2^8 + 2^4 \cdot (2^4 - 1) = 256 + 16 \cdot 15.$$

З наведених вище спостережень видно, що ідеальні числа закінчуються на 6 і 8 (вони утворені додаванням двох чисел, які закінчуються або на 6 і 0, або на 6 і 2). Використовуючи позначення давньоєгипетських дробів, їх пов'язують з простим числом Мерсенна.

На даний момент не знайдено жодного непарного досконалого числа, але встановлено за допомогою інформаційних технологій, що за умови його існування, це число є більшим  $10^{1500}$ , при цьому кількість його простих дільників не менше 101.

Учасники зимової математичної школи дізнались про деякі відкриті питання теорії чисел.

Чи існує непарне досконале число?

Чи скінченна множина досконалих чисел?

Цікаво проходили пошуки дружніх чисел. Дружніми числами називають такі два натуральні числа, що сума всіх дільників першого (за винятком самого числа) дорівнює другому числу, а сума всіх дільників другого числа (за винятком самого числа) рівна першому числу.

Найменшими з таких є числа 220 і 284:

$$220: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110;$$

$$284: 1, 2, 4, 71, 142.$$

Про них знали ще піфагорійці, їм присвоювали статус символу дружби. Наступну пару відкрили в 1636 році, це 17296 і 18416. Ця дружня пара стала нам відома завдяки французькому юристу і математику П'єру Фермі. На 2019 рік відомо понад 600 пар дружніх чисел.

Відкриті питання: «Чи всі пари дружніх чисел мають однакову парність?» (Наприклад, пари (2620, 2924), (12285, 14595) однакової парності). «Чи існують пари взаємно-простих дружніх чисел? Чи існує загальна формула для їх знаходження?»

В практичній частині учасники мали можливість продемонструвати отримані знання. Вони з'ясували, чи буде запропоноване число простим, чи складеним, а можливо і досконалим; шукали закономірності у сумах та розробляли оптимальні алгоритми їх обчислення. Також учні познайомилися із записом дробів (скінченних та періодичних), ланцюговими дробами та правилами переведення ланцюгового запису до раціонального дробу і навпаки.

Як приклади, показано, що  $\frac{2}{5} = 0,4$ , але вже  $\frac{1}{3} = 0,3333... = 0,(3)$ . Зразу ж

виникають питання: «Якими бувають десяткові дроби?» Як розпізнавати нескінченні періодичні дроби та зводити їх до звичайних дробів?» Стосовно періодичних дробів, то їх поділяють на чисті (період починається зразу після коми) та мішані (між комою та першим періодом є одна або декілька цифр), наприклад, дроби  $0,(12)$  та  $24,32(3)$ . 3

практичної точки зору [12] поширена загальна схема перетворення періодичних, чистих та мішаних дробів у звичайні.

Щоб перетворити чистий періодичний дріб у звичайний, досить записати чисельником його період, а знаменником – число, позначене стількома дев'ятками, скільки цифр у періоді. Наприклад,

$$0,(8) = \frac{8}{9}; \quad 0,84 = \frac{84}{99}; \quad 15,(37) = 15 + \frac{37}{99}; \quad 15,(352) = 15 + \frac{352}{999}.$$

Щоб перетворити мішаний періодичний дріб у звичайний, досить від числа, що стоїть до другого періоду, відняти число, що стоїть між комою і першим періодом, і здобути різницю взяти чисельником, а знаменником написати число, позначене стількома дев'ятками, скільки цифр у періоді, і зі стількома нулями на кінці, скільки цифр між комою і періодом. Наприклад,

$$0,8(57) = \frac{857 - 8}{990} = \frac{849}{990}; \quad 6,7(4) = 6 + \frac{74 - 7}{90} = 6 + \frac{67}{90}.$$

Звичайно, наведене правило перетворення мішаного періодичного дроби є складнуватим, але на допомогу приходять приклади. Тому і запропоновано всім школярам поняття геометричної прогресії [5], використання суми нескінченної геометричної прогресії для запису нескінчених періодичних дробів у вигляді звичайних [13]. Відомо,

