1. Ботузова Ю.В. STEM-технології в навчанні математики / *Проблеми та інновації в природничо-математичній, технологічній і професійній освіті: збірник матеріалів V-ї Міжнародної науково-практичної онлайн-інтернет конференції*, м. Кропивницький, 10-13 жовтня 2017 р./за заг. ред. М.І. Садового, Кропивницький: РВВ ЦДПУ ім. В.Винниченка, 2017. С. 7-8.
2. Математично-польський День числа Пі / *Проєкт Якість освіти*. URL: https://www.youtube.com/watch?v=W_AmxII4tlk (дата звернення 15.10.2022).
3. Ізюмченко Л.В. Інженерний тиждень як чинник професійно-технічної освіченості учнів / *Модернізація змісту професійної освіти в умовах євроінтеграції України – 2022: збірник матеріалів Всеукраїнської науково-практичної конференції* м. Київ, 20 жовтня 2022 року, Київ–Хмельницький, 2022. С.148-151.

Анотація. Ізюмченко Людмила Володимирівна, Весна Ольга Василівна. Науковий STEAM-проєкт «Німецькі сліди в архітектурі Києва». *У даному повідомленні ми ділимося власним досвідом організації освітньої діяльності учнів старших класів з профільним вивченням математики і іноземних мов на прикладі підготовки і етапів проведення наукового STEAM–проєкту, звертаючи увагу на важливість проведення інтегрованих уроків для подальшої конкурентноспроможності учнів.*

Ключові слова: *STEAM-проєкт, архітектура Києва, німецька мова, геометричні об'єкти, площа поверхні і об'єм тіла.*

Summary. Iziumchenko Liudmyla Volodymyrivna, Vesna Olga Vasylivna. Scientific STEAM project "German traces in the architecture of Kyiv". *In this message, we share our own experience in organizing the educational activities of pupils of senior classes with a profile study of mathematics and foreign languages, using the example of the preparation and stages of conducting a scientific STEAM project, paying attention to the importance of conducting integrated lessons for the further competitiveness of students.*

Key words: *STEAM project, architecture of Kyiv, German language, geometric objects, surface area, body volume.*

О.А. Кадубовський
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ / Дніпро,
ORCID 0000-0003-2045-810X,
kadubovs@ukr.net

ПРО МЕТОД ГМТ ТА СУМІЖНІ ПИТАННЯ

Мета представленого повідомлення – привернути увагу академічної спільноти, вчителів та викладачів математики до питань провадження, вивчення та застосування методу геометричних місць точок до доведення геометричних тверджень (розв'язування геометричних задач) на відміну від традиційного підходу до використання методу ГМТ виключно при розв'язуванні задач на побудову.

Як зазначав відомий математик та педагог Д.І. Перепьолкін, «Поняття геометричного місця точок, безсумнівно, має велике методичне значення. Воно відіграє роль не лише в таких питаннях як геометричні задачі на побудову. Не менше значення має воно в курсі аналітичній геометрії, де застосування цього питання дозволяє простим й доступним способом одержати первинне та наочне уявлення про різні криві» [6].

Не зважаючи на рясність навчально-методичної літератури та наявність цілої низки задач на знаходження геометричних місць точок (надалі ГМТ) в діючих підручниках з геометрії, нажаль, слід констатувати, що вивчення ГМТ (навіть площини) дається учням з неабиякими труднощами. На підставі досвіду проведення учнівських математичних олімпіад слід також відзначити, що навіть сильні учні мають проблеми із типовими задачами на знаходження ГМТ. Можливо, це пов'язано із необхідністю доведення прямого і оберненого тверджень під час їх знаходження та нерозвиненістю навичок задавати геометричні фігури за допомогою рівнянь, нерівностей та/або їх систем і, навпаки, за властивостями фігур складати їх рівняння тощо. Не можна також не погодитися і з думкою А.А. Стражевського про те, що «задачі на відшукання ГМТ розглядають зазвичай виключно в контексті їх застосувань до розв'язання задач на побудову, тобто, із суто службовою метою. Цінність розв'язування задач на побудову не викликає жодних сумнівів; проте слід також розуміти, що і задачі на відшукання ГМТ самі по собі є задачами, які мають велике освітнє та виховне значення» [6, С. 3]. Серед статей, присвячених методичним аспектам вивчення ГМТ у шкільному курсі геометрії, слід виділити роботи [4], [5], [7] та [9]. Серед посібників для учнів ЗЗСО, студентів педагогічних ЗВО та вчителів математики – [1], [2], [6], [8].