що  $S = \frac{b_1}{1 - q}$ ,  $b_1$  – перший член нескінченної геометричної прогресії,  $q$  – її знаменник,

причому  $|q| < 1$ . Для одного наведеного вище прикладу маємо:

$$6,7(4) = 6,7 + 0,04 + 0,004 + 0,0004 + \dots = 6,7 + 0,04(1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + \dots),$$

де в дужках є сума нескінченної геометричної прогресії:

$$S = \frac{1}{1 - 0,1} = \frac{10}{9}.$$

Отже,

$$6,74 = 6,7 + 0,04(1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + \dots) = 6,7 + \frac{4}{100} \cdot \frac{10}{9} = 6 + \frac{7}{10} + \frac{4}{90} = 6 + \frac{67}{90}.$$

В теорії чисел, математичному аналізі, теорії ймовірності, в обчислювальній математиці, в небесній механіці та астрономії (для прогнозу сонячних чи місячних затемнень, руху планет тощо) широко використовують ланцюгові дроби. Ланцюговий дріб з скінченим числом елементів має вигляд

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}},$$

де  $a_0$  – ціле число,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  – натуральні числа,  $a_n \neq 1$ . В наведених прикладах вважали  $a_1, a_2, \dots$  додатними числами, а  $a_0$  може бути будь-яким цілим числом (для простоти брали теж додатнім). Ці числа називаються елементами даного ланцюгового дроби. За показаною схемою число записувалося із поступовим виконанням дій:

$$2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{4}{9}} = 2 + \frac{9}{31} = \frac{71}{31} = [2; 3, 2, 4].$$

Відповідно, число  $[3;1,5,2,3]$  також представлено у вигляді ланцюгового дробу.

Логічною розвагою слугувала задача знаходження суми всіх двоцифрових чисел, більших за 80. Звичайно, старшокласники зразу ж бажають використати знання арифметичної прогресії. Підказка-запис відповідних чисел, другого десятка чисел у зворотному напрямку, тобто починаючи з 99 під 81, 98 під 82 і т.д. приводить до відповіді:  
 $9 \cdot 180 + 90 = 19 \cdot 90 = 1710$ .

В математиці, як і в українській мові, є поняття паліндрома [14]. Такими є числа, які читаються однаково як зліва направо, так і справа наліво. Прикладами є всі однозначні числа, двозначні виду  $\alpha\alpha$ , наприклад, такі як 11 і 99, тризначні числа виду  $\alpha\beta\alpha$ , і т.д. Більш того, всі двозначні числа за певним алгоритмом породжують паліндроми. Згідно з гіпотезою Мартіна Гарднера, (автор книги «Є ідея»), якщо взяти натуральне число (будь-яке) і додати до нього число, що складається з тих самих цифр, але записаних в зворотному порядку, потім повторити дію, але вже з отриманою сумою, то на одному з кроків вийде паліндром. У деяких випадках достатньо здійснити додавання таких чисел один раз. Наприклад,  $12+21=33$ ,  $25+52=77$  тощо. Постає питання: Починаючи з якого числа вже потрібно виконувати не один крок? (найбільшого числа кроків, аж 24, вимагають числа 89 і 98). А чи дає число 196 паліндром – про це ще невідомо до сьогодні! Приклади паліндромів можна знайти не тільки в додаванні, а й в піднесенні до степеня (наприклад,  $11^3 = 1331$ ,  $11111111^2 = 123456787654321$ ), добуванні коренів та інших операціях (наприклад,  $2112 \cdot 1221 = 2578752$ ,  $121 \cdot 1004001 = 121484121$ ).