Аналіз (наявного у діючих підручниках з геометрії) теоретичного матеріалу та дидактичного забезпечення, дозволяє стверджувати, що *є всі ознаки присутності* (хоча, і неявно) в шкільному курсі геометрії *наскрізної лінії «Геометричні місця точок»*. Одним із підтверджень останньої тези є те, що при вивчені теми «Декартові координати на площині» поняття ГМТ є основним, бо фігура (ГМТ) може бути задана або характеристичною властивістю, або рівнянням. А сам метод координат і полягає у вивченні властивостей фігур (ГМТ) за їх рівняннями. Крім того, більшість із пропонованих у підручниках задач на відшукання ГМТ площини досить просто зводяться до одного з наступних («основних») ГМТП, а саме: **ГМТП (1)**, рівновіддалених від даної точки («коло»); **ГМТП (2)**, рівновіддалених від даної прямої («пара паралельних прямих»); **ГМТП (3)**, рівновіддалених від двох даних точок («пряма – серединний перпендикуляр до відрізка з кінцями у даних точках»); **ГМТП (4)**, кожна з яких лежить усередині даного кута і рівновіддалена від його сторін («бісектриса кута»); **ГМТП (5)**, рівновіддалених від двох даних прямих, що перетинаються («пара перпендикулярних прямих»); **ГМТП (6)**, рівновіддалених від двох даних паралельних прямих («рівновіддалена пряма»); **ГМТП (7)**, з яких даний відрізок видно: під прямим кутом («коло, побудоване на даному відрізку як на діаметрі»); під даним гострим / тупим кутом («дві дуги, що мають своїми кінцями кінці даного відрізка та одна з яких вміщує даний кут»); **ГМТП (8) –** середин паралельних відрізків з кінцями на сторонах даного кута (промінь (з виколотим початком), що проходить через вершину цього кута та одну з таких точок); **ГМТП (9)** – середин хорд даного кола, які (продовження яких) проходять через дану точку.

«Загальноприйняті» основні ГМТП доцільно доповнити й «більш складними» геометричними місцями точок, такими як: **ГМТП (10)**, відношення відстаней яких до двох даних точок є величина стала («коло Аполлонія»); **ГМТП (11)**, сума квадратів відстаней яких до двох даних точок є величина стала («коло з центром у середині заданого відрізка»); **ГМТП (12)**, різниця квадратів відстаней яких до двох даних точок є величина стала («пряма лінія»). У діючих підручниках з геометрії, крім основних, пропонуються й інші ГМТП, які, зазвичай, подано у вигляді задач з числовими даними. Слід також відзначити, що ціла низка важливих, не менш цікавих ГМТП (які знаходять широкі застосування в геометрії кіл), пов'язана з такими поняттями як: степінь точки відносно кола; радикальна вісь двох кіл; діаметральна вісь двох кіл (див., напр., [3]).

З урахуванням наведених у статті [3] задач та прикладів, досить цікавими з методичної точки зору здаються дослідження щодо застосування методу ГМТ для розв'язування не задач на побудову, а як методу доведення геометричних тверджень. Сама ідея застосування методу ГМТ у зазначеному контексті не є новою навіть для шкільного курсу геометрії, оскільки в її основі – добре знайомі й природні використання (властивостей точок) допоміжних фігур та додаткових побудов при доведенні/розв'язуванні геометричних тверджень/задач.