Відомі паліндроми серед простих чисел: 101, 131, 151, 181, 191, 313, 353, 373, 383, 727, 757, 787, 797, 919, 929. Чотиризначних паліндромів серед простих чисел немає, оскільки чотиризначні паліндроми завжди діляться на 11. Загалом, серед простих чисел немає паліндромів, що містять парну кількість розрядів (2,4,6,8,10,12-розрядні тощо), оскільки такі числа завжди діляться на 11.

Для повноти картини варто звернути увагу ще на два важливих поняття для дійсних чисел: ціла частина (антьє) та дробова (мантиса) [1].

Нехай  $x$  дійсне число. Цілою частиною  $[x]$  (антьє дійсного числа) числа  $x$  називається найбільше ціле число, що не перевищує  $x$ .

$$\text{Наприклад, } [1,5] = 1; \quad [-2,4] = -3; \quad [\sqrt{64}] = 8; \quad \left[\frac{15}{4}\right] = 3.$$

Дробовою частиною  $\{x\}$  або мантиєю називається невід'ємне число, що є різницею дійсного числа  $x$  та його цілої частини  $[x]$ , тобто  $\{x\} = x - [x]$ .

Наприклад,

$$\{5,3\} = 0,3; \quad \{375,02\} = 0,02; \quad \{2\} = 0; \quad \{\pi\} = \pi - 3;$$

$$\{-2,3\} = -2,3 - (-3) = 0,7; \quad \left\{\frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}.$$

Вигляд та основні властивості графіків функцій  $[x]$  та  $\{x\}$  підштовхнули школярів до розв'язування як нескладних рівнянь з даними функціями, так і більш складніших. Відомі такі методи розв'язування рівнянь з цілою та дробовою частиною: зведення рівняння до мішаної системи з цілим параметром; метод локалізації та перебору; графічний метод; безпосередньо використання означень цілої та дробової частини.

Враховуючи різний віковий статус учасників зимової школи та значні проблеми (може, страх перед тригонометрією) в побудові графіків, показано розв'язування рівнянь за означенням:

$$[x] = 2023; \quad \{x\} = 0,3; \quad \{2x\} = -0,1.$$

Для старшокласників проведено графічне розв'язування рівнянь  $[\cos x] = x^2 - 3x + 2$ ,  $[\sin x] = x^2 - 3x + 2$  з детальним покроковим поясненням побудови та остаточним результатом (рис. 1).