Наведемо приклади використання методу ГМТ при доведенні властивостей геометричних фігур

Приклад 1. *Доведіть, що пряма, яка містить середини M і N протилежних сторін (AB і CD відповідно) паралелограма $ABCD$ ділить навпіл довільний відрізок EF з кінцями на сторонах BC та AD (відповідно).*

Доведення. Проведемо через точку M спільний перпендикуляр M_1M_2 до паралельних прямих AD та BC. Тоді з рівності прямокутних трикутників MM_1A та MM_2B (за гіпотенузою та гострим кутом) матимемо, що точка M є рівновіддаленою від паралельних прямих BC та AD. Аналогічне має місце і для точки N. Тому за ГМТП (6), пряма MN є ГМТП, що рівновіддалені від прямих BC та AD. А тому і точка $Q = MN \bigcap EF$ є рівновіддаленою від прямих BC та AD. Проведемо через точку Q спільний перпендикуляр Q_1Q_2 до паралельних прямих AD та BC. Тоді з рівності прямокутних трикутників QQ_2E та QQ_1F (за катетом та гострим кутом) матимемо, що $BQ = QF$.

Приклад 2. *Доведіть, що для довільної трапеції $ABCD$ ($BC \| AD$) середини основ та точка перетину продовжень бічних сторін належать одній прямій.*

Доведення. За визначенням трапеції її бічні сторони не є паралельними, і тому їх продовження перетинаються в одній точці S. Точки M і N можна розглядати як точки, що (внутрішнім чином) ділять в однаковому відношенні (1:1) паралельні відрізки BC та AD з кінцями на прямих SA та SD. Звідки за ГМТП (9) й випливає, що точки M і N належать прямій, яка проходить через точку перетину прямих SA та SD – точку S.

Таким чином, є підстави вважати, що при наданні «основним ГМТ» та «базовим задачам на ГМТ» в шкільному курсі геометрії статусу теорем (розподілених між відповідними темами 7-9 класів та об'єднаних спільною ідеєю на принципах наступності), з'явиться принципова можливість говорити про метод ГМТ, як метод розв'язування задач без традиційної «прив'язки» до задач на побудову. На тверде переконання, перевагою застосування методу ГМТ (на відміну від методу допоміжних побудов і фігур) є більш свідоме сприйняття учнями питань взаємного розташування геометричних фігур, областей пошуку сукупностей необхідних точок, які, нажаль, досить часто залишаються за лаштунками міркувань.

Література

1. Бурда М. І. Розв'язування задач на побудову в 6 – 8 класах: Метод. пос. К. : Рад. шк., 1986. 112 с.
2. Возняк О. Геометричні місця точок на площині : навч. посібн. / О.Г. Возняк, Г.М. Возняк. Тернопіль : Підручники і посібн., 2021. 80 с.
3. Кадубовський О.А., Бунакова А.С. Про деякі застосування кіл нульового радіусу. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету СДПУ. 2011. № 1. С. 150–161.

4. Ленчук І.Г. До методики відшукання геометричних місць точок. Математика в рідній школі. 2015 (1-2): 10-5.
5. Ленчук І.Г. Метод геометричних місць точок: типізація задач. Науково-методичний журнал «Математика в рідній школі». 2016 (2): 26-31.
6. Перепелкин Д.И. Геометрические построения в средней школе. Москва-Ленинград: Издательсво АПН РСФСР, 1947. 84 с.
7. Семенець С.П. Геометричні місця точок площини: постановка та розв'язування навчальних задач. Математика в школі. 2008. № 9. С. 28-31.
8. Стражевский А.А. Задачи на геометрические места точек в курсе геометрии средней школы. М. : Учпедгиз, 1954. 160 с.
9. Федорченко А.О., Рижкова Г.О., Кадубовський О.А. Про геометричні місця точок площини та суміжні питання. Зб. наук. праць фізико-математичного факультету ДДПУ. 2023. Вип. 13. С. 127–155.