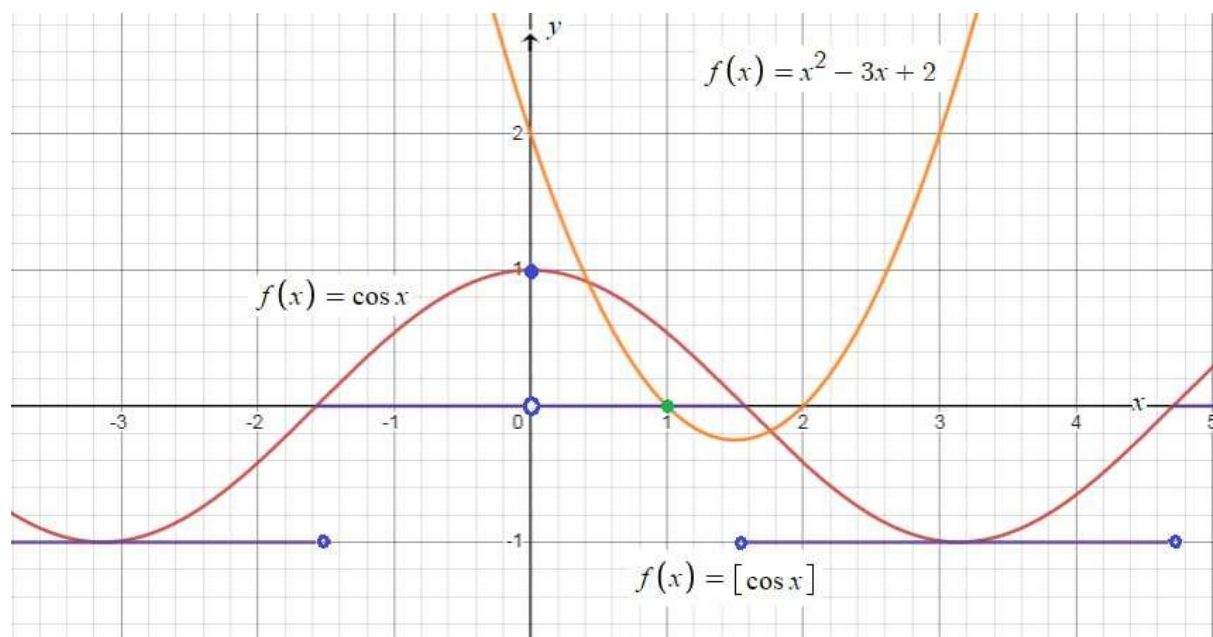


Рис. 1. Графічний розв'язок рівняння.

Із рисунка видно, що графіки мають єдину спільну точку перетину, тому рівняння має єдиний корінь  $x = 1$ . Для другого рівняння вже буде наявних два корені, в чому теж переконались графічно.

**Висновки та перспективи подальших наукових досліджень.** Організація творчої роботи дітей-школярів різних вікових груп із профільних та непрофільних закладів освіти сприяла підвищенню їхньої самооцінки, становленню лідерських навичок, компенсувала майже повну відсутність спілкування із однолітками у гуртках та факультативах. Заняття заохочували до творчого пошуку, сприяли ліквідації прогалин шкільного курсу математики. Школярі під час занять математичної школи не лише залюбки вивчали математичні поняття та підходи, знайомилися із новим матеріалом, відкритими питаннями сучасної теорії чисел, але й перебували у стані психологічного комфорту, який дуже потрібен дітям в наші непрості часи.

#### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ / REFERENCES

1. Апостолова, Г. В., Ясінський, В. В. (2006). Антье і мантиса числа: Навчальний посібник. Київ : Факт. Режим доступу: [https://shron1.chtyvo.org.ua/Apostolova\\_Halyna/Antie\\_i\\_mantysa\\_chysla.pdf?PHPSESSID=blkim676t29g6lvo5qqpnfspr7](https://shron1.chtyvo.org.ua/Apostolova_Halyna/Antie_i_mantysa_chysla.pdf?PHPSESSID=blkim676t29g6lvo5qqpnfspr7). (Apostolova, G. V., Yasinsky, V. V. (2006). Antje and the mantissa of numbers: a manual. Kyiv : Fakt. Retrieved from: [https://shron1.chtyvo.org.ua/Apostolova\\_Halyna/Antie\\_i\\_mantysa\\_chysla.pdf?PHPSESSID=blkim676t29g6lvo5qqpnfspr7](https://shron1.chtyvo.org.ua/Apostolova_Halyna/Antie_i_mantysa_chysla.pdf?PHPSESSID=blkim676t29g6lvo5qqpnfspr7)).
2. Grytczuk, A., Luca, F., Wójtowicz, M. (2001). Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 25(1), 111–115.
3. Мерзляк, А. Г., Полонський, В. Б., Якір, М. С. (2020). Алгебра : підручник для 7 класу закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія. (Merzlyak, A. G., Polonsky, V. B., Yakir, M. S. (2020). Algebra : a textbook for 7th grade secondary schools. Kharkiv: Himnaziia).
4. Мерзляк, А. Г., Полонський, В. Б., Якір, М. С. (2009). Алгебра: підручник для 8 класу з поглибленим вивченням математики. Харків : Гімназія. (Merzlyak, A. G., Polonsky, V. B., Yakir, M. S. (2009). Algebra: a textbook for 8th grade with an advanced study of mathematics. Kharkiv: Himnaziia).