Анотація. Кадубовський О.А. Про метод ГМТ та суміжні питання. *В представленому повідомлені пропонується один з можливих підходів до провадження та використання методу ГМТ до доведення/розв'язування геометричних тверджень/задач в шкільному курсі геометрії.*

Ключові слова: *геометричне місце точок площини, метод ГМТ.*

Summary. Kadubovs'kyi O.A. About of the method of geometric locus of points and related issues. *In the presented message, one of the possible approaches to the implementation and use of the method of geometric locations of points to prove/solve geometric statements/problems in a school geometry course is proposed.*

Key words: geometric locus of points of plane, method of geometric locus of points.

В. К. Кірман
Дніпровська академія неперервної освіти, м Дніпро
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8107-6618
e-mail: vadym.kirman@gmail.com

ПРО НАБЛИЖЕНІ ОБЧИСЛЕННЯ В ДЕЯКИХ ЗАДАЧАХ ПРИКЛАДНОГО ЗМІСТУ

Існує певний клас геометричних задач, як правило, прикладного спрямування, де треба обчислити деяку геометричну величину, а потім серед наведеного ряду чисел обрати найближче до точного значення або серед заданих інтервалів вказати той, куди потрапить задана величина. Такі завдання зустрічаються найчастіше у вигляді тестових завдань з закритою відповіддю з вибором варіанту, їх щорічно пропонував Український центр оцінювання якості освіти на тестуваннях з математики.

Наведемо приклад такої задачі з пробного тестування з математики Українського центру оцінювання якості освіти 2020 року [1]. За даними Рис.1 необхідно знайти ширину однієї смуги і серед чисел а)1,8; б)2; в)3; г)3,2; д)3,4 знайти відповідь найближчу до точної.

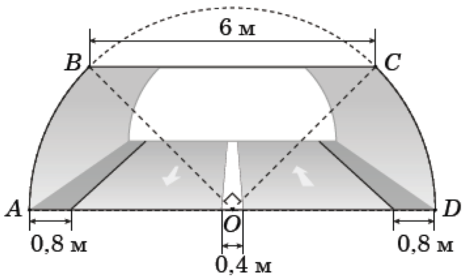

Рис.1 Схема даних завдання 20 пробного ЗНО 2020 року з математики. Сайт ЗНО.Освіта.UA [1]

Так як завдання відноситься до першої частини тесту, то, ймовірно, автори тестового завдання передбачали для нього просте розв'язання. Розглянемо приклад міркувань для розв'язування цього завдання. Назвемо ці міркування міркуваннями типу F. Отже, розв'язуючи просту геометричну задачу, маємо, що довжина однієї смуги у метрах дорівнює $d = OD - 0{,}2 - 0{,}8 = OC - 1 = 3\sqrt{2} - 1$. Далі в міркуванні F для знаходження значення, найближчого до точного беремо наближене до десятих значення радикалу $\sqrt{2} = 1{,}4$ і маємо: $d = 3\sqrt{2} - 1 \approx 3 \cdot 1{,}4 - 1 = 3{,}2$. Після цього робиться висновок, що найближче значення до точного г): 3,2.

Трохи змінимо умові задачі у фінальній частині. Нехай для величини $s = 8 \cdot \sqrt{2} - 1$ треба знайти серед чисел а)9,8; б)9; в)10; г)10,2; д)10,4 найближче. Застосуємо міркування F: $s = 8 \cdot \sqrt{2} - 1 \approx 8 \cdot 1{,}4 - 1 = 10{,}2$. Отже, міркування F приводять до того, що найближче значення г):10,2. Але більш точний аналіз на калькуляторі дає значення $s \approx 10{,}31371$. Таким чином, правильною є відповідь д):10,4. Отже,