5. Мерзляк, А. Г., Полонський, В. Б., Якір, М. С. (2021). Алгебра: підручник для 9 класу з поглибленим вивченням математики. Харків : Гімназія. (Merzlyak, A. G., Polonsky, V. B., Yakir, M. S. (2021). Algebra: a textbook for 9th grade with an advanced study of mathematics. Kharkiv: Himnaziia).
6. Війна з Росією: чому Україні потрібна математика. (2022). Режим доступу: <https://zn.ua/ukr/science/vijna-z-rosijeju-chomu-ukrajini-potribna-matematika.html>. (War with Russia: why Ukraine needs mathematics. (2022). Retrieved from: <https://zn.ua/ukr/science/vijna-z-rosijeju-chomu-ukrajini-potribna-matematika.html>).
7. Воєнний рік не завадив міжнародним перемогам і високим досягненням вихованців Київської МАН. (2023). Режим доступу: <https://kman.org.ua/ua/novyny/Voennii-rik-ne-zavadiv-mizhнародnim-peremoham-i-visokim-dosyahnennyam-vikhovanciv-Kiivskoi-MAN>. (The war year did not prevent the international victories and high achievements of the pupils of the Kyiv National Academy of Sciences. (2023). Retrieved from: <https://kman.org.ua/ua/novyny/Voennii-rik-ne-zavadiv-mizhнародnim-peremoham-i-visokim-dosyahnennyam-vikhovanciv-Kiivskoi-MAN>).
8. Лукашова, Т. Д. (2015). Прості числа та деякі пов'язані з ними проблеми теорії чисел. Фізико-математична освіта, 2, 29–37. Режим доступу: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/fmo\\_2015\\_2\\_6](http://nbuv.gov.ua/UJRN/fmo_2015_2_6). (Lukashova, T. D. (2015). Prime numbers and some related number theory problems. Physical and mathematical education, 2, 29–37. Retrieved from: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/fmo\\_2015\\_2\\_6](http://nbuv.gov.ua/UJRN/fmo_2015_2_6)).
9. Відкрито 51-е просте число Мерсенна. (2018). Режим доступу: <http://mmf.com.ua/ar/1898>. (Mersenne's 51st prime number was discovered. (2018). Retrieved from: <http://mmf.com.ua/ar/1898>).
10. Натуральні числа. (2018). Режим доступу: <http://naturalnumbers1.blogspot.com/p/blog-page.html>. (Natural numbers. (2018). Retrieved from: <http://naturalnumbers1.blogspot.com/p/blog-page.html>).
11. How does the Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS) work? Retrieved from: <https://www.quora.com/How-does-the-Great-Internet-Mersenne-Prime-Search-GIMPS-work>.
12. Лов'янова, І. В., Шиперко, С. Г. (2014). Математика : довідник-тренажер. Частина 1. Арифметика. Алгебра. Проф. Н. А. Тарасенкова (заг. ред). Черкаси. (Lov'yabova, I. V., Shiperko, S. G. (2014). Math: an exercise guide. Part 1. Arithmetic. Algebra. Prof. N. A. Tarasenkova (gen. ed). Cherkasy).
13. Нескінченні десяткові дробі. Періодичні дробі. Режим доступу: <https://classmill.com/alexandrgalaida/1/m/yAkD>. (Infinite decimal fractions. Periodic fractions. Retrieved from: <https://classmill.com/alexandrgalaida/1/m/yAkD>).
14. Число називається паліндромом. Паліндроми в математиці. Цікавих і олімпіадних. (2021). Режим доступу: <https://inistra.ru/magic/chislo-nazyvaetsya-palindromom-palindromy-v-matematike-zanimatelnyh-i/>. (A number is called a palindrome. Palindromes in mathematics. Interesting and Olympiad. (2021). Retrieved from: <https://inistra.ru/magic/chislo-nazyvaetsya-palindromom-palindromy-v-matematike-zanimatelnyh-i/>).

**Avdieieva T. V., Kushlyk-Dyvulska O. I., Illicheva L. M. Winter mathematics school.**

#### **Out of school leave leisure.**

*Summary. The state of mathematics education during the war was analyzed, proposals were formulated for solving problems involving the public. A tour of the work of the winter mathematics school of the Kyiv National Academy of Sciences is presented. The historical aspects of the study of sets of numbers, theoretical foundations, a number of simple numbers (which are characterized by special algorithms of simplicity) are given, and the method of their study with the help of modern software is considered. Considerable attention is paid to such numbers as prime, perfect, friendly, twin and palindromic numbers. Considered periodic and chain fractions, their writing and representation in the form of ordinary fractions. Several still open questions regarding the described sets of numbers have been formulated. Solved simple equations using the concepts of antier and mantissa.*

*The purpose of the article is to study the peculiarities of conducting extracurricular classes in mathematics, which consist in the combination of a theoretical presentation of the material with a game (individual or collective) form of conducting remote classes using the example of considering the basics of set theory and number theory.*

*The organization of creative work of schoolchildren of different age groups from specialized and non-specialized educational institutions contributed to increasing their self-esteem, the formation of leadership skills, compensated for the almost complete lack of communication with peers in clubs and electives. Classes encouraged creative search, helped eliminate gaps in the school mathematics course. During classes at the mathematics school, schoolchildren not only enjoyed studying mathematical concepts and approaches, got acquainted with new material, open questions of modern number theory, but also were in a state of psychological comfort, which is very much needed by children in our difficult times.*

**Key words:** *Math education, sets of numbers, prime numbers, perfect numbers, doubles, friendly numbers, common fraction, periodic fraction, continued fraction, integer part of a real number, fractional part of a real number.*

УДК 37.091.214:[374:51]-053.5(569.4)  
DOI 10.5281/zenodo.10214910

А. Л. Воєвода  
ORCID ID 0000-0003-1844-6759  
Вінницький державний педагогічний  
університет імені Михайла Коцюбинського

## АНАЛІЗ ПРОГРАМ ДЛЯ РОБОТИ ЗІ ЗДІБНИМИ ДО МАТЕМАТИКИ УЧНЯМИ В ПОЗАШКІЛЬНІЙ ОСВІТІ В ІЗРАЇЛІ

*Метою статті є аналіз програм для роботи зі здібними до математики учнями в позашкільній освіті Ізраїлю, висвітлення сучасних тенденцій розвитку неформальної математичної освіти Ізраїлю.*

*У статті представлено результати аналізу сучасних тенденцій розвитку неформальної освіти Ізраїлю. Наведені у дослідженні факти свідчать, що в Ізраїлі функціонує оригінальна система неформальної освіти, відмінна від української як у змісті, так і у підходах до її організації. У процесі дослідження здійснено ґрунтовний аналіз програм для роботи з обдарованою молоддю, зокрема програми імені Вено Арбел, «Альфа» та «Одіссея», розглянуто особливості роботи зі здібними до математики учнями. Встановлено, що система освіти в Ізраїлі спрямована на виявлення та заохочення індивідуальних здібностей талановитих молодих людей, а вказані програми переслідують три цілі: розвиток математичних здібностей і якості математичного мислення, розширюючи можливості талановитих студентів; збагачення математичних знань у різних аспектах, які виходять за межі вивченого матеріалу в межах формальної освіти; залучення талановитих учнів до передової ізраїльської академічної спільноти.*

*Зроблено висновок, що в системі неформальної освіти Ізраїлю існують певні особливості, які варто розглянути з метою використання їх окремих принципів в українських реаліях. В позашкільній неформальній освіті розроблено низку програм, які довели свою ефективність, зокрема й для роботи зі здібними до математики учнями.*

**Ключові слова:** *позашкільна освіта; неформальна освіта, Ізраїль, програми з математики; робота зі здібними до математики учнями.*

**Постановка проблеми.** У сучасних умовах швидкого поширення інформації та процесу глобалізації в галузі освіти набуває важливості порівняння освітніх систем різних країн, які значно відрізняються від української. Однією з таких є освітня система Ізраїлю